BULLETIN DE LA S. M. F.

G. KREISEL

La prédicativité

Bulletin de la S. M. F., tome 88 (1960), p. 371-391
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1960__88__371_0>

Bull. Soc. math. France,
88, 1960, p. 371 à 391.

LA PRÉDICATIVITÉ (*)

PAR

GEORGES KREISEL

(Reading).

(Conférence faite le 14 novembre 1959 à la Société mathématique de France.)

POINCARÉ et RUSSELL ont introduit la notion de prédicativité à propos d'un problème philosophique très général, à savoir le suivant : quelles phrases de la langue usuelle ou, plus généralement, quelles expressions symboliques peut-on regarder comme des définitions? Les antinomies de la théorie des ensembles démontraient clairement qu'on peut se tromper — mais, évidemment, elles ne sont pas les seules erreurs dans l'histoire des mathémathiques; par exemple on connaît des élèves qui disent : « soit a le plus petit élément de la suite 1, 1/2, 1/3, ..., $1/n$, ... »; or un tel être a n'existe pas.

POINCARÉ était très impressionné par la propriété suivante des définitions antinomiques : l'objet défini, c'est-à-dire l'ensemble défini, est utilisé dans la propriété qui le définit. Plus exactement, l'objet défini constitue une valeur particulière d'une variable qui intervient (1) dans l'expression de la propriété. Si l'ensemble A est défini par

$$(X)[X \in A \equiv P(X)] \quad (^2),$$

une valeur de la variable X est l'ensemble A lui-même. POINCARÉ ne regardait pas cela comme une définition de A parce que la propriété P *pré-*

(*) The research for this paper was partially supported by the Office of Ordnance Research under contract DA-04-200-ORD. 997.

(1) L'ensemble décrit par la variable libre X de « $P(X)$ » est compté parmi les éléments qui interviennent dans cette expression (*cf.* [6], p. 133, 4e ligne à partir du bas).

(2) Nous utilisons les notations suivantes : & (et), $\vee$ (ou), $\rightharpoondown$ (non), $\rightarrow$ (implique), $\equiv$ (équivaut à), (x) (pour chaque nombre naturel x), (X) (pour chaque ensemble X), $(X)_{\mathfrak{M}}$ (pour chaque ensemble X de la famille $\mathfrak{M}$), (Ex) (il y a un nombre naturel x), (EX) (il y a un ensemble X), $(E!X)$ (il y a un seul ensemble X), $\iota_X A(X)$ [le seul ensemble X qui satisfasse $A(X)$].

suppose A. Appliquée aux antinomies bien connues, par exemple celle de Russell, cette objection ne semble pas assez radicale : il n'existe aucun univers et aucune relation $R(x, y)$ ([3]) qui satisfassent

$$(EA)(X)[R(X, A) \equiv \neg R(X, X)].$$

Donc probablement des considérations beaucoup plus générales ([4]) que celle de Poincaré sont naturelles pour l'analyse des antinomies dans la théorie des ensembles abstraits.

Plus concrètement, considérons seulement des ensembles de nombres naturels (ou, peut-être, de nombres rationnels). On pose

$$(n)[n \in A \equiv P(n)].$$

Poincaré considérait le principe de la plus petite borne supérieure d'un ensemble de nombres réels, défini par $Q(X)$ (X est une variable réelle ou un ensemble de nombres rationnels remplissant la condition de Dedekind). La plus petite borne supérieure A (regardée comme ensemble de nombres rationnels) est donnée par

$$(r)\{r \in A \equiv (EX)[r \in X \ \& \ Q(X)]\}.$$

Ici, A lui-même est une valeur de la variable X. Poincaré appelait une telle définition *imprédicative*.

La situation est tout à fait différente si l'on considère seulement des ensembles de nombres rationnels (bien entendu, ensembles définis sans quantificateur portant sur les nombres réels). De telles définitions sont appelées *prédicatives*.

1. La crise.

Pendant longtemps la théorie de la prédicativité est restée stérile. Les raisons principales de cette stérilité étaient probablement d'ordre technique : la notion de fonction récursive est nécessaire pour formuler la notion de nombre ordinal récursif, laquelle à son tour est nécessaire pour formuler la notion d'ensemble hyper-arithmétique, laquelle enfin est nécessaire pour donner une forme précise à la notion suggérée par les exemples de Poincaré. Mais, peut-être, une autre raison est constituée par l'attitude de Poincaré

([3]) C'est-à-dire, nous avons $\neg(EA)(X)[R(X, A) \equiv \neg R(X, X)]$ où R désigne une relation arbitraire, et pas seulement $\neg(EA)(X)(X \in A \equiv \neg X \in X)$.

([4]) Par exemple, par une approche basée sur une logique non classique (*cf.* [20]). Une telle approche est suggérée par la conception d'ensemble abstrait selon laquelle un objet a est un ensemble si et seulement si, pour chaque objet b, l'appartenance ou la non-appartenance de b à a est déterminée ; cette condition serait sans objet dans l'interprétation classique.

lui-même, attitude qui se répète fatalement dans l'histoire de la philosophie : ayant découvert la différence entre les définitions prédicatives et imprédicatives, il regardait les premières comme bonnes, les secondes comme mauvaises. Par voie de conséquence, en tant que logicien, il ne cherchait pas à préciser la notion de prédicativité parce que cela aurait exigé l'emploi de méthodes imprédicatives [comme dans les notes ([26]) et ([27])]; et en tant que mathématicien, il ne cherchait pas d'autres propriétés importantes, associées à la différence considérée, parce que la différence entre correct et faux est suffisamment importante par elle-même.

Sans aucun doute le problème le plus fructueux dans ce domaine, c'est de donner une définition précise à la notion de prédicativité. Malgré des progrès remarquables, il y a plusieurs questions fondamentales qui restent ouvertes ([5]). Il est donc préférable qu'un exposé comme celui-ci traite un sujet plus modeste, suggéré par le problème général.

Sans affirmer l'identification ([6]) des définitions prédicatives [d'ensembles de nombres naturels ([7])] avec la classe *HA* des définitions ([8]) hyper-arithmétiques de KLEENE [9], je décrirai quelques résultats qui portent sur cette identification : ils démontrent, pour *HA*, des propriétés qui sont évidentes pour la notion intuitive de prédicativité.

Le plan de ma conférence est simplement le suivant :

1° Esquisser le contenu de la notion d'hyper-arithméticité et ses relations avec les notions considérées par POINCARÉ.

2° Esquisser la partie de l'analyse qui peut être développée prédicativement, et formuler en langage simple l'information supplémentaire obtenue par un tel développement.

3° Pour compléter l'esquisse je donnerai un exemple d'un théorème d'analyse qui est essentiellement imprédicatif, le théorème de Cantor-Bendixson.

([5]) Une note à la fin de cet article contient un résumé de (mon impression de) l'état actuel.

([6]) Suggérée (avec une réserve) dans le compte rendu [13] de [9]. Il va sans dire que les problèmes ouverts mentionnés ci-dessous n'affectent pas la décision entre *prédicatif* et *imprédicatif* effectuée dans plusieurs cas particuliers. Par exemple, la prédicativité du théorème de Borel-Lebesgue et l'imprédicativité du théorème de Cantor-Bendixson sont des conséquences de propriétés (de la notion de prédicativité) beaucoup plus faibles que celle exprimée par l'identification soupçonnée.

([7]) Les ensembles de type supérieur sont considérés dans [23] qui utilise des idées de [24].

([8]) Pour nous, la notion syntaxique de *définition HA* est primaire, quoiqu'une grande partie de la littérature concerne les *ensembles* hyper-arithmétiques, c'est-à-dire les ensembles définis par des définitions *HA*. (Il s'agit ici des questions qui se rattachent à la notion de définition; par conséquent, les *formules* de définition sont les objets primaires de notre étude.)

4° Il faut ajouter qu'un des résultats les plus importants de la théorie des ensembles, la théorie des ensembles constructibles de Gödel [5], est basé sur une notion semi-prédicative.

2. Généralités préliminaires.

Nous sommes habitués à exprimer l'information supplémentaire obtenue par une nouvelle démonstration ou par une restriction des méthodes de démonstration, par exemple en analyse, de la façon suivante : le théorème est valable non seulement pour l'ensemble des nombres réels, mais dans tout espace abstrait satisfaisant telles ou telles conditions (complétude, compacité, etc.). Les mathématiciens ne sont pas habitués à tirer toutes les conséquences de ce genre. Dans chaque démonstration on utilise seulement un nombre fini de conditions de clôture de l'ensemble des nombres réels ou des fonctions de nombres réels. Par conséquent, et cela est une conséquence ([12], p. 165) du théorème fondamental de Skolem-Loewenheim :

Chaque théorème d'analyse [*exprimé dans la notation usuelle* ([9])] *est valable aussi pour chaque sous-ensemble qui satisfait certaines conditions*

([9]) C'est-à-dire, on n'utilise que les quantificateurs qui portent, 1° sur l'ensemble des nombres naturels, 2° sur la classe des ensembles de nombres naturels. Comme on voit ci-dessous, cette notation est bien adaptée pour exprimer la théorie des fonctions continues et même des fonctions de Baire (d'une variable réelle), ainsi que la théorie des ensembles boréliens et même des ensembles projectifs, mais elle n'embrasse pas la notion de fonction arbitraire ou d'ensemble arbitraire de nombres réels. Dans la terminologie de la logique mathématique, la partie de l'analyse que nous venons d'esquisser s'exprime dans « l'arithmétique du second ordre » (c'est-à-dire ayant pour base la logique du second ordre). Les textes de logique moderne contiennent des descriptions détaillées du *calcul des prédicats d'ordre n* (système formel formalisant la notion de « logique d'ordre n »). Sans détails paralysants : une formalisation d'une théorie mathématique, dont le domaine d'individus est N, est dite : 1° du premier ordre si la formalisation n'utilise (comme opérateurs logiques) que les particules propositionnelles et les quantificateurs portant sur N; 2° du second ordre si elle n'utilise que les opérations de 1° et, en plus, les quantificateurs portant sur $N^N, \ldots, N^{N\times\cdots\times N}$; 3° du troisième ordre si elle n'utilise que les opérateurs de 2° et, en plus, les quantificateurs portant sur $N^{N^N}, \ldots, N^{N^{N\times N}\times N^{N\times N\times N}}$, etc. (trois étages de « N »). L'attribut d'ordre s'attache à une conception (ou formalisation) de la théorie considérée et non aux « objets » de la théorie : par exemple si l'on développe une théorie des permutations de l'ensemble Z des nombres entiers dans l'arithmétique (dont le domain d'individus est Z), cette théorie est du second ordre; si l'on développe une théorie élémentaire (algébrique) dont le domaine d'individus est l'ensemble des permutations lui-même, cette théorie est du premier ordre. Notons en passant qu'une grande partie des applications de la logique à l'algèbre utilise la possibilitè d'exprimer plusieurs branches de l'algèbre dans une théorie du premier ordre. (Les « détails paralysants » étaient nécessaires pour mettre ces applications sous une forme absolument précise.)

de clôture, à savoir les conditions exprimées par les axiomes existentiels de la théorie des ensembles qui sont utilisés dans la démonstration du théorème considéré. De plus, il y a toujours de tels sous-ensembles $\mathcal{S}$ qui sont dénombrables [bien entendu au moyen d'une suite non représentable [10] dans $\mathcal{S}$].

Notons bien que cette observation contient une généralisation tout à fait différente des généralisations plus connues. Par exemple chaque espace compact dans le sens usuel, sur lequel l'ensemble des nombres rationnels de $[0, 1]$ est dense, contient un isomorphe de l'intervalle $[0, 1]$ complet (et n'est donc pas dénombrable).

Pourquoi est-ce que les mathématiciens ne sont pas habitués à noter cette généralité additionelle bon-marché ? En pratique, leurs raisons sont probablement tout à fait perverses. Mais (en théorie) ils ont une bonne raison : La généralité additionnelle, ou la restriction des méthodes de démonstration, n'est intéressante que si : 1° nous trouvons la même méthode dans beaucoup de démonstrations; 2° on peut exprimer la méthode succinctement.

Pour l'analyse imprédicative, le 2° n'est pas réalisé : nous ne connaissons pas de conditions de clôture simples et intuitives. Mais je pense que les mathématiciens n'ont pas réalisé le 1° : à savoir qu'une large partie de l'analyse demande seulement des axiomes existentiels prédicatifs. Par ailleurs, c'est seulement au cours des cinq dernières années que les logiciens ont découvert une notion utilisable pour préciser la notion de prédicativité.

Remarque. — Une formulation plus détaillée de l'information supplémentaire obtenue au moyen des méthodes prédicatives est donnée à la fin de la section : l'analyse hyper-arithmétique.

3. Esquisses des hiérarchies (Σ_1^α), (Σ_2^α), (Σ_3^α).

Je vais définir trois suites transfinies (de classes de formules) $(\Sigma_1^\alpha)_{\alpha\in A}$, $(\Sigma_2^\alpha)_{\alpha\in A}$, $(\Sigma_3^\alpha)_{\alpha\in A(X_0)}$ où A et $A(X_0)$ sont des ensembles de nombres ordinaux qui sont caractérisés plus loin. Chaque formule de (chaque) Σ_1^α représente une relation entre nombres naturels (autrement dit, un ensemble de t-uples nombres naturels). Chaque formule de chaque Σ_2^α et de chaque Σ_3^α

---

(10) Représentation usuelle d'une suite de nombres réels, par exemple $\alpha_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}\, 10^{-m}$, par le nombre $\Sigma_1^\infty\, b_p\, 10^{-p}$, où $b_p = a_{nm}$ si $p = \frac{1}{2}(n+m-2)(n+m-1)+m$ (m et n sont déterminés de façon unique par p).

représente une relation entre un t-uple variable de nombres naturels et un ensemble variable X de nombres naturels ([11]).

Les relations d'addition et de multiplication entre les nombres naturels sont considérées comme bien définies, ainsi que la totalité des nombres naturels, et, dans le cas 3°, un ensemble donné qui est désigné par X_0. Par conséquent, l'application des opérations logiques classiques (parmi lesquelles sont comptés les quantificateurs portant sur l'ensemble des nombres naturels) a un sens.

Définition des suites Σ_i^α, $(i = 1, 2, 3)$.

Σ_1^0 est la réunion des formules obtenues au moyen du calcul des prédicats du premier ordre avec les deux symboles relationnels $a + b = c$, $a.b = c$.

Σ_2^0 : comme Σ_1^0 avec, en plus, $a \in X$.

Σ_3^0 : comme Σ_2^0 avec, en plus, $a \in X_0$.

$\Sigma_1^{\alpha+1}$ est la reunion des formules obtenues au moyen du calcul des prédicats du second ordre avec les deux symboles relationnels $a + b = c$, $a.b = c$, et les quantificateurs (du second ordre $(X^{(\alpha)})$, $(EX^{(\alpha)})$, etc. On n'utilise pas de variables libres du second ordre.

$\Sigma_2^{\alpha+1}$: comme $\Sigma_1^{\alpha+1}$ avec, en plus, $a \in X$.

$\Sigma_3^{\alpha+1}$: comme $\Sigma_2^{\alpha+1}$ avec, en plus, $a \in X_0$.

$\Sigma^{\lim \alpha_n} = \bigcup_n \Sigma^{\alpha_n}$, où, pour chaque n, $\alpha_n < \alpha_{n+1}$.

Interprétation. — Les variables a, b, c, ... décrivent l'ensemble des nombres naturels, $X^{(\alpha)}$ la classe des ensembles (de nombres naturels) *définis* par les formules de Σ^α. Puisque, 1° l'interprétation des formules de Σ^0 était expliquée ci-dessus, 2° les α désignent des nombres ordinaux, et 3° pour chaque α, les quantificateurs $X^{(\beta)}$ des formules de Σ^α satisfont à $\beta < \alpha$, alors notre interprétation est bien définie pour chaque α.

Définition de l'ensemble des ordinaux utilisés. — Chaque nombre fini appartient à A. Pour chaque α infini, $\alpha \in A$ si et seulement s'il existe une formule appartenant à Σ_1^β, avec $\beta < \alpha$ et $\beta \in A$, qui définisse sur l'ensemble des nombres naturels une relation de bon-ordre ([12]) de type α. Pour chaque $\alpha \in A(X_0)$ on exige qu'il existe une formule appartenant à Σ_3^β, avec

---

([11]) Une formule de Σ_2^α qui ne contient pas la variable X appartient à Σ_1^α. Par conséquent on peut considérer une formule de Σ_2^α (ou de Σ_3^α) qui ne contient pas la variable X comme définissant une relation entre nombres naturels.

([12]) La notion de bon-ordre est l'élément imprédicatif dans cette caractérisation des hiérarchies (Σ^α).

$\beta < \alpha$ et $\beta \in A(\mathcal{X}_0)$ qui, 1° ne contienne pas la variable $\mathcal{X}$, et 2° définisse sur l'ensemble des nombres naturels une relation de bon-ordre de type α ($\mathcal{X}_0$ ayant l'interprétation indiquée).

Comme on le voit, la description de ces notions n'est pas difficile. Par les méthodes de la logique mathématique, elle peut être mise sous une forme absolument exacte [9], [12].

On remarque que ces hiérarchies de définitions expriment directement *l'idée fondamentale de prédicativité* : dans une définition prédicative on n'utilise que des quantificateurs portant sur des ensembles déjà construits. La restriction de la classe de nombres ordinaux à utiliser [à A et, dans le cas 3°, à $A(\mathcal{X}_0)$] met sous une forme précise l'idée intuitive exprimée par « déjà ».

Les structures de ces hiérarchies et de l'ensemble des formules vraies sont éclaircies par les théorèmes suivants.

Théorème de Spector. ([22], p. 161). — Pour chaque α utilisé il y a un ordre de type α défini dans Σ^0 (et même un ordre récursif pour les cas 1° et 2°, récursif relativement à $\mathcal{X}_0$ dans le cas 3°).

Autrement dit, pour chaque relation de *bon-ordre* qui est définissable dans Σ_1^α (où $\alpha \in A$), il existe une relation isomorphe qui est définissable dans Σ_1^0. Par contre, pour chaque $\alpha > 0$, $\alpha \in A$, il existe une relation *d'ordre* définissable dans Σ_1^α qui n'est isomorphe à aucune relation définissable dans Σ_1^β, où $\beta < \alpha$: car, 1° il existe une formule de Σ_1^α qui définit une énumération de toutes les relations (entre deux nombres naturels variables) qui sont définissables dans $\bigcup_{\beta<\alpha} \Sigma_1^\beta$; 2° la propriété (prédicative) d'être une relation d'ordre est exprimable dans Σ_2^0 et, par conséquent, on peut définir dans Σ_1^α une relation qui est isomorphe à la somme ordinale de toutes les relations d'ordre qui sont définissables dans $\bigcup_{\beta<\alpha} \Sigma_1^\beta$ (où l'ordre de sommation est donné par l'énumération dans 1°).

Dans la terminologie introduite par Kleene on appelle les définitions de Σ^0 « arithmétiques », celles de $\bigcup \Sigma^\alpha$ « hyper-arithmétiques » et le plus petit nombre ordinal ([13]) qui n'est pas représenté dans Σ^0 s'appelle ω_1 (ou, dans le cas 3°, $\omega_1^{\mathcal{X}_0}$) ([14]).

([13]) On vérifie sans peine que $(\alpha \in A \mathbin{\&} \beta < \alpha) \rightarrow \beta \in A$, et, par conséquent, $\alpha > \omega_1 \rightarrow \alpha \notin A$; autrement dit, A est une section des nombres ordinaux, et le même raisonnement s'applique à $A(\mathcal{X}_0)$.

([14]) On note en passant qu'une grande partie de la mathématique ordinaire s'exprime au moyen de $\bigcup \Sigma^\alpha$, et même de Σ^0 seulement. Par exemple : 1° la relation $p = m^n$ entre les nombres naturels m, n, p est définissable par une formule de Σ_1^0 ; 2° il en

Théorème de Feferman ([4]). — Il existe une progression récursive de systèmes formels qui est complète par rapport à $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma_2^\alpha$, c'est-à-dire : toute formule de $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma_2^\alpha$ qui est vraie dans l'interprétation indiquée est démontrable dans la progression récursive de FEFERMAN.

Les théorèmes suivants concernent une autre idée de POINCARÉ à propos de la notion de prédicativité : une définition D est dite prédicative si un élargissement de la classe des ensembles considérés ne change pas l'ensemble défini par D ([18], p. 47).

A première vue cette notion est plus vaste que l'idée fondamentale de prédicativité; car, 1° elle permet l'emploi (bien entendu, restreint) de quantificateurs portant sur une classe d'ensembles indéterminée alors que l'autre idée ne les utilise pas; et 2° d'après le lemme de Kleene cité ci-dessous, pour chaque $\alpha < \omega_1$, l'ensemble décrit par la variable $X^{(\alpha)}$ peut être énuméré au moyen d'une fonction qui est définie par une formule D remplissant la seconde condition de Poincaré. Les théorèmes suivants justifient l'introduction de cette notion, en démontrant l'identité entre la classe des ensembles définissables par de telles formules D et la classe des ensembles définissables par $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma_1^\alpha$.

Théorème d'Addison-Grzegorczyk-Kucnetsov ([2]. [8]). — Si $\Phi(X)$ est une formule de Σ_2, et si l'on a $(E\,!\,X)\,\Phi(X)$, alors $\iota_X\Phi(X)$ lui-même est hyper-arithmétique; et réciproquement.

Autrement dit, si $\mathfrak{M}$ désigne n'importe quelle classe d'ensembles contenant les ensembles hyper-arithmétiques, alors $(E\,!\,X)_{\mathfrak{M}}\Phi(X)$ est vrai et le même ensemble satisfait $\Phi(X)$ ([15]).

Le théorème ci-dessus exprime une complétude définitionnelle de la classe HA : si X est défini par une propriété exprimable dans HA, alors X lui-même est définissable dans HA. La démonstration du théorème dépend du *lemme de Kleene* [9].

---

est de même pour chaque nombre algébrique ξ, c'est-à-dire qu'il y a une formule $F_\xi(n$ de Σ^0 telle que $F_\xi(n) \equiv \xi_n = 0$ où $\xi = \xi_0\, 2^0 + \xi_1\, 2^{-1} + \ldots + \xi_n\, 2^{-n} + \ldots$ ($\xi_n = 0$ ou $\xi_n = 1$) et de même pour (les représentations binaires de) π, e, C (la constante d'Euler), etc.; 3° si σ, σ', τ, τ' désignent des nombres réels de Σ_1^α, il existe une formule de Σ_1^α qui exprime la relation : la fonction ζ de Riemann possède au moins n zéros $(x+iy)$ satisfaisant à $\sigma \leqq x \leqq \sigma'$, $\tau \leqq y \leqq \tau'$. Il est à remarquer que le résultat 1° (un cas particulier d'un théorème plus général de Gödel) n'est pas trivial, alors que les résultats 2° et 3° sont obtenus sans peine au moyen de 1°.

([15]) Dans cette caractérisation des formules $\Phi(X)$ considérées, l'élément imprédicatif est l'hypothèse que $(E\,!\,X)\,\Phi(X)$, où X décrit la classe de *tous* les ensembles de nombres naturels.

Un ensemble X_1 est hyper-arithmétique si et seulement s'il existe deux relations arithmétiques (définies par Φ_1 et Φ_2 de Σ_2^0) telles que

$$(n)\,[n \in X_1 \equiv (X)\,\Phi_1(X,\, n) \equiv (EX)\,\Phi_2(X,\, n)].$$

Autre propriété exprimant l'idée de Poincaré ([15]). — Si $\mathfrak{M}_0$ désigne la classe maximale des (c'est-à-dire, la classe de tous les) ensembles de nombres naturels et si l'on a $\mathfrak{M}_0 \supset \mathfrak{M} \supset \mathfrak{M}_{HA}$ et

$$(n)\,[(A)_{\mathfrak{M}_0}\Phi_1(A,\, n) \equiv (EA)_{\mathfrak{M}_0}\Phi_2(A,\, n)],$$
$$\Phi_1 \in HA \qquad \text{et} \qquad \Phi_2 \in HA,$$

alors

$$(n)\,[(A)_{\mathfrak{M}}\Phi_1(A,\, n) \equiv (A)_{\mathfrak{M}_0}\Phi_1(A,\, n)].$$

Autrement dit, la formule $(A)\,\Phi_1(A,\, n)$ définit toujours le même ensemble de nombres naturels, même lorsque l'interprétation du quantificateur (A) varie (dans les limites mentionnées).

Remarque. — Une formulation plus condensée utilise la notion de *base* :

Une classe $\mathfrak{C}$ d'ensembles de nombres naturels est appelée une base pour la formule ([16]) $(EX)\ \Phi(X,\, n)$ (où Φ appartient à Σ_2^α) si, pour chaque n,

$$(EX)_{\mathfrak{M}_0}\Phi(X,\, n) \rightarrow (EX)\,[X \in \mathfrak{C} \ \&\ \Phi(X,\, n)].$$

Dans ce cas, la formule $(EX)_{\mathfrak{M}}\Phi(X,\, n)$ définit le même ensemble (de nombres naturels) pour chaque $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{C}$ ([17]). Par conséquent nous avons la reformulation suivante :

Si $\Phi_1 \in \Sigma_2^\alpha$ et $\Phi_2 \in \Sigma_2^\alpha$ et si (n) $[(X)_{\mathfrak{M}_0}\Phi_1(X,\, n) \equiv (EX)_{\mathfrak{M}_0}\Phi_2(X,\, n)]$, alors HA est une base pour les formules $(EX)\ \Phi_2(X,\, n)$ et $(EX) \rightarrow \Phi_1(X,\, n)$.

([16]) et pas de l'ensemble $\{n : (EX)_{\mathfrak{M}_0}\Phi(X,\, n)\}$; par exemple Kleene [10] a construit une Φ_0 de Σ_2^0 telle que $(EX)_{\mathfrak{M}_0}\Phi_0(X)$, mais $\rightarrow (EX)_{HA}\Phi_0(X)$. Par conséquent

1° $$(n)\,\{(EX)_{\mathfrak{M}_0}\Phi(X,\, n) \equiv (EX)_{\mathfrak{M}_0}[\Phi_0(X_1)\ \&\ \Phi(X_2,\, n)]\}$$

(où X représente le couple $< X_1, X_2 >$ de façon usuelle : $2a \in X \equiv a \in X_1$, $2a + 1 \in X \equiv a \in X_2$), mais

2° s'il y a un n tel que $(EX)_{\mathfrak{M}_0}\Phi(X,\, n)]$, $(EX)\,\Phi(X,\, n)$ peut avoir HA comme base sans que $(EX)\,[\Phi_0(X_1)\ \&\ \Phi(X_2,\, n)]$ l'ait malgré l'équivalence 1° [pour l'interprétation spéciale de (EX))].

([17]) Par conséquent, si nous avons une notation pour chaque élément de $\mathfrak{C}$, le quantificateur (variable liée) du second ordre peut être éliminé au sens suivant : si pour $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{C}$, n satisfait $(EX)_{\mathfrak{M}}\Phi(X,\, n)$, alors il y a une formule X_n qui définit un ensemble appartenant à $\mathfrak{C}$ et qui est telle qu'on ait $\Phi(X_n,\, n)$; et, dans le cas contraire on a $\rightarrow \Phi(X,\, n)$ avec la variable *libre* X. Des conséquences de cette situation (au point de vue de l'applicabilité du formalisme Σ_2^α) sont notées dans les notes ([26]) et ([27]).

Théorème de Kleene ([11]). — Si la formule $(EX)\,\Phi(X, n)$ admet HA comme base, alors, pour chaque $\mathfrak{M} \supset HA$, la formule $(EX)_{\mathfrak{M}}\,\Phi(X, n)$ définit un ensemble qui appartient lui-même à HA.

[11] contient des résultats essentiels pour notre sujet, mais un peu trop détaillés pour un exposé comme celui-ci.

DÉFINITION. — Un modèle (d'un ensemble $\mathcal{A}$ d'axiomes) dans lequel, 1° les variables d'individus décrivent l'ensemble des nombres naturels, et 2° les symboles relationnels $a + b = c$ et $a.b = c$ désignent les relations d'addition et multiplication ordinaires s'appelle un ω-modèle.

Théorème de Mostowski-Grzegorczyk-Ryll-Nardzewski ([8], et proposition B de [15]). — Soit $\mathcal{A}$ un ensemble hyper-arithmétique de (nombres de Gödel) d'axiomes exprimés dans les notations de l'analyse. Si une formule $\mathfrak{A}(n)$ est satisfaite par les mêmes nombres naturels dans chaque ω-modèle de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire si $\mathfrak{A}(n)$ définit le même ensemble X_1 dans chacun de ces ω-modèles, alors X_1 est hyper-arithmétique ([18]).

Ce théorème exprime clairement l'idée de POINCARÉ. Puisqu'il considère l'ensemble des nombres naturels comme bien déterminé, on ne considère que les ω-modèles. Mais puisqu'il ne considère pas la *totalité* des ensembles de nombres naturels comme bien déterminée, les axiomes $\mathcal{A}$ ne peuvent pas distinguer entre les différents ω-modèles (de $\mathcal{A}$). Et une formule $\mathfrak{A}(n)$ ne peut être considérée comme une définition non ambiguë que si $\mathfrak{A}(n)$ définit le même ensemble dans *chaque* ω-modèle de $\mathcal{A}$. Si l'ensemble $\mathcal{A}$ lui-même est déjà bien défini (prédicativement) nous retrouvons les ensembles hyper-arithmétiques.

4. L'analyse hyper-arithmétique.

Revenons aux généralités préliminaires, où nous avons cherché des conditions de clôture simples. Soit $\mathcal{S}$ un ensemble de nombres réels, et $\mathcal{S}_1$ la classe des ensembles de nombres naturels qui représentent ([19]) les éléments de $\mathcal{S}$.

Voici une telle condition de clôture :

Si un ensemble A appartient à $\mathcal{S}_1$, alors tout ensemble hyper-arithmétique relativement à A appartient aussi à $\mathcal{S}_1$.

([18]) Le théorème de Kleene se déduit aussi du théorème de [8]. Une différence générale entre [8] et [11] est la suivante : 1° [8] considère des formules arbitraires $\mathfrak{A}(n)$ du second ordre, et pas seulement $(EX)\ \Phi(X, n)$, avec $\Phi \in \Sigma_2^{\alpha}$; 2° la famille des classes d'ensembles dans lesquelles $\mathfrak{A}(n)$ définit le même ensemble (de nombres naturels) est caractérisée dans [8] par des conditions plus compliquées que la notion de base utilisée dans [11].

([19]) Par exemple la représentation binéaire : $\alpha = \Sigma a_n 2^{-n}$, avec $a_n = 0$ ou $a_n = 1$, est représentée par l'ensemble A tel que $(n)\ (n \in A \equiv a_n = 1)$.

Notons qu'une grande partie de la théorie des ensembles ouverts et fermés peut être exprimée dans notre notation, si chaque ensemble ouvert est représenté par une suite d'intervalles à extrémités rationnelles dont il est la réunion, et chaque ensemble fermé par son complémentaire.

Remarque. — Les démonstrations des théorèmes d'analyse hyper-arithmétique, données ci-dessous, permettent, vis-à-vis de la formulation dans la section « Généralités préliminaires », un renforcement qui est assez intéressant au point de vue intuitif. Ici nous ne le formulons pas pour des théorèmes d'une structure générale parce qu'une formulation élégante exige ([20]) une interprétation non-classique des symboles logiques (*cf.* le dernier chapitre de [15]). Mais, pour des formules de la forme

$$(1) \qquad (X_1)(EY_1)\ldots(X_n)(EY_n)\Phi(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_2),$$

où $\Phi \in \Sigma_2^0$, le renforcement s'exprime de la façon suivante :

Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ deux classes d'ensembles de nombres naturels, closes par rapport aux opérations hyper-arithmétiques (c'est-à-dire les opérations définissables par des formules de Σ_2^α, $\alpha < \omega_1$). Désignons d'autre part par $\mathfrak{M}(X_1, \ldots, X_i)$ la plus petite classe qui contient les ensembles $X_1, \ldots, X_i$ et qui est close par rapport aux opérations hyper-arithmétiques. La forme indiquée dans la section « Généralités préliminaires » exige seulement que $(X_1)_{\mathfrak{M}}(EY_1)_{\mathfrak{M}} \ldots (X_n)_{\mathfrak{M}}(EY_n)_{\mathfrak{M}}\Phi(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n)$ soit valable (pour chaque $\mathfrak{M}$ qui est close par rapport aux opérations *HA*).

J'appelle *forme renforcée de* (1) l'assertion suivante :

$$\begin{gathered}(X_1)_{\mathfrak{M}_0}(EY_1)_{\mathfrak{M}(X_1)}(X_2)_{\mathfrak{M}_0}(EY_2)_{\mathfrak{M}(X_1, X_2)}\ldots \\ (X_n)_{\mathfrak{M}_0}(EY_n)_{\mathfrak{M}(X_1, \ldots, X_n)}\Phi(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n).\end{gathered}$$

Trivialement, un tel renforcement est assuré si Y_i est hyper-arithmétique relativement aux $X_1, \ldots, X_i$.

Corrolaire. — *Pour chaque $X_1^\star \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'$, la forme renforcée assure l'existence d'un ensemble $Y_1^\star$ tel que*

$$(X_2)_{\mathfrak{M}}(EY_2)_{\mathfrak{M}}\ldots(X_n)_{\mathfrak{M}}(EY_n)_{\mathfrak{M}}\Phi(X_1^\star, X_2, \ldots, X_n, Y_1^\star, Y_2, \ldots, Y_n)$$

et, en même temps,

$$(X_2)_{\mathfrak{M}'}(EY_2)_{\mathfrak{M}'}\ldots(X_n)_{\mathfrak{M}'}(EY_n)_{\mathfrak{M}'}\Phi(X_1^\star, X_2, \ldots, X_n, Y_1^\star, Y_2, \ldots, Y_n).$$

([20]) Deux théorèmes peuvent être équivalents au point de vue (c'est-à-dire lorsqu'ils sont interprétés au sens) de la logique classique, même si la forme renforcée de l'un est vraie et celle de l'autre fausse.

L'autre forme n'assure que l'existence de deux *ensembles* $Y_1^{\mathfrak{M}}$, $Y_1^{\mathfrak{M}'}$ *tels que*

$$(X_2)_{\mathfrak{M}}(EY_2)_{\mathfrak{M}} \ldots \Phi(X_1^\star, X_2, \ldots, X_n, Y_1^{\mathfrak{M}}, Y_2, \ldots, Y_n)$$

et

$$(X_2)_{\mathfrak{M}'}(EY_2)_{\mathfrak{M}'} \ldots \Phi(X_1^\star, X_2, \ldots, X_n, Y_1^{\mathfrak{M}'}, Y_2, \ldots, Y_n).$$

Autrement dit, la forme renforcée permet *le choix de l'ensemble* Y_1 *à partir de* X_1 *absolument indépendamment de l'univers* $\mathfrak{M}$.

Le théorème de Borel-Lebesgue. — Étant donnée une suite d'intervalles rationnels (a_n, b_n), nous considérons sa représentation usuelle par un ensemble X de nombres naturels.

Si, pour chaque N, l'union des (a_n, b_n), pour $n \leq N$, ne couvre pas $[0, 1]$, il existe un nombre réel ξ tel que, pour chaque n, $\xi \notin (a_n, b_n)$.

Évidemment ce théorème est valable non seulement pour la classe entière des nombres réels, mais aussi pour toute classe contenant ξ.

La façon dont ξ dépend de la suite (a_n, b_n) est prédicative, c'est-à-dire que ξ est (hyper-)arithmétique relativement à X. En conséquence, si $\mathfrak{I}$ est une classe d'ensembles de nombres naturels fermée par rapport aux définitions HA, si $X \in \mathfrak{I}$, et si $\bigcup (a_n, b_n)$ contient tous les nombres réels représentables par des éléments de $\mathfrak{I}$, alors $\bigcup (a_n, b_n)$ contient tous les nombres réels.

La suite des points isolés du complémentaire de $\bigcup (a_n, b_n)$ est également HA-définissable. Donc, pour chaque sous-ensemble S de nombres réels hyper-arithmétiquement fermé et contenant X, l'ensemble des points *isolés* de $S \cap \text{Comp} \bigcup_n (a_n, b_n)$ ne varie pas lorsque S varie.

La condition « $\text{Comp} \bigcup_n (a_n, b_n)\ (= F)$ est *parfait* » est aussi HA relativement à X. Car cela équivaut à : si $[a, b] \cap F$ contient un point, il en contient deux. D'après le théorème ci-dessus, la condition « $[a, b] \cap F$ contient n points » est arithmétique. (Pour les détails, consulter [14].)

En passant, notons qu'une grande partie de la théorie de la mesure est prédicative : par exemple, si un ensemble de nombres réels est défini par une définition appartenant à Σ_2^0, sa mesure est un nombre réel de Σ_1^0 [21]. Cette situation est tout à fait différente pour les définitions récursives [17].

---

[21] Ce résultat constitue une réponse affirmative à une question de [7].

REMARQUE. — La démonstration de l'arithméticité (relativement à $\mathcal{X}_0$) de la mesure d'un ensemble arithmétique (relativement à $\mathcal{X}_0$) utilise les faits suivants :

1° Un sous-ensemble M de l'intervalle $[0, 1]$ est mesurable si, pour chaque m, il y a deux ensembles ouverts G_1, G_2 tels que $M \subset G_1$, $\mathrm{Comp} M \subset G_2$, et (somme des mesures de G_1 et G_2) $< 1 + m^{-1}$.

2° Un ensemble défini sans quantificateurs est ouvert, et, d'après l'analyse du théorème de Borel-Lebesgue, peut être approché par une suite finie d'intervalles ouverts obtenue *arithmétiquement* à partir de la définition de l'ensemble.

3° La démonstration usuelle de la mesurabilité de la réunion d'une suite d'ensembles mesurables est relativisable aux ensembles définis dans Σ_2^0.

En un mot, la conception de l'analyse prédicative de POINCARÉ (plus ou moins modifiée par BAIRE, BOREL, LEBESGUE) s'applique parfaitement aux recherches de ces mathématiciens. La généralité propre de leurs résultats est donc perdue s'ils sont exprimés dans un cadre imprédicatif, par exemple s'ils sont basés sur le principe de la plus petite borne supérieure, formulé pour des *ensembles* de nombres réels. D'autre part, cela montre que l'analyse [au sens de la note (2)] de la fin du siècle dernier n'avait pas encore appris à utiliser les méthodes imprédicatives qui sont potentiellement plus fortes (22).

5. Le théorème de Cantor-Bendixson.

Tout ensemble fermé est la réunion d'un ensemble parfait et d'une suite (dénombrable).

Je dis que ce théorème s'exprime sous la forme suivante :

Pour chaque suite d'intervalles rationnels (a_n, b_n) il y a une suite (p_n, q_n) d'intervalles rationnels et une suite σ_n de nombres réels telles que, pour chaque nombre réel ξ,

$$\xi \in \mathrm{Comp} \bigcup_n (a_n, b_n) \equiv . \xi \in \mathrm{Comp} \bigcup_n (p_n, q_n) \quad \text{ou} \quad (Em)(\xi = \sigma_m),$$

et $\mathrm{Comp} \bigcup_n (p_n, q_n)$ est parfait.

(22) Cette situation contient une leçon philosophique : puisque la pratique des mathématiciens était influencée par leurs conceptions prédicatives de l'analyse. on ne peut pas être trop étonné que leurs résultats peuvent être démontrés par les méthodes prédicatives. Mais cet état sociologique n'implique nullement que les conceptions imprédicatives soient éliminables d'un développement moins borné de l'analyse.

Nous savons que cette condition est arithmétique. En bref, du fait que les suites d'intervalles rationnels et les suites de nombres réels sont représentées par des ensembles de nombres naturels, nous obtenons un théorème de la forme $(A)(EB)(C)R(A, B, C)$, avec $R \in \Sigma_2^0$, qui est valable dans la théorie des ensembles de nombres naturels.

J'ai construit un ensemble récursif A^0 tel que

$$(EB)(C)R(A^0, B, C)$$

est faux pour B et C définissables dans Σ^α, lorsque α est une limite ordinale, et dans $\bigcup_{\alpha < \omega_1} \Sigma^\alpha$. Autrement dit, le théorème de Cantor-Bendixson est imprédicatif. (Pour les détails, *voir* [14].)

Le contenu intuitif de ce résultat est le suivant. Considérons des ensembles $\mathcal{S}$ de nombres réels et de suites de nombres réels associées qui satisfont les axiomes de l'analyse imprédicative. Considérons le complémentaire par rapport à $\mathcal{S}$ de $\bigcup (a_n^0, b_n^0)$. Pour chaque $\mathcal{S}$, la partition de ce complémentaire en une suite $\sigma_n^{\mathcal{S}}$ de $\mathcal{S}$ et un ensemble parfait (représenté par un nombre réel) de $\mathcal{S}$ est unique. *Mais il y a des $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ tels que les suites $\sigma_n^{\mathcal{S}}$ et $\sigma_n^{\mathcal{S}'}$ sont différentes*, c'est-à-dire, $\{\sigma_n^{\mathcal{S}} : n \in N\} \neq \{\sigma_n^{\mathcal{S}'} : n \in N\}$! (Ce fait découle immédiatement du théorème 2 (ii) de [25].)

D'autre part, la théorie de la prédicativité permet de formuler et de résoudre le problème suivant.

Étant donnée une suite (a_n, b_n) représentée par X, définissons la suite des ensembles dérivés de $F\left[= \text{Comp} \bigcup_n (a_n, b_n)\right]$, où $F^{(\alpha+1)} = F^{(\alpha)}$ moins ses points isolés; si, pour chaque n, $\alpha_n < \alpha_{n+1}$, alors $F^{(\lim \alpha_n)} = \bigcap F^{(\alpha_n)}$. Un raisonnement bien connu donne : il existe un η_0 dénombrable tel que $F^{(\eta)} = F^{(\eta_0)}$ pour $\eta \geq \eta_0$.

PROBLÈME. — Estimer η_0.

SOLUTION. — On a $\eta_0 \leq \omega_1^X$, *et cette borne est optimale* [14].

Cela montre que le nombre ω_1^X se retrouve dans plusieurs problèmes à première vue différents.

REMARQUE. — Le théorème de Cantor-Bendixson est plus élémentaire (au sens suivant) que l'autre cas mentionné ci-dessus d'un théorème imprédicatif ([23]).

([23]) Le principe de la plus petite borne supérieure, qui équivaut au principe de *compréhension* appliqué aux ensembles de nombres naturels (c'est-à-dire : si $P(n)$ est une formule de l'arithmétique du second ordre avec des quantifications portant sur la classe des ensembles de nombres naturels, alors $(EX)(n)[n \in X \equiv P(n)]$). Ce principe devient faux lorsqu'il est relativisé aux ensembles hyper-arithmétique : KLEENE [10] a construit une formule $R(Y, n)$ de Σ_2^0 telle que $(EY)_{HA} R(Y, n)$ définit un ensemble non-hyperarithmétique et par conséquent $(EX)_{HA}(n)[n \in X \equiv (EY)_{HA} R(Y, n)]$ est faux.

Modifiant légèrement [18] on appelle *formules inductives relativement* à $X_0, \ldots, X_k$ toute conjonction (finie) d'implications de la forme

$$(A_1 \& \ldots \& A_k) \rightarrow n \in X,$$

où chaque formule A_i est *positive* [24]; c'est-à-dire que chaque A_i est une formule dont les particules propositionnelles sont & et $\vee$, dont les variables d'individus décrivent l'ensemble des nombres naturels, et dont les parties premières ont la forme « $a \in X$ » ou « $a \in X_i$ » ou « $a \in \mathrm{Comp}\, X_i$ ». Une telle formule définit [25] X inductivement à partir de $X_0, \ldots, X_k$.

Une formule inductive relativement à des X_i qui appartiennent à Σ_1^0 est dite d'*ordre* 0, et une formule inductive relativement à des X_i (définis par des formules) d'ordre n est dite d'ordre $n+1$. On voit qu'un ensemble qui est récursif relativement à un ensemble (défini par une formule inductive) d'ordre n, est d'ordre $\leq n+2$.

Par conséquent, les théorèmes 1 et 2 de [14] montrent que *le théorème de Cantor-Bendixson* (*CB*) *reste valable lorsqu'il est relativisé à la classe des nombres réels* (représentés par des ensembles de nombres naturels) *inductifs d'ordre fini*. Au contraire, le principe de la plus petite borne supérieure n'est pas valable relativisé à cette classe. C'est en ce sens que *CB* est plus élémentaire que l'autre théorème.

Au point de vue axiomatique, la situation peut être résumée sous la forme suivante : du moment que *CB* est faux pour la classe des nombres réels hyperarithmétiques, il n'est pas démontrable au moyen des cas particuliers suivants du principe de compréhension

$$(EA)(n)(n \in A \equiv \{(X)R(x, n) \& (m)[(X)R(X, m) \equiv (EX)S(X, m)]\}),$$

où R et S appartiennent à Σ_2^0; car (proposition C de [15]) ces cas particuliers restent valables lorsqu'ils sont relativisés aux ensembles hyperarithmétiques. Puisque *CB* est valable pour la classe des nombres réels inductifs d'ordre fini, il est démontrable au moyen des cas particuliers du principe de compréhension qui assurent l'existence des ensembles définis inductivement.

La théorie de la prédicativité est donc utile pour établir des indépendances formelles dans des théories axiomatiques des ensembles assez naturelles.

---

[24] L'effet bien connu de cette restriction est le suivant : l'intersection de tous les ensembles qui satisfont à une formule inductive satisfait elle-même à cette formule. La restriction est nécessaire : par exemple la formule $(m = n + 1 \;\&\; \neg m \in X) \rightarrow n \in X$ est satisfaite, pour chaque n et m, par 1° l'ensemble des nombres naturels pairs, 2° l'ensemble des nombres naturels impairs, et l'intersection de ces deux ensembles, qui est vide, ne satisfait pas à la formule ci-dessus.

[25] Cette notion est considérée dans la note à la fin de cet article.

6. Les ensembles constructibles de Gôdel.

Si, dans la caractérisation des définitions prédicatives, on supprime la condition qui exige qu'un ordre de type α soit définissable dans un Σ_β, avec $\beta < \alpha$, nous obtenons essentiellement les ensembles constructibles de GÖDEL (pour $\alpha < \Omega$). Sa découverte remarquable consiste à démontrer que les ensembles constructibles satisfont aux axiomes de la théorie imprédicative, ce qui établit la non-contradiction relative de l'axiome du choix et de l'hypothèse du continu par rapport au reste de la théorie des ensembles.

Je voudrais rappeler que, pour le mathématicien, il y a d'autres conséquences du résultat de GÖDEL qui sont, peut-être, plus utiles que la non-contradiction relative.

La question suivante, posée par J.-P. SERRE, m'a donné l'idée d'étudier de telles conséquences ([12], p. 165). « Dans son calcul de l'ordre des groupes d'homotopie, SERRE a utilisé l'axiome du choix : est-ce nécessaire? » La réponse est *non* en application d'une considération très générale : la proposition « l'ordre du groupe d'homotopie ... est ... 6 » (par exemple) est une proposition purement arithmétique (grâce aux approximations simpliciales). Soit alors, $\mathfrak{A}$ un théorème arithmétique, et $\mathcal{D}$ une démonstration de $\mathfrak{A}$ utilisant l'axiome du choix (et même l'hypothèse du continu). Si dans $\mathcal{D}$ on restreint tous les quantificateurs aux ensembles constructibles, la découverte de GÖDEL entraîne que la démonstration ainsi obtenue est valable sans les axiomes additionnels (du choix et du continu). Or, on démontre (sans utiliser ces axiomes) que la restriction aux ensembles constructibles d'une proposition arithmétique est équivalente à cette proposition elle-même.

SHŒNFIELD a renforcé ce résultat.

Supposons que $R \in \Sigma_2^0$, et que la proposition $(EA)(B)(EC)R(A, B, C)$ soit démontrable avec l'axiome du choix et l'hypothèse du continu. Alors elle l'est aussi sans ces axiomes additionnels.

A^0, B^0, C^0 représentent des ensembles constructibles variables. Trivialement, $(C)R(A^0, B^0, C) \rightarrow (C^0)R(A^0, B^0, C^0)$. Donc, d'après [21],

$$(EA^0)(B^0)(EC^0)R(A^0, B^0, C^0) \rightarrow (EA)(B)(EC)R(A, B, C).$$

D'après la découverte de GÖDEL, si la conclusion est démontrable avec les axiomes additionnels, la prémisse l'est sans eux, et par conséquent aussi la proposition $(EA)(B)(EC)R(A, B, C)$ elle-même. D'après [21] ce résultat est optimal : il y a une R_0 de Σ_2^0 telle que [2]

$$(EB^0)(n)(n \in B^0 \equiv n \in A) \equiv (EB)(C)R_0(A, B, C).$$

Donc

$$(A^0)(EB^0)(C^0)\, R_0(A^0, B^0, C^0)$$

est démontrable, mais $(A)(EB)(C)\, R(A, B, C)$ ne l'est pas (sauf si la théorie usuelle des ensembles est contradictoire).

7. Problèmes ouverts.

Puisque la prédicativité est un attribut des *définitions* de *propriétés* (ou d'ensembles) de nombres naturels, une caractérisation précise de cet attribut exige : 1° une caractérisation précise de la notion de propriété de nombres naturels; 2° un choix rationnel de la notation dans laquelle les définitions sont formulées; 3° une caractérisation précise du sens des symboles, particulièrement des symboles logiques, qui constituent la notation choisie. Nous considérons séparément les interprétations « classiques » et intuitionnistes.

Cas classique. — Le développement systématique de la logique classique est basé sur la théorie des ensembles abstraits. Une propriété est identifiée à l'ensemble des éléments qui la possèdent, et la notion d'ensemble est primitive. L'existence des propriétés (ensembles) formées au moyen des opérateurs logiques usuels (et des quantificateurs portant sur des ensembles donnés) est une conséquence des axiomes élémentaires de la théorie des ensembles. Les points 1° et 3° ci-dessus ne soulèvent pas de problèmes. Quant à 2°, nous considérons en (*a*) et (*b*) les hiérarchies (Σ^α), et en (*c*) les définitions inductives.

(*a*) Les hiérarchies (Σ^α) sont-elles suffisantes ? Du moment que la totalité des nombres naturels est considérée comme bien définie, on ne voit pas clairement pourquoi il faudrait utiliser seulement des formules finies dans les définitions prédicatives.

(*b*) Est-ce que tous les nombres ordinaux récursifs sont prédicatifs? Intuitivement on voudrait exiger que le bon-ordre de type α ne soit pas seulement défini par une formule de Σ^β, avec $\beta < \alpha$, mais que cet ordre soit « prédicativement reconnu » comme étant un bon-ordre. Mais au point de vue classique, cette dernière condition n'est pas directement exprimable : en [15] elle est formulée au moyen de la notion d'une hiérarchie *autonome* de systèmes formels prédicatifs ([26]). Dans ce cas, il existe un $\alpha_0 < \omega_1$ tel que tous les ordres qui sont prédicativement reconnaissables comme des bon-ordres ont des nombres ordinaux $< \alpha_0$. Mais la formulation de [15] n'est pas encore justifiée.

([26]) La notation de Σ_2^α est utilisée. Nous remarquons en passant que, si la proposition $(E!\,X)\,\Phi(X)$ est vraie, elle est une conséquence élémentaire de la conjonction des deux propositions suivantes exprimables dans Σ_2^α: (I) $\Phi(\mathfrak{X})$, où $\mathfrak{X}$ est une formule d'une Σ^α; (II) $[\Phi(X)\ \&\ \Phi(Y)] \to (n)(n \in X \equiv n \in Y)$, où X et Y sont des variables libres. Naturellement, si une démonstration de (II) n'utilise que des axiomes existentiels prédicatifs, elle reste valable pour la théorie imprédicative des ensembles, parce que ces axiomes sont valables dans cette théorie aussi.

(c) Les définitions inductives sont-elles prédicatives? Intuitivement on voudrait dire que si X est défini par une formule inductive $\mathfrak{A}$, par exemple d'ordre o, alors l'entier n n'appartient à X que lorsque la définition l'*exige*. Ici aussi, cette condition n'est pas directement exprimable, et elle se « traduit » d'après FREGE et DEDEKIND par : X est l'intersection de tous les ensembles qui satisfont $\mathfrak{A}$. Mais si la totalité des ensembles n'est pas considérée comme « achevée », le caractère non ambigu d'un tel ensemble n'est pas plausible ([27]). En effet, par exemple si $\mathfrak{A}$ est la définition inductive de l'ensemble des notations ordinales récursives, l'intersection de tous les ensembles hyper-arithmétiques qui satisfont à $\mathfrak{A}$ n'est pas hyper-arithmétique. Je ne connais aucun raisonnement sérieux au point de vue de la logique classique qui donne un caractère prédicatif au principe de la définition inductive.

A mon avis, il est probable que la réponse à (a) est positive, et celle à (b) négative. Dans ce cas, la validité d'un théorème dans l'analyse hyper-arithmétique n'implique pas son caractère prédicatif; mais si une proposition est fausse lorsqu'elle est relativisée à la classe des ensembles hyper-arithmétiques, elle n'est pas prédicative. C'est en ce sens que le théorème de Cantor-Bendixson est appelé « imprédicatif » dans cet exposé.

Cas intuitionniste. — Le développement systématique de la logique intuitionniste est basé sur la théorie des constructions abstraites, par exemple [16]. Une propriété est identifiée avec la construction qui assigne à chaque couple $\langle a, n \rangle$ (d'une construction a et d'un nombre naturel n) la valeur o ou 1 selon que la construction a est ou non une preuve que n satisfait la propriété en question. L'existence des propriétés (constructions) formées au moyen des opérateurs logiques usuels, considérés au sens intuitionniste, est une conséquence des axiomes existentiels élémentaires de la théorie des constructions qui sont donnés dans [16] et de l'interprétation des opérateurs logiques au moyen de la théorie des constructions ([28]). Comme dans le cas classique, 1° et 3° ne soulèvent pas de problèmes, quoique naturellement les caractérisations précises données dans ce cas particulier soient tout à fait différentes du cas classique. Quant à 2°, la situation est obscure.

(a) On ne sait même pas comment préciser la question de savoir si toutes

---

([27]) Comme dans (26) si un ensemble *hyper-arithmétique* est défini par une définition inductive $\mathfrak{A}(X)$, ce fait peut être exprimé par la conjonction des deux formules de Σ_2 : si $\mathfrak{X}$ de Σ_1^α est une définition de l'ensemble en question, alors $\mathfrak{A}(X) \rightarrow [\mathfrak{X}(n) \rightarrow n \in X]$ et $\mathfrak{A}(\mathfrak{X})$.

([28]) Exposée en [16] suivant les indications bien connues de HEYTING : ici les particules propositionnelles ne sont pas primitives, mais réductibles à des fonctions arithmétiques particulières et à la construction primitive $\pi(a, b, c)$ qui vaut o si a est une preuve (constructive) de l'égalité $b = c$ et vaut 1 dans le cas contraire. a, b, c sont des variables dont les valeurs sont des constructions arbitraires.

les particules propositionnelles sont définissables à partir des particules usuelles. Je ne connais aucune façon rationnelle d'aborder le problème de savoir si les hiérarchies (Σ^{α}) sont suffisantes.

(*b*) La logique intuitionniste est parfaitement adaptée pour exprimer l'exigence que l'ordre de type α soit reconnu comme bon-ordre, parce qu'elle ne fait aucune distinction entre ces deux conditions. Mais la théorie de Brouwer des bon-ordres [3] n'est pas assez claire (à mes yeux) pour être développée dans la théorie des constructions. De façon précise, les axiomes existentiels qui assurent l'existence des constructions nécessaires pour attacher, à la façon de Brouwer, un bon-ordre à chaque démonstration constructive ne semblent pas évidents.

(*c*) Dans le cas aussi des définitions inductives, la logique intuitionniste permet une formulation directe de l'exigence intuitive : il n'est besoin que de formuler la notion de *démonstration à partir de la définition* $\mathfrak{A}$. Par exemple si une définition inductive $\mathfrak{A}$ ne contient pas de quantificateurs, les seules constructions qui sont des preuves à partir de la formule $\mathfrak{A}$ sont obtenues par l'opération de substitution des symboles O, O′, ... dans $\mathfrak{A}$ et par l'opération de détachement (= modus ponens). Mais si la formule inductive contient des quantificateurs, on retrouve les problèmes associés aux hypothèses de Brouwer concernant l'association des bon-ordres et des preuves constructives.

Il faut ajouter que la distinction entre les deux cas n'est pas exigée seulement par des considérations théoriques. Il me semble que, sans doute inconsciemment, Poincaré donnait un sens intuitionniste au problème de la prédicativité, tandis que Russell lui donnait un sens classique. Plusieurs différences entre eux sont probablement liées à ce dernier fait, plus précisément celles qui concernent le caractère prédicatif de l'ensemble des nombres naturels et du principe de l'induction complète ([29]). Cela aussi n'est pas évident au point de vue classique, mais l'est un petit peu ([30]) plus au point de vue intuitionniste grâce au raisonnement suivant.

Les seules constructions a qui sont des nombres naturels [c'est-à-dire qui satisfont $Z(a)$] sont faites à partir des formules

(i) $$Z(0)$$

et

(ii) $$Z(a) \rightarrow Z(a \bigstar 1),$$

([29]) Jusqu'ici nous l'avons présupposé sans discussion. Une définition sérieuse de la prédicativité doit être assez générale pour le démontrer.

([30]) Nous utilisons ci-dessus les notions primitives de *construction arbitraire* et de *preuve*, dont le caractère prédicatif semble problématique. Il est possible que cela ne soit pas essentiel et que des formes restreintes de ces notions suffisent. Sur la prédicativité des constructions (même du type supérieur) (*cf.* [15], § 5).

où $a \star b$ est la concaténation (c'est-à-dire la mise bout à bout) des constructions a et b. Supposons qu'une propriété P (portant sur les nombres naturels) soit déterminée par la construction $\rho_P(b, a)$ ($=0$ si b est une preuve que a satisfait P, $=1$ dans le cas contraire) et que les résultats

$$P(0), \quad P(a) \to P(a \star 1)$$

soient établis; autrement dit, on a deux constructions b_0 et ρ telles que $\rho_P(b_0, 0) = 0$ et que $\{\rho_P(b, a) = 0$ implique (31) $\rho_P[\rho(b, a), a \star 1] = 0\}$.

Alors, étant donnée une construction a faite à partir de (i) et (ii), il suffit de *suivre* cette construction pour obtenir une b_a telle que $\rho_P(b_a, a) = 0$: à chaque application de (ii) dans la construction a correspond une application de ρ.

Ce raisonnement s'exprime dans le cadre de la théorie des constructions abstraites, qui a pour base certains axiomes existentiels assez élémentaires (32).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADDISON (J. W.). — Review, *J. symb. Logic*, t. 22, 1957, p. 301-302.

[2] ADDISON (J. W.). — Abstract, *Not. Amer. Math. Soc.* t. 5, 1958, p. 845.

[3] BROUWER (L. E. J.). — Zur Begründung der intuitionischen Mathematik, III, *Math. Annalen*, t. 96, 1926, p. 451-488.

[4] FEFERMAN (S.). — Transfinite recursive progressions of axiomatic theories (à paraître).

[5] GÖDEL (Kurt). — *The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*, 2nd ed. — Princeton, Princeton University Press (*Annals of Mathematics Studies*, 3).

[6] GÖDEL (Kurt). — Russell's mathematical logic *in The philosophy of Bertrand Russell*, p. 125-153. — New York, Tudor publishing Company, 1944 (*Library of living philosophers*, 5).

[7] GRZEGORCZYK (A.). — Elementarily definable analysis, *Fund. Math.*, t. 41, 1955, p. 311-338.

[8] GRZEGORCZYK (A.), MOSTOWSKI (A.), and RYLL-NARDZEWSKI (C.). — The classical and the ω-complete arithmetic, *J. symb. Logic*, t. 23, 1958, p. 188-206.

[9] KLEENE (S. C.). — Arithmetical predicates and function quantifiers, *Trans. Amer. math. soc.*, t. 79, 1955, p. 312-340.

[10] KLEENE (S. C.). — Hierarchies of number-theoretic predicates, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 61, 1955, p. 193-213.

[11] KLEENE (S. C.). — Quantification of number-theoretic functions, *Compositio Math.* t. 14, 1959, p. 23-40.

[12] KREISEL (G.). — Some uses of metamathematics, *British J. Phil. Sc.*, t. 7 1956, p. 161-173.

---

(31) Du moment que ρ_P est une construction, $\rho_P(b, a) = 0$ est décidable, et par conséquent « implique » s'exprime par une opération purement arithmétique. Il va sans dire que l'identité (arithmétique) $\rho_P[\rho(b, a), a \star 1] . [1 - \rho_P(b, a)] = 0$ est supposée démontrée pour les variables a et b.

(32) Je remercie beaucoup M. Daniel LACOMBE qui a bien voulu corriger le texte ci dessus. M. LACOMBE n'est pas responsable pour la note (32).

[13] KREISEL (G.). — Analyse de [10], *Math. Reviews*, t. 17, 1956, p. 4.

[14] KREISEL (G.). Analysis of the Cantor-Bendixson theorem by means of the analytic hierarchy, *Bull. Acad. polon. Sc.*, t. 7, 1959, p. 621-626.

[15] KREISEL (G.). — Set theoretic problems suggested by the notion of potential totality, *Proceedings of the Symposium on infinitistic methods in the foundations of mathematics* (Warsaw, 2-8 septembre 1959), p. 103-140.

[16] KREISEL (G.). — Foundations of intuitionistic logic, *Proceedings of the* 1960 *International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of* Science (Stanford, 24 août-5 septembre 1960).

[17] KREISEL (G.). et LACOMBE (D.). — Ensembles récursivement mesurables et ensembles récursivement ouverts et fermés, *C. R. Acad. Sc.* t. 245, 1957, p. 1106-1109.

[18] LORENZEN (P.). — Logical reflexion and formalism, *J. symb. Logic*, t. 23, 1958, p. 241-249.

[19] POINCARÉ (H.). — *Sechs. Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik.* — Leipzig, Berlin, B. G. Teubner, 1910.

[20] SCHÜTTE (Kurt). — Ein widerspruchsloses System der Analysis auf typenfreier Grundlage. *Math. Z.*, t. 61, 1954, p. 160-179.

[21] SHOENFIELD (J. R.). — Abstract, *Not. Amer. math. Soc.*, t. 6, 1959, p. 530-531.

[22] SPECTOR (Clifford). — Recursive well-orderings, *J. symb. Logic*, t. 20, 1955. p. 151-163.

[23] SPECTOR (Clifford). — Recursive ordinals and prédicative set theory, *Summaries of talks presented at the Summer Institute for symbolic Logic*, in 1957, at the Cornell University, p. 377-382.

[24] WANG (Hao). — The formalization of mathematics, *J. symb. Logic*, t. 19, 1954, p. 241-266.

[25] GANDY (R. O.), KREISEL (G.) and TAIT (W. W.). — Set Existence, *Bull. Acad. polon. Sc.*, t. 8, 1960.

(Manuscrit reçu le 24 février 1960.)

Georges KREISEL,
Department of mathematics,
University of Reading,
Reading (Grande-Bretagne).