BULLETIN DE LA S. M. F.

A. FUCHS

Étude de la continuité des fonctions aléatoires de Markov

Bulletin de la S. M. F., tome 88 (1960), p. 157-216

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1960__88__157_0>

Bull. Soc. math. France,
88, 1960, p. 157 à 216.

ÉTUDE DE LA CONTINUITÉ DES FONCTIONS ALÉATOIRES DE MARKOV [1]

PAR

AIMÉ FUCHS
(Strasbourg).

TABLE DES MATIÈRES

[1] *Thèse Sc. math.*, Paris, 1955.

CHAPITRE 3. — ÉTUDE DES PROCESSUS RÉELS DE MARKOV GLOBALEMENT P. S. CONTINUS.

CHAPITRE 4. — APPLICATION DE LA THÉORIE DES OPÉRATEURS LINÉAIRES À L'ÉTUDE DES PROCESSUS RÉELS DE MARKOV.

INTRODUCTION.

Nous allons étudier du point de vue de la continuité stochastique une classe de processus *réels* dans lesquels le hasard intervient d'une façon *permanente*. De tels processus ont été étudiés pour la première fois par E. SLUTSKY [49] et ont été appelés *normaux* par P. LÉVY ([38], p. 27; [37]) s'ils satisfont en outre à certaines conditions de continuité. On peut les décrire au moyen d'une fonction aléatoire réelle d'une variable continue réelle t : on entend par là une application $X : I \times \Omega \to \mathbf{R}$ où I est une partie mesurable-B de $\mathbf{R}$ (en fait nous prendrons pour I soit un intervalle fermé $[T_0, T_1]$, $T_0 < T_1$, soit $[0, \infty[$) et où Ω est l'ensemble fondamental ou catégorie d'épreuves. Sur Ω est définie une tribu borélienne $\mathcal{B}_\Omega$ de parties et sur cette tribu une mesure de probabilité P. On suppose en outre que pour tout $t \in I$ l'application $X_t : \{t\} \times \Omega \to \mathbf{R}$ est mesurable par rapport à $\{t\} \times \mathcal{B}_\Omega$, c'est-à-dire que pour toute partie E mesurable-B de $\mathbf{R}$ on a $X_t^{-1}(E) \in \{t\} \times \mathcal{B}_\Omega$. On dira alors que X_t est mesurable-P. Dans la suite nous désignerons une fonction aléatoire par $X(t, \omega)$, $t \in I$, $\omega \in \Omega$.

Notons qu'on peut toujours, sans modifier la loi temporelle, prendre pour Ω l'espace des fonctions réelles définies sur I en associant à l'élément

$\omega = f(.) \in \Omega$ la fonction $X(., \omega) = f(.)$. C'est le théorème de la représentation de J. L. Doob ([11] p. 14 et 49-50).

Nous nous restreindrons en principe aux processus du type *de Markov*. On entend par là que, si $t < \tau$. la loi de probabilité de $X(\tau, \omega)$ dépend de la valeur prise par $X(t, \omega)$ mais, une fois cette valeur fixée, est stochastiquement indépendante de l'*ensemble* des variables aléatoires $\{X(t', \omega), t' < t\}$.

Puisque nous sommes dans le domaine réel, nous définirons une loi de probabilité par la donnée d'une fonction de répartition, ce qui revient à n'envisager sur la droite que la tribu borélienne des ensembles mesurables-B.

Dans ces conditions, on sait qu'un processus réel de Markov peut être décrit par la donnée simultanée d'une fonction de répartition initiale (si le processus a débuté à l'instant $t = 0$) et d'une fonction de répartition *de passage* que nous écrirons

$$F(t, x; \tau, \xi) = P\{X(\tau, \omega) < \xi \mid X(t, \omega) = x\} \qquad \text{avec} \quad t < \tau.$$

Cette fonction satisfait nécessairement à l'équation de Chapman-Kolmogorov :

$$(1) \quad F(t, x; \tau, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t', y; \tau, \xi)\, d_y F(t, x; t', y) \qquad (t < t' < \tau),$$

l'intégrale du second membre étant entendue au sens de Lebesgue-Stieltjes. Notons que (1) n'est pas caractéristique des processus de Markov. P. Lévy [39]. a donné un exemple d'un processus réel satisfaisant à (1) et qui n'est pas de Markov. Les résultats que nous obtiendrons, dépendant pour la plupart uniquement de (1), seront ainsi valables pour une classe de processus plus généraux que ceux de Markov et appelés ν-markoviens par A. Blanc-Lapierre et R. Fortet ([4], p. 198).

Dans la suite, nous nous occuperons principalement de processus réels presque-sûrement (p. s.) continus. Ce sont d'ailleurs ces types de processus qui fournissent les modèles les plus appropriés pour décrire certains phénomènes physiques (*cf.* R. Fortet, [20]), Mais cette notion soulève dès le départ de sérieuses difficultés. En effet, pour caractériser dans l'espace Ω des fonctions réelles une fonction réelle *continue*, il faut considérer des événements du type suivant :

$$\{\omega : \sup_{t \in I} |X(t, \omega) - X(t_0, \omega)| > \varepsilon\} = \bigcup_{t \in I} \{\omega : |X(t, \omega) - X(t_0, \omega)| > \varepsilon\}$$

(où I désigne un voisinage de t_0), c'est-à-dire des événements qui sont la réunion d'une infinité non-dénombrable d'événements mesurables-P. J. L. Doob [8] a montré que les événements de cette espèces ne sont en général pas mesurables-P et qu'en conséquence la partie $\mathcal{C}$ des fonctions réelles continues ne l'est pas non plus.

La raison profonde de cet échec tient au fait que la tribu borélienne $\mathcal{B}_\Omega$

n'est pas assez riche. D'où l'idée de prendre pour ensemble fondamental une partie Ω_1 de Ω, qui contienne encore $\mathcal{C}$ et telle que $\mathcal{C} \in \mathcal{B}_{\Omega_1}$. J. L. Doob [8] propose de prendre pour tribu borélienne $\mathcal{B}_{\Omega_1}$ sur Ω_1 la trace sur Ω_1 de $\mathcal{B}_\Omega$, soit $\mathcal{B}_{\Omega_1} = \Omega_1 \cap \mathcal{B}_\Omega$ et, si $E \in \mathcal{B}_\Omega$, $E_1 = \Omega_1 \cap E \in \mathcal{B}_{\Omega_1}$, de définir sur $\mathcal{B}_{\Omega_1}$ une mesure de probabilité P_1 par $P_1(E_1) = P(E)$. Il a également montré ([8], théorème 1.1) qu'il existe effectivement des parties $\Omega_1 \subset \Omega$ susceptibles d'être prises pour nouvel ensemble fondamental et qu'on peut même choisir Ω_1 de telle façon que toute fonction aléatoire de la classe $\{ X(t, \omega), \omega \in \Omega_1 \}$ satisfasse à une condition dite *de séparabilité* qui revient à postuler que pour tout intervalle ouvert I de valeurs de t il existe une suite dénombrable $\{ t_i \}$ de valeurs de t, dense sur I telle que, avec une probabilité-P_1 égale à 1, on ait

$$\inf_{t \in I} X(t, \omega) = \inf_{t_i \in I} X(t, \omega),$$

$$\sup_{t \in I} X(t, \omega) = \sup_{t_i \in I} X(t, \omega).$$

On dit alors que le processus $\{ X(t, \omega), \omega \in \Omega_1 \}$ est *séparable*.

On montre d'ailleurs que si un processus est séparable, et en outre localement continu en probabilité en tout point $t \in [0, \infty[$, toute suite dénombrable $\{ t_i \}$ de valeurs de t, dense dans $[0, \infty]$ peut être prise comme suite de séparabilité (*cf.* J. L. Doob [11], p. 54, théorème 2.2). On voit immédiatement l'intérêt des processus séparables; pour eux, toute propriété de régularité réalisée lorsque t parcourt un certain ensemble dénombrable de valeurs, est automatiquement réalisée lorsque t parcourt un ensemble continu de valeurs.

L'importance de cette notion réside encore dans le fait qu'à tout processus $X(t, \omega)$ on peut associer un processus $\tilde{X}(t, \omega)$ séparable, défini sur le même ensemble fondamental Ω et admettant même loi temporelle que $X(t, \omega)$ (*cf.* J. L. Doob [11], p. 57, théorème 2.4).

Dans la suite, nous supposerons le processus $\{ X(t, \omega), t \in [0, \infty[, \omega \in \Omega \}$ réel et *séparable*. Notons que cette hypothèse n'implique aucune restriction quant au problème que nous avons en vue. En effet, nous avons déjà dit que nous nous occuperons principalement de processus réels p. s. continus liés à des fonctions aléatoires de l'espace $\mathcal{C}$ des fonctions réelles continues. Or nous avons vu qu'on peut toujours choisir l'ensemble fondamental Ω_1 de telle façon que $\mathcal{C} \subset \Omega_1$.

Les deux premiers chapitres sont consacrés à une étude approfondie des divers modes de continuité stochastique. Dès le début, nous ferons une distinction très nette entre le point de vue *local* (chap. 1) et le point de vue *global* (chap. 2). La raison de cette distinction apparaîtra clairement dans la suite. Dans le chapitre 3 nous établirons la forme générale d'un processus de Markov p. s. continu dans un intervalle fini. Enfin, dans le dernier chapitre nous discuterons une autre méthode pour traiter les problèmes relatifs aux processus de Markov, à savoir la méthode des opérateurs linéaires.

Les principaux résultats de ce travail ont été publiés dans quatre Notes aux *Comptes rendus* (A. FUCHS, [23], [24], [25], [26]).

CHAPITRE 1. — Point de vue local.

1. Continuité locale en probabilité. — Continuité stochastique au sens de E. SLUTSKY [49].

DÉFINITION 1. — *On dit que la fonction aléatoire réelle* $X(t, \omega)$, $t \in R$ *est continue en probabilité au point* t_0 *si à tout couple* $\varepsilon, \eta > 0$ *on peut associer un voisinage ouvert* $I(t_0, \varepsilon, \eta)$ *de* t_0 *tel que*

$$P\{|X(t, \omega) - X(t_0, \omega)| > \varepsilon\} < \eta \qquad (\forall t \in I). \tag{1}$$

On notera que cette définition ne fait appel qu'à la seule loi temporelle; on peut donc définir la continuité locale en probabilité même pour des processus non séparables.

REMARQUE 1. — On définit de façon évidente la continuité locale en probabilité à droite ou à gauche de t_0. Mais l'intérêt de ces notions est assez restreint, comme il ressort de J. L. DOOB ([11], p. 356, théorème **11.1**).

REMARQUE 2. — On dit que la continuité locale en probabilité possède au point t_0 un module de continuité $\varepsilon(\,.\,)$ si à tout $\eta > 0$ on peut associer un voisinage ouvert $I[t_0, \varepsilon(\,.\,), \eta]$ de t_0 tel que

$$P\{|X(t, \omega) - X(t_0, \omega)| > \varepsilon[|t - t_0|]\} < \eta \qquad (\forall t \in I),$$

$\varepsilon(t)$ étant une fonction réelle positive définie sur $[0, \infty[$, décroissante et telle que $\lim_{t \downarrow 0} \varepsilon(t) = 0$.

L'intérêt de la notion de continuité locale en probabilité réside dans le fait qu'à toute fonction aléatoire $X(t, \omega)$ continue en probabilité en tout point d'un intervalle on peut associer une fonction aléatoire mesurable $\tilde{X}(t, \omega)$ qui, dans cet intervalle, admet même loi temporelle que $X(t, \omega)$ (*cf.* J. L. DOOB, [11], p. 61, théorème **2.6**).

THÉORÈME 1 (CAUCHY). — *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction aléatoire réelle* $X(t, \omega)$, $t \in R$ *soit continue en probabilité au point* t_0 *est qu'à tout couple* $\varepsilon, \eta > 0$ *on puisse associer un voisinage ouvert* $I(t_0, \varepsilon, \eta)$ *de* t_0 *tel que*

$$P\{|X(t, \omega) - X(t', \omega)| > \varepsilon\} < \eta \qquad [\forall (t, t') \in I \times I].$$

La condition est suffisante, il suffit de faire $t' = t_0$. Elle est nécessaire; en effet posons

$$\frac{X(t, \omega) - X(t', \omega)}{Z} = \frac{[X(t, \omega) - X(t_0, \omega)]}{X} + \frac{[X(t_0, \omega) - X(t', \omega)]}{Y}.$$

Par hypothèse on peut choisir $I(t_0, \varepsilon, \eta)$ de façon qu'on ait simultanément

$$\begin{aligned} & P\{|X| > \varepsilon\} < \eta, \qquad P\{|Y| > \varepsilon\} < \eta \qquad [\forall (t, t') \in I \times I] \\ \Rightarrow\ & P\{|Z| > 2\varepsilon\} \leq P\{(|X| > \varepsilon) \cup (|Y| > \varepsilon)\} \\ & \leq P\{|X| > \varepsilon\} + P\{|Y| > \varepsilon\} < 2\eta. \end{aligned}$$

2. Continuité locale presque-sûre (p. s.).

DÉFINITION 2. — *On dit que la fonction aléatoire réelle $X(t, \omega)$, $t \in R$ est presque sûrement* (p. s.) *continue au point t_0 si à tout couple $\varepsilon, \eta > 0$ on peut associer un voisinage ouvert $I(t_0, \varepsilon, \eta)$ de t_0 tel que*

$$(2) \qquad P\left\{\sup_{t \in I} |X(t, \omega) - X(t_0, \omega)| > \varepsilon\right\} < \eta.$$

On notera que cette continuité ne peut être définie à partir de la seule loi temporelle. Pour que la probabilité qui figure dans (2) soit bien définie, il faut faire certaines hypothèses supplémentaires, par exemple l'hypothèse de séparabilité que nous avons adoptée.

REMARQUE 1. — On définit de façon évidente la continuité locale p. s. à droite ou à gauche de t_0.

REMARQUE 2. — On dit que la continuité locale p. s. possède au point t_0 un module de continuité $\varepsilon(.)$ si à tout $\eta > 0$ on peut associer un voisinage ouvert $I[t_0, \varepsilon(.), \eta]$ de t_0 tel que

$$P\left\{\sup_{t \in I} [|X(t, \omega) - X(t_0, \omega)| - \varepsilon(|t - t_0|)] > 0\right\} < \eta,$$

$\varepsilon(.)$ étant une fonction réelle positive définie sur $[0, \infty[$, décroissante et telle que $\lim_{t \downarrow 0} \varepsilon(t) = 0$.

L'intérêt de la notion de continuité locale p. s. réside dans le fait que toute fonction aléatoire $X(t, \omega)$ p. s. continue en tout point d'un intervalle est mesurable dans cet intervalle (*cf.* J. L. DOOB [11], p. 60, théorème 2.5).

THÉORÈME 2 (CAUCHY). — *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction aléatoire réelle $X(t, \omega)$, $t \in R$ soit p. s. continue au point t_0 est qu'à tout couple $\varepsilon, \eta > 0$ on puisse associer un voisinage ouvert $I(t_0, \varepsilon, \eta)$ de t_0 tel que*

$$P\left\{\sup_{(t, t') \in I \times I} |X(t, \omega) - X(t', \omega)| > \varepsilon\right\} < \eta.$$

En effet, de la double inégalité évidente

$$\sup_{t\in I}|X(t,\omega)-X(t_0,\omega)| \leqq \sup_{(t,t')\in I\times I}|X(t,\omega)-X(t',\omega)| \leqq 2\sup_{t\in I}|X(t,\omega)-X(t_0,\omega)|,$$

on déduit les deux inégalités

$$P\left\{\sup_{t\in I}|X(t,\omega)-X(t_0,\omega)|>\varepsilon\right\} \leqq P\left\{\sup_{(t,t')\in I\times I}|X(t,\omega)-X(t',\omega)|>\varepsilon\right\},$$

$$P\left\{\sup_{(t,t')\in I\times I}|X(t,\omega)-X(t_0,\omega)|>2\varepsilon\right\} \leqq P\left\{\sup_{t\in I}|X(t,\omega)-X(t_0,\omega)|>\varepsilon\right\}$$

qui établissent le théorème direct et sa réciproque.

La continuité locale p. s. de $X(t,\omega)$ au point t_0 peut encore s'exprimer sous la forme

$$\lim_{|I|\to 0} P\left\{\sup_{t\in I}|X(t,\omega)-X(t_0,\omega)|\leqq\varepsilon\right\}=1 \qquad (\forall\varepsilon>0),$$

où $|I|$ désigne la mesure-B du voisinage I de t_0.

Posons $E(I,\varepsilon)=\left\{\omega : \sup_{t\in I}|X(t,\omega)-X(t_0,\omega)|\leqq\varepsilon\right\}$. Si $I_1\supset I_2$ on a nécessairement $E(I_1,\varepsilon)\subset E(I_2,\varepsilon)$. Soit alors $I_1\supset I_2\supset\ldots$ une suite dénombrable monotone décroissante de voisinages de t_0 telle que $\lim_{n\to\infty}|I_n|=0$. Il en résulte que $E(I_1,\varepsilon)\subset E(I_2,\varepsilon)\subset\ldots$ sera une suite dénombrable monotone croissante de parties de Ω admettant donc une limite

$$\lim_{n\to\infty} E(I_n,\varepsilon)=\bigcup_{n=1}^{\infty} E(I_n,\varepsilon).$$

On aura en outre (*cf.* P. R. Halmos [28], p. 38, théorème D) :

$$\lim_{n\to\infty} P\{E(I_n,\varepsilon)\}=P\left\{\lim_{n\to\infty}E(I_n,\varepsilon)\right\}.$$

Or, il résulte de l'hypothèse de séparabilité que

$$\lim_{n\to\infty} P\{E(I_n,\varepsilon)\}=\lim_{|I|\to 0} P\{E(I,\varepsilon)\}=1 \qquad (\forall\varepsilon>0);$$

d'où

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}E(I_n,\varepsilon)\right\}=P\left\{\lim_{|I|\to 0}E(I,\varepsilon)\right\}=1 \qquad (\forall\varepsilon>0)$$

ou, en d'autres termes :

$$P\{X^*(t_0,\omega)=X_*(t_0,\omega)=X(t_0,\omega)\}=1,$$

où

$$X^*(t_0,\omega)=\lim_{|I|\to 0}\ \sup_{t\in I}X(t,\omega),$$

$$X_*(t_0,\omega)=\lim_{|I|\to 0}\ \inf_{t\in I}X(t,\omega).$$

Certains auteurs, notamment J. L. Doob ([9], p. 474), ont pris cette dernière égalité comme définition de la continuité locale p. s. Nous venons de voir que cette définition s'identifie avec la nôtre.

Les deux définitions précédentes s'appliquent à toute fonction aléatoire réelle, qu'elle soit de Markov ou non. Dans le cas des fonctions aléatoires réelles de Markov on peut introduire un nouveau mode de continuité locale que nous désignerons d'après W. Feller.

3. Continuité locale de Feller, propre aux fonctions aléatoires réelles de Markov.

Définition 3. — *On dit que la fonction aléatoire réelle de Markov $X(t, \omega)$, $t \in R$ présente au point t_0 la continuité locale de Feller si à tout couple $\varepsilon, \eta > 0$ on peut associer un intervalle $I(t_0, \varepsilon, \eta)$ de valeurs de t, admettant t_0 comme extrémité gauche et tel que*

$$(3) \quad \sup_{x_0 \in R} P\left\{ |X(t, \omega) - X(t_0, \omega)| > \varepsilon \,\middle|\, X(t_0, \omega) = x_0 \right\} < \eta \qquad (\forall t \in I).$$

Cette condition s'écrit, en utilisant la fonction de répartition de passage $F(t, x; \tau, \xi)$, $t < \tau$:

$$\lim_{t \downarrow t_0} \sup_{x_0 \in \mathbf{R}} \int_{|x - x_0| > \varepsilon} d_x F(t_0, x_0; t, x) = 0 \qquad (\forall \varepsilon > 0).$$

Remarque 1. — De par sa définition la continuité locale de Feller est une continuité *à droite*.

Remarque 2. — Pour les processus réels de Markov à accroissements indépendants, la continuité locale de Feller s'identifie à la continuité locale en probabilité à droite du point t_0.

Théorème 3 (Cauchy). — *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction aléatoire réelle de Markov $X(t, \omega)$, $t \in R$ présente au point t_0 la continuité locale de Feller est qu'à tout couple $\varepsilon, \eta > 0$ on puisse associer un intervalle $I(t_0, \varepsilon, \eta)$ de valeurs de t, admettant t_0 comme extrémité gauche et tel que, pour tout $(t, t') \in I \times I$, $t' \leq t$ on ait*

$$\sup_{x' \in R} P\left\{ |X(t, \omega) - X(t', \omega)| > \varepsilon \,\middle|\, X(t', \omega) = x' \right\} < \eta.$$

4. Continuité locale réalisée en tout point d'un intervalle fini fermé.

Théorème 4. — *Si la fonction aléatoire réelle $X(t, \omega)$ est localement continue en probabilité ou p. s. en tout point d'un intervalle fini fermé $[T_0, T_1]$, elle est nécessairement uniformément continue, au sens correspondant, dans cet intervalle. Cela signifie que la mesure-B du voisinage*

$I(t_0, \varepsilon, \eta)$ de t_0 qui figure dans les définitions 1 *et* 2 *peut chaque fois être choisie indépendamment de $t_0 \in [T_0, T_1]$.*

Pour la continuité locale en probabilité, ce théorème a été démontré par E. SLUTSKY [49] et pour la continuité locale p. s. par P. LÉVY ([38], p. 35).

5. **Relations entre les trois modes de continuité locale.** — Nous allons comparer les trois modes de continuité locale que nous avons définis en nous limitant en principe aux processus réels de Markov séparables définis sur $[0, \infty[$. Dès le début on est amené à supposer que les inégalités de définition (1) et (2) sont valables uniformément par rapport à la fonction de répartition initiale. En effet, les continuités en probabilité et p. s. expriment des restrictions portant sur la mesure de probabilité *a priori* P tandis que la continuité de Feller exprime des restrictions portant sur la fonction de répartition de passage F. Si donc un processus possède la continuité de Feller en un point donné, il partage cette propriété avec *tous* les processus admettant F comme fonction de répartition de passage. Or il y a autant de processus de ce genre qu'il y a de fonctions de répartition initiales. Il n'en est pas de même pour les processus possédant la continuité en probabilité ou p. s. en un point donné. Pour pouvoir espérer une équivalence entre ces divers modes de continuité, on conçoit ainsi qu'il faille faire des hypothèses sur l'uniformité de la valabilité des inégalités (1) et (2). Dans cette section, nous allons toujours faire cette hypothèse.

THÉORÈME 5. — *Pour les processus réels de Markov la continuité locale de Feller au point t_0 et la continuité locale en probabilité à droite du point t_0 sont deux modes de continuité équivalents.*

Notons que P. LÉVY ([38], p. 64) a énoncé un théorème analogue :

a. La continuité de Feller entraîne la continuité en probabilité :

En effet, si l'on pose $\Phi(t_0, x_0) = P\{X(t_0, \omega) < x_0\}$ il vient

$$\begin{aligned} &P\{|X(t, \omega) - X(t_0, \omega)| > \varepsilon\} \\ &\quad = \int_{-\infty}^{+\infty} P\left\{|X(t, \omega) - X(t_0, \omega)| > \varepsilon \,\middle|\, X(t_0, \omega) = x_0\right\} d_{x_0}\Phi(t_0, x_0), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit l'inégalité

$$\begin{aligned} &P\{|X(t, \omega) - X(t_0, \omega)| > \varepsilon\} \\ &\quad \leqq \sup_{x_0 \in \mathbf{R}} P\left\{|X(t, \omega) - X(t_0, \omega)| > \varepsilon \,\middle|\, X t_0, \omega) = x_0,\right. \end{aligned}$$

qui établit que sous l'hypothèse de la continuité de Feller au point t_0 l'inégalité (1) est valable uniformément par rapport à la fonction de répartition *a priori* $\Phi(t_0, x_0)$.

b. La continuité en probabilité entraîne la continuité de Feller :

Par hypothèse à tout couple $\varepsilon, \eta > 0$ on peut associer un intervalle $I(t_0, \varepsilon, \eta)$ de valeurs de t, admettant t_0 comme extrémité gauche, et tel que pour tout $t \in I$, on ait

$$\eta > P\{|X(t, \omega) - X(t_0, \omega)| > \varepsilon\}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} P\left\{|X(t, \omega) - X(t_0, \omega)| > \varepsilon \,\middle|\, X(t_0, \omega) = x_0\right\} d_{x_0}\Phi(t_0, x_0).$$

Supposons en outre que cette inégalité soit valable uniformément par rapport à $\Phi(t_0, x_0)$. En prenant pour $\Phi(t_0, x_0)$ la fonction de répartition de la masse $+1$ placée à l'instant t_0 au point x_0, il vient

$$P\left\{|X(t, \omega) - X(t_0, \omega)| > \varepsilon \,\middle|\, X(t_0, \omega) = x_0\right\} < \eta \qquad (\forall x_0 \in \mathbf{R}).$$

Cette inégalité étant valable uniformément par rapport à $x_0 \in \mathbf{R}$, on a en définitive

$$\sup_{x_0 \in \mathbf{R}} P\left\{|X(t, \omega) - X(t_0, \omega)| > \varepsilon \,\middle|\, X(t_0, \omega) = x_0\right\} < \eta.$$

Il serait intéressant de voir comment se modifie le théorème 4 si l'on ne fait plus l'hypothèse d'uniformité dont il a été question. Il est évident, pour les raisons que nous avons indiquées, qu'il n'y aura plus équivalence parfaite entre les deux modes de continuité. La continuité de Feller entraînera toujours la continuité en probabilité (même uniforme). Voyons dans quelle mesure la continuité en probabilité (non uniforme) entraîne la continuité de Feller.

Par hypothèse, lorsque $\lambda \downarrow 0$, $X(t_0 + \lambda, \omega) \xrightarrow{p} X(t_0, \omega)$ ($\xrightarrow{p}$ désignant la convergence en probabilité). Nous allons voir qu'il suffit de considérer une suite dénombrable de valeurs de λ, toutes > 0, soit $\{\lambda_n\}$ et tendant vers zéro lorsque $n \to \infty$. En d'autres termes, il suffit que lorsque $n \to \infty$, $X(t_0 + \lambda_n, \omega) \xrightarrow{p} X(t_0, \omega)$. En effet il existe alors une suite partielle $\{\lambda'_n\}$, extraite de $\{\lambda_n\}$, et telle que lorsque $n \to \infty$, $X(t_0 + \lambda'_n, \omega) \xrightarrow{\text{p. s.}} X(t_0, \omega)$ ($\xrightarrow{\text{p. s.}}$ désignant la convergence p. s.). Le processus étant supposé séparable, un théorème de J. L. Doob ([11], théorème 2-3) affirme alors que lorsque $\lambda \downarrow 0$, $X(t_0 + \lambda, \omega) \xrightarrow{\text{p. s.}} X(t_0, \omega)$, ce qui implique $X(t_0 + \lambda, \omega) \xrightarrow{p} X(t_0, \omega)$. En définitive il suffit donc de considérer :

$$0 = \lim_{n \to \infty} P\{|X(t_0 + \lambda_n, \omega) - X(t_0, \omega)| > \varepsilon\}$$
$$= \lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P\left\{|X(t_0 + \lambda_n, \omega) - X(t_0, \omega)| > \varepsilon \,\middle|\, X(t_0, \omega) = x_0\right\} d_{x_0}\Phi(t_0, x_0).$$

Or la probabilité conditionnelle

$$P\{\,|X(t_0+\lambda_n,\,\omega)-X(t_0,\,\omega)|>\varepsilon\,\big|\,X(t_0,\,\omega)\}$$

est une variable aléatoire $f_n(X)\geqq 0$, où X est elle-même une variable aléatoire de fonction de répartition $\Phi(t_0,\,x_0)$. Notre hypothèse est donc

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x_0)\,d_{x_0}\Phi(t_0,\,x_0)=\lim_{n\to\infty}E\{f_n(X)\}=0.$$

Autrement dit, $f_n(X)\to 0$ en moyenne d'ordre 1, donc en probabilité c'est-à-dire $f_n(X)\xrightarrow{p} 0$. Mais alors il existe une suite partielle $\{n'\}$ extraite de $\{n\}$, et telle que $f_{n'}(X)\xrightarrow{\text{p. s.}} 0$, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble E de valeurs de x_0, de mesure-Φ nulle et tel que pour tout $x_0\notin E$, $f_{n'}(x_0)\to 0$. Mais alors un théorème d'Egoroff (*cf.* P. R. Halmos [28], p. 88) affirme qu'il existe un ensemble F de valeurs de x_0, de mesure-Φ arbitrairement petite, et tel que la suite $f_{n'}(x_0)$ tend vers zéro uniformément sur $\mathbf{R}-(E\cup F)$ où la mesure-Φ de $E\cup F$ est arbitrairement petite; en d'autres termes, on a, en posant $E\cup F=G$,

$$\operatorname{mes}_\Phi(G)<\varepsilon' : \quad \lim_{n'\to\infty}\ \sup_{x_0\in\mathbf{R}-G} f_{n'}(x_0)=0$$

ou, en vertu de l'hypothèse de séparabilité

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\ \sup_{x_0\in\mathbf{R}-G} P\{\,|X(t_0+\lambda,\,\omega)-X(t_0,\,\omega)|>\varepsilon\,\big|\,X(t_0,\,\omega)=x_0\}=0.$$

Donc à tout couple $\varepsilon,\,\eta>0$ on peut associer un intervalle $I(t_0,\,\varepsilon,\,\eta)$ de valeurs de t, admettant t_0 comme extrémité gauche et tel que pour tout $t\in I$, on ait

$$\sup_{x_0\in\mathbf{R}-G} P\{\,|X(t,\,\omega)-X(t_0,\,\omega)|>\varepsilon\,\big|\,X(t_0,\,\omega)=x_0\}<\eta.$$

C'est le meilleur résultat qu'on puisse obtenir en partant de la continuité en probabilité non uniforme; la présence de l'ensemble G de mesure-Φ arbitrairement petite rend ce résultat inintéressant parce que la mesure-Φ est essentiellement arbitraire. Nous voyons ainsi le bien-fondé de notre hypothèse d'uniformité.

Théorème 6. — *Pour les processus réels de Markov séparables la continuité locale en probabilité à droite du point t_0 et la continuité locale p. s. à droite du point t_0 sont deux modes de continuité équivalents.*

a. La continuité p. s. entraîne la continuité en probabilité :

Ceci résulte de l'inégalité suivante, valable pour tout $t\in I\ni t_0$:

$$P\{\,|X(t,\,\omega)-X(t_0,\,\omega)|>\varepsilon\}\leqq P\{\sup_{t\in I}|X(t,\,\omega)-X(t_0,\,\omega)|>\varepsilon\}.$$

Remarquons d'ailleurs que cette inégalité est vérifiée pour un processus quelconque pas nécessairement de Markov et pour un voisinage I arbitraire de t_0.

b. La continuité en probabilité entraîne la continuité p. s. :

Supposons que le processus réel de Markov $X(t, \omega)$ soit continu en probabilité au point t_0. D'après les théorèmes 3 et 5, à tout couple $\varepsilon, \eta > 0$ on peut associer un intervalle $I(t_0, \varepsilon, \eta)$ de valeurs de t, admettant t_0 comme extrémité gauche et tel que $\forall (t, t') \in I \times I_2$, $t' \leqq t$, on ait

$$(4) \qquad \sup_{x' \in \mathbf{R}} P\{|X(t, \omega) - X(t', \omega)| > \varepsilon \,|\, X(t', \omega) = x'\} < \eta.$$

Appelons alors, avec J. R. Kinney ([33], théorème 5) s_0 l'extrémité droite de $I(t_0, \varepsilon, \eta)$: $t_0 < s_0$ et partageons I en intervalles partiels au moyen de points de subdivision pris dans l'ensemble dénombrable D, dense dans I, qui nous a servi dans l'introduction à définir les processus séparables.

Soit $T_n = \{t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = s_0\}$, $t_i \in D$ ce partage.

Posons

$$X(t_i, \omega) - X(t_{i-1}, \omega) = \Delta_{ni}(\omega) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$$X(t_i, \omega) - X(t_0, \omega) = \sum_{k=1}^{i} \Delta_{ni}(\omega) = S_{ni}(\omega) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

et introduisons les ensembles suivants :

$$\mu = \{\omega : |S_{nn}(\omega)| < \varepsilon\},$$

$$\Lambda_{nj} = \bigcap_{i=1}^{j-1} \{\omega : |S_{ni}(\omega| \leqq 2\varepsilon\} \cap \{\omega : |S_{nj}(\omega)| > 2\varepsilon\} \qquad (0 < j < n),$$

$$\Lambda'_{nj} = \{\omega : |S_{nn}(\omega) - S_{nj}(\omega)| > \varepsilon\} \qquad (0 < j < n).$$

Les ensembles Λ_{nj} sont disjoints, et l'on a nécessairement

$$\mu \cap \Lambda_{nj} \subset \Lambda_{nj} \cap \Lambda'_{nj} \qquad (0 < j < n)$$

$$\Rightarrow \qquad \mu = \mu \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} \Lambda_{nj}\right) \cup \mu \cap \left(\overline{\bigcup_{j=1}^{n-1} \Lambda_{nj}}\right)$$

$$\subset \bigcup_{j=1}^{n-1} (\Lambda_{nj} \cap \Lambda'_{nj}) \cup \left(\overline{\bigcup_{j=1}^{n-1} \Lambda_{nj}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad P(\mu) \leqq \sum_{j=1}^{n-1} P\{\Lambda_{nj} \cap \Lambda'_{nj}\} + 1 - P\left\{\bigcup_{j=1}^{n-1} \Lambda_{nj}\right\}.$$

Or

$$P\{\Lambda_{nj} \cap \Lambda'_{nj}\} = \int_{\Lambda_{nj}} P\{\Lambda'_{nj} \mid X(t_j, \omega) = x_j\}\, d_{xj}\, \Phi(t_j, x_j)$$
$$\leq \sup_{x_j \in R} P\{\Lambda'_{nj} \mid X(t_j, \omega) = x_j\} P\{\Lambda_{nj}\}$$
$$< \eta P\{\Lambda_{nj}\} \quad \text{d'après (4)}$$

$$\Rightarrow \qquad P(\mu) \leq 1 - (1-\eta) P\left\{\bigcup_{j=1}^{n-1} \Lambda_{nj}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad P\left\{\bigcup_{j=1}^{n-1} \Lambda_{nj}\right\} \leq \frac{1 - P(\mu)}{1-\eta} = \frac{P\{|X(s_0, \omega) - X(t_0, \omega)| > \varepsilon\}}{1-\eta}.$$

Cette inégalité est indépendante de n et du choix du partage T_n. Faisons croître n de façon à ce que T_n se rapproche de plus en plus des points de D appartenant à I. L'ensemble $\bigcup_{j=1}^{n-1} \Lambda_{nj} = \Lambda^{(n)}$ est mesurable-P.

Puisque $T_{n+1} \supset T_n$, on a $\Lambda^{(n+1)} \supset \Lambda^{(n)}$; donc $\lim_{n \to \infty} \Lambda^{(n)} = \Lambda$ existe et est mesurable-P et nous avons encore

$$P\{\Lambda\} \leq \frac{P\{|X(s_0, \omega) - X(t_0, \omega)| > \varepsilon\}}{1-\eta}.$$

Le processus étant supposé séparable, cette inégalité peut encore s'écrire (*cf.* J. L. Doob, [11], p. 54, théorème 2.3) :

$$(5) \quad P\left\{\sup_{t \in I} |X(t, \omega) - X(t_0, \omega) > 2\varepsilon\right\} \leq \frac{P\{|X(s_0, \omega) - X(t_0, \omega)| > \varepsilon\}}{1-\eta}$$

qui établit la réciproque .

Remarque 1. — Sans restreindre la généralité on peut choisir $\eta < \frac{1}{2}$, de sorte que (5) s'écrit

$$(5') \qquad P\left\{\sup_{t \in I} |X(t, \omega) - X(t_0, \omega)| > 2\varepsilon\right\}$$
$$\leq 2P\{|X(s_0, \omega) - X(t_0, \omega)| > \varepsilon\}.$$

Notons que dans le cas particulier du mouvement brownien réel séparable J. L. Doob [11], p. 392, théorème 2.1) a établi une inégalité équivalente à (5'). Mais sa méthode de démonstration ne se généralise pas au cas actuel puisqu'elle utilise le principe de symétrie de Désiré-André.

Remarque 2. — Dans le cas des processus réels additifs le théorème 6 est l'extension à la théorie des processus du théorème de P. Lévy selon lequel, pour une série de termes aléatoires indépendants la convergence en probabilité et la convergence p. s. sont deux modes de convergence équivalents. Ceci paraît être un phénomène très général (*cf.* J. Geffroy [27]).

Finalement nous voyons que dans le cas des processus de Markov réels et séparables, les trois modes de continuité locale que nous avons introduits sont équivalents (pourvu qu'on tienne compte de la condition d'uniformité pour les deux premiers).

Chapitre 2. — Point de vue global.

Considérons un intervalle fini fermé $[T_0, T_1]$, $T_0 < T_1$ et supposons que la fonction aléatoire réelle $X(t, \omega)$, $t \in [T_0, T_1]$, soit localement p. s. continue en tout point $t \in [T_0, T_1]$ (pour le point T_0 il s'agit de continuité à droite et pour T_1 de continuité à gauche). Nous savons alors que cette continuité est *uniforme* dans cet intervalle. Elle exprime l'absence p. s., dans cet intervalle, de *discontinuités fixes*, c'est-à-dire de discontinuités dont la position est connue d'avance. Mais elle n'entraîne pas pour autant que $X(t, \omega)$ soit, dans cet intervalle, p. s. une fonction continue : elle n'empêche pas qu'il puisse exister, dans cet intervalle, avec probabilité > 0, des discontinuités dont la position est elle-même aléatoire et qui pour cette raison s'appellent *discontinuités mobiles*. La fonction aléatoire réelle $X(t, \omega)$, bien que *localement* p. s. continue en tout point $t \in [T_0. T_1]$, n'est pas nécessairement une fonction p. s. continue considérée *dans son ensemble*. Nous voyons ainsi apparaître une différence fondamentale entre le point de vue *local* et le point de vue *global*.

Il peut paraître paradoxal qu'un événement de probabilité nulle (discontinuité en un point donné) puisse, par sa répétition engendrer un événement de probabilité > 0 (discontinuité dans un intervalle fini fermé). Cela tient essentiellement au fait que l'axiome d'additivité totale perd son sens pour une infinité non-dénombrable d'événements disjoints comme c'est le cas ici.

Des exemples simples de processus présentant ce phénomène sont fournis par les processus de Poisson.

Considérons en effet un processus réel à accroissements indépendants $X(t, \omega)$, $t \in [T_0, T_1]$ ne pouvant varier que par sauts dont l'intensité est un nombre entier > 0 et dont les accroissements obéissent à une loi de Poisson ($n \geqq 0$) :

$$P\{X(t+\Delta t, \omega) - X(t, \omega) \geqq n\} = \frac{(\lambda \Delta t)^n}{n!} e^{-\lambda \Delta t} \qquad (\Delta t > 0, \lambda > 0).$$

On vérifie que ce processus est *localement* p. s. continu en tout point $t \in [T_0, T_1]$ mais qu'il y a une probabilité > 0 pour qu'il soit discontinu dans l'intervalle $[T_0, T_1]$. La signification physique de ce phénomène est claire : interprétons $X(t, \omega)$ comme le nombre de tops enregistrés par un compteur Geiger dans l'intervalle de temps $[0, t[$, $t > 0$; il y a alors une probabilité nulle pour qu'un top se produise à un instant t déterminé $[X(t, \omega)$ p. s. continue en ce point$]$ mais il y a une probabilité > 0 pour qu'un top au moins se produise dans un intervalle de temps donné $[T_0, T_1]$ $[X(t, \omega)$ discontinue dans cet intervalle$]$.

Toujours en partant des processus de Poisson, P. Lévy, [38], p. 26) a donné un exemple d'un processus localement p. s, continu en tout point d'un intervalle fini, mais pour lequel il y a presque sûrement, dans tout intervalle aussi petit soit-il, une infinité de points de discontinuité (nécessairement mobile).

Pour éliminer presque-sûrement ce nouveau genre de discontinuités, il faut faire appel à des modes de continuité plus stricts que ceux que nous avons étudiés et qu'on appellera *continuités globales.*

Partageons l'intervalle $[T_0, T_1]$, $T_0 < T_1$ en n intervalles partiels au moyen de points de subdivision $\{t_i\}$ pris dans l'ensemble D, dense dans $[T_0, T_1]$, qui nous a servi dans l'introduction à définir les processus séparables. Soit $\{T_0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T_1\}$ un tel partage. On le rendra de plus en plus fin en ajoutant des points de subdivision à ceux déjà existants. Nous poserons

$$\left\{\begin{array}{r} [t_{j-1}, t_j] = I_{nj} \\ X(t_j, \omega) - X(t_{j-1}, \omega) = \Delta_{nj}(\omega) \end{array}\right\} \qquad (j = 1, n, \ldots, n).$$

1. Continuité globale en probabilité.

Définition 1. — *On dit que la fonction aléatoire réelle $X(t, \omega)$, $t \in [T_0, T_1]$ est globalement continue en probabilité dans l'intervalle $[T_0, T_1]$ si à tout couple $\varepsilon, \eta > 0$ on peut associer un nombre $h(\varepsilon, \eta) > 0$, tel que*

$$\max_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1}) < h(\varepsilon, \eta)$$

$$(1) \qquad \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} P\{|\Delta_{nj}(\omega)| > \varepsilon\} < \eta.$$

Cette condition implique $P\left\{\max_{j=1}^{n} |\Delta_{nj}(\omega) > \varepsilon\right\} < \eta$; notons que dans le cas des processus réels additifs ces deux conditions sont équivalentes (*cf.* J. L. Doob [11], p. 421; P. Lévy, [40], p. 104).

La définition ci-dessus ne fait appel qu'à la seule loi temporelle; on peut donc définir la continuité globale en probabilité même pour des processus non séparables. Mais alors la condition (1) n'entraîne plus l'absence presque sûre des discontinuités mobiles comme le montre l'exemple suivant : soit $X(t, \omega)$, $t \in [0, 1]$ une fonction aléatoire nulle partout sauf en un point dont la position est choisie aléatoirement avec une loi de probabilité uniforme sur $[0, 1]$ et où elle est égale à 1. $X(t, \omega)$ n'est pas séparable puisqu'on a, avec la probabilité 1 : $\sup_{t \in [0,1]} X(t, \omega) = 1$ et, pour tout ensemble dénombrable $\{t_i\}$ dense sur $[0, 1]$, $\sup_{t_i \in [0,1]} X(t, \omega) = 0$, en outre elle est discontinue avec probabilité 1 sur $[0, 1]$ et pourtant la condition (1) est vérifiée, le premier membre de l'inégalité étant toujours nul.

THÉORÈME 1. — *Une condition suffisante pour que la fonction $X(t, \omega)$, $t \in [T_0, T_1]$ soit globalement continue en probabilité dans l'intervalle $[T_0, T_1]$ est qu'on ait*

$$(1') \qquad \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P\{|X(t+\Delta t, \omega) - X(t, \omega)| > \varepsilon\} = 0 \qquad (\Delta t > 0, \forall \varepsilon < 0),$$

la limite étant prise uniformément par rapport à $t \in [T_0, T_1]$.

La démonstration est immédiate.

Notons que dans le cas strictement stationnaire cette condition est aussi nécessaire. En effet, dans ce cas

$$P\{|\Delta_{nj}(\omega)| > \varepsilon\} = \varphi(t_j - t_{j-1})$$

de sorte que (1) s'écrit $\sum_{j=1}^{n} \varphi(t_j - t_{j-1}) < \eta$. Partageons alors $[T_0, T_1]$ en n intervalles égaux de longueur Δt de sorte que $T_1 - T_0 = n\,\Delta t$. On aura

$$n\varphi(\Delta t) < \eta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\Delta t}\varphi(\Delta t) < \frac{\eta}{T_1 - T_0} \qquad (\forall t \in [T_0, T_1].$$

Dans le cas non stationnaire la continuité globale en probabilité n'entraîne pas (1′) comme on le montre facilement.

2. Continuité globale p. s.

DÉFINITION 2. — *On dit que la fonction aléatoire réelle $X(t, \omega)$, $t \in [T_0, T_1]$ est globalement p. s. continue dans l'intervalle $[T_0, T_1]$ si à tout couple $\varepsilon, \eta > 0$ on peut associer un nombre $h(\varepsilon, \eta) > 0$ tel que*

$$\max_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1}) < h(\varepsilon, \eta)$$

$$(2) \qquad \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} P\Big\{\sup_{t \in I_{nj}} |X(t, \omega) - X(t_{j-1}, \omega)| > \varepsilon\Big\} < \eta.$$

Cette condition implique que

$$P\Big\{\max_{j=1}^{n} \sup_{t \in I_{nj}} |X(t, \omega) - X(t_{j-1}, \omega)| > \varepsilon\Big\} < \eta.$$

De même que précédemment, ces deux conditions sont équivalentes dans le cas des processus réels addditifs.

On notera que cette continuité ne peut être définie à partir de la seule loi temporelle; pour qu'elle ait un sens il faut donc faire certaines hypothèses supplémentaires, par exemple l''hypothèse de séparabilité que nous avons adoptée. Remarquer aussi que si (2) est applicable, elle exprime l'absence p. s., dans $[T_0, T_1]$, de discontinuités fixes ou mobiles.

THÉORÈME 2. — *Une condition suffisante pour que la fonction aléatoire réelle $X(t, \omega)$, $t \in [T_0, T_1]$ soit globalement p. s. continue dans l'intervalle $[T_0, T_1]$ est qu'on ait*

$$(2') \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\Delta t \downarrow 0} \dfrac{1}{\Delta t} P\left\{ \sup\limits_{\tau \in [t, t+\Delta t]} | X(\tau, \omega) - X(t, \omega) | > \varepsilon \right\} = 0 \\ \qquad (\Delta t > 0, \ \forall \varepsilon > 0), \end{cases}$$

la limite étant prise uniformément par rapport à $t \in [T_0, T_1]$.

La démonstration est immédiate. Notons que dans le cas strictement stationnaire cette condition est aussi nécessaire.

REMARQUE. — Divers auteurs, notamment H. M. MANN [43] et D. DUGUÉ [42] ont défini des continuités globales (appelées par eux « fortes » et qui entraînent toutes deux notre continuité globale en probabilité. Elles s'appliquent à tout processus non nécessairement séparable, mais alors elles n'entraînent plus nécessairement l'absence p. s. des discontinuités mobiles.

3. **Continuité globale de Feller**, propre aux fonctions aléatoires réelles de Markov. — Les deux définitions précédentes s'appliquent à tout processus réel séparable, qu'il soit de Markov ou non. Dans le cas des processus réels de Markov on peut introduire un nouveau mode de continuité globale que nous désignerons d'après W. FELLER.

DÉFINITION 3. — *On dit que la fonction aléatoire réelle de Markov $X(t, \omega)$, $t \in [T_0, T_1]$ présente dans l'intervalle $[T_0, T_1]$ la continuité globale de Feller si à tout couple ε, $\eta > 0$ on peut associer un nombre $h(\varepsilon, \eta) > 0$ tel que*

$$\max_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1}) < h(\varepsilon, \eta)$$

$$(3) \qquad \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \sup_{x \in \mathbf{R}} P\left\{ | \Delta_{nj}(\omega) | > \varepsilon \,\middle|\, X(t_{j-1}, \omega) = x \right\} < \eta.$$

Cette condition s'écrit, en utilisant la fonction de répartition de passage

$F(t, x; \tau, \xi), t < \tau$:

$$\lim_{\max\limits_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1}) \to 0} \sum_{j=1}^{n} \sup_{x_{j-1} \in \mathbf{R}} \int_{|x_j - x_{j-1}| > \varepsilon} d_{x_j} \mathrm{F}(t_{j-1}, x_{j-1}; t_j, x_j) = 0$$
$$(\forall \varepsilon > 0).$$

Théorème 3. — *Une condition suffisante pour que la fonction aléatoire réelle de Markov $X(t, \omega)$, $t \in [T_0, T_1]$ présente dans l'intervalle $[T_0, T_1]$ la continuité globale de Feller est qu'on ait*

$$(3') \quad \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y - x| > \varepsilon} d_y \mathrm{F}(t, x; t + \Delta t, y) = 0 \qquad (\Delta t > 0, \forall \varepsilon > 0),$$

la limite étant prise uniformément par rapport à $t \in [T_0, T_1]$ et à $x \in R$.

La démonstration est immédiate. Notons que dans le cas des processus réels de Markov homogènes dans le temps cette condition est aussi nécessaire. Supposons en effet qu'on ait (3) et que le processus soit homogène dans le temps. On a alors

$$\sup_{x_{j-1} \in \mathbf{R}} \int_{|x_j - x_{j-1}| > \varepsilon} d_{x_j} \mathrm{F}(t_{j-1}, x_{j-1}; t_j, x_j) = \varphi_\varepsilon(t_j - t_{j-1}),$$

de sorte que (3) s'écrit

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_\varepsilon(t_j - t_{j-1}) < \eta.$$

Partageons alors $[T_0, T_1]$ en n intervalles égaux de longueur Δt de façon à avoir $T_1 - T_0 = n\,\Delta t$. On aura

$$n\varphi_\varepsilon(\Delta t) < \eta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\Delta t} \varphi_\varepsilon(\Delta t) < \frac{\eta}{T_1 - T_0} \qquad (\forall t \in [T_0, T_1]).$$

C. Q. F. D.

Notons que pour les processus réels de Markov additifs la continuité globale de Feller se réduit immédiatement à la continuité globale en probabilité.

Remarque. — W. Feller [13] a introduit la continuité globale dont nous venons de parler sous la forme (3') (sans l'uniformité toutefois) qui est en fait une « condition de Lindeberg ». Dans ses travaux ultérieurs, ([16], [18], [19]) sur les semi-groupes (correspondant aux processus réels de Markov homogènes dans le temps) il appelle « processus de caractère local » ou « processus de diffusion » ceux qui jouissent de la propriété (3').

4. Relations entre les trois modes de continuité globale. — Pour les raisons que nous avons exposées au chapitre précédent on est amené à supposer que les inégalités (1) et (2) qui définissent les continuités globales en probabilité et p. s. sont vérifiées uniformément par rapport aux mesures

$$\Phi(t, x) = P\{X(t) < x\}.$$

THÉORÈME 4. — *Pour les processus réels de Markov la continuité globale en probabilité sur* $[T_0, T_1]$ *et la continuité globale p. s. sur* $[T_0, T_1]$ *sont deux modes de continuité équivalents.*

Il suffit évidemment de montrer que la continuité globale en probabilité entraîne la continuité globale p. s.

En effet, au chapitre 1, nous avons établi l'inégalité

$$P\{\sup_{t\in I_{nj}} |X(t,\omega) - X(t_{j-1},\omega)| > 2\varepsilon\} \leqq 2P\{|X(t_j,\omega) - X(t_{j-1}\,\omega)| > \varepsilon\}$$

valable pour les processus réels de Markov séparables pourvu que

$$\max_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1}) < h(\varepsilon, \eta).$$

Or, d'après le théorème 4 du chapitre 1, $h(\varepsilon, \eta)$ peut être choisi indépendamment de t_j. On a donc

$$\sum_{j=1}^{n} P\{\sup_{t\in I_{nj}} |X(t,\omega) - X(t_{j-1},\omega)| > 2\varepsilon\}$$
$$\leqq 2\sum_{j=1}^{n} P\{|X(t_j,\omega) - X(t_{j-1},\omega)| > \varepsilon\}.$$

Notons que dans le cas des processus réels de Markov additifs, J. L. DOOB ([11], p. 420, théorème 7.1) a établi l'équivalence de ces deux continuités.

THÉORÈME 5. — *Pour les processus réels de Markov la continuité globale de Feller sur* $[T_0, T_1]$ *et la continuité globale en probabilité sur* $[T_0, T_1]$ *sont deux modes de continuité équivalents :*

a. La continuité de Feller entraîne la continuité en probabilité

$$P\{|\Delta_{nj}(\omega)| > \varepsilon\} = \int_{-\infty}^{+\infty} P\{|\Delta_{nj}(\omega)| > \varepsilon \,\big|\, X(t_{j-1},\omega) = x_{j-1}\}\, d_{x_{j-1}}(t_{j-1}, x_{j-1})$$
$$\leqq \sup_{x_{j-1}\in \mathbf{R}} P\{|\Delta_{nj}(\omega)| > \varepsilon \,\big|\, X(t_{j-1},\omega) = x_{j-1}\}$$
$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} P\{|\Delta_{nj}(\omega)| > \varepsilon\} \leqq \sum_{j=1}^{n} \sup_{x_{j-1}\in \mathbf{R}} P\{|\Delta_{nj}(\omega)| > \varepsilon \,\big|\, X(t_{j-1},\omega) = x_{j-1}\},$$

cette inégalité étant en outre valable *uniformément* par rapport aux mesures

$$\Phi(t_j, x_j) = P\{X(t_j, \omega) < x_j\}.$$

b. La continuité en probabilité entraîne la continuité de Feller.

Par hypothèse à tout couple $\varepsilon, \eta > 0$ on peut associer un nombre $h(\varepsilon, \eta) > 0$ tel que $\max_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1}) < h(\varepsilon, \eta)$ entraîne

$$\begin{aligned}\eta &> \sum_{j=1}^{n} P\{|\Delta_{nj}(\omega)| > \varepsilon\} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} P\{|\Delta_{nj}(\omega)| > \varepsilon \mid X(t_{j-1}, \omega) = x_{j-1}\} \, d_{x_{j-1}}\Phi(t_{j-1}, x_{j-1}),\end{aligned}$$

cette inégalité étant en outre valable *uniformément* par rapport aux mesures $\Phi(t_j, x_j)$. En prenant pour $\Phi(t_j, x_j)$ la mesure obtenue en plaçant à l'instant t_j la masse $+1$ au point x_j, il vient alors

$$\eta > \sum_{j=1}^{n} P\{|\Delta_{nj}(\omega)| > \varepsilon \mid X(t_{j-1}, \omega) = x_{j-1}\}$$

et ceci uniformément par rapport à $x_{j-1} \in \mathbf{R}$, donc finalement

$$\eta > \sup_{x_{j-1} \in \mathbf{R}} \sum_{j=1}^{n} P\{|\Delta_{nj}(\omega)| > \varepsilon \mid X(t_{j-1}, \omega) = x_{j-1}\}.$$

Nous voyons finalement que, dans le cas des processus de Markov réels et séparables, les trois modes de continuité globale que nous avons envisagés sont équivalents, pourvu qu'on tienne compte de la condition d'uniformité pour les deux premiers.

Remarque. — W. Feller ([14], p. 325, remarque 2) a soulevé la question du rapport entre la continuité globale de Feller [sous la forme (3′)] et la continuité globale p. s. J. R. Kinney [33] a établi que la continuité globale de Feller [sous la forme (3′)] implique la continuité globale p. s. et D. Ray [47] a récemment montré l'équivalence de ces deux continuités dans le cas des processus homogènes dans le temps.

Chapitre 3. — Etude des processus réels de Markov globalement p. s. continus.

Considérons un processus réel séparable de Markov $X(t, \omega)$, $t \in [T_0, T_1]$, $T_0 < T_1$, globalement p. s. continu dans $[T_0, T_1]$. Nous partagerons l'intervalle $[T_0, T_1]$ en n intervalles partiels au moyen de points de subdivision $\{t_i\}$ pris dans l'ensemble dénombrable D, dense dans $[T_0, T_1]$, qui nous a servi dans l'introduction à définir la séparabilité. Soit

$$\{T_0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T_1\}$$

ce partage. Nous poserons

$$[t_{j-1}, t_j] = I_{nj}; \qquad X(t_j, \omega) - X(t_{j-1}, \omega) = \Delta_{nj}(\omega) \qquad (\forall j = 1, \ldots, n).$$

On rendra le partage de plus en plus fin en ajoutant des points de subdivision à ceux déjà existants.

Introduisons alors les variables aléatoires « tronquées »

$$\Delta'_{nj}(\omega) = \begin{cases} \Delta_{nj}(\omega) & \text{si } |\Delta_{nj}(\omega)| \leq \varepsilon, \\ 0 & \text{si } |\Delta_{nj}(\omega)| > \varepsilon, \end{cases}$$

Nous nous proposons tout d'abord de comparer la somme

$$X'(T_1, \omega) - X'(T_0, \omega) = \sum_{j=1}^{n} \Delta'_{nj}(\omega)$$

à la somme initiale

$$X(T_1, \omega) - X(T_0, \omega) = \sum_{j=1}^{n} \Delta_{nj}(\omega).$$

Il vient

$$\begin{aligned} & P\{X'(T_1, \omega) - X'(T_0, \omega) \neq X(T_1, \omega) - X(T_0, \omega)\} \\ \leq & P\left\{\bigcup_{j=1}^{n} (\Delta'_{nj}(\omega) \neq \Delta_{nj}(\omega))\right\} \\ \leq & \sum_{j=1}^{n} P\{|\Delta_{nj}(\omega)| > \varepsilon\} \\ \leq & \sum_{j=1}^{n} P\left\{\sup_{t \in I_{nj}} |X(t\ \omega) - X(t_{j=1}, \omega)| > \varepsilon\right\}. \end{aligned}$$

Dans l'hypothèse de la continuité globale p. s. sur $[T_0, T_1]$ on peut choisir un partage $\{t_i\}$ tel que le dernier terme soit $< \eta$ de sorte que, dans cette hypothèse, on peut remplacer l'étude de $X(T_1, \omega) - X(T_0, \omega)$ par celle de $X'(T_1, \omega) - X(T_0, \omega)$, quantité qui ne diffère de la première que dans des cas de probabilité arbitrairement petits. Mais ce faisant nous avons progressé sensiblement. En effet $X'(T_1, \omega) - X'(T_0. \omega)$ est la somme de termes aléatoires uniformément bornés en valeur absolue par ε et dont par conséquent les moments de tous les ordres existent et sont *finis*. En particulier les deux premiers moments conditionnels de $\Delta'_{nj}(\omega)$ existent et sont finis; ils s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned}
&E\{\Delta'^{n}_{nj}(\omega) \mid X(t_{j-1}, \omega) = x_{j-1}\} \\
&\quad = \int_{|x_j - x_{j-1}| \leq \varepsilon} (x_j - x_{j-1})\, d_{x_j} \mathrm{F}(t_{j-1}, x_{j-1}; t_j, x_j), \\
&E\{[\Delta'_{nj}(\omega)^2 \mid X(t_{j-1}, \omega) = x_{j-1}\} \\
&\quad = \int_{|x_j - x_{j-1}| \leq \varepsilon} (x_j - x_{j-1})^2\, d_{x_j} \mathrm{F}(t_{j-1}, x_{j-1}; t_j, x_j),
\end{aligned}$$

Ce sont là les deux moments conditionnels tronqués déjà introduits par W. FELLER [13]. On voit ainsi que, sous une hypothèse de continuité convenable (nous avons adopté la continuité globale p. s.) il n'est pas nécessaire, comme l'avait fait A. KOLMOGOROV [34] de prendre, pour évaluer les deux premiers moments conditionnels, le domaine d'intégration sur $]-\infty, +\infty[$ (ce qui pose des questions d'existence d'intégrales); il suffit, comme l'avait entrevu W. FELLER [13], d'intégrer dans un domaine $|x_j - x_{j-1}| \leq \varepsilon$; toutes les questions d'existence sont alors automatiquement écartées. Notons que W. FELLER était arrivé à ce résultat en imposant au processus la continuité globale de Feller [sous sa forme (3')]. Nous arrivons ici au même résultat en introduisant *directement* la continuité globale p. s.

1. Processus réels de Markov additifs séparables. — Dans ce cas la continuité globale en probabilité s'exprime par

$$\begin{aligned}
&\max_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1}) < h(\varepsilon, \eta) \\
&\quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} P\{|\Delta_{nj}(\omega)| > \varepsilon\} = P\left\{\max_{j=1}^{n} |\Delta_{nj}(\omega)| > \varepsilon\right\} < \eta.
\end{aligned}$$

Autrement dit $X(T_1, \omega) - X(T_0, \omega) = \sum_{j=1}^{n} \Delta_{nj}(\omega)$ est alors la somme de n variables aléatoires indépendantes dont *la plus grande* est négligeable en probabilité. Nous venons de voir qu'on peut remplacer l'étude de la somme $\sum_{j=1}^{n} \Delta_{nj}(\omega)$ par celle de la somme $\sum_{j=1}^{n} \Delta'_{nj}(\omega)$ de n variables aléatoires indépendantes uniformément bornées en valeur absolue par ε.

Dans ces conditions P. LÉVY [40], p. 166) a montré que

$$X'(T_1\, \omega) - X'(T_0, \omega) = \sum_{j=1}^{n} \Delta'_{nj}(\omega)$$

suit une loi de Laplace-Gauss; il reste alors deux fonctions $A(t)$ et $B(t)$, nécessairement continues, $A(t)$ étant en outre croissante, telles que

$$X'(T_1, \omega) - X'(T_0, \omega) = B(T_1) - B(T_0) + \Xi(\omega)\sqrt{A(T_1 - T_0)},$$

$\Xi(\omega)$ étant quels que soient T_0 et T_1 une variable aléatoire réduite de Laplace-Gauss (*cf.* P. LÉVY, [38], p. 75, théorème 18.3).

La signification des fonctions $A(t)$ et $B(t)$ apparaît immédiatement

$$(1)\qquad B(T_1) - B(T_0) = \int_{T_0}^{T_1} E\{dX'(t, \omega)\} = \beta(T_0, T_1),$$

$$(2)\qquad A(T_1) - A(T_0) = \int_{T_0}^{T_1} \Big[E\{[dX'(t, \omega)]^2\} - [E\{dX'(t, \omega)\}]^2\Big] = \alpha(T_0, T_1) \geqq 0.$$

Supposons maintenant le processus globalement p. s. continu dans $[T_0, T_1]$. Tout ce que nous avons dit demeure vrai (*cf.* LUKACS [41], [42]).

On peut interpréter les fonctions $\alpha(T_0, T_1)$ et $\beta(T_0, T_1)$ comme des fonctions de l'intervalle $I = [T_0, T_1]$ et les représenter par $\alpha(I)$ et $\beta(I)$; or par définition elles sont respectivement la variance et l'espérance mathématique de $X'(T_1, \omega) - X'(T_0, \omega) = \Delta_I X'(t, \omega)$ où l'on désigne par $\Delta_I X'(t, \omega)$ l'accroissement de $X'(t, \omega)$ sur l'intervalle I.

Partageons alors $I = (T_0, T_1)$ en un nombre *fini* d'intervalles disjoints $I_1, \ldots, I_n : I = I_1 \cup \ldots \cup I_n$. On peut définir d'une façon cohérente

$$\alpha(I) = \alpha(I_1) + \ldots + \alpha(I_n),$$
$$\beta(I) = \beta(I_1) + \ldots + \beta(I_n).$$

Autrement dit le domaine de définition des fonctions d'ensembles $\alpha(.)$ et $\beta(.)$ peut être étendu aux ensembles qui sont la réunion d'un nombre *fini* d'intervalles disjoints et relativement à ce nouveau domaine de définition ces fonctions sont des fonctions additives d'ensembles.

Il est naturel de chercher à étendre le domaine de définition des fonctions $\alpha(.)$ et $\beta(.)$ à la tribu des ensembles mesurables-B de $[T_0, T_1]$ et de supposer que les fonctions d'ensembles ainsi définies sont bornées. Ces propriétés ne découlent pas des hypothèses que nous avons faites et il est nécessaire de les postuler explicitement. On prendra par exemple l'hypothèse (H) suivante :

HYPOTHÈSE (H). — Il existe une constante $K > 0$ telle que, quel que soit l'ensemble *fini* d'intervalles disjoints $\{I_i\} \subset [T_0, T_1]$, on ait

$$\sum_i |\beta(I_i)| < K < \infty, \qquad \sum_i \alpha(I_i) < K < \infty.$$

Moyennant cette hypothèse les fonctions $\alpha(.)$ et $\beta(.)$ sont des fonctions complètement additives d'ensembles définies sur les boréliens et bornées. Si S est un borélien, $\alpha(S)$ et $\beta(S)$ peuvent être interprétés respectivement comme la variance et l'espérance mathématique de $\Delta_S X'(t, \omega)$, $\Delta_S X'(t, \omega)$ représentent l' « impulsion » au sens de H. CRAMER [5] subie par $X'(t, \omega)$ sur l'ensemble S.

Nous avons vu qu'en outre ces fonctions sont des fonctions *continues* de I, c'est-à-dire qu'elles s'annulent lorsque I se réduit à un point. Or, d'après le théorème de Lebesgue sur la décomposition d'une fonction bornée complètement additive d'ensembles, chacune des fonctions $\alpha(.)$, $\beta(.)$ est la somme d'une fonction complètement additive absolument continue et d'une fonction complètement additive « singulière » ; en outre cette décomposition est unique.

On a donc, de façon unique :

$$\alpha(I) = \alpha_1(I) + \alpha_2(I),$$
$$\beta(I) = \beta_1(I) + \beta_2(I),$$

les fonctions $\alpha_1(I)$, $\beta_1(I)$ étant les composantes absolument continues et $\alpha_2(I)$, $\beta_2(I)$ les composantes « singulières ». En outre $\alpha(.)$ étant une fonction positive et monotone, il en est de même de $\alpha_1(.)$ et $\alpha_2(.)$.

Le thèorème de Radon-Nikodym montre alors qu'il existe deux fonctions mesurables $a(t)$ et $b(t)$ telles que

$$\alpha_1(I) = \int_I a(t)\,dt, \qquad \beta_1(I) = \int_I b(t)\,dt,$$

d'où l'on déduit que, sauf peut-être sur un ensemble Λ_1 des valeurs de t de mesure-B nulle, on a

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{\alpha_1(t, t+\Delta t)}{\Delta t} = a(t) \geqq 0, \qquad \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{\beta_1(t, t+\Delta t)}{\Delta t} = b(t).$$

Quant aux composantes singulières $\alpha_2(.)$, $\beta_2(.)$, elles ont leurs dérivées nulles sauf peut-être sur un ensemble Λ_2 de valeurs de t de mesure-B nulle où ces dérivées sont infinies. On a donc finalement, sauf peut-être sur l'ensemble $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ de mesure-B nulle :

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{\alpha(t, t+\Delta t)}{\Delta t} = a(t) \geqq 0, \tag{3}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\beta(t, t+\Delta t)}{\Delta t} = b(t). \tag{4}$$

En se référant aux définitions des fonctions $\alpha(.)$, $\beta(.)$ ainsi qu'aux formules (1) et (2), (4) s'écrit

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|z| \leqq \varepsilon} z\, d_z F(t, t+\Delta t; z) = b(t)$$

et (3) :

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\int_{|z|\leqq\varepsilon} z^2\, d_z F(t,\, t+\Delta t;\, z) - \left(\int_{|z|\leqq\varepsilon} z\, d_z F(t,\, t+\Delta t;\, z)\right)^2\right]$$

$$= \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t}\int_{|z|\leqq\varepsilon} z^2\, d_z F(t,\, t+\Delta t;\, z) - \lim_{\Delta t \downarrow 0} b^2(t)\,\Delta t = a(t) \geqq 0,$$

de sorte que

$$(3') \qquad \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t}\int_{|z|\leqq\varepsilon} z^2\, d_z F(t,\, t+\Delta t;\, z) = a(t) \geqq 0,$$

$$(4') \qquad \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t}\int_{|z|\geqq\varepsilon} z\, d_z F(t,\, t+\Delta t;\, z) = b(t).$$

Nous retrouvons ainsi les limites déjà introduites par W. Feller [38]; nous venons de voir que la seule hypothèse de continuité globale p. s. jointe à l'hypothèse (4) suffit à assurer l'existence presque-partout des limites (3′) et (4′).

Finalement, avec cette seule hypothèse, l'équation différentielle stochastique

$$(5) \qquad dX(t,\, \omega) = \beta(t,\, t+dt) + \Xi(t,\, \omega)\sqrt{\alpha(t,\, t+\Delta t)}$$

[où $\Xi(t,\, \omega)$ désigne une variable aléatoire réduite de Laplace-Gauss] jointe aux conditions initiales (répartition de la masse $+1$ à l'instant T_0) détermine entièrement le processus. Dans le cas où les composantes singulières $\alpha_2(\,.\,)$ et $\beta_2(\,.\,)$ s'annulent identiquement et dans ce cas seulement le processus peut être décrit par l'équation différentielle stochastique linéaire déjà introduite par P. Lévy ([38], p. 53) :

$$(5') \qquad dX(t,\, \omega) = b(t)\, dt + \Xi(t,\, \omega)\sqrt{a(t)\, dt}$$

jointe aux conditions initiales.

Nous voyons ainsi que la seule hypothèse de continuité globale p. s., jointe à l'hypothèse (H), bien qu'assurant l'existence presque-partout des limites (3′) et (4′), ne suffit pas tout à fait à décrire le processus au moyen de l'équation différentielle stochastique (5′) jointe aux conditions initiales; il faut pour cela une hypothèse supplémentaire assurant la continuité *absolue* des deux fonctions $\alpha(\,.\,)$ et $\beta(\,.\,)$.

Il existe pourtant une classe importante de processus réels additifs où une telle hypothèse supplémentaire est superflue : c'est la classe des processus réels additifs *homogènes dans le temps*. Dans ce cas en effet les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ sont indépendantes de t, se réduisent donc à des constantes a et b qui existent partout et non plus seulement presque-partout; on en conclut que $\alpha(I) = a$ mes (I), $\beta(I) = b$ mes (I) sont bien des fonctions *absolument* continues.

2. Rapports avec les équations de la diffusion. — L'équation (5) montre que, en appelant $u(t, \tau; \xi - x)$ la densité de probabilité de $\mathcal{X}(\tau, \omega) - \mathcal{X}(t, \omega)$, $t < \tau$ on a

$$u(t, \tau; \xi - x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\alpha(t, \tau)}} \exp.\left(-\frac{[(\xi - x) - \beta(t, \tau)]^2}{2\alpha(t, \tau)}\right).$$

Or on a vu qu'on a presque-partout :

$$\frac{\partial\beta(t, \tau)}{\partial\tau} = b(\tau), \qquad \frac{\partial\alpha(t, \tau)}{\partial\tau} = a(\tau),$$

$$\frac{\partial\beta(t, \tau)}{\partial t} = -b(t), \qquad \frac{\partial\alpha(t, \tau)}{\partial t} = -a(t).$$

On vérifie alors que, presque-partout $u(t, \tau; \xi - x)$ satisfait aux deux équations différentielles adjointes de A. Kolmogorov [33] :

$$(\mathrm{K}_1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{a(t)}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(t)\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$(\mathrm{K}_2) \qquad \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{a(\tau)}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + b(\tau)\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

Dans (K_1), τ et ξ figurent comme paramètres; on en conclut que cette équation est encore vérifiée par la fonction de répartition

$$F(t, x; \xi - x) = \int_{-\infty}^{\xi - x} u(t, \tau, z)\, dz.$$

Dans (K_2) ce sont t et x qui figurent comme paramètres.

La solution fondamentale commune aux deux équations adjointes (K_1) et (K_2), supposées vérifiées partout et non plus seulement presque-partout, est alors

$$u(t, \tau; \xi - x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\alpha_1(t, \tau)}} \exp\left(-\frac{[(\xi - x) - \beta_1(t, \tau)]^2}{2\,\alpha_1(t, \tau)}\right)$$

où

$$\alpha_1(t, \tau) = \int_t^\tau a(\lambda)\, d\lambda \qquad \text{et} \qquad \beta_1(t, \tau) = \int_t^\tau b(\lambda)\, d\lambda.$$

Autrement dit, cette solution ne nous fournit que ce qu'on pourrait appeler la partie absolument continue du processus correspondant à l'équation différentielle stochastique linéaire :

$$d\mathcal{X}(t, \omega) = b(t)\, dt + \Xi(t, \omega)\sqrt{a(t)\, dt}.$$

Notons que dans le cas particulier des processus additifs homogènes dans le temps, la classe des processus globalement p. s. continus est équivalente à celle des processus obéissant aux deux équations différentielles adjointes de

A. KOLMOGOROV qui s'écrivent alors

$$(K_1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{a}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + b\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$(K_2) \qquad \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{a}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + b\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0,$$

où

$$u = u(\tau - t;\, \xi - x),$$

ou encore à celle des processus régis par l'équation différentielle stochastique linéaire à cœfficients constants :

$$dX(t, \omega) = b\, dt + \Xi(t, \omega)\sqrt{a\, dt}.$$

REMARQUE. — P. LÉVY a montré ([38], p. 161) que les processus réels additifs localement continus en probabilité en tout point d'un intervalle $[T_0, T_1]$ dépendent d'une formule où figure une fonction arbitraire $N(t, u)$ de deux variables et deux de une variable : $A(t)$ et $B(t)$, à savoir :

$$\psi(t, z) = iB(t)z - A(t)\frac{z^2}{2} + \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\exp izu - 1 - \frac{izu}{1+u^2}\right]d_u N(t, u),$$

où $A(t)$ et $B(t)$ sont les deux fonctions considérées précédemment et où $N(t, u)$ est une fonction liée à l'existence de discontinuités mobiles.

Parmi ces processus, ceux qui sont Laplaciens forment une classe ne dépendant que de deux fonctions de une variable chacune [alors $N(t, u) \equiv 0$] et ils sont caractérisés par une condition de continuité globale (l'absence p. s. de discontinuités mobiles). P. LÉVY a bien voulu me communiquer qu'une circonstance analogue se produisait pour les processus réels de Markov les plus généraux (*cf.* P. LÉVY [38], p. 69).

3. Processus réels de Markov généraux.

THÉORÈME 1 ([2]). — *Pour tout processus réel de Markov globalement p. s. continu dans* $[T_0, T_1]$ *et qui satisfait en outre à l'hypothèse* (H) *les coefficients* $a(t, x)$ *et* $b(t, x)$ *qui entrent dans l'équation de la diffusion existent presque partout (par rapport à la variable* t*), c'est-à-dire qu'on a, pour tout* $\varepsilon > 0$, $(\Delta t > 0)$.

([2]) Nous avons énoncé ce théorème dans une Note aux *Comptes rendus* ([23]) sans faire l'hypothèse (H). Un contre-exemple de J. L. DOOB [11] a montré que cette hypothèse, ou toute autre analogue, est nécessaire pour l'existence presque partout des fonctions $a(t, x)$ et $b(t, x)$.

Il existe un ensemble $\Lambda \subset [T_0, T_1]$, *de mesures-B nulle tel que*

$$\forall\, t \in [T_0\, T_1] - \Lambda \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbf{R}, \text{ on ait}$$

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|z| \leqq \varepsilon} z\, d_z F(t, x;\, t + \Delta t,\, x + z) = b(t, x) \qquad (\text{fini}),$$

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|z| \leqq \varepsilon} z^2\, d_z F(t, x;\, t + \Delta t,\, x + z) = a(t, x) \quad (\geqq 0) \qquad (\text{fini}).$$

Ces limites ont déjà été introduites par W. Feller [13]; mais leur existence avait été postulée; ici elle découle immédiatement de l'hypothèse de la continuité p. s. du processus jointe à l'hypothèse (H). Notons qu'un théorème analogue a été démontré par K. Yosida ([54], [55]) dans le cas d'un processus homogène dans le temps et additif.

Montrons d'abord l'existence presque-partout de $b(t, x)$. A cet effet nous introduisons l'intégrale

$$\beta(t, t + \Delta t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{|z| \leqq \varepsilon} z\, d_z F(t, x;\, t + \Delta t,\, x + z) \right] d_x \Phi(t, x) \qquad (\Delta t > 0),$$

où

$$\Phi(t, x) = P\{X(t, \omega) < x\}.$$

Cette intégrale est absolument convergente, d'où, en appliquant le théorème de Fubini :

$$\beta(t, t + \Delta t) = \int_{|z| \leqq \varepsilon} z\, d_z P\{X(t + \Delta t, \omega) - X(t, \omega) < z\}.$$

Or nous savons que, le processus étant globalement p. s. continu dans $[T_0, T_1]$, on peut remplacer l'étude de $X(T_1, \omega) - X(T_0, \omega)$ par celle de $X'(T_1, \omega) - X'(T_0, \omega)$, et ceci avec une probabilité arbitrairement voisine de 1.

Pourvu que Δt soit suffisamment petit, on a

$$|\Delta X'(t, \omega| \leqq \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \beta(t, t + \Delta t) = E\{\Delta X'(t, \omega)\}.$$

Mais alors

$$E\{X'(T_1, \omega) - X'(T_0, \omega)\} = \sum E\{\Delta X'(t, \omega)\},$$

d'où, en faisant $\Delta t \downarrow 0$

$$E\{X'(T_1, \omega) - X'(T_0, \omega)\} = \int_{T_0}^{T_1} E\{dX'(t, \omega)\}.$$

Nous pouvons ainsi définir une fonction $\beta(I)$ de l'intervalle $I \subset [T_0, T_1]$ par $\beta(I) = \int_I E\{dX'(t, \omega)\}$; cette fonction est une fonction additive de son argument, l'intervalle I; en faisant l'hypothèse (H) nous pouvons étudier sa définition à la classe des ensembles mesurables-B et la fonction d'ensemble ainsi défini sera bornée et complètement additive.

Le processus étant par hypothèse globalement p. s. continu dans $[T_0, T_1]$, est à *fortiori* localement p. s. continu en tout point $t \in [T_0, T_1]$; il en résulte que $\beta(I)$ est une fonction continue [c'est-à-dire si I se réduit à un point, $\beta(I) = 0$]. Mais alors, d'après le théorème de Lebesgue sur la décomposition d'une fonction bornée complètement additive d'ensemble, on a d'une façon unique : $\beta(I) = \beta_1(I) + \beta_2(I)$, où $\beta_1(I)$ est la composante absolument continue et $\beta_2(I)$ la composante singulière. D'après le théorème de Radon-Nikodym, on a alors, sauf peut-être sur un ensemble Λ_1 de valeurs de t en mesure-B nulle :

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{\beta_1(t,\ t+\Delta t)}{\Delta t} = b(t) \qquad [b(t) \text{ fini}]$$

et, sauf sur un ensemble Λ_2 des valeurs de t de mesure-B nulle :

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{\beta_2(t,\ t+\Delta t)}{\Delta t} = 0,$$

d'où, sauf peut-être sur $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, $\text{mes}_B(\Lambda) = 0$:

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{\beta(t,\ t+\Delta t)}{\Delta t} = b(t) \qquad [b(t) \text{ fini}],$$

c'est-à-dire, avec nos notations initiales :

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{|z| \leq \varepsilon} z\, d_z F(t,\ x;\ t+\Delta t,\ x+z) \right] d_x \Phi(t,\ x) = b(t).$$

En supposant, pour les raisons que nous avons déjà indiquées, que l'inégalité (2) du chapitre 2 a lieu uniformément par rapport à la mesure de probabilité $\Phi(t,\ x)$, une relation de ce type, avec un $b(t)$ différent, a lieu quelle que soit $\Phi(t,\ x)$. En plaçant à l'instant t la masse $+1$ au point x, il vient alors

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|z| \leq \varepsilon} z\, d_z F(t,\ x;\ t+\Delta t,\ x+z) = b(t,\ x)$$

et ceci

$$\forall t \in [T_0\ T_1] - \Lambda, \qquad \text{mes}_B(\Lambda) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in R.$$

Cette condition peut s'écrire

$$E\{dX'(t,\ \omega) \mid X'(t,\ \omega) = x\} = b(t,\ x)\, dt,$$

c'est-à-dire l'espérance mathématique conditionnelle de l'accroissement $dX'(t,\ \omega)$ est un infiniment petit de l'ordre de dt.

Montrons à présent l'existence presque-partout de $a(t, x)$. A cet effet nous considérons un point $t \notin \Lambda$, c'est-à-dire un point t pour lequel $b(t, x)$ existe. Nous avons

$$\int_{|z|\leqq\varepsilon} z^2\, d_z F(t, x;\, t+\Delta t, x+z) = E\{[\Delta X'(t, \omega)]^2 \,|\, X'(t, \omega) = x\}$$
$$= E\Big\{[\Delta X'(t, \omega) - E\{\Delta X'(t, \omega) \,|\, X'(t, \omega) = x\}]^2 \,\Big|\, X'(t, \omega) = x\Big\}$$

à un infiniment petit en Δt^2 près.

Ceci nous conduit à introduire le processus $Y'(t, \omega)$, $t \in [T_0, T_1]$ défini par

$$\Delta Y'(t, \omega) = \Delta X'(t, \omega) - E\{\Delta X'(t, \omega) | X'(t, \omega)\} = \Delta X'(t, \omega) - b[t, X'(t, \omega)]\, \Delta t$$

et pour lequel

$$E\{\Delta Y'(t, \omega) \,|\, Y'(t, \omega)\} = 0.$$

Introduisons alors l'intégrale

$$\alpha(t, t+\Delta t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{|z|\leqq\varepsilon} z^2\, d_z F(t, x;\, t+\Delta t, x+z)\right] d_x \varphi(t, x)$$
$$= \int_{|z|\leqq\varepsilon} z^2\, d_z P\{X(t+\Delta t, \omega) - X(t, \omega) < z\}$$
$$= E\{[\Delta Y'(t, \omega)]^2\}$$

à un infiniment petit en Δt^2 près. Compte tenu de la relation

$$E\{\Delta Y'(t, \omega) \,|\, Y'(t, \omega)\} = 0,$$

nous avons alors (*cf.* P. Lévy [40], p. 233)

$$E\{[Y'(T_1, \omega) - Y'(T_0, \omega)]^2\} = \int_{T_0}^{T_1} E\{[dY'(t, \omega)]^2\}.$$

Nous pouvons alors définir une fonction $\alpha(I)$ de l'intervalle $I \subset (T_0, T_1)$ par

$$\alpha(I) = \int_I E\{[dY'(t, \omega)]^2\}.$$

Cette fonction est une fonction additive de son argument, l'intervalle I. En faisant l'hypothèse (H) et en faisant le même raisonnement que précédemment on conclut que, sauf peut-être pour un intervalle Δ' de valeurs de t de mesure-B nulle, on a

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{\alpha(t, t+\Delta t)}{\Delta t} = a(t) \geqq 0 \qquad [a(t) \text{ fini}],$$

c'est-à-dire avec les notations initiales :

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{|z| \leqq \varepsilon} z^2 \, d_z F(t, x; t+\Delta t, x+z) \right] d_x \Phi(t, x) = a(t) \geqq 0.$$

Pour les mêmes raisons que précédemment une relation de ce type, avec un $a(t)$ différent, a lieu quelle que soit $\Phi(t, x)$. En plaçant à l'instant t la masse $+1$ au point x on obtient en définitive

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|z| \leqq \varepsilon} z^2 \, d_z F(t, x; t+\Delta t, x+z) = a(t, x) \geqq 0$$

et ceci

$$\forall\, t \in [T_0, T_1] - \Lambda', \qquad \operatorname{mes}_B(\Lambda') = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall\, x \in R.$$

Cette condition peut s'écrire

$$E\{[dX'(t, \omega)]^2 \mid X'(t, \omega) = x\} = a(t, x)\, dt,$$

c'est-à-dire le second moment conditionnel de l'accroissement $dX'(t, \omega)$ est un infiniment petit de l'ordre de dt.

Comme nous venons de le voir, les coefficients $a(t, x)$ et $b(t, x)$ n'existent que presque-partout; ceci est dû en grande partie à l'existence des composantes singulières $\alpha_2(I)$ et $\beta_2(I)$. Il en résulte que le processus ne peut être décrit entièrement par les coefficients $a(t, x)$ et $b(t, x)$; on ne peut atteindre par ce procédé que ce qu'on pourrait appeler sa partie absolument continue.

Ceci nous conduit à isoler dans l'ensemble des processus réels de Markov globalement p. s. continus dans $[T_0, T_1]$ la classe de ceux pour lesquels les coefficients $a(t, x)$ et $b(t, x)$ existent *partout* et non plus seulement presque-partout. Les composantes singulières $\alpha_2(I)$ et $\beta_2(I)$ sont alors nécessairement identiquement nulles. Nous dirons que cette classe satisfait à l'hypothèse supplémentaire (H′) qui est en quelque sorte une hypothèse de continuité *absolue* p. s.

Il est une classe importante de processus du type étudié où la seule hypothèse de continuité globale p. s. jointe à l'hypothèse (H) implique l'hypothèse (H′) : c'est celle des processus réels de Markov *homogènes dans le temps*. En effet, dans ce cas, les coefficients $a(t, x)$ et $b(t, x)$ sont indépendants de t, se réduisent donc à $a(x)$ et $b(x)$; si donc ils existent pour presque tous les t ils existent nécessairement pour tous les t.

Supposons maintenant que le processus réel de Markov $X(t, \omega)$, $t \in [T_0, T_1]$ soit globalement p. s. continu dans $[T_0, T_1]$ et satisfasse en outre aux hypothèses (H) et (H′). Nous allons, comme précédemment, remplacer l'étude de $X(t, \omega)$ par celle de $X'(t, \omega)$ et nous introduirons le processus $Z'(t, \omega)$ dont l'accroissement est défini par

$$dZ'(t, \omega) = \frac{dX'(t, \omega) - b[t, X'(t, \omega)]\, dt}{\sqrt{a[t, X'(t, \omega)]}}$$

pour lequel on a

$$(a) \qquad E\{dZ'(t, \omega) \mid X'(t, \omega)\} = 0,$$

$$(b) \qquad E\{[dZ'(t, \omega)]^2 \mid X'(t, \omega)\} = dt$$

à un infiniment petit en $(dt)^2$ près.

Si en outre $a(t, x) \geqq \varepsilon$, $\forall (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $dZ'(t, \omega)$ est bornée en valeur absolue par une expression du type $\eta(T_1 - T_0)$:

$$(c) \qquad dZ'(t, \omega) \mid < \eta(T_1 - T_0).$$

En effet

$$\begin{aligned} dZ'(t, \omega) \mid &\leqq \frac{\mid dX'(t, \omega) \mid}{\sqrt{a[t, X(t, \omega)]}} + \frac{\mid b[t, X'(t, \omega)]\, dt \mid}{\sqrt{a[t, X'(t, \omega)]\, dt}} \sqrt{dt} \\ &\leqq \frac{\varepsilon}{\sqrt{a[t, X(t, \omega)]}} + \sqrt{dt}, \end{aligned}$$

d'où, si $a(t, x) \geqq \varepsilon$, $\mathbf{A}(t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$:

$$\mid dZ'(t, \omega) \mid \leqq \sqrt{\varepsilon} + \sqrt{dt} < \eta(T_1 - T_0)$$

pour un η convenablement choisi.

Un théorème de P. Lévy ([40], p. 238) montre alors que les trois conditions (a) (b) (c) entraînent que $\int_{T_0}^{T_1} dZ'(t, \omega)$ suit une loi de Laplace-Gauss d'espérance mathématique nulle et d'écart-type $\sqrt{T_1 - T_0}$, ce qui peut s'exprimer sous la forme

$$\int_{T_0}^{T_1} \frac{dX'(u, \omega)}{\sqrt{a[u, X'(u, \omega)]}} - \int_{T_0}^{T_1} \frac{b[u, X'(u, \omega)]}{\sqrt{a[u, X'(u, \omega)]}}\, du = \Xi(T_1, \omega) - \Xi(T_0, \omega),$$

où $\Xi(t, \omega)$, $t \in [T_0, T_1]$ est le processus de Wiener-Lévy.

Le raisonnement que nous avons fait étant valable quels que soient T_0, T_1, on a de même

$$\int_{T_0}^{t} \frac{dX'(u, \omega)}{\sqrt{a[u, X'(u, \omega)]}} - \int_{T_0}^{t} \frac{b[u, X'(u, \omega)]}{\sqrt{a[u, X'(u, \omega)]}}\, du = \Xi(t, \omega) - \Xi(T_0, \omega)$$
$$(\forall t \in [T_0, T_1]).$$

On peut écrire cette équation intégrale stochastique sous la forme différentielle symbolique introduite par K. Ito ([31], [32])

$$dX'(t, \omega) = b[t, X'(t, \omega)]\, dt + \sqrt{a[t, X'(t, \omega)]}\, d\Xi(t, \omega) \qquad (\forall t \in [T_0, T_1],$$

d'où le théorème (où l'on supprimera l'indice prime de X').

THÉORÈME 2. — *Tout processus réel de Markov p. s. continu dans* $[T_0, T_1]$, *qui satisfait aux hypothèses* (H) *et* (H′) *et pour lequel* $a(t, x) \geqq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $\forall (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ *peut être décrit, dans* $[T_0, T_1]$ *par l'équation différentielle stochastique*

$$(\mathrm{E}) \qquad dX(t, \omega) = b[t, X(t, \omega)]\,dt + \sqrt{a[t, X(t, \omega)]}\,d\Xi(t, \omega),$$

où $\Xi(t, \omega)$ *est le processus de* Wiener-Lévy.

Cette équation, déjà étudiée par K. ITO donne la loi de la probabilité de l'accroissement $dX(t, \omega)$ si l'on connaît la valeur de $X(t, \omega)$ à l'instant t. Ainsi, conditionnellement lorsque $X(t, \omega) = x$, on a

$$dX(t, \omega) = b(t, x)\,dt + \sqrt{a(t, x)}\,d\Xi(t, \omega),$$

c'est-à-dire $dX(t, \omega)$ est une variable aléatoire de Laplace-Gauss d'espérance mathématique $b(t, x)\,dt$ et d'écart-type $\sqrt{a(t, x)\,dt}$. Le déplacement infinitésimal $dX(t, \omega)$ résulte donc de la superposition d'un déplacement non aléatoire de vitesse $b[t, X(t, \omega)]$ et d'un mouvement laplacien d'espérance mathématique nulle et d'écart type $\sqrt{a[t, X(t, \omega)]\,dt}$.

REMARQUE. — Dans le cas des processus additifs satisfaisant aux hypothèses du théorème 2, l'équation (E) s'écrit

$$(\mathrm{E}') \quad dX(t, \omega) = b(t)\,dt + \sqrt{a(t)}\,d\Xi(t, \omega) = b(t)\,dt + \Xi(\omega)\sqrt{a(t)\,dt},$$

$\Xi(\omega)$ étant une variable aléatoire de Laplace-Gauss réduite.

P. LÉVY ([40], p. 166) a montré que, sous la seule hypothèse de la continuité p. s. dans $[T_0, T_1]$ un processus additif peut être décrit, dans $[T_0, T_1]$, par l'équation différentielle stochastique linéaire

$$(\mathrm{E}'') \qquad dX(t, \omega) = dB(t) + \Xi(\omega\sqrt{dA(t)},$$

$A(t)$ et $B(t)$ étant deux fonctions continues, la première étant en outre croissante. Pour obtenir la forme (E′) la seule hypothèse de la continuité p. s. dans $[T_0, T_1]$ ne suffit pas; il faut en outre faire les hypothèses (H) et (H′) qui entraînent en particulier que $A(t)$ et $B(t)$ sont des fonctions dérivables.

4. Discussion de l'équation différentielle stochastique de K. ITO. — N. WIENER [50] a établi que si les fonctions $a(t, x)$, $b(t, x)$ se réduisent à des constantes (càs correspondant au mouvement brownien linéaire) le processus défini par

$$X(t, \omega) - X(T_0, \omega) = \int_{T_0}^{t} b\,du + \int_{T_0}^{t} \sqrt{a}\,d\Xi(u, \omega) \qquad (t \in [T_0, T_1]$$

admet des trajectoires qui sont p. s. des fonctions continues. Nous nous proposons d'étendre ce résultat au cas général d'un processus décrit par l'équation différentielle stochastique

$$(6)\quad X(t,\omega)-X(T_0,\omega)=\int_{T_0}^{t} b[u, X(u,\omega)]\,du + \int_{T_0}^{t}\sqrt{a[u, X(u,\omega)]}\,d\Xi(u,\omega)\qquad (t\in[T_0, T_1])$$

au prix de certaines hypothèses assez légères.

THÉORÈME 3. (*cf.* R. FORTET [21], p. 199). — *Toute fonction aléatoire* $X(t,\omega)$ *solution de* (6) *est de Markov.*

Il suffit de montrer que la loi de probabilité de $X(t,\omega)$, $t > T_0$ ne dépend que de t, T_0, $X(T_0,\omega)$. Mais ceci est évident sur (6) puisque dans les intégrations n'interviennent que des valeurs à des instants $u \geqq T_0$.

THÉORÈME 4. (*cf.* J. L. DOOB [11], VI, § 3). — *Si les coefficients* $a(t,x)$ *et* $b(t,x)$ *satisfont aux hypothèses suivantes :*

$$\left.\begin{matrix} a(t,x) \\ b(t,x)\end{matrix}\right\} \leqq K < \infty \qquad [\forall (t,x)\in \mathbf{R}\times\mathbf{R}],$$

$$E\left\{ \left| \sqrt{a[u, X(u,\omega)]} - \sqrt{a[u, X(t,\omega)]}\right|^2 \,\middle|\, X(t,\omega)=x\right\} \leqq K(u-t)^{\eta}$$

avec

$$\eta > 0,\qquad t < u \qquad \text{et} \qquad \forall x\in\mathbf{R}$$

alors toute solution $X(t,\omega)$ *de* (6) *est p. s. une fonction continue.*

DÉMONSTRATION. — Nous poserons, pour $\Delta t > 0$:

$$\begin{aligned} &X(t+\Delta t,\omega)-X(t,\omega)\\ &\quad=\int_{t}^{t+\Delta t} b(u,x)\,du + \int_{t}^{t+\Delta t}\sqrt{a(u,x)}\,d\Xi(u,\omega)\\ &\qquad+\int_{t}^{t+\Delta t}\{b[u, X(u,\omega)]-b(u,x)\}\,du\\ &\qquad+\int_{t}^{t+\Delta t}\left\{\sqrt{a[u, X(u,\omega)]}-\sqrt{a(u,x)}\right\}d\Xi(u,\omega)\\ &\quad=I_1+I_2+I_3+I_4\\ \Rightarrow\ & P\{|X(t+\Delta t,\omega)-X(t,\omega)|\geqq 4\varepsilon \mid X(t,\omega)=x\}\\ &\quad\leqq\sum_{i=1}^{4} P\{|I_i|\geqq\varepsilon \mid X(t,\omega)=x\}.\end{aligned}$$

Nous allons majorer successivement chaque terme du second membre.

1° I_1 est une intégrale ordinaire de Lebesgue :

$$\Rightarrow \quad |I_1| \leqq K\,\Delta t; \qquad \text{si donc} \quad \Delta t < \frac{\varepsilon}{K} \qquad \text{on a} \quad |I_1| < \varepsilon,$$

$$\Rightarrow \quad P\left\{ |I_1| \geqq \varepsilon \,\middle|\, X(t,\,\omega) = x \right\} = 0 \qquad (\forall\, x \in \mathbf{R}).$$

2° I_2 est une variable aléatoire de Laplace-Gauss centrée et d'écart-type

$$\sigma = \sqrt{\int_t^{t+\Delta t} a(u,\,x)\,du} \leqq \sqrt{K\,\Delta t}.$$

Il vient donc

$$\begin{aligned}
&P\left\{ |I_2| \geqq \varepsilon \,\middle|\, X(t,\,\omega) = x \right\} \\
&= \int_{|u| \geqq \varepsilon} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) du = \int_{|v| \geqq \frac{\varepsilon}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv \\
&\leqq \int_{|v| \leqq \frac{\varepsilon}{\sqrt{K\Delta t}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv \leqq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{K\,\Delta t}}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2K\,\Delta t}\right).
\end{aligned}$$

3° $$\begin{aligned}
&P\left\{ |I_3| \geqq \varepsilon \,\middle|\, X(t,\,\omega) = x \right\} \\
&\leqq P\left\{ \int_t^{t+\Delta t} |b[u,\,X(u,\,\omega)] - b(u,\,x)|\,du \geqq \varepsilon \,\middle|\, X(t,\,\omega) = x \right\} \\
&\leqq \frac{1}{\varepsilon^2} E\left\{ \left[\int_t^{t+\Delta t} |b[u,\,X(u,\,\omega)] - b(u,\,x)|\,du \right]^2 \,\middle|\, X(t,\,x) = x \right\} \\
&\leqq \frac{\Delta t}{\varepsilon^2} E\left\{ \int_t^{t+\Delta t} |b[u,\,X(u,\,\omega)] - b(u,\,x)|^2\,du \,\middle|\, X(t,\,\omega) = x \right\} \\
&\leqq \frac{4K^2}{\varepsilon^2} (\Delta t)^2.
\end{aligned}$$

4° $$\begin{aligned}
&P\left\{ |I_4| \geqq \varepsilon \,\middle|\, X(t,\,\omega) = x \right\} \\
&\leqq \frac{1}{\varepsilon^2} E\left\{ \left[\int_t^{t+\Delta t} \left(\sqrt{a[u,\,X(u,\,\omega)]} - \sqrt{a(u,\,x)}\right) \right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. \times\, d\,\Xi(u,\,\omega) \right]^2 \,\middle|\, X(t,\,\omega) = x \right\} \\
&\leqq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_t^{t+\Delta t} E\left\{ \left|\sqrt{a[u,\,X(u,\,\omega)]} - \sqrt{a(u,\,x)}\right|^2 \,\middle|\, X(t,\,\omega) = x \right\} du \\
&\leqq \frac{K}{\varepsilon^2} \int_t^{t+\Delta t} (u-t)^{\eta} = \frac{K}{\varepsilon^2(1+\eta)} (\Delta t)^{1+\eta}.
\end{aligned}$$

En rassemblant ces quatre résultats, nous aurons en définitive

$$\frac{1}{\Delta t} P\left\{ |X(t+\Delta t) - X(t)| \geqq 4\varepsilon \,\middle|\, X(t, \omega) = x \right\}$$
$$\leqq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{K}}{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2K\,\Delta t}\right) + \frac{4K^2}{\varepsilon^2}\Delta t + \frac{K}{\varepsilon^2(1+\eta)}(\Delta t)^{\eta} \qquad (\forall x \in \mathbf{R}).$$

Il en résulte que lorsque $\Delta t \downarrow 0$ le premier membre tend vers zéro unifor-par rapport à $x \in \mathbf{R}$ et à $t \in [T_0, T_1]$; on sait alors que $X(t, \omega)$ est presque sûrement une fonction continue.

Une variable aléatoire est de l'ordre de grandeur de sa dispersion ; dans les conditions indiquées on a donc

$$I_1 + I_2 = O(\sqrt{\Delta t}).$$
$$I_3 = O(\Delta t),$$
$$I_4 = O\left(\sqrt{(\Delta t)^{1+\eta}}\right) \qquad (\eta > 0),$$

d'où

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = X(t + \Delta t, \omega) - X(t, \omega) = O(\sqrt{\Delta t}).$$

On en conclut que $X(t, \omega)$ est p. s. non dérivable en aucun point.

5. **Étude du module de continuité.** — L'étude des probabilités d'absorption rend nécessaire l'introduction de modules de continuité (en probabilité ou p. s. suivant les cas) pour les processus dont on sait qu'ils sont p. s. continus dans un intervalle. Dans ce qui suit nous prendrons pour intervalle de définition l'intervalle $[0, 1]$.

DÉFINITION. — *Soit* $\varphi(h)$ une fonction de $h \geqq 0$, continue, croissante et s'annulant avec h. On dit que la fonction $f(t)$ vérifie la condition de Lipschitz (ou de Hölder) faible relative à $\varphi(h)$ s'il existe un nombre $\varepsilon > 0$, tel que

$$|t' - t| = h \leqq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(t') - f(t)| \leqq \varphi(h) \qquad (\forall\, t, t' \in [0, 1]).$$

a. Processus de Wiener-Lévy. — *Soit* $\{X(t, \omega), t \in [0, 1]\}$ le processus de Wiener-Lévy considéré dans l'intervalle $[0, 1]$. P. LÉVY ([40], p. 172) a trouvé pour ce processus un module de continuité p. s. valable uniformément dans tout l'intervalle $[0, 1]$. Il a énoncé le théorème suivant :

THÉORÈME a. — *Soit* $\varphi_c(h) = c\sqrt{2h \operatorname{Log} 1/h}$.

Pour $c > 1$ le processus de Wiener-Lévy vérifie la condition de Hölder faible relative à $\varphi_c(h)$ avec probabilité 1 ; pour $c < 1$ il ne la vérifie pas, avec probabilité 1.

Ce théorème ne dit rien pour le cas $c = 1$. Ce point a été précisé par T. SIRAO [48].

THÉORÈME *b*. — *Soit* $\varphi_c(h) = \sqrt{h[2 \operatorname{Log} 1/h + c \operatorname{Log} \operatorname{Log} 1/h]}$.

Pour $c > 5$ le processus de Wiener-Lévy vérifie la condition de Hölder faible relative à $\varphi_c(h)$ avec probabilité 1 ; pour $c < -1$ il ne la vérifie pas, avec probabilité 1.

Il est possible de donner des précisions pour les cas $c = 5$ et $c = -1$.

Nous énoncerons sans démonstration le théorème :

THÉORÈME *c*. — *Soit*

$$\varphi_c(h) = \sqrt{h[2 \operatorname{Log} 1/h + 5 \operatorname{Log} \operatorname{Log} 1/h + c \operatorname{Log} \operatorname{Log} \operatorname{Log} 1/h]}.$$

Pour $c > 2$, le processus de Wiener-Lévy vérifie la condition de Hölder faible relative à $\varphi_c(h)$ avec probabilité 1.

Soit $\varphi_c(h) = \sqrt{h\, 2 \operatorname{Log} 1/h - \operatorname{Log} \operatorname{Log} 1/h + c \operatorname{Log} \operatorname{Log} \operatorname{Log} 1/h}$

Pour $c < 0$ il ne la vérifie pas, avec probabilité 1.

b. Cas d'un processus décrit par l'équation différentielle stochastique de K. ITO. — Supposons que le processus $\{X(t, \omega),\ t \in [0, 1]\}$ soit décrit par l'équation différentielle stochastique

$$\text{(E)} \qquad dX(t, \omega) = b[t, X(t, \omega)]\, dt + \sqrt{a[t, X(t, \omega)]}\, d\Xi(t, \omega).$$

THÉORÈME 5. — *Soit* $\varphi_c(h) = c\sqrt{2h \operatorname{Log} 1/h}$.

Si les coefficients $a(t, x)$ et $b(t, x)$ *satisfont aux hypothèses suivantes :*

$$\left.\begin{matrix} a(t, x) \\ |b(t, x)| \end{matrix}\right\} \leq K < \infty \qquad [\forall (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}],$$

$$\mathrm{E}\left\{ \left| \sqrt{a[u, X(u, \omega)]} - \sqrt{a(u, X(t, \omega))} \right|^2 \Big| X(t, \omega) = x \right\} \leq K(u - t)^{\eta},$$

avec

$$\eta > 1, \qquad t < u \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbf{R},$$

alors le processus $\{X(t, \omega),\ t \in [0, 1]\}$ *vérifie la condition de Hölder faible relative à* $\varphi_c(h)$ *pour* $c > \sqrt{K}$ *et ceci avec probabilité* 1.

Notons que ce théorème étend un résultat de R. FORTET [21] qui avait supposé $a(t, x) \equiv 1$, $|b(t, x)| \leq K < \infty$ et encore certaines autres hypothèses.

Posons

$$X(t+h,\omega)-X(t,\omega)$$
$$=\int_t^{t+h}\sqrt{a(u,x)}\,d\Xi(u,\omega)+\int_t^{t+h}b(u,x)\,du$$
$$+\int_t^{t+h}\left[\sqrt{a[u,X(u,\omega)]}-\sqrt{a(u,x)}\right]d\Xi(u,\omega)$$
$$+\int_t^{t+h}[b[u,X(u,\omega)]-b(u,x)]\,du=I_1+I_2+I_3+I_4.$$

Nous allons évaluer la quantité

$$\alpha(h)=P\{|X(t+h,\omega)-X(t,\omega)|>\varphi_{c+3\varepsilon}(h)\}$$
$$\leq P\{|I_1|>\varphi_c(h)\}+\sum_{j=2}^{4}P\{|I_j|>\varphi_\varepsilon(h)\}\qquad(\forall\,\varepsilon>0),$$

en observant que

$$P\{|I_i|>a\}=E\{P\{|I_i|>a\}\,|\,X(t,\omega)\}\qquad(\forall\,i=1,\ldots,4)$$

1° I_1 est une variable aléatoire de Laplace-Gauss centrée et d'écart-type

$$\sigma=\sqrt{\int_t^{t+h}a(u,x)\,du}\leq\sqrt{Kh};$$

il vient donc

$$P\{|I_1|>\varphi_c(h)\,|\,X(t,\omega)=x\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|u|>\frac{\varphi_c(h)}{\sqrt{Kh}}}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du$$
$$\leq\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\sqrt{Kh}}{\varphi_c(h)}\exp\left(-\frac{\varphi_c^2(h)}{2Kh}\right).$$

d'où cette majoration étant uniforme en $x\in\mathbf{R}$:

$$P\{|I_1|>\varphi_c(h)\}\leq\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\sqrt{Kh}}{\varphi_c(h)}\exp\left(-\frac{\varphi_c^2(h)}{2Kh}\right).$$

2° I_2 est une intégrale de Lebesgue ordinaire et $|I_2|\leq Kh$; en outre $\dfrac{h}{\varphi_\varepsilon(h)}\to 0$ lorsque $h\downarrow 0$ de sorte que pour h assez petit :

$$Kh\in\varphi_\varepsilon(h)\;\Rightarrow\;P\{|I_2|>\varphi_\varepsilon(h)\,|\,X(t,\omega)=x\}=0\qquad(\forall x\in\mathbf{R})$$
$$\Rightarrow\;P\{|I_2|>\varphi_\varepsilon(h)\}=0.$$

3° $P\{ |I_3| > \varphi_\varepsilon(h) \,|\, X(t,\omega) = x \}$

$$\leq \frac{1}{\varphi_\varepsilon^2(h)} E\{ |I_3|^2 \,|\, X(t,\omega) = x \}$$

$$\leq \frac{1}{\varphi_\varepsilon^2(h)} \int_t^{t+h} E\{ | \sqrt{a[u, X(u,\omega)]} - \sqrt{a(u,x)} |^2 \,|\, X(t,\omega) = x \} \, du$$

$$\leq \frac{1}{\varphi_\varepsilon^2(h)} \int_t^{t+h} K(u-t)^\eta \, du = \frac{K}{1+\eta} \frac{h^{1+\eta}}{\varphi_\varepsilon^2(h)} \qquad (\eta > 1),$$

d'où, cette majoration étant uniforme en $x \in \mathbf{R}$:

$$P\{ |I_3| > \varphi_\varepsilon(h) \} \leq \frac{K}{1+\eta} \frac{h^{1+\eta}}{\varphi_\varepsilon^2(h)}.$$

4° $P\{ |I_4| > \varphi_\varepsilon(h) \,|\, X(t,\omega) = x \}$

$$\leq P\left\{ \int_t^{t+h} |b[u, X(u,\omega)] - b(u,x)| \, du > \varphi_\varepsilon(h) \,\middle|\, X(t,\omega) = x \right\}$$

$$\leq \frac{1}{\varphi_\varepsilon^4(h)} E\left\{ \left(\int_t^{t+h} |b[u, X(u,\omega) - b(u,x)| \, du \right)^4 \,\middle|\, X(t,\omega) = x \right\}$$

$$\leq \frac{(2Kh)^4}{\varphi_\varepsilon^4(h)},$$

d'où, cette majoration étant uniforme en $x \in \mathbf{R}$:

$$P\{ |I_4| > \varphi_\varepsilon(h) \} \leq \frac{(2Kh)^4}{\varphi_\varepsilon^4(h)}.$$

En rassemblant ces résultats, on a pour $h > 0$ assez petit :

$$\alpha(h) \leq \sqrt{\frac{2K}{\pi}} \frac{\sqrt{h}}{\varphi_c(h)} \exp\left(-\frac{\varphi_c^2(h)}{2Kh} \right) + \frac{K}{1+\eta} \frac{h^{1+\eta}}{\varphi_\varepsilon^2(h)} + (2K)^4 \frac{h^4}{\varphi_\varepsilon^4(h)}$$

$$= \sqrt{\frac{K}{\pi}} \frac{1}{c\sqrt{\operatorname{Log} 1/h}} h^{c^2/K} + \frac{K}{2\varepsilon^2(1+\eta)} \frac{h^\eta}{\operatorname{Log} 1/h} + \frac{(2K)^4}{4\varepsilon^4} \frac{h^2}{(\operatorname{Log} 1/h)^2}.$$

Pour h assez petit, le second membre est une fonction monotone croissante de h; en outre

$$\alpha(h) \sim \mathcal{O}(1) \left[\frac{h^{c^2/K}}{\sqrt{\operatorname{Log} 1/h}} + \frac{h^\eta}{\operatorname{Log} 1/h} + \frac{h^2}{(\operatorname{Log} 1/h)^2} \right] \qquad (c^2/K > 1, \ \eta > 1).$$

Formons alors la quantité

$$\alpha\left(\frac{n}{2^n}\right) \sim \mathcal{O}(1) \left[n^{(c^2/K)+(1/2)} \frac{1}{(2^n)^{c^2/K}} + n^{\eta+1} \frac{1}{(2^n)^\eta} + \frac{1}{(2^n)^2} \right]$$

$$\Rightarrow \quad \sum_n n \cdot 2^n \alpha\left(\frac{n}{2^n}\right) \sim \mathcal{O}(1) \left[\sum_n \frac{n^{(c^2/K)+(1/2)}}{(2^n)^{(c^2/K)-1}} + \sum_n \frac{n^\eta}{(2^n)^{\eta-1}} + \sum_n \frac{n}{2^n} \right].$$

Puisque $c^2/K > 1$ et $\eta > 1$ les séries au second membre sont toutes convergentes; celles du premier le sont donc également. Puisque $\alpha(h)$ est borné, pour h assez petit, par une fonction monotone croissante de h, la conclusion s'obtient comme pour le processus de Wiener-Lévy.

Chapitre 4. — Application de la théorie des opérateurs linéaires à l'étude des processus réels de Markov.

Nous allons étudier certaines familles d'opérateurs linéaires qu'on peut associer aux processus réels de Markov. De tels opérateurs ont été introduits en 1937 par N. M. Krylov et N. N. Bogoljubov ([35], [36]) et par R. Fortet dans sa Thèse, [22]. Depuis lors, leur étude a fait l'objet de nombreux travaux, notamment de K. Yosida et S. Kakutani [1], W. Feller ([3], [7]), E. Hille ([1], [2]) et récemment J. Neveu ([45], [46]). Tous ces auteurs se sont placés d'emblée dans le cas des processus *homogènes dans le temps*, ce qui leur permettait d'appliquer le formalisme de la théorie des semi-groupes à un paramètre. D'ailleurs J. Neveu ([46], p. 338) a montré que le cas général se ramène au cas homogène au moyen d'une transformation relativement simple. Nous allons néanmoins faire une étude *directe* du cas général sans nous restreindre de prime abord au cas homogène.

Soit toujours $X(t, \omega)$ une fonction aléatoire réelle de Markov de fonction de répartition de passage

$$F(t, x; \tau, E) = P\{X(\tau, \omega) \in E \mid X(t, \omega) = x)\} \qquad (t < \tau),$$

E étant un ensemble linéaire mesurable-B.

Elle satisfait nécessairement à l'équation de Chapman-Kolmogorov :

$$F(t, x; \tau, E) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t, x; s, d\lambda)\, F(s, \lambda; \tau, E) \qquad (t \leqq s \leqq \tau)$$

qui est à la base de toute la théorie.

Nous allons considérer la fonction F comme le noyau commun de deux familles d'opérateurs linéaires intégraux définis de la façon suivante :

1. Opérateur progressif. — Soit M l'espace des fonctions d'ensemble (réelles ou complexes) définies sur la tribu des ensembles linéaires mesurables-B, complètement additives et à variation totale bornée. Dans M on peut définir une norme en prenant pour norme de $\varphi \in M$ sa variation totale

$$\|\varphi\|_M = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(dx)|.$$

On peut également y définir des éléments positifs par la convention

$$\varphi \geqq 0 \quad \leftrightarrow \quad \varphi(E) \geqq 0 \qquad (\forall\, E \text{ mesurable-}B).$$

On a alors

$$\| \varphi_1 + \varphi_2 \|_M = \| \varphi_1 \|_M + \| \varphi_2 \|_M \qquad \text{si} \quad \varphi_1,\ \varphi_2 \geqq 0.$$

L'espace M muni de cette norme est un espace de Banach complexe partiellement ordonné; la convergence est la convergence en variation.

Définissons alors la famille d'opérateurs $\{ T_{t,\tau} = t < \tau \}$ de M :

$$\varphi \in M \quad \to \quad \psi = T_{t,\tau}\, \varphi \in M$$

$$\Leftrightarrow \psi(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(dx)\, F(t,\, x;\, \tau,\, E) \qquad (t < \tau).$$

On vérifie que $T_{t,\tau}$ jouit des propriétés suivantes :

a. linéaire;
b. positif : $\Leftrightarrow \varphi \geqq 0 \Rightarrow T_{t,\tau}\, \varphi \geqq 0$;
c. borné : plus précisément $\| T_{t,\tau} \|_M = 1$;
d. isométrique pour les éléments positifs :

$$\Leftrightarrow \quad \varphi \geqq 0 \quad \Rightarrow \quad \| T_{t,\tau}\, \varphi \|_M = \varphi \mid_M;$$

e. $T_{t,\tau} = T_{s,\tau}\, T_{t,s},\ t < s < \tau.$

Cette loi de composition (associative) est une conséquence directe de l'équation de Chapman-Kolmogorov.

Dans le cas homogène, elle se réduit à la relation de définition des semi-groupes à un paramètre.

Remarque. — G. Birkhoff ([3], p. 137) a donné aux opérateurs de cette famille le nom d'opérateurs de transition qui s'explique tout de suite : si en effet on prend pour élément $\varphi \in M$ la distribution de probabilité *a priori* à l'instant t, c'est-à-dire un élément positif de norme 1, d'après (b) et (d) le transformé $T_{t,\tau}\, \varphi$ sera encore un élément positif de norme 1 qui n'est autre que la distribution de probabilité *a priori* à l'instant $\tau > t$.

2. **Opérateur rétrograde.** — Soit $\overline{M}$ l'espace des fonctions (réelles ou complexes) définies sur $\mathbf{R}$, bornées et mesurables-B. Dans $\overline{M}$ on peut définir une norme en prenant pour norme de $\overline{\varphi} \in \overline{M}$:

$$\| \overline{\varphi} \|_{\overline{M}} = \sup_{x \in \mathbf{R}} | \overline{\varphi}(x) |.$$

On peut également y définir des éléments positifs par la convention

$$\overline{\varphi} \geqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\varphi}(x) \geqq 0 \qquad (\forall\, x \in \mathbf{R}).$$

On a alors

$$\| \overline{\varphi}_1 + \overline{\varphi}_2 \|_{\overline{M}} = \| \overline{\varphi}_1 \|_{\overline{M}} + \| \overline{\varphi}_2 \|_{\overline{M}} \qquad \text{si} \quad \overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2 \geqq 0.$$

L'espace $\overline{M}$ muni de cette norme est un espace de Banach complexe partiellement ordonné; la convergence est la convergence uniforme.

Définissons alors la famille d'opérateurs $\{ \overline{T}_{\tau,t} : t < \tau \}$ de $\overline{M}$:

$$\overline{\varphi} \in \overline{M} \quad \to \quad \overline{\psi} = \overline{T}_{\tau,t} \overline{\varphi}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{\psi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi}(\lambda) F(t, x; \tau, d\lambda)$$

$$= E\{ \overline{\varphi}[X(\tau, \omega)] \mid X(t, \omega) = x \} \qquad (t < \tau).$$

On vérifie que $\overline{T}_{\tau,t}$ jouit des propriétés suivantes :

a'. linéaire;
b'. positif : $\Leftrightarrow \overline{\varphi} \geqq 0 \Rightarrow \overline{T}_{\tau,t} \overline{\varphi} \geqq 0$;
c'. borné : plus précisément $\| \overline{T}_{\tau,t} \|_{\overline{M}} = 1$;
d'. laisse invariant tout élément constant :

$$\Leftrightarrow \quad \text{si } \overline{\varphi}(x) \equiv k \quad \Rightarrow \quad T_{\tau,t} \overline{\varphi} = \overline{\varphi};$$

e'. $$\overline{T}_{\tau,t} = \overline{T}_{s,t} \overline{T}_{\tau,s} \qquad (t < s < \tau).$$

Cette loi de composition (associative) se déduit encore de l'équation de Chapman-Kolmogorov et se réduit à la relation de définition des semi-groupes à un paramètre dans le cas homogène.

Notons que les opérateurs de cette seconde famille ne sont plus isométriques pour les éléments positifs; ce ne sont donc plus des opérateurs de transition. En fait ils ne transforment pas les distributions de probabilité *a priori* mais les distributions de probabilité *conditionnelles*. En effet, revenons à l'équation de Chapman-Kolmogorov et faisons pour un instant abstraction des variables τ et E que nous considérerons comme des paramètres. Cette question s'écrit alors

$$F(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t, x; s, d\lambda) F(s, d\lambda) \qquad (t < s)$$

$$\Leftrightarrow \quad F(t, .) = T_{s,t} F(s, .)$$

ce qui justifie la notation $\overline{T}_{\tau,t}$ $(t < \tau)$.

Remarque 1. — On fait souvent l'hypothèse plus stricte que, pour t, τ, E fixés $F(t, x; \tau, E)$, $t < \tau$ est une fonction continue en $x \in \mathbf{R}$. Dans ce cas $\overline{M}$ doit être remplacé par l'espace $C(-\infty, +\infty)$ des fonctions (réelles ou complexes) définies sur $\mathbf{R}$, bornées et continues. Muni de la norme

$\|\overline{\varphi}\|_C = \sup_{x\in\mathbf{R}} |\overline{\varphi}(x)|$ cet espace est un espace de Banach complexe et partiellement ordonné, les éléments positifs y étant définis comme dans $\overline{M}$.

Notons qu'un processus de Markov dont l'opérateur rétrograde est un endomorphisme de $C(-\infty, +\infty)$ et qui satisfait en outre à la condition de continuité globale

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} F\{t, x; t+\Delta t, x - V(x) = 0\}$$

uniformément en t, x et pour tout voisinage ouvert $V(x)$ de x s'appelle un *processus de diffusion* dans la terminologie de W. Feller [17].

Remarque. — Dans la plupart des applications $F(t, x; \tau, E)$ est une fonction absolument continue de E; il existe alors une fonction $f(t, x; \tau, y) \geqq 0$ telle que :

1° c'est une fonction mesurable-B est sommable h en y sur $(-\infty, \infty)$ et ceci quels que soient t, x, τ; en outre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x; \tau, y)\, dy = 1;$$

2° c'est une fonction mesurable-B en x, quels que soient t, τ, y;
3° elle satisfait à l'équation de Chapman-Kolmogorov :

$$f(t, x; \tau, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x; s, \lambda) f(s, \lambda; \tau, y)\, d\lambda \qquad (t < s < \tau).$$

Les deux opérateurs $T_{t,\tau}$ et $\overline{T}_{\tau,t}$ peuvent alors s'écrire sous la forme

$$\varphi \in M \;\rightarrow\; \psi = T_{t,\tau}\varphi; \qquad \psi(E) = \int_E dy \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(dx) f(t, x; \tau, y);$$

$$\overline{\varphi} \in \overline{M} \;\rightarrow\; \overline{\psi} = \overline{T}_{\tau,t}\overline{\varphi}; \qquad \overline{\psi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi}(\lambda) f(t, x; \tau, \lambda)\, d\lambda.$$

L'interprétation de l'opérateur $\overline{T}_{\tau,t}$ ne subit pas d'altération. Quant à l'opérateur $T_{t,\tau}$, si nous bornons son domaine d'application à l'ensemble des fonctions $\varphi \in M$ qui sont elles-mêmes absolument continues, on peut le considérer comme un opérateur défini sur $L_1(-\infty, +\infty)$ de la façon suivante :

$$\varphi \in L_1 \;\rightarrow\; \psi = T_{t,\tau}\varphi; \qquad \psi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(t, x; \tau, y)\, dx.$$

Il est clair qu'avec cette nouvelle interprétation l'opérateur $T_{t,\tau}$ est toujours linéaire, positif, de norme 1 et isométrique pour les éléments positifs; c'est donc encore un opérateur de transition au sens de G. Birkhoff mais il ne transforme plus les distributions de probabilité *a priori* mais les densités de probabilité *a priori*.

Associons au couple $\varphi \in M$, $\overline{\varphi} \in \overline{M}$ le « produit scalaire »

$$(1) \qquad < \varphi, \overline{\varphi} > = \int_{-\infty}^{-\infty} \varphi(dx)\,\overline{\varphi}(x)$$

pour lequel on a l'inégalité de Hölder :

$$| < \varphi, \overline{\varphi} > | \leqq \| \varphi \|_M \| \overline{\varphi} \|_{\overline{M}}.$$

Nous dirons que les espaces M et $\overline{M}$ sont adjoints par rapport au produit scalaire (1). Remarquons qu'ils ne sont pas adjoints au sens strict de S. Banach ([1], p. 99-100).

Pour un couple fixé de valeurs t, τ les opérateurs $T_{t,\tau}$ et $\overline{T}_{\tau,t}$ sont alors également adjoints par rapport au produit scalaire (1); en effet, en écrivant de deux manières différentes l'intégrale double absolument convergente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(dx)\,\overline{\varphi}(y)\,F(t,\,x;\,\tau,\,dy),$$

il vient

$$< \varphi,\ \overline{T}_{\tau,t}\overline{\varphi} > = T_{t,\tau}\,\varphi,\ \overline{\varphi} >,$$

cette quantité étant en outre majorée en valeur abolue par $\| \varphi \|_M \| \overline{\varphi} \|_{\overline{M}}$. Dans le cas homogène cette relation a été établie par K. Yosida et S. Kakutani ([51], lemme 4.3).

Remarquons également que les opérateurs $T_{t,\tau}$ et $\overline{T}_{\tau,t}$ ne sont pas adjoints au sens strict de J. Banach.

Algèbre de Markov $\mathfrak{M}$. — Nous allons considérer le noyau commun $F(t,\,x\,;\tau,\,E)$ des deux opérateurs $T_{t,\tau}$ et $\overline{T}_{\tau,t}$ $(t<\tau)$ en tant que fonction de $x \in \mathbf{R}$ et de $E =$ ensemble mesurable-B de $\mathbf{R}$, comme élément d'une algèbre complexe de Banach appelée algèbre de Markov $\mathfrak{M}$ et définie de la façon suivante :

$\mathfrak{M}$ est l'espace de fonctions (réelles ou complexes) $E(x,\,E)$ des deux variables x et E satisfaisant aux conditions suivantes :

1° mesurable-B en x;

2° complètement additive en E;

3° $\sup\limits_{x \in \mathbf{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,\,d\lambda)| < \infty$.

Dans $\mathfrak{M}$ on peut alors définir une norme par

$$\| F \|_{\mathfrak{M}} = \sup_{x \in \mathbf{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,\,d\lambda)|$$

et l'on vérifie que, muni de cette norme $\mathfrak{M}$ définit une algèbre complexe de Banach, la multiplication de deux éléments F_1, $F_2 \in \mathfrak{M}$ étant définie par

$$F = F_1 . F_2 \iff F(x, E) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x, d\lambda) F_2(\lambda, E).$$

On aura trivialement

$$\| F_1 . F_2 \|_{\mathfrak{M}} \leqq \| F_1 \|_{\mathfrak{M}} \| F_2 \|_{\mathfrak{M}}.$$

On verra facilement que cette multiplication est associative, mais non commutative en général et qu'elle admet un élément neutre, à savoir

$$\Delta : \quad \Delta(x, E) = \begin{cases} 1 & (x \in E), \\ 0 & (x \notin E). \end{cases}$$

Il résulte des définitions précédentes qu'on a

$$(2) \qquad \left. \begin{array}{l} \| T_{t,\tau} \|_M \\ \| \overline{T}_{\tau,t} \|_{\overline{M}} \end{array} \right\} \leqq \sup_{x \in \mathbf{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} | \mathrm{F}(t, x; \tau, d\lambda) | = \| \mathrm{F}_{t,\tau} \|^{\mathfrak{M}},$$

d'où

Théorème. — *Les normes des opérateurs $T_{t,\tau}$ et $\overline{T}_{t,\tau}$ considérés comme opérateurs dans leurs espaces respectifs sont bornées par la norme de leur noyau commun considéré comme élément de $\mathfrak{M}$. Ces normes sont toutes égales à 1 lorsque $F(t, x; \tau, E)$ est une fonction de probabilité de passage.*

Les opérateurs correspondant à l'élément unité Δ de $\mathfrak{M}$ sont respectivement les opérateurs identiques sur M et $\overline{M}$.

On a en effet

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(dx) \Delta(x, E) = \varphi(E) \qquad (\forall \varphi \in M),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi}(y) \Delta(x, dy) = \overline{\varphi}(x) \qquad (\forall \overline{\varphi} \in \overline{M}).$$

Mode de continuité ($\mathcal{C}$). — Bornons-nous dorénavant aux noyaux $F(t, x; \tau, E)$ qui sont des probabilités de passage. Nous allons introduire pour ces noyaux un mode de continuité locale applicable aux processus réels de Markov.

Définition. — On dit que la fonction aléatoire réelle de Markov $X(t, \omega)$, $t \in (T_0, T_1)$ présente au point t_0 la continuité ($\mathcal{C}$) si l'on a simultanément

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \| F_{t_0, t_0 + \Delta t} - \Delta \|_{\mathfrak{M}} = 0,$$

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \| F_{t_0 - \Delta t, t_0} - \Delta \|_{\mathfrak{M}} = 0.$$

REMARQUE. — La continuité locale ($\mathcal{C}$) au point t_0 exprime que, lorsque $\Delta t \downarrow 0$, $F(t_0, x; t_0+\Delta t, E)$ tend vers $\Delta(x, E)$ en moyenne absolue d'ordre 1 et ceci uniformément en x.

THÉORÈME 1. — *La continuité locale ($\mathcal{C}$) au point t_0 entraîne la continuité locale de Feller au point t_0.*

Ceci résulte immédiatement de l'inégalité

$$\begin{aligned} &\sup_{x\in\mathbf{R}} \int_{|y-x|>\varepsilon} F(t_0, x; t_0+\Delta t, dy) \\ &= \sup_{x\in\mathbf{R}} \int_{|y-x|>\varepsilon} |F(t_0, x; t_0+\Delta t, dy - \Delta(x, dy)| \\ &\leq \| F_{t_0, t_0+\Delta t} - \Delta \| \qquad (\forall \varepsilon > 0) \mathrm{l} \end{aligned}$$

REMARQUE. — La continuité locale ($\mathcal{C}$) au point τ_0 (respectivement t_0) entraîne

$$\lim_{\Delta\tau\downarrow 0} \| F_{t, \tau_0+\Delta\tau} - F_{t, \tau_0} \|_{\mathfrak{M}} = 0 \qquad (t < \tau_0)$$

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0} \| F_{t_0+\Delta t, \tau} - F_{t_0, \tau} \|_{\mathfrak{M}} = 0 \qquad (t_0 < \tau)$$

(*cf.* une continuité dans A. BLANC-LAPIERRE et FORTET [4], p. 334). Ces propriétés se démontrent simplement en utilisant l'équation de Chapman-Kolmogorov.

THÉORÈME 2. — La continuité locale ($\mathcal{C}$) au point t, entraîne :

a. la convergence au sens de la topologie uniforme dans M, lorsque $\Delta t \downarrow 0$, de l'opérateur $T_{t, t+\Delta t}$ vers l'opérateur identique I dans M;

b. la convergence au sens de la topologie uniforme dans $\overline{M}$, lorsque $\Delta t \downarrow 0$, de l'opérateur $\overline{T}_{t+\Delta t, t}$ vers l'opérateur identique $\overline{I}$ dans $\overline{M}$.

En effet, il résulte des inégalités (2) que

$$\left.\begin{aligned} &\| T_{t, t+\Delta t} - I \|_M \\ &\| \overline{T}_{t+\Delta t, t} - \overline{I} \|_{\overline{M}} \end{aligned}\right\} \leq \| F_{t, t+\Delta t} - \Delta \|_{\mathfrak{M}}.$$

On voit de façon analogue que

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0} \| T_{t+\Delta t, t} - I \|_M = 0,$$

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0} \| \overline{T}_{t, t+\Delta t} - \overline{I} \|_{\overline{M}} = 0.$$

Il en résulte que les opérateurs $T_{t,\tau}$ et $\overline{T}_{\tau,t}$, $t < \tau$ sont alors continus au sens de la topologie uniforme respectivement dans M et $\overline{M}$ en t et τ séparément. En effet

$$T_{t+\Delta t,\tau} - T_{t,\tau} = T_{+\Delta t,\tau} - T_{t+\Delta t,\tau}\, T_{t,t+\Delta t} = T_{t+\Delta t,\tau}[I - T_{t,t+\Delta t}]$$
$$\Rightarrow \quad \| T_{t+\Delta t,\tau} - T_{t,\tau} \|_M \leqq \| T_{t,t+\Delta t} - I \|_M$$

et des inégalités analogues lorsqu'on remplace le couple $(t + \Delta t, \tau)$ par les couples $(t - \Delta t, \tau)$, $(t, \tau + \Delta\tau)$, $(t, \tau - \Delta\tau)$, ce qui établit la propriété pour l'opérateur $T_{t,\tau}$. Même démonstration pour l'opérateur $\overline{T}_{\tau,t}$.

Dans le cas homogène cette propriété est la suivante : si T_λ, $\lambda \geqq 0$ est continue, au sens de la topologie uniforme dans M, à droite de l'origine, il est continu, tout court, au sens de la même topologie, en tout point $\lambda > 0$. De même, pour $\overline{T}_\lambda$.

La continuité locale $(\mathcal{C})$ au point t entraîne que l'opérateur $T_{t,t+\Delta t}$, $(\Delta t > 0)$ admet un opérateur inverse $T^{-1}_{t,t+\Delta t}$, du moins pour Δt assez petit, et que cet inverse est unique,

Soit alors $\mathfrak{M}^0$ l'algèbre de Banach dont les éléments sont les opérateurs linéaires bornés qui transforment M dans M : $\mathfrak{M}^0 = \mathcal{E}(M) =$ algèbre des endomorphismes de M. L'inverse de $x \in \mathfrak{M}^0$ appartient également à $\mathfrak{M}^0$ et est une fonction continue de x (*cf.* E. Hille [29], p. 92, théorème 5.2.3).

Nous avons déjà vu que $T_{t,\tau} (t < \tau)$, est une fonction continue de τ, $\Rightarrow$ l'intégrale $\int_\alpha^\beta T_{t,\tau}\, d\tau$, $t \leqq \alpha < \beta$, prise au sens de la topologie uniforme, existe pour des valeurs finies de α, β et est un élément de $\mathfrak{M}^0$. En outre, on a, pour toute valeur de $\alpha (\geqq t)$,

$$\lim_{\beta \to \alpha} \frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta T_{t,\tau}\, d\tau = T_{t,\alpha}.$$

Or nous avons vu que pour $\tau - t$ assez petit $T_{t,\tau}$ admet un inverse dans $\mathfrak{M}^0$. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \leqq \alpha < \beta < t + \varepsilon$ l'intégrale $\int_\alpha^\beta T_{t,\tau}\, d\tau$ admet également un inverse dans $\mathfrak{M}^0$.

Ceci dit, considérons l'identité

$$\int_\alpha^\beta \frac{T_{t-h,\tau}\, T_{t,\tau}}{h}\, d\tau = \int_\alpha^\beta T_{t,\tau}\, d\tau \left[\frac{T_{t-h,t} - I}{h} \right] \left\{ \begin{array}{l} h > 0, \\ t \leqq \alpha < \beta < \infty. \end{array} \right.$$

Puisqu'on peut choisir α et β de façon que l'opérateur $\int_\alpha^\beta T_{t,\tau}\, d\tau$ admet un inverse, on en conclut que la condition nécessaire et suffisante pour que l'opérateur infinitésimal

$$A(t) \lim_{h \downarrow 0} \frac{T_{t-h,t} - I}{h}$$

existe au sens de la topologie uniforme est que la limite

$$(1) \qquad \lim_{h \downarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{T_{t-h,\tau} - T_{t,\tau}}{h} \, d\tau$$

existe dans le même sens; $A(t)$ est alors un élément de $\mathfrak{M}^0$.

Posons alors

$$T_{t-h,\tau} - T_{t,\tau+h} = \mathrm{R}(t, \tau; h).$$

La condition (1) s'écrit

$$\lim_{h \downarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{T_{t,\tau+h} - T_{t,\tau}}{h} \, d\tau + \lim_{h \downarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{R(t, \tau; h)}{h} \, d\tau.$$

Or la première limite existe puisque $T_{t,\tau}$ est continu en τ au sens de la topologie uniforme; en effet

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{T_{t,\tau+h} - T_{t,\tau}}{h} \, d\tau = \frac{1}{h} \left[\int_{\alpha+h}^{\beta+h} T_{t,\tau} \, d\tau - \int_{\alpha}^{\beta} T_{t,\tau} \, d\tau \right]$$

$$= \frac{1}{h} \int_{\beta}^{\beta+h} T_{t,\tau} \, d\tau - \frac{1}{h} \int_{\alpha}^{\alpha+h} T_{t,\tau} \, d\tau \quad \to \quad T_{t,\beta} - T_{t,\alpha}$$

d'où le théorème

THÉORÈME 3. — *Dans le cas où l'opérateur $T_{t,\tau}(t < \tau)$ est continu en t et en τ au sens de la topologie uniforme, la condition nécessaire et suffisante pour que l'opérateur infinitésimal $A(t) = \lim\limits_{h \downarrow 0} \dfrac{T_{t-h,t} - I}{h}$ existe au sens de la même topologie est que la limite*

$$\lim_{h \downarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{R(t, \tau; h)}{h} \, d\tau$$

existe dans le même sens ; $A(t)$ est alors un élément de $\mathfrak{M}^0$.

Cette condition est réalisée lorsque $R(t, \tau; h) = L(t, \tau)\, h$, $L(t, \tau)$ étant un opérateur borné mesurable-B en τ. Remarquons que dans le cas homogène cette condition est vérifiée puisque $R(t, \tau; h \equiv 0$. On retrouve alors un théorème de N. DUNFORD (*cf.* E. HILLE [29], p. 165). Dans ce cas, la continuité locale ($\mathcal{C}$) à elle seule suffit à assurer l'existence, au sens de la topologie uniforme, de l'opérateur infinitésimal (indépendant de t) : $A = \lim\limits_{h \downarrow 0} \dfrac{T_h - I}{h}$. A vérifie en outre

$$A \int_{\alpha}^{\beta} T_t \, dt = T_{\beta} - T_{\alpha} \qquad (0 \leqq \alpha < \beta < \infty),$$

Dans la suite nous avons également à considérer la limite $\lim\limits_{h \nrightarrow 0} \dfrac{T_{t,t+h} - I}{h}$.
La condition nécessaire et suffisante pour qu'elle existe et soit égale à $A(t)$ est que $R(t, t; h) = o(h)$; pour le voir, il suffit de considérer l'identité

$$\frac{T_{t-h,t} - I}{h} - \frac{T_{t,t+h} - I}{h} = \frac{R(t, t; h)}{h}.$$

En définitive la continuité locale ($\mathcal{C}$), jointe aux restrictions sur $R(t, \tau; h)$ assure l'existence au sens de la topologie uniforme, des limites

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{T_{t-h,t} - I}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{T_{t,t+h} - I}{h} = A(t).$$

Un théorème analogue vaut pour $\overline{T}_{\tau,t}$.

3. Équations de Kolmogorov générales.

THÉORÈME 4. — *L'existence de l'opérateur infinitésimal $A(t)$ assure la dérivabilité en t et en τ, de l'opérateur $T_{t,\tau}$ $(t < \tau)$.*

En effet, vu la continuité de $T_{t,\tau}$ en t et τ, on a pour $\Delta t > 0$,

$$\frac{T_{t+\Delta t,\tau} - T_{t,\tau}}{\Delta t} = T_{t+\Delta t,\tau} \frac{I - T_{t,t+\Delta t}}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t^+} T_{t,\tau} = - T_{t,\tau} A(t).$$

On montre de même

$$\frac{\partial}{\partial t^-} T_{t,\tau} = - T_{t,\tau} A(t),$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau^+} T_{t,\tau} = A(\tau)\, T_{t,\tau},$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau^-} T_{t,\tau} = A(\tau)\, T_{t,\tau};$$

d'où finalement

$$(2) \qquad \left.\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} T_{t,\tau} = - T_{t,\tau} A(t) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial \tau} T_{t,\tau} = A(\tau)\, T_{t,\tau} \end{cases}\right\} (t < \tau).$$

Pour l'opérateur $\overline{T}_{\tau,t}$ on trouve, dans les mêmes conditions :

$$(3) \qquad \left.\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} \overline{T}_{\tau,t} = - \overline{A}(t)\, \overline{T}_{t,\tau} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial \tau} \overline{T}_{\tau,t} = \overline{T}_{\tau,t}\, \overline{A}(\tau) \end{cases}\right\} (t < \tau).$$

Remarque 1. — Dans le cas homogène, on a $T_{t,\tau} = T_{\tau-t}\,(t < \tau)$, de sorte que

$$\frac{\partial}{\partial \tau} T_{t,\tau} = -\frac{\partial}{\partial t} T_{t,\tau}; \qquad \frac{\partial}{\partial \tau} \overline{T}_{\tau,t} = -\frac{\partial}{\partial t} \overline{T}_{\tau,t}.$$

Les deux groupes d'équations (2) et (3) s'écrivent alors

$$(2') \qquad \frac{\partial}{\partial t} T_t = A\,T_t = T_t A,$$

$$(3') \qquad \frac{\partial}{\partial t} \overline{T}_t = \overline{A}\,\overline{T}_t = \overline{T}_t \overline{A}.$$

Les deux semi-groupes T_t et $\overline{T}_t$ ont alors les mêmes propriétés.

Remarque 2 :

$$\left.\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t\,\partial \tau} T_{t,\tau} = \dfrac{\partial^2}{\partial \tau\,\partial t} T_{t,\tau} = -A(\tau)\,T_{t,\tau}\,A(t) \\ \dfrac{\partial^2}{\partial t\,\partial \tau} \overline{T}_{\tau,t} = \dfrac{\partial^2}{\partial \tau\,\partial t} \overline{T}_{\tau,t} = -\overline{A}(t)\,\overline{T}_{\tau,t}\,\overline{A}(\tau) \end{cases}\right\} (t < \tau)$$

et dans le cas homogène

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} T_t = A^2\,T_t = T_t A^2, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} \overline{T}_t = \overline{A}^2\,\overline{T}_t = \overline{T}_t A^2. \end{cases}$$

A partir des équations (2) et (3) on peut déduire des équations différen- différentielles portant sur la fonction de répartition de passage $F(t, x; \tau, E)$, $t < \tau$.

$$1^{\circ} \quad \varphi \in M \;\rightarrow\; \psi = T_{t,\tau}\varphi \;\Longleftrightarrow\; \psi(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(dx)\,F(t, x; \tau, E).$$

Prenons la seconde des équations (2), il vient

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(T_{t,\tau}\varphi) = A(\tau)\,[T_{t,\tau}\varphi] \qquad (\forall \varphi \in M).$$

En prenant

$$\varphi(E) = \begin{cases} 1 & (E \ni x) \\ 0 & (E \not\ni x) \end{cases}$$

il vient

$$(4) \qquad \frac{\partial}{\partial \tau} F(t, x; \tau, .) = A(\tau)\,F(t, x; \tau, .),$$

où $A(\tau)$ opère sur la fonction F considérée comme fonction de E, c'est-à-dire sur F considérée comme élément de M.

2° $\quad \bar{\varphi} \in \overline{M} \quad \rightarrow \quad \bar{\psi} = \overline{T}_{\tau, t}\bar{\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\psi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}(y) F(t, x; \tau, dy).$

Prenons la première des équations (3); il vient

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{T}_{\tau, t}\bar{\varphi}) = -\overline{A}(t)[\overline{T}_{\tau, t}\bar{\varphi}] \qquad (\forall \bar{\varphi} \in \overline{M}).$$

En prenant

$$\bar{\varphi}(x) = \chi_E = \begin{cases} 1 & (x \in E) \\ 0 & (x \notin E) \end{cases}$$

il vient

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t, .\,; \tau, E) = -\overline{A}(t) F(t, .\,; \tau, E), \tag{5}$$

où $\overline{A}(t)$ opère sur la fonction F considérée comme fonction de x, c'est-à-dire sur F considérée comme élément de $\overline{M}$.

Nous aboutissons ainsi à un résultat un peu plus général que S. Bochner [2] qui s'était limité au cas où la loi de probabilité de passage admet une densité de probabilité.

Nous donnons en outre l'interprétation des opérateurs $A(t)$ (opérateur infinitésimal de $T_{t,\tau}$) et $\overline{A}(t)$ (opérateur infinitésimal de $\overline{T}_{\tau, t}$).

Montrons que les opérateurs $A(t)$ et $\overline{A}(t)$ sont adjoints par rapport au produit scalaire $\langle \varphi, \bar{\varphi} \rangle$, $\varphi \in M$, $\bar{\varphi} \in \overline{M}$.

En effet puisque les opérateurs $T_{t,\tau}$, $\overline{T}_{\tau, t}$ d'une part et les opérateurs identiques I, $\overline{I}$ dans les espaces M et $\overline{M}$ respectivement de l'autre sont adjoints par rapport à ce produit scalaire, on a, $\forall \varphi \in M$, $\bar{\varphi} \in \overline{M}$, $\Delta t > 0$:

$$\left\langle \varphi, \frac{\overline{T}_{t+\Delta t, t} - \overline{I}}{\Delta t} \bar{\varphi} \right\rangle = \left\langle \frac{T_{t, t+\Delta t} - I}{\Delta t} \varphi, \bar{\varphi} \right\rangle$$

d'où, lorsque les limites $\lim\limits_{\Delta t \downarrow 0} \dfrac{\overline{T}_{t, t+\Delta t} - \overline{I}}{\Delta t}$ et $\lim\limits_{\Delta t \downarrow 0} \dfrac{T_{t, t+\Delta t} - I}{\Delta t}$ existent au sens de la topologie uniforme dans leurs espaces respectifs :

$$\langle \varphi, \overline{A}(t) \bar{\varphi} \rangle = \langle A(t) \varphi, \bar{\varphi} \rangle,$$

ce qui démontre l'affirmation.

4. Étude des opérateurs dans la topologie forte. — Du point de vue de la topologie uniforme où nous nous sommes placé jusqu'à présent les espaces de Banach sous-jacents M et $\overline{M}$ ne jouaient aucun rôle; seule importait l'algèbre de Banach $\mathfrak{M}$ que nous avions appelée algèbre de Markov. Il en résultait que les deux opérateurs adjoints $T_{t,\tau}$ et $\overline{T}_{\tau,t}(t<\tau)$ étaient simultanément continus au sens de la topologie uniforme.

Il n'en est plus de même dans la topologie forte où il faut avoir recours aux propriétés des espaces de Banach M et $\overline{M}$. Il en résulte en particulier que les opérateurs $T_{t,\tau}$ et $\overline{T}_{\tau,t}\,(t<\tau)$ ne sont plus nécessairement simultanément continus au sens de la topologie forte; la continuité forte de $T_{t,\tau}$ sur M implique seulement la continuité vague de $\overline{T}_{\tau,t}$ sur une partie de $\overline{M}$ et réciproquement (*cf.* J. Neveu [45], p. 336).

a. Opérateur rétrograde. — Prenons pour espace fondamental la partie de $\overline{M}$ constituée par l'ensemble $C(-\infty, +\infty)$ des fonctions (réelles ou complexes) bornées et continues sur $\mathbf{R}$. On prendra la norme usuelle $\|\overline{\varphi}\|_C = \sup\limits_{x\in\mathbf{R}} |\overline{\varphi}|(x)$. L'opérateur $\overline{T}_{\tau,t}(t<\tau)$, est alors un endomorphisme de $C(-\infty, +\infty)$ et possède toutes les propriétés de l'opérateur $\overline{T}_{\tau,t}$ opérant sur $\overline{M}$.

Théorème 5. — *La continuité locale de Feller au point t entraîne la convergence au sens de la topologie forte dans $C(-\infty, +\infty)$, lorsque $\Delta t \downarrow 0$, de l'opérateur $\overline{T}_{t+\Delta t_1, t}$ vers l'opérateur identique $\overline{I}$ de $C(-\infty, +\infty)$.*

$$\Longleftrightarrow \lim_{\Delta t \downarrow 0} \|(\overline{T}_{t+\Delta t, t} - \overline{I})\overline{\varphi}\| = 0 \qquad (\forall \overline{\varphi} \in C[(-\infty, +\infty)].$$

On aura de même

$$\overline{T}_{t, t-\Delta t} \xrightarrow{f} \overline{I}.$$

On a en effet,

$$\begin{aligned}
[(\overline{T}_{t+\Delta t, t} - \overline{I})\overline{\varphi}](x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(t, x;\, t+\Delta t, dy)\,[\overline{\varphi}(y) - \overline{\varphi}(x)] \\
&= \int_{|y-x|\leq\varepsilon} + \int_{|y-x|>\varepsilon}, \qquad (\forall \varepsilon > 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \quad \|(\overline{T}_{t+\Delta t, t} - \overline{I})\overline{\varphi}\|_C &= \sup_{x\in\mathbf{R}} |[(\overline{T}_{t+\Delta t, t} - \overline{I})\overline{\varphi}](x)| \\
&\leq \sup_{|y-x|\leq\varepsilon} |\overline{\varphi}(y) - \overline{\varphi}(x)| \\
&\quad + 2M \sup_{x\leq\mathbf{R}} \int_{|y-x|>\varepsilon} F(t, x;\, t+\Delta t, dy),
\end{aligned}$$

où

$$M = \sup_{x\in\mathbf{R}} |\overline{\varphi}(x) < \infty;$$

1° d'après la continuité uniforme de $\overline{\varphi}(x)$ sur $\mathbf{R}$, $\forall \eta > 0$, $\exists \varepsilon(\eta) > 0$:

$$\sup_{|y-x|\leq\varepsilon} |\overline{\varphi}(y) - \overline{\varphi}(x)| < \eta;$$

2° d'après la continuité locale de Feller au point t, $\forall(\varepsilon, \eta) > 0$, $\exists h(\varepsilon, \eta) > 0$:

$$0 < \Delta t < h(\varepsilon, \eta) \quad \Rightarrow \quad \sup_{x \in \mathbf{R}} \int_{|y-x|>\varepsilon} F(t, x; t+\Delta t, dy) < \eta.$$

En choisissant d'abord ε, puis h, on peut donc réaliser

$$\|(\overline{T}_{t+\Delta t, t} - \overline{I})\overline{\varphi}\|_C \leq (1 + 2M)\eta.$$

Ce théorème peut être considéré comme une double généralisation d'un théorème de K. Yosida [54]. En effet K. Yosida énonce son théorème seulement dans le cas homogène, et il utilise en outre une hypothèse de continuité *globale* de Feller alors qu'une hypothèse de continuité locale suffit comme nous venons de le voir.

Remarque. — On a également, dans les mêmes conditions ($t < \tau$) :

$$\left.\begin{cases} \overline{T}_{\tau-\Delta\tau, t} \xrightarrow{f} \overline{T}_{\tau, t} \\ \overline{T}_{\tau+\Delta\tau, t} - \xrightarrow{f} \overline{T}_{\tau, t} \end{cases}\right\} \Delta\tau \downarrow 0,$$

$$\left.\begin{cases} \overline{T}_{\tau, t+\Delta t} \xrightarrow{f} \overline{T}_{\tau, t} \\ \overline{T}_{\tau, t-\Delta t} \xrightarrow{f} \overline{T}_{\tau, t} \end{cases}\right\} \Delta t \downarrow 0.$$

Démontrons la première de ces formules

$$\overline{T}_{\tau+\Delta\tau, t} - \overline{T}_{\tau, t} = \overline{T}_{\tau, t}(\overline{T}_{\tau+\Delta\tau, \tau} - \overline{I})$$
$$\Rightarrow \quad \|(\overline{T}_{\tau+\Delta\tau, t} - \overline{T}_{\tau, t})\overline{\varphi}\|_C \leq \|(\overline{T}_{\tau+\Delta\tau, \tau} - \overline{I})\overline{\varphi}\|_C.$$

b. Opérateur progressif. — Prenons pour espace fondamental la partie de M constituée de l'ensemble $L_1(-\infty, +\infty)$ des fonctions (réelles ou complexes) sommables sur $\mathbf{R}$. On prendra la norme usuelle $\|\varphi\|_L = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|\,dx$.

L'opérateur $T_{t,\tau}$ est alors un endomorphisme de $L_1(-\infty, +\infty)$ et possède toutes les propriétés de l'opérateur $T_{t,\tau}$ opérant sur M.

Théorème 6. — *La continuité locale de Feller au point t jointe à la condition* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x; \tau, y)\,dx \leq 1$ *entraîne la convergence au sens de la topologie forte dans* $L_1(-\infty, +\infty)$, *lorsque* $\Delta t \downarrow 0$, *de l'opérateur* $T_{t,t+\Delta t}$ *vers l'opérateur identique I dans* $L_1(-\infty, +\infty)$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{\Delta t \downarrow 0} \|(\overline{T}_{t, t+\Delta t} - \overline{I})\varphi\|_{L_1} = 0 \qquad [\forall \varphi \in L_1(-\infty, +\infty)].$$

On aura de même $T_{t-\Delta t, t} \xrightarrow{f} I$.

Considérons la fonction caractéristique de l'intervalle $[a, b]$

$$\varphi(x) = \chi_{[a,b]} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & (x \in [a, b]) \\ 0 & (x \notin [a, b]) \end{array} \right\} a < b, \qquad \varphi \in L_1$$

il vient

$$0 \leqq [T_{t, t+\Delta t} \varphi](y) = \int_a^b f(t, x; t+\Delta t, y)\, dx \leqq 1.$$

Or $T_{t, t+\Delta t}$ est isométrique pour les éléments positifs de L_1; dans notre cas :

$$b - a = \| \varphi \|_{L_1} = \| T_{t, t+\Delta t} \varphi \|_{L_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_a^b f(t, x; t+\Delta t, y)\, dx,$$

Supposons maintenant que le processus possède au point t la continuité de Feller, $\forall (\varepsilon, \eta) > 0$, $\exists h(\varepsilon, \eta) > 0$:

$$0 < \Delta t < h(\varepsilon, \eta) \quad \Rightarrow \quad \sup_{x \in \mathbf{R}} \int_{|y-x|>\varepsilon} f(t, x; t+\Delta t, dy < \eta$$

$$\Rightarrow \quad \| T_{t, t+\Delta t} \varphi \|_{L_1} \leqq \int_a^b dx \int_{|y-x| \leqq \varepsilon} f(t, x; t+\Delta t, y)\, dy < \eta(b-a),$$

d'où, lorsque $\Delta t \downarrow 0$:

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \int_a^b dx \int_{|y-x \leqq \varepsilon|} f(t, x; t+\Delta t, y)\, dy = \lim_{\Delta t \downarrow 0} \| T_{t, t+\Delta t} \varphi \|_{L_1} = b - a$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta t \downarrow 0} \int_a^b dx \int_{|y-x|>\varepsilon} f(t, x; t+\Delta t, y)\, dy = 0.$$

Or pour $x \in [a, b]$:

$$\{ |y - x| > \varepsilon \} \supset \{ (y > b + \varepsilon) \cup (y < a - \varepsilon) \}$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b dx \int_{|y-x|>\varepsilon} f(t, x; t+\Delta t, y)\, dy$$

$$\geqq \int_a^b dx \int_{\substack{y < a-\varepsilon \\ y > b+\varepsilon}} f(t, x; t+\Delta t, y)\, dy \to 0,$$

$\varepsilon > 0$ étant arbitraire il vient

$$(1) \qquad \lim_{\Delta t \downarrow 0} \int_{y \notin a|b]} dy \int_a^b f(t, x; t+\Delta t, y)\, dx = 0$$

$$(2) \qquad \Rightarrow \lim_{\Delta t \downarrow 0} \int_{y \in [a,b]} dy \int_a^b f(t, x; t+\Delta t, y)\, dx = b - a.$$

(1) et (2) peuvent encore s'écrire

$$(1') \qquad \lim_{\Delta t \downarrow 0} \int_{y \notin [a,b]} dy [(T_{t,t+\Delta t} - I)\varphi](y) = 0,$$

$$(2') \qquad \lim_{\Delta t \downarrow 0} \int_{y \notin [a,b]} dy [(I - T_{t,t+\Delta t})\varphi](y) = 0.$$

De par nos hypothèses, les termes entre crochets sont $\geqq 0$ de sorte que nous obtenons par addition :

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \,|[(T_{t,t+\Delta t} - I)\varphi](y)| = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta t \downarrow 0} \|(T_{t,t+\Delta t} - I)\varphi\|_{L_1} = 0.$$

Le théorème est ainsi démontré pour les fonctions caractéristiques d'intervalles $\varphi = \chi_{[a,b]}$. Or les combinaisons linéaires de telles fonctions sont denses dans $L_1(-\infty, +\infty)$. Puisque $\|T_{t,t+\Delta t}\| = 1$, il vient $\|T_{t,t+\Delta t} - I\| \leqq 2$ et le théorème de Banach-Steinhaus (*cf.* E. HILLE [29], p. 25) affirme alors que le théorème est valable pour tout $\varphi \in L_1(-\infty, +\infty)$.

Dans le cas du mouvement brownien linéaire, ce théorème a été démontré par E. HILLE ([29], p. 433, théorème **21.10.1**).

REMARQUE. — On a également, dans les mêmes conditions $(t < \tau)$:

$$\left.\begin{array}{l} T_{t,\tau+\Delta\tau} \xrightarrow{f} T_{t,\tau} \\ T_{t,\tau-\Delta\tau} \xrightarrow{f} T_{t,\tau} \end{array}\right\} \Delta\tau \downarrow 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} T_{t+\Delta t,\tau} \xrightarrow{f} T_{t,\tau} \\ T_{t-\Delta t,\tau} \xrightarrow{f} T_{t,\tau} \end{array}\right\} \Delta t \downarrow 0.$$

Démontrons la première de ces formules :

$$T_{t,\tau+\Delta\tau} - T_{t,\tau} = (T_{\tau,\tau+\Delta\tau} - I)\, T_{t,\tau}$$

$$\Rightarrow \|(T_{t,\tau+\Delta\tau} - T_{t,\tau})\varphi\|_{L_1} \leqq \|(T_{\tau,\tau+\Delta\tau} - I)\psi\|_{L_1},$$

où

$$\psi = T_{t,\tau}\varphi \in L_1(-\infty + \infty).$$

3. **Obtention des équations de Kolmogorov habituelles.** — Dans ce qui précède nous avons précisé les hypothèses qui assurent l'existence au sens de la topologie uniforme des opérateurs infinitésimaux adjoints $A(t)$ et $\overline{A}(t)$. Parmi ces hypothèses figurait la continuité locale $(\mathcal{C})$.

Pour que ces opérateurs soient des opérateurs différentiels paraboliques adjoints il est clair qu'une hypothèse de continuité locale ne suffit pas; il faut une hypothèse de continuité globale. En effet R. FORTET [20] a montré que la solution de la première équation de Kolmogorov définit, lorsque les coefficients a et b satisfont à certaines conditions, un processus de Markov

p. s. continu dans un intervalle. Faisons donc l'hypothèse de continuité globale p. s. dans un intervalle que nous écrivons sous la forme de W. Feller ·

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x|>\varepsilon} dy F(t, x; t+\Delta t, y) = 0, \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad (\Delta t > 0,$$

la limite étant atteinte uniformément en $x \in \mathbf{R}$ et $t \in \mathbf{R}$.

Faisons en outre les hypothèses supplémentaires qui permettent de déduire de cette continuité que le processus satisfait à l'équation différentielle stochastique de K. Ito :

$$(1) \qquad dX(t, \omega) = b[t, X(t, \omega)]\, dt + \sqrt{a[t, X(t, \omega)]}\, d\Xi(t, \omega).$$

En nous bornant alors aux noyaux $f(t, x; \tau, \lambda)$, $t < \tau$ représentant des densités de probabilités de passage, dérivables une fois en τ et deux fois en x et λ, les hypothèses que nous avons faites entraînent que les opérateurs $A(t)$ et $\overline{A}(t)$ sont les opérateurs différentiels adjoints définis localement par

$$[A(t)\varphi](x) = (1/2) \frac{\partial^2}{\partial x^2}[a(t, x)\varphi(t, x)] - \frac{\partial}{\partial x}[b(t, x)\varphi(t, x)],$$

$$[\overline{A}(t)\overline{\varphi}](x) = (1/2)\, a(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{\varphi}(t, x) + b(t, x) \frac{\partial}{\partial x}\overline{\varphi}(t, x).$$

a. *Opérateur progressif* (*cf.* P. Lévy [38], p. 64). — Soit φ une fonction réelle d'une variable réelle munie de deux dérivées continues et à support compact et considérons l'expression

$$M(\tau) = E\{\varphi[X(\tau, \omega)] \mid X(t, \omega) = x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) f(t, x; \tau, \xi)\, d\xi \qquad (t < \tau).$$

Ecrivons de deux manières différentes la dérivée par rapport à τ de cette quantité.

1° en dérivant sous le signe somme :

$$(a) \qquad \frac{\partial M(\tau)}{\partial \tau} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{\partial}{\partial \tau} f(t, x; \tau, \xi)\, d\xi;$$

2° en se servant de l'équation différentielle stochastique (1) :

$$\begin{aligned}
d\varphi[X(\tau, \omega)] &= \varphi'[X(\tau, \omega)]\, dX(\tau, \omega) + (1/2)\, \varphi''[X(\tau, \omega)]\, [dX(\tau, \omega)]^2 + o(d\tau) \\
&= \varphi'[X(\tau, \omega)] \left\{ b[\tau, X(\tau, \omega)]\, d\tau + \sqrt{a[\tau, X(\tau, \omega)]}\, d\Xi(\tau, \omega) \right\} \\
&\quad + (1/2)\, \varphi''[X(\tau, \omega)]\, a[\tau, X(\tau, \omega)]\, [d\Xi(\tau, \omega)]^2 + o(d\tau)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \frac{\partial M(\tau)}{\partial \tau} &= E\left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi[X(\tau, \omega)] \,\middle|\, X(t, \omega) = x \right\} \\
&= E\{ b[\tau, X(\tau, \omega)]\, \varphi'[X(\tau, \omega)] \\
&\qquad + (1/2)\, a[\tau, X(\tau, \omega)]\, \varphi''[X(\tau, \omega)] \mid X(t, \omega) = x \} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} [b(\tau, \xi)\, \varphi'(\xi) + (1/2)\, a(\tau, \xi)\, \varphi''(\xi)]\, f(t, x; \tau, \xi)\, d\xi.
\end{aligned}$$

En intégrant par parties et en admettant l'existence de b'_ξ, a'_ξ, a''_{ξ^2}, il vient

$$(b) \qquad \frac{\partial M(\tau)}{\partial \tau} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \Big[(1/2) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} [a(\tau, \xi) f(t, x; \tau, \xi)] - \frac{\partial}{\partial \xi} [b(\tau, \xi) f(t, x; \tau, \xi)] \Big] d\xi.$$

En égalant (a) et (b) et en remarquant que l'égalité ainsi obtenue a lieu quelle que soit la fonction φ appartenant à la classe envisagée, il vient

$$\frac{\partial}{\partial \tau} f(t, x; \tau, \xi) = (1/2) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} [a(\tau, \xi) f(t, x; \tau, \xi)] - \frac{\partial}{\partial \xi} [b(\tau, \xi) f(t, x; \tau, \xi)].$$

b. *Opérateur rétrograde :*

$$\left[\frac{\overline{T}_{t+\Delta t, t} - \overline{I}}{\Delta t} \overline{\varphi} \right](x) = \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi}(y) F(t, x; t+\Delta t, dy) - \overline{\varphi}(x) \right]$$
$$= \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{|y-x| \leqq \varepsilon} \overline{\varphi}(y) F(t, x; t+\Delta t, dy) - \overline{\varphi}(x) \right] + \varepsilon(\Delta t),$$

où $\varepsilon(\Delta t) \to 0$ lorsque $\Delta t \downarrow 0$:

$$= E' \left\{ \frac{\overline{\varphi}[X(t+\Delta t, \omega)] - \overline{\varphi}[X(t, \omega)]}{\Delta t} \,\Big|\, X(t, \omega) = x \right\} + \varepsilon(\Delta t)$$

où E' désigne l'espérance mathématique tronquée.

Supposons que $\overline{\varphi}(x)$ soit deux fois dérivable en x :

$$\overline{\varphi}[X(t+\Delta t, \omega)] - \overline{\varphi}[X(t, \omega)]$$
$$= \Delta X(t, \omega) \overline{\varphi}^1[X(t, \omega)] + (1/2)[\Delta X(t, \omega)]^2 \overline{\varphi}''[X(t, \omega)] + o[(\Delta X(t, \omega))^2]$$
$$\Rightarrow \left[\frac{\overline{T}_{t+\Delta t, t} - \overline{I}}{\Delta t} \overline{\varphi} \right](x)$$
$$= E' \left\{ \frac{\Delta X(t, \omega)}{\Delta t} \,\Big|\, X(t, \omega) = x \right\} \frac{\partial}{\partial x} \overline{\varphi}(x)$$
$$+ (1/2) E' \left\{ \frac{[\Delta X(t, \omega)]^2}{\Delta t} \,\Big|\, X(t, \omega) = x \right\} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \overline{\varphi}(x) + o(\Delta t),$$

d'où, lorsque $\Delta t \downarrow 0$:

$$[\overline{A}(t) \overline{\varphi}](x) = b(t, x) \frac{\partial}{\partial x} \overline{\varphi}(x) + (1/2) a(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \overline{\varphi}(x).$$

Prenons $\overline{\varphi}(x) = F(t+\Delta t, x; \tau, \xi)$:

$$\Rightarrow \left[\frac{\overline{T}_{t+\Delta t, t} - \overline{I}}{\Delta t} \overline{\varphi} \right](x) = -\frac{\Delta^t}{\Delta t} F(t, x; \tau, \xi).$$

L'existence de la limite $\left[\overline{A}(t)\,\overline{\varphi}\right](x)$ assure alors celle de $-\dfrac{\partial}{\partial t}F(t, x; \tau, \xi)$ et il vient

$$\frac{\partial}{\partial t}F(t, x; \tau, \xi) + b(t, x)\frac{\partial}{\partial x}F(t, x; \tau, \xi) + (1/2)\,a(t, x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}F(t, x; \tau, \xi) = 0.$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BANACH (Stefan). — *Théorie des opérations linéaires.* — Warszawa, M. Garasinski, 1932.

[2] BOCHNER (S.). — Diffusion equations and stochastic processes, *Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 35, 1949, p. 368-370.

[3] BIRKHOFF (Garrett). — *Lattice theory.* — New York, American mathematical Society, 1948 (*Amer. math. Soc. Coll. Publ.*, 25).

[4] BLANC-LAPIERRE (André) et FORTET (Robert). — *Théorie des fonctions aléatoires.* — Paris, Masson, 1953.

[5] CRAMÉR (Harald). — A contribution to the theory of stochastic processes, *Proceedings of the second Berkeley symposium on mathematical statistics and probability* [1950, Berkeley], p. 329-339. — Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1951.

[6] DOEBLIN (Wolfgang). — Sur l'équation de Kolmogoroff, *C. R. Acad. Sc.*, t. 207, 1938, p. 705-707.

[7] DOEBLIN (Wolfgang). — Sur certains mouvements aléatoires, *C. R. Acad. Sc.*, t. 208, 1939, p. 249-250.

[8] DOOB (J. L.). — Stochastic processes depending on a continuous parameter, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 42, 1937, p. 107-140.

[9] DOOB (J. L.). — Regularity properties of certain families of chance variables, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 47, 1940, p. 455-486.

[10] DOOB (J. L.). — Probability in function space, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 53, 1947, p. 15-30.

[11] DOOB (J. L.). — *Stochastic processes.* — New York, J. Wiley and sons; London, Chapman and Hall, 1953; *Math. Rev.*, t. 15, 1954, p. 445-447.

[12] DUGUÉ (Daniel). — Deux notions utiles en statistique mathématique : les ensembles bornés « en loi » et la continuité fortement uniforme en probabilité, *Colloque sur l'analyse statistique* [1954, Bruxelles], p. 133-141. — Liège, Georges Thone; Paris, Masson, 1955 (Centre belge de Recherches mathématiques).

[13] FELLER (William). — Zur Theorie der stochastischen Processe, *Math. Annalen*, t. 113, 1937, p. 113-160.

[14] FELLER (William). — Some recent trends in the mathematical theory of diffusion, *Proceedings international congress of mathematicians* [1950, Cambridge (Mass.)], vol. 2, p. 322-339. — Providence, American mathematical Society, 1952.

[15] FELLER (William). — The parabolic differential équations and the associated semi-groups of transformations, *Annals of Math.*, t. 55, 1952, p. 468-519.

[16] FELLER (William). — On positivity preserving semi-groups of transformations in $C[r_1, r_2]$, *Ann. Soc. polon. Math.*, t. 25, 1952, p. 85-94.

[17] FELLER (William). — Semi-groups of transformations in general weak topologies, *Annals of Math.*, t. 57, 1953, p. 287-308.

[18] FELLER (William). — Diffusion processes in one dimension, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 77, 1954, p. 1-31.

[19] FELLER (William). — The general diffusion operator and positivy preserving semi-groups in one dimension, *Annals of Math.*, t. 60, 1954, p. 417-436.

[20] FORTET (Robert). — Sur la notion de fonction aléatoire, *Revue scient.*, t. 79, 1941, 135-139.

[21] FORTET (Robert). — Les fonctions aléatoires du type de Markoff associées à certaines équations linéaires aux dérivées partielles du type parabolique, *J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. 22, 1943, p. 177-243.

[22] FORTET (Robert). — Sur l'itération des substitutions algébriques linéaires à une infinité de variables et ses applications à la théorie des probabilités en chaîne, *Rivista de Ciencias*, Lima, t. 40, 1938, p. 185-261, 337-447 et 481-528 (*Thèse Sc. math.*, Paris, 1939).

[23] FUCHS (Aimé). — Sur quelques points de la théorie des processus de Markoff presque sûrement continus dans un intervalle, *C. R. Acad. Sc.*, t. 237, 1953 p. 1137-1138.

[24] FUCHS (Aimé). — Sur la continuité stochastique des processus stochastiques réels de Markoff, *C. R. Acad. Sc.*, t. 237, 1953, p. 1388-1390.

[25] FUCHS (Aimé). — Sur un théorème de N. Wiener, *C. R. Acad. Sc.*, t. 240, 1955, p. 1396-1398.

[26] FUCHS (Aimé). — Sur certains opérateurs linéaires associés aux processus réels de Markoff, *C. R. Acad. Sc.*, t. 240, 1955, p. 1506-1508.

[27] GEFFROY (Jean). — Quelques extensions de la théorie de Paul Lévy sur la convergence presque sûre des séries aléatoires à termes indépendants, *C. R. Acad. Sc.*, t. 249, 1959, p. 1180-1185.

[28] HALMOS (Paul H.). — *Measure theory*. — New York, D. Van Nostrand Company, 1950.

[29] HILLE (Einar). — *Functional analysis and semi-groups*. — New York, American mathematical Society, 1948 (*Amer. math. Soc. Coll. Publ.*, 31).

[30] HILLE (Einar). — Les probabilités continues en chaîne, *C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1950, p. 34-35.

[31] ITÔ (Kiyosi). — Stochastic differential equations in a differential manifold, *Nagoyan math. J.*, t. 1, 1950, p. 35-47.

[32] ITÔ (Kiyosi). — *On stochastic differential equations*. — New York, American mathematical Society, 1951 (*Memoirs of the American mathematical Society*, 4).

[33] KINNEY (John R.). — Continuity properties of simple functions of Markoff processes *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 74, 1953, p. 280-302.

[34] KOLMOGOROFF (A.). — Über die analytischen Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Math. Annalen*, t. 104, 1931, p. 415-458.

[35] KRYLOFF (Nicolas) et BOGOLJUBOFF (Nicolas). — Sur les probabilités en chaîne, *C. R. Acad. Sc.*, t. 204, 1937, p. 1386-1388.

[36] KRYLOFF (Nicolas) et BOGOLJUBOFF (Nicolas). — Les probabilités ergodiques des suites de probabilités en chaîne, *C. R. Acad. Sc.*, t. 204, 1937, p. 1454-1456.

[37] LÉVY (Paul). — Processus fortement continus et loi de Laplace, *C. R. Acad. Sc.*, t. 222, 1946, p. 839-841.

[38] LÉVY (Paul). — *Processus stochastiques et mouvement brownien*. — Paris, Gauthier-Villars, 1948 (*Monographies des probabilités*, 6).

(39] LÉVY (Paul). — Exemples de processus pseudo-markoviens, *C. R. Acad. Sc.*, t. 228, 1949, p. 2004-2006.

[40] LÉVY (Paul). — *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. — Paris, Gauthier-Villars, 1954 (*Monographies des probabilités*, 1).

[41] LUKACS (Eugène). — On strongly continuous stochastic processes, *Sankhya*, t. 13, 1954, p. 219-228.

[42] LUKACS (Eugène). — Les problèmes d'estimation dans les processus stochastiques, *Séminaire de calcul des probabilités*, 1956-1957.

[43] MANN (H. B.). — *Introduction to the theory of stochastic processes depending on a certain parameter*. — Washington, U. S. Department of Commerce, 1953 (*National Bureau of Standards*, *Applied Mathematics Series*, 24).

[44] MARUYAMA (Gesiro). — Continuous Markoff processes and stochastic equations, *J. math. Soc. Japan*, t. 4, 1954, p. 40-43.

[45] NEVEU (Jacques). — Sur une hypothèse de Feller à propos de l'équation de Kolmogoroff, *C. R. Acad. Sc.*, t. 240, 1955, p. 590-591.

[46] NEVEU (Jacques). — *Théorie des semi-groupes de Markoff*, University of California, *Publications in Statistics*, t. 2, n° 14, July 1958, p. 319-394 (*Thèse Sc. math.*, Paris, 1955).

[47] RAY (Daniel). — Stationary Markov processes with continuous paths, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 82, 1956, p. 452-493.

[48] SIRAO (Tunekiti). — On the uniform continuity of Wiener process, *J. math. Soc. of Japan*, t. 6, 1954, p. 332-335.

[49] SLUTSKY (E.). — Qualche proposizione relativa alla teoria delle funzioni aleatorie, *Giornale Ist. italiano Attuari*, t. 8, 1937, p. 183-199.

[50] WIENER (Norbert). — Differential-space, *J. Math. Phys.*, *Mass. Inst. Techn.*, t. 2, 1923, p. 131-174.

[51] YOSIDA (Kôsaku) and KAKUTANI (Shizuo). — Operator-theoretical treatment of Markoff's process and mean ergodic theorem, *Annals of Math.*, t. 42, 1941, p. 188-228.

[52] YOSIDA (Kôsaku). — On the differentiability and the representation of one parameter semi-group of linear operators, *J. math. Soc. Japan*, t. 1, 1948, p. 15-21.

[53] YOSIDA (Kôsaku). — An operator-theoretical treatment of temporally homogeneous Markoff process, *J. math. Soc. Japan*, t. 1, 1949, p. 244-253.

[54] YOSIDA (Kôsaku). — On brownian motion in a homogeneous riemannian space, *Pacific J. Math.*, t. 2, 1952, p. 263-270.

[55] YOSIDA (Kôsaku). — Semi-group theory and the integration problem of diffusion equations, *Proceedings international congress of mathematicians* [1954, Amsterdam], vol. 1, p. 405-420. — Amsterdam, North-Hollands Publishing Company, 1957.

[56] YOSIDA (Kôsaku). On the generating parametrix of the stochastic processes *Proceedings nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 41, 1955, p. 240-244.

(Manuscrit reçu le 5 janvier 1960.)

Aimé FUCHS,
Maître de Conférences
à la Faculté des Sciences de Strasbourg,
5, rue Charles-Grad,
Strasbourg (Bas-Rhin).