Bulletin de la S. M. F.

D. André

Détermination du nombre des arrangements complets où les éléments consécutifs satisfont à des conditions données

Bulletin de la S. M. F., tome 7 (1879), p. 43-63
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1879__7__43_0>

Détermination du nombre des arrangements complets où les éléments consécutifs satisfont à des conditions données; par M. Désiré André.

(Séance du 13 décembre 1878.)

I. — Introduction.

1. Les arrangements complets de m objets n à n sont, comme on le sait, les groupes qu'on obtient en plaçant sur une même ligne, les uns à la suite des autres et de toutes les manières possibles, n des m objets donnés, un même objet pouvant entrer plusieurs fois dans un même groupe, et deux groupes différant entre eux soit par les objets qu'ils contiennent, soit par l'ordre où ces objets s'y succèdent.

Les objets dont nous parlons constituent les *éléments* des groupes et sont de nature quelconque. Ils peuvent être, par exemple, des lettres de l'alphabet. Quels qu'ils soient, le nombre des arrangements complets de m lettres n à n est égal à m^n.

Nous ne rappellerons point ici le procédé très-simple et très-connu qui conduit à ce résultat, le présent Mémoire ayant uniquement pour but la résolution des problèmes particuliers contenus dans l'énoncé général suivant :

Parmi les m^n arrangements complets de m objets n à n, combien y en a-t-il où les éléments consécutifs satisfont à des conditions données?

2. Ces problèmes particuliers sont en nombre infini, car les conditions données peuvent présenter une variété inépuisable. Ils sont difficiles, ou, du moins, réputés tels. Nous exposons d'abord une méthode générale qui permet de les résoudre tous, quelque compliqués qu'en soient les énoncés, d'une manière uniforme et simple.

A cause même de sa pleine généralité, cette méthode, pour être bien comprise, demande à être appliquée à de nombreux exemples.

Le premier problème auquel nous l'appliquions est celui-ci :

Avec un alphabet contenant v voyelles et c consonnes, combien peut-on former de mots de n lettres où il n'y ait jamais consécutivement plus de deux voyelles ni de deux consonnes?

Ce problème rentre évidemment dans notre énoncé général. Il en est de même du suivant :

Avec v notes distinctes, combien peut-on former de phrases musicales différentes présentant une durée déterminée et dans lesquelles chaque temps ne subisse que des divisions d'un certain ordre?

Le troisième problème considéré par nous ne rentre point aussi visiblement dans notre énoncé général [1]. Au fond, toutefois, il s'y ramène, et notre méthode lui est parfaitement applicable. C'est le problème que voici :

Sur un damier présentant une largeur de c cases et une profondeur indéfinie, par combien de chemins différents un pion qui ne recule jamais et qui part d'une case donnée peut-il arriver à une autre case donnée?

On connaît la difficulté proverbiale des problèmes sur le cavalier du jeu d'échecs. Notre méthode néanmoins s'applique trèsbien à celui-ci :

Sur un échiquier présentant une largeur de c cases et une profondeur indéfinie, par combien de chemins différents un cavalier qui ne recule jamais et qui part d'une case donnée peut-il arriver à une autre case donnée?

Ces quatre problèmes, résolus facilement par notre méthode générale, suffisent, croyons-nous, à en montrer la commodité et l'importance. Nous nous bornons donc à ces quatre applications, et nous terminons par quelques réflexions sur la méthode en analyse combinatoire.

II. — Méthode générale de résolution des problèmes considérés.

3. Rappelons d'abord notre énoncé général [1] :

Parmi les m^n arrangements complets de m objets n à n, combien y en a-t-il où les éléments consécutifs satisfont à des conditions données?

Puis, supposons formés tous ces arrangements dont on demande le nombre, et désignons ce nombre lui-même par X_n.

4. Évidemment, les conditions données nous fournissent le moyen de classer en différentes espèces les parties terminales de nos X_n arrangements, et, par conséquent, ces X_n arrangements eux-mêmes. Cette classification est le premier fondement de notre méthode.

Supposons qu'elle soit effectuée, c'est-à-dire que nos X_n arrangements soient ainsi distribués en différentes espèces, et désignons par A_n le nombre des arrangements de la première espèce, par B_n le nombre de ceux de la deuxième, par C_n le nombre de ceux de la troisième, et ainsi de suite. Nous aurons

$$X_n = A_n + B_n + C_n + \ldots,$$

et le calcul du nombre X_n sera ramené à celui des nombres A_n, B_n, C_n, ...

5. Pour déterminer ceux-ci, revenons aux conditions données. Quelles qu'elles soient, elles fournissent, pour les nombres A_n, B_n, C_n, ..., des équations liant chacun d'eux aux nombres A_{n-1}, B_{n-1}, C_{n-1}, ..., A_{n-2}, B_{n-2}, C_{n-2}, ..., A_{n-3}, B_{n-3}, C_{n-3}, ..., etc. Dans la presque totalité des cas, ces équations ne contiennent, outre A_n, B_n, C_n, ..., que les nombres A_{n-1}, B_{n-1}, C_{n-1}, ... Dans des cas exceptionnels, comme le problème [2] sur le cavalier du jeu d'échecs, on est obligé de prendre aussi A_{n-2}, B_{n-2}, C_{n-2}, ...; mais il n'arrive pour ainsi dire jamais qu'il faille aller jusqu'aux nombres A_{n-3}, B_{n-3}, C_{n-3}, ..., ni, *a fortiori*, aux nombres antérieurs.

Quoi qu'il en soit, si nous appelons λ le nombre des espèces de nos arrangements, les conditions données entre les éléments consécutifs nous fournissent λ équations reliant les nombres cherchés A_n, B_n, C_n, ... aux nombres analogues correspondant aux précédentes valeurs de n.

6. Entre ces λ équations et celles qu'on en peut déduire en faisant varier n, séparons les nombres A, B, C, ..., c'est-à-dire effectuons les éliminations nécessaires pour obtenir, à la place de ces équations, des équations nouvelles, telles que chacune d'elles ne renferme que des nombres A, ou des nombres B, ou des nombres C, etc.

L'équation ne contenant que des nombres A exprime la loi d'une suite récurrente dont A_n constitue le terme général. De même pour celles qui ne renferment que des nombres B, que des nombres C, et ainsi de suite.

7. Ainsi A_n est le terme général d'une certaine suite récurrente dont on connaît la loi. Comme on peut toujours calculer directement les premiers termes de cette suite, on peut, en se fondant sur la théorie des suites récurrentes, parvenir à l'expression générale de A_n. Par des procédés identiques, on arrivera à celle de B_n, à celle de C_n, etc.

Il va sans dire que, dans le cours de ces calculs, on profitera de toutes les simplifications qui se pourront présenter, et que, les expressions de A_n, B_n, C_n, ... une fois obtenues, il suffira de les ajouter pour avoir X_n, c'est-à-dire pour obtenir la solution même du problème considéré.

8. En résumé, notre méthode se réduit aux quatre opérations suivantes, dont les deux premières sont purement combinatoires et les deux dernières purement algébriques :

Tirer des conditions relatives aux éléments consécutifs un mode de classification des arrangements dont on cherche le nombre;

Déduire de ces mêmes conditions les équations qui donnent A_n, B_n, C_n, ... *en fonction des nombres analogues correspondant aux précédentes valeurs de* n;

Entre ces équations et celles qu'on en déduit en faisant varier

n, séparer, par une suite d'éliminations, les nombres inconnus A, B, C, ...;

Enfin, déterminer les expressions respectives de A_n, B_n, C_n, ... *et les ajouter.*

9. Nous allons appliquer, et d'une façon absolument littérale, cette méthode générale à la résolution des quatre problèmes que nous avons déjà énoncés [2].

III. — Problème sur l'alphabet.

10. *Avec un alphabet contenant v voyelles et c consonnes, combien peut-on former de mots de n lettres où il n'y ait jamais consécutivement plus de deux voyelles ni de deux consonnes?*

Tel est le premier problème énoncé par nous. Il rentre évidemment dans notre énoncé général [1], et, par suite, notre méthode générale lui est applicable. Cette application, comme nous l'allons voir, présente une simplification remarquable qui, d'ailleurs, se rencontre très-fréquemment et que l'on peut, pour ainsi dire, faire naître à volonté.

11. Supposons formés tous les mots de n lettres dont nous cherchons le nombre, et, par la considération des conditions données, d'une part, des lettres qui terminent ces mots d'autre part, tâchons de les classer.

Nous trouvons que ces mots sont de quatre espèces différentes :

1° Ceux qui finissent par une voyelle unique;

2° Ceux qui finissent par deux voyelles consécutives;

3° Ceux qui finissent par une consonne unique;

4° Ceux qui finissent par deux consonnes consécutives.

Appelons V'_n, V''_n, C'_n, C''_n les nombres de mots respectivement compris dans ces quatre espèces; désignons par X_n le nombre total des mots cherchés. Nous avons

$$X_n = V'_n + V''_n + C'_n + C''_n,$$

et nous serions conduits à calculer V'_n, V''_n, C'_n, C''_n, n'était la simplification annoncée.

12. Continuant à appliquer notre méthode générale, cherchons les équations qui lient les nombres V'_n, V'_n, C'_n, C''_n aux nombres V'_{n-1}, V''_{n-1}, C'_{n-1}, C''_{n-1}.

Les mots de n lettres finissant par une voyelle unique se déduisent évidemment des mots de $n - 1$ lettres finissant soit par une, soit par deux consonnes. Il suffit, pour obtenir ceux-là, d'écrire à la suite de ceux-ci, successivement, une à une, les v voyelles données. De là cette relation

$$V'_n = (C'_{n-1} + C''_{n-1})v.$$

Chaque mot de n lettres finissant par deux voyelles s'obtient évidemment par l'adjonction d'une des v voyelles données à la suite d'un mot de $n - 1$ lettres finissant par une voyelle unique. Donc

$$V''_n = V'_{n-1}v.$$

En raisonnant de la même façon sur les mots terminés par une ou par deux consonnes, on trouve les deux nouvelles relations

$$C'_n = (V'_{n-1} + V''_{n-1})c,$$
$$C''_n = C'_{n-1}c,$$

qui, jointes aux précédentes, forment un nombre d'équations égal au nombre des espèces de notre classification.

13. A l'aide d'un calcul fort aisé, nous tirons de ces quatre équations les quatre relations nouvelles

$$V'_n = vcV'_{n-2} + vc(v+c)V'_{n-3} + (vc)^2V'_{n-4},$$
$$V''_n = vcV''_{n-2} + vc(v+c)V''_{n-3} + (vc)^2V''_{n-4},$$
$$C'_n = vcC'_{n-2} + vc(v+c)C'_{n-3} + (vc)^2C'_{n-4},$$
$$C''_n = vcC''_{n-2} + vc(v+c)C''_{n-3} + (vc)^2C''_{n-4}.$$

Ces relations, où V', V'', C', C'' sont séparés, montrent que ces nombres sont chacun le terme général d'une série récurrente proprement dite.

Il se trouve que ces quatre séries récurrentes ont des lois identiques, et cette particularité, origine de la simplification annoncée [10], nous dispense de calculer isolément V'_n, V''_n, C'_n, C''_n et nous permet d'obtenir immédiatement X_n.

14. En effet, ajoutons membre à membre nos quatre dernières équations, en nous rappelant l'égalité fondamentale

$$X_n = V'_n + V''_n + C'_n + C''_n;$$

nous trouvons aussitôt

$$X_n = \nu c X_{n-2} + \nu c(\nu + c) X_{n-3} + (\nu c)^2 X_{n-4}.$$

Le nombre X_n est donc le terme général d'une série récurrente proprement dite, dont l'équation génératrice est l'équation du quatrième degré

$$x^4 - \nu c x^2 - \nu c(\nu + c)x - (\nu c)^2 = 0.$$

Comme nous ne connaissons point les racines de cette équation, nous ne pouvons appliquer, pour écrire l'expression générale de X_n, les règles de Lagrange, lesquelles supposeraient cette équation résolue. Nous recourrons donc aux règles que nous avons précédemment données pour écrire le terme général d'une série récurrente en fonction, non plus des racines, mais, ce qui est infiniment plus commode, des coefficients de l'équation génératrice.

Ces règles pourraient nous conduire à plusieurs expressions de X_n ; nous n'en donnerons qu'une.

15. Posons, conformément à ces règles,

$$\begin{aligned}
X_1 &= x_1, \\
X_2 &= x_2, \\
X_3 &= x_3 + \nu c X_1, \\
X_4 &= x_4 + \nu c X_2 + \nu c(\nu + c) X_1.
\end{aligned}$$

Le nombre cherché X_n sera donné par la formule

$$X_n = x_1 \Psi(n, 1) + x_2 \Psi(n, 2) + x_3 \Psi(n, 3) + x_4 \Psi(n, 4),$$

dans laquelle x_1, x_2, x_3, x_4, qu'on peut aisément calculer, ont pour valeurs respectives $\nu + c$, $(\nu + c)^2$, $2\nu c(\nu + c)$ et $2(\nu c)^2$, et où $\Psi(n, i)$ est fourni, pour chaque valeur de i, par l'égalité

$$\Psi(n, i) = \sum \frac{(\beta + \gamma + \delta)!}{\beta! \gamma! \delta!} (\nu + c)^\gamma (\nu c)^{\beta + \gamma + \delta},$$

le signe $\sum$ s'étendant, pour les entiers β, γ, δ, à tous les systèmes de valeurs positives ou nulles qui satisfont à la condition

$$2\beta + 3\gamma + 4\delta = n - i.$$

Telle est l'expression générale de X_n.

IV. — Problème sur la musique.

16. *Avec ν notes distinctes, combien peut-on former de phrases musicales différentes présentant une durée déterminée et dans lesquelles chaque temps ne subisse que des divisions d'un certain ordre?*

Avant d'aborder la résolution de ce très-intéressant problème, nous ferons remarquer que l'on peut toujours le ramener au cas où les temps ne sont point divisés. Si les temps étaient partagés, par exemple, en moitiés, en tiers ou en quarts, on pourrait prendre une moitié, un tiers ou un quart de temps pour unité de durée. En d'autres termes, nous pouvons toujours supposer la durée totale de la phrase partagée en un certain nombre de petites durées, toutes égales entre elles, et remplir chacune entièrement par un élément musical unique ; rien ne nous empêche d'appeler chacune de ces petites durées *un temps.*

En conséquence, nous pouvons, sans restreindre la généralité de notre présent problème, en mettre l'énoncé sous cette nouvelle forme :

Avec ν notes distinctes, combien peut-on former de phrases musicales différentes, de n temps non divisés?

17. A chacun de ces nouveaux temps correspondra, comme nous venons de le dire, un élément unique. Donc chacune de nos phrases sera un groupe de n éléments.

Ces éléments, d'ailleurs, seront évidemment de trois sortes : *note articulée, silence, prolongation.*

La note articulée sera l'une quelconque des ν notes données ; elle pourra se placer après un élément quelconque.

Le silence pourra aussi se mettre après tout élément.

La prolongation pourra suivre une note articulée ou une prolongation, mais ne devra jamais suivre un silence, un silence prolongé ne différant point, en effet, d'un silence répété; il y aurait double emploi.

18. Ces explications données, supposons formées toutes les phrases musicales qu'on nous demande et désignons-en le nombre par X_n.

Ces phrases sont de trois sortes, puisque leur dernier élément, qui occupe par hypothèse le $n^{\text{ième}}$ rang, est une note articulée, un silence ou une prolongation.

Nous désignerons par A_n le nombre des phrases de n éléments qui finissent par une note articulée; nous appellerons S_n le nombre de celles qui finissent par un silence, et P_n le nombre de celles qui finissent par une prolongation.

19. Conformément à notre méthode générale, nous venons de classer nos phrases de n éléments. Il nous reste, pour transformer notre problème en une simple question de calcul, à trouver les équations qui relient les nombres A_n, S_n, P_n, dont la somme est X_n, aux nombres précédents A_{n-1}, S_{n-1}, P_{n-1}.

Évidemment, on obtiendra toutes les phrases de n éléments terminées par une note articulée en faisant suivre successivement de chacune des ν notes données toutes les phrases de $n-1$ éléments. De là cette première équation

$$A_n = (A_{n-1} + S_{n-1} + P_{n-1})\nu.$$

De même, on obtiendra toutes les phrases de n éléments finissant par un silence en plaçant un silence après toutes les phrases de $n-1$ éléments. De là cette deuxième équation

$$S_n = A_{n-1} + B_{n-1} + C_{n-1}.$$

Enfin, pour former toutes les phrases de n éléments terminées par une prolongation, il suffira d'écrire une prolongation à la suite de chacune des phrases de $n-1$ éléments finissant soit par une note articulée, soit par une prolongation. De là cette troisième équation

$$P_n = A_{n-1} + P_{n-1}.$$

Nous possédons ainsi trois relations entre les nombres A_n, S_n, P_n et les nombres A_{n-1}, S_{n-1}, P_{n-1}.

20. De ces relations et de celles qu'on en déduit en faisant varier n on tire, par un calcul facile, les trois relations nouvelles

$$A_n - (\nu + 2) A_{n-1} + A_{n-2} = 0,$$
$$S_n - (\nu + 2) S_{n-1} + S_{n-2} = 0,$$
$$P_n - (\nu + 2) P_{n-1} + P_{n-2} = 0,$$

qui nous permettraient de déterminer les expressions respectives des nombres A_n, S_n, P_n.

Grâce à l'identité de ces relations, nous sommes dispensés de cette détermination. En les ajoutant membre à membre, nous trouvons immédiatement

$$X_n - (\nu + 2) X_{n-1} + X_{n-2} = 0,$$

et nous voyons que X_n est le terme général d'une série récurrente proprement dite, dont l'équation génératrice est évidemment

$$x^2 - (\nu + 2) x + 1 = 0.$$

21. En appliquant à ces derniers résultats le procédé de Lagrange, nous trouvons, pour l'expression générale de X_n,

$$X_n = t_1 R_1^n + t_2 R_2^n,$$

R_1 et R_2 étant les racines de l'équation génératrice qui précède [20], et t_1 et t_2 des coefficients indépendants de n, satisfaisant aux équations

$$t_1 R_1 + t_2 R_2 = X_1, \quad t_1 R_1^2 + t_1 R_2^2 = X_2,$$

dans lesquelles on a, comme on peut le voir directement,

$$X_1 = \nu + 1, \quad X_2 = \nu^2 + 3\nu + 1.$$

Si l'on effectue les calculs, on trouve finalement

$$X_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 + 4\nu}}\right)\left(\frac{\nu + 2}{2} + \frac{\sqrt{\nu^2 + 4\nu}}{2}\right)^n$$
$$+ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 + 4\nu}}\right)\left(\frac{\nu + 2}{2} - \frac{\sqrt{\nu^2 + 4\nu}}{2}\right)^n.$$

22. Si, au lieu du procédé de Lagrange, on emploie le premier de ceux que j'ai fait connaître, on trouve

$$X_n = (\nu + 1)\Psi(n, 1) - \Psi(n, 2),$$

$\Psi(n, i)$ étant donné par l'égalité

$$\Psi(n, i) = \sum \frac{(\alpha + \beta)!}{\alpha!\,\beta!}(\nu + 2)^\alpha(-1)^\beta,$$

dans laquelle le $\sum$ s'étend à tous les systèmes de valeurs possibles des entiers non négatifs α et β qui satisfont à la condition

$$\alpha + 2\beta = n - i.$$

23. On peut remarquer que, si, négligeant absolument les effets d'intonation, on veut ne tenir compte que des effets de mesure, notre problème se réduit à celui-ci :

Parmi les phrases musicales composées de n temps non divisés, combien s'en trouve-t-il qui diffèrent par la mesure?

Ce problème est évidemment un cas particulier du précédent; il suffit, pour en obtenir la solution, de remplacer, dans les résultats qu'on vient d'écrire, la lettre ν par l'unité.

V. — Problème sur le jeu de dames.

24. *Sur un damier présentant une largeur de c cases et une profondeur indéfinie, par combien de chemins un pion qui ne recule jamais et qui part d'une case donnée peut-il arriver à une autre case donnée?*

Pour abréger les éliminations auxquelles conduit notre méthode, nous supposerons c égal à 6. Cette hypothèse n'aura d'autre effet que d'abréger les calculs; notre méthode générale n'en sera ni restreinte ni altérée.

25. Nous supposons donc notre damier formé par une suite de rangées de six cases chacune. Nous supposerons de plus que, dans la première rangée, la première case à gauche soit blanche, et que notre pion parte d'une case blanche de cette première rangée.

Nous distinguerons d'ailleurs deux sortes de rangées : celles de rang impair, qui commencent par une case blanche et que nous nommerons *rangées impaires;* celles de rang pair, qui commencent par une case noire et que nous nommerons *rangées paires.*

La case de départ de notre pion appartenant toujours à la première rangée impaire, la case d'arrivée pourra appartenir soit à la $n^{\text{ième}}$ rangée impaire, soit à la $n^{\text{ième}}$ rangée paire. De là, dans le problème actuel, deux cas différents que nous traiterons l'un après l'autre.

26. Supposons d'abord que notre pion ait sa case d'arrivée sur la $n^{\text{ième}}$ rangée impaire.

Tous les chemins par lesquels ce pion peut arriver sur une case de cette $n^{\text{ième}}$ rangée impaire peuvent se classer en trois espèces : ceux qui se terminent sur la première case blanche de cette rangée, ceux qui se terminent sur la deuxième, ceux qui se terminent sur la troisième, les cases étant comptées à partir de la gauche.

Nous appellerons P_n, Q_n, R_n les nombres respectifs de ces trois sortes de chemins.

27. La $n^{\text{ième}}$ rangée impaire est précédée par la $(n-1)^{\text{ième}}$ rangée paire. Si nous appelons S_{n-1}, T_{n-1}, U_{n-1} les nombres respectifs des chemins qui se terminent, à partir de la gauche, sur la première, la deuxième ou la troisième case blanche de cette rangée paire, nous avons, d'après la marche bien connue du pion du jeu de dames, les six égalités suivantes :

$$\begin{aligned} P_n &= S_{n-1}, & S_{n-1} &= P_{n-1} + Q_{n-1}, \\ Q_n &= S_{n-1} + T_{n-1}, & T_{n-1} &= Q_{n-1} + R_{n-1}, \\ R_n &= T_{n-1} + U_{n-1}, & U_{n-1} &= R_{n-1}, \end{aligned}$$

d'où nous tirons immédiatement

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} + Q_{n-1}, \\ Q_n &= P_{n-1} + 2Q_{n-1} + R_{n-1}, \\ R_n &= Q_{n-1} + 2R_{n-1}. \end{aligned}$$

28. Une suite d'éliminations faciles, effectuées sur ces dernières égalités, nous donne les relations suivantes :

$$P_n = 5P_{n-1} - 6P_{n-2} + P_{n-3},$$
$$Q_n = 5Q_{n-1} - 6Q_{n-2} + Q_{n-3},$$
$$R_n = 5R_{n-1} - 6R_{n-2} + R_{n-3},$$

lesquelles nous montrent que chacun des nombres P_n, Q_n, R_n est le terme général d'une série récurrente proprement dite, admettant l'équation génératrice du troisième degré

$$x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0.$$

29. Par suite, si nous posons

$$P_1 = p_1,$$
$$P_2 = p_2 + 5P_1,$$
$$P_3 = p_3 + 5P_2 - 6P_1,$$

la valeur de P_n nous est donnée par la formule

$$P_n = p_1\Psi(n, 1) + p_2\Psi(n, 2) + p_3\Psi(n, 3),$$

l'expression $\Psi(n, i)$ étant définie par l'égalité

$$\Psi(n, i) = \sum \frac{(\alpha+\beta+\gamma)!}{\alpha!\beta!\gamma!} 5^\alpha(-6)^\beta,$$

dans laquelle le $\sum$ s'étend à tous les systèmes possibles de valeurs des entiers non négatifs α, β, γ qui satisfont à la condition

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma = n - i.$$

Les expressions de Q_n et R_n sont identiques ; il suffirait, pour les obtenir, de remplacer dans tout ce que nous venons d'écrire P et p soit par Q et q, soit par R et r.

30. En raisonnant de même pour le cas où la case d'arrivée appartient à une rangée paire, on trouverait

$$S_n = 5S_{n-1} - 6S_{n-2} + S_{n-3},$$
$$T_n = 5T_{n-1} - 6T_{n-2} + T_{n-3},$$
$$U_n = 5U_{n-1} - 6U_{n-2} + U_{n-3}.$$

Pour obtenir les expressions de S_n, U_n, T_n, il suffirait de prendre celles de P_n, Q_n, R_n et d'y remplacer les lettres P et p, Q et q, R et r respectivement par les lettres S et s, T et t, U et u.

31. Il est bien clair que, par les résultats qui précèdent, notre problème sur le pion du jeu de dames se trouve complétement résolu. Pour le bien montrer, considérons-en un cas particulier quelconque, celui, par exemple, où, la case de départ étant la seconde case blanche de la première rangée impaire, la case d'arrivée est la troisième de la $n^{\text{ième}}$ rangée paire.

Le nombre cherché est U_n. Nous trouvons, par un calcul direct,

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 1, \quad U_3 = 4,$$

et, par suite,

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = -1.$$

Donc nous avons, pour toutes valeurs de n, et en conservant aux expressions Ψ les significations [29] que nous leur avons assignées,

$$U_n = \Psi(n, 2) - \Psi(n, 3).$$

VI. — Problème sur le jeu d'échecs.

32. *Sur un échiquier présentant une largeur de c cases et une profondeur indéfinie, par combien de chemins différents un cavalier qui ne recule jamais et qui part d'une case donnée peut-il arriver à une autre case donnée?*

Tel est le problème que nous nous proposons de résoudre. Pour en abréger les calculs, nous prendrons c égal à 4. Mais nous ferons observer que cette valeur particulière attribuée à c n'enlève rien à la généralité de la méthode que nous allons suivre; elle n'a d'autre effet que de rendre moins longues les éliminations auxquelles se réduit la troisième partie [**6**] de notre méthode générale.

33. Dans cette hypothèse, notre échiquier aura une largeur de quatre cases et une profondeur indéfinie. Nous pourrons le regarder comme formé par une suite de rangées de quatre cases chacune. Nous supposerons que notre cavalier ait pour point de départ une case de la première rangée et pour point d'arrivée une case de la $n^{\text{ième}}$.

34. Les chemins différents que peut suivre un cavalier partant d'une case de la première rangée et arrivant, sans jamais reculer, à une case de la $n^{\text{ième}}$ peuvent se classer en quatre espèces, suivant qu'ils aboutissent finalement à telle ou telle des quatre cases de cette rangée. Prenons ces cases de gauche à droite, et appelons P_n le nombre des chemins aboutissant à la première case, Q_n celui des chemins aboutissant à la deuxième, R_n et S_n ceux des chemins qui aboutissent respectivement à la troisième et à la quatrième. Si nous donnons un moyen de calculer chacun de ces nombres, notre problème sera résolu.

35. Pour trouver ce moyen, cherchons les relations qui existent entre les nombres P_n, Q_n, R_n, S_n et les nombres analogues d'indices moindres.

La marche connue du cavalier et la figure formée par les trois rangées correspondant sur notre échiquïer aux trois indices n, $n-1$, $n-2$ nous donnent immédiatement les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
P_n &= Q_{n-2} + R_{n-1},\\
Q_n &= P_{n-2} + R_{n-2} + S_{n-1},\\
R_n &= P_{n-1} + Q_{n-2} + S_{n-2},\\
S_n &= Q_{n-1} + R_{n-2},
\end{aligned}$$

et, amenée à ce point, la solution de la question n'est plus qu'un calcul ordinaire.

36. Par une suite d'éliminations, que des remarques assez simples peuvent rendre faciles, nous déduisons des quatre relations qui précèdent les quatre relations suivantes :

$$\begin{aligned}
P_n &= 2P_{n-2} + 2P_{n-4} + 4P_{n-5} + 2P_{n-6} - P_{n-8},\\
Q_n &= 2Q_{n-2} + 2Q_{n-4} + 4Q_{n-5} + 2Q_{n-6} - Q_{n-8},\\
R_n &= 2R_{n-2} + 2R_{n-4} + 4R_{n-5} + 2R_{n-6} - R_{n-8},\\
S_n &= 2S_{n-2} + 2S_{n-4} + 4S_{n-5} + 2S_{n-6} - S_{n-8},
\end{aligned}$$

qui nous montrent d'abord que les nombres P_n, Q_n, R_n, S_n constituent chacun le terme général d'une série récurrente proprement dite, ensuite que chacune de ces séries admet l'équation génératrice

$$x^8 - 2x^6 - 2x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 1 = 0,$$

laquelle peut s'écrire aussi

$$(x+1)(x^3-x^2-x-1)(x^4+2x-1)=0.$$

37. Or, les procédés que nous avons fait connaître nous donnent immédiatement l'expression générale de P_n, Q_n, R_n, S_n. Considérons, en effet, P_n; nous savons que, si l'on pose

$$\begin{aligned}
P_1 &= p_1,\\
P_2 &= p_2,\\
P_3 &= p_3+2P_1,\\
P_4 &= p_4+2P_2,\\
P_5 &= p_5+2P_3+2P_1,\\
P_6 &= p_6+2P_4+2P_2+4P_1,\\
P_7 &= p_7+2P_5+2P_3+4P_2+2P_1,\\
P_8 &= p_8+2P_6+2P_4+4P_3+2P_2,
\end{aligned}$$

on a identiquement

$$P_n=\sum_{i=1}^{8} p_i\Psi(n,i),$$

$\Psi(n, i)$ étant donné par l'égalité

$$\Psi(n,i)=\sum(-1)^\theta \frac{(\beta+\delta+\varepsilon+\zeta+\theta)!}{\beta!\,\delta!\,\varepsilon!\,\zeta!\,\theta!}\,2^{\beta+\delta+2\varepsilon+\zeta},$$

dans laquelle le signe $\sum$ s'étend à tous les systèmes de valeurs des entiers non négatifs β, δ, ε, ζ, θ qui satisfont à la condition

$$2\beta+4\delta+5\varepsilon+6\zeta+8\theta=n-i.$$

Les expressions de Q_n, R_n, S_n se déduiraient d'ailleurs instantanément des relations qui précèdent; il suffirait de remplacer, dans toutes celles-ci, P et p par Q et q, ou R et r, ou S et s.

38. Nous voyons ainsi que P_n, Q_n, R_n, S_n seront connus dès que l'on connaîtra l'indice n, ainsi que les valeurs numériques des nombres p, q, r, s, qui sont, dans chaque espèce, au nombre de huit. Or, ces dernières valeurs pourront se calculer directement

dès que l'on connaîtra la case de départ; donc notre problème est complétement résolu.

39. Pour en bien faire comprendre la solution, prenons un exemple particulier. Supposons que la case de départ soit la seconde de la première rangée et la case d'arrivée la quatrième de la $n^{\text{ième}}$ rangée. Il s'agira de calculer S_n.

Or, dans ce cas particulier, on voit directement que les huit nombres $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8$ sont respectivement $0, 1, 0, -1, 1, 1, 0, 0$. Donc on a

$$S_n = \Psi(n, 2) - \Psi(n, 4) + \Psi(n, 5) + \Psi(n, 6),$$

les quantités Ψ gardant les significations qu'on leur a données [37] plus haut.

VII. — Sur la méthode en analyse combinatoire.

40. Les problèmes de l'analyse combinatoire sont de telle nature, que la résolution s'en réduit presque toujours à la recherche du nombre $X_{m,n}$ des groupes que l'on peut former, suivant certaines lois données, avec m objets pris n à n. La détermination de ce nombre dépend évidemment des lois données; d'ordinaire, elle présente des difficultés réelles d'autant plus grandes, qu'on ne trouve, dans les Livres et Mémoires, pour ainsi dire aucune indication sur la manière de les surmonter.

Évidemment d'ailleurs, ces difficultés sont de deux sortes, les unes de raisonnement, les autres de calcul; car la détermination du nombre $X_{m,n}$, comme la résolution des problèmes de l'analyse ordinaire, comprend deux parties successives : une partie de raisonnement, analogue à la mise en équations des problèmes d'Algèbre; une partie de calcul, analogue à la résolution de ces équations.

41. C'est dans la première partie que se présentent les difficultés les plus sérieuses. On s'y propose, non pas, certes, de trouver l'expression même de $X_{m,n}$ en fonction de m, de n et des paramètres introduits par les lois dont nous avons parlé : une détermination aussi immédiate ne pourrait convenir qu'à des cas tellement simples,

que leur extrême simplicité leur enlèverait toute espèce d'intérêt ; on s'y propose, disons-nous, de découvrir des relations où entre l'inconnue $X_{m,n}$; la grande difficulté, c'est d'arriver à de pareilles relations.

Si l'on étudie les procédés, si nombreux et en apparence si divers, employés jusqu'à présent dans cette recherche, on voit qu'ils consistent tous à comparer les groupes dont on cherche le nombre $X_{m,n}$ soit à des groupes dont les nombres sont connus, soit à des groupes dont les nombres sont inconnus.

Avec quels groupes doit-on comparer les groupes étudiés? De quelle manière doit s'effectuer cette comparaison? La réponse à cette double question ne peut être donnée pour tous les cas possibles. La formuler pour une série de cas déterminés, c'est-à-dire pour un ensemble déterminé de problèmes, ce serait donner la méthode générale permettant de résoudre tous ces problèmes, ce serait faire pour eux ce que nous venons de faire pour ceux qui rentrent dans l'énoncé général [1] donné au commencement du présent Mémoire.

Nous pouvons dire seulement, d'une façon assez vague, et en nous fondant bien moins sur le raisonnement que sur notre expérience, que le plus difficile n'est pas d'effectuer la comparaison des groupes étudiés avec d'autres groupes, mais de choisir ces autres groupes. Nous serions même tenté d'énoncer cette règle empirique : toutes les fois que la comparaison des groupes étudiés avec les autres groupes ne s'effectue pas très-facilement, toutes les fois, en d'autres termes, qu'elle ne conduit pas, d'une façon presque immédiate, à une ou plusieurs équations, c'est que les autres groupes sont mal choisis ; il faut procéder à un choix nouveau.

42. Quoi qu'il en soit, les groupes étudiés, comme ceux avec lesquels on les compare, n'entrent que par leurs nombres dans les relations auxquelles on parvient. Les groupes dont les nombres sont connus n'apportent, dans ces relations, que des quantités connues, dont il est pour ainsi dire inutile de s'occuper. Les groupes dont les nombres sont inconnus y apportent des quantités inconnues, et ces quantités inconnues, qu'il est indispensable de considérer, se partagent en trois classes parfaitement distinctes :

D'abord, le nombre $X_{m,n}$ des groupes étudiés ;

Ensuite, les nombres $X_{m',n'}$, $X_{m'',n''}$, ..., qui correspondent à des groupes formés suivant les mêmes lois que les groupes étudiés, mais différant de ceux-ci par les valeurs numériques des indices m et n, ou de l'un seulement de ces indices;

Enfin, les nombres $Y_{p,q}$, $Y_{p',q'}$, ..., $Z_{r,s}$, $Z_{r',s'}$, ..., etc., qui correspondent à des groupes différant de ceux qu'on étudie, non point par des valeurs numériques d'indices, mais par les lois mêmes qui président à leur formation.

L'inconnue $X_{m,n}$ entre forcément dans une ou plusieurs des relations qu'on obtient; les inconnues $X_{m',n'}$, $X_{m'',n''}$, ..., jointes à $X_{m,n}$, donnent lieu à des lois de récurrence simples ou doubles, suivant qu'elles présentent des variations d'un seul ou des deux indices; les inconnues $Y_{p,q}$, $Y_{p',q'}$, ..., $Z_{r,s}$, $Z_{r',s'}$, ..., etc., peuvent presque toujours être regardées comme des inconnues auxiliaires qu'il faut éliminer.

43. Supposons maintenant qu'on ait achevé la partie de raisonnement, c'est-à-dire qu'on ait réussi à former une ou plusieurs équations entre les inconnues. Il faut passer à la partie de calcul, qui, comme nous l'avons dit, est de beaucoup la moins difficile des deux.

Les difficultés qu'elle présente ne consistent, en effet, que dans des calculs à effectuer, et ceux-ci s'effectuent par les seuls procédés de l'Analyse ordinaire, non pas prise dans toute sa généralité, mais réduite aux trois théories de la résolution des équations, des séries récurrentes et de l'élimination.

Si l'on n'a introduit dans les calculs que la seule inconnue $X_{m,n}$, auquel cas il a suffi de former une seule équation, on n'a qu'à résoudre cette équation.

Si, outre $X_{m,n}$, on a considéré encore les inconnues analogues $X_{m',n'}$, $X_{m'',n''}$, ..., correspondant à des groupes de même nature que les groupes étudiés, l'équation ou les équations reliant ces inconnues expriment des lois récurrentes d'où l'on pourra, dans la plupart des cas, déduire l'expression de $X_{m,n}$.

Si enfin l'on considère à la fois l'inconnue $X_{m,n}$, les inconnues analogues $X_{m',n'}$, $X_{m'',n''}$, ... et les inconnues non analogues $Y_{p,q}$, $Y_{p',q'}$, ..., $Z_{r,s}$, $Z_{r',s'}$, ..., etc., il faudra d'abord, par des éliminations convenables, séparer les inconnues, c'est-à-dire obtenir des équations ne contenant plus que des quantités X, ou des quantités Y, ou des quantités Z, etc.; il faudra ensuite, cette séparation une fois effectuée, étudier les lois récurrentes données par les équations obtenues. Comme dans le cas précédent, on en pourra généralement conclure l'expression même de $X_{m,n}$.

44. A cet avantage de se traiter par les procédés de l'Analyse ordinaire, la partie de calcul joint celui, non moins appréciable, de se traiter dans tous les cas possibles d'une manière uniforme. La partie de raisonnement ne participe point à cette uniformité : elle varie toutes les fois que l'on passe d'un genre de problèmes à un autre.

45. En résumé, pour calculer $X_{m,n}$, la marche à suivre, tant dans le raisonnement que dans le calcul, dépend surtout de ce que la comparaison des groupes donnés avec d'autres groupes porte sur des groupes dont le nombre est connu, ou sur des groupes dont le nombre est inconnu et qui sont de même nature que les groupes étudiés, ou enfin sur des groupes dont le nombre est encore inconnu, mais qui diffèrent des groupes étudiés par la loi même de formation.

Le cas où la comparaison embrasse à la fois ces trois sortes de groupes comprend évidemment tous les autres. Nous plaçant dans cette hypothèse, nous pouvons esquisser de la manière suivante la marche à suivre pour arriver à $X_{m,n}$:

1° *Choisir les groupes auxquels on comparera les groupes à étudier;*

2° *Comparer les groupes étudiés aux groupes qu'on vient de choisir, pour relier par des équations les nombres qui leur correspondent;*

3° *Séparer les inconnues, de façon à n'avoir plus que des équations dans chacune desquelles les inconnues correspondent toutes à des groupes d'une même nature;*

4° *Résoudre, par la méthode des séries récurrentes, celle de ces nouvelles équations qui répond aux groupes étudiés.*

46. Si en regard de cette esquisse un peu vague, dans ses deux premières parties surtout, on place la méthode [8] qui fait l'objet du présent Mémoire, on voit que cette dernière comprend aussi quatre opérations successives, rentrant tout à fait dans celles que nous venons d'indiquer, et il s'ensuit immédiatement que cette dernière méthode [8], qui nous permet de résoudre toute une série de problèmes, peut être regardée comme un type pour les méthodes qui permettraient d'en résoudre d'autres séries.

On voit par là l'importance extrême de cette méthode [8]; mais, niât-on ce rôle de type qu'elle peut, selon nous, remplir, elle n'en serait pas moins très-importante, puisqu'elle permet de résoudre une infinité de problèmes, et que ces problèmes appartiennent à l'Analyse combinatoire, c'est-à-dire à une partie des Mathématiques où les méthodes générales étaient jusqu'à présent fort rares, pour ne pas dire inconnues.