BULLETIN DE LA S. M. F.

D. LACOMBE

# La théorie des fonctions récursives et ses applications. (Exposé d'information générale)

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 88 (1960), p. 393-468

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1960__88__393_0>

*Bull. Soc. math. France*,
88, 1960, p. 393 à 468.

# LA THÉORIE DES FONCTIONS RÉCURSIVES ET SES APPLICATIONS.

(EXPOSÉ D'INFORMATION GÉNÉRALE)

PAR

DANIEL LACOMBE

(Lille).

## TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION .......... 396

CHAPITRE 1. — DÉFINITIONS, PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES .......... 397

1.1. Notations .......... 397
1.2. Fonctions initiales et opérations fondamentales .......... 398
1.3. Définition de l'ensemble $\mathbf{F_R}$ des fonctions récursives .......... 398
1.4. Ensembles récursifs et récursivement énumérables .......... 399
1.5. Exemples de résultats élémentaires de type « positif » .......... 399
1.7. Exemple de résultat élémentaire de type « négatif » .......... 400
1.6. Théorème d'énumérabilité .......... 401
1.8. Fonctions récursives primitives .......... 402
1.9. Semi-fonctions semi-récursives .......... 403
1.10. Ensembles inséparables .......... 405
1.11. Prolongements de la théorie des fonctions récursives .......... 406

CHAPITRE 2. — NUMÉROTATIONS, SCHÉMAS DE DÉFINITION .......... 406

2.1. Numérotations .......... 406
2.2. Numérotations récursives .......... 407
2.3. Application à divers exemples .......... 409
2.4. Lcs schémas de définition des fonctions récursives primitives .......... 409
2.5. Les schémas de définition des semi-fonctions semi-récursives .......... 410

Pages.

CHAPITRE 3. — PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES .................. 411

3.1. Ensembles arithmétiques, théorème de Gödel .................. 411
3.2. Définition « arithmétique » des ensembles récursivement énumérables .................. 413
3.3. Hiérarchie arithmétique de Kleene .................. 413
3.4. Ensembles diophantiens .................. 415
3.5. La hiérarchie analytique de Kleene .................. 416

CHAPITRE 4. — PROPRIÉTÉS « COMBINATOIRES » .................. 418

4.1. Machines .................. 419
4.2. Machines codées .................. 420
4.3. Machines de Turing .................. 421
4.4. Fonctions et semi-fonctions Turing-calculables .................. 422
4.5. Groupes à nombre fini de générateurs et groupes de Thue .................. 423
4.6. Groupes de Thue récursifs .................. 423
4.7. Problèmes relatifs aux présentations des groupes de Thue .................. 424
4.8. Homéomorphie des polyèdres .................. 425

CHAPITRE 5. — PROPRIÉTÉS SÉMANTIQUES ET SYNTAXIQUES .................. 425

5.1. Formules logiques du premier ordre .................. 426
5.2. Multirelations, modèles .................. 427
5.3. Le calcul des prédicats du premier ordre et le théorème de Herbrand-Gödel .... 429
5.4. Systèmes formels dérivant du calcul des prédicats .................. 431
5.5. Di-systèmes, di-représentativité .................. 432
5.6. Applications aux systèmes logiques usuels, théorème de Gödel-Rosser .................. 432
5.7. Théorèmes de Robinson et Church .................. 434
5.8. Définition syntaxique des ensembles récursivement énumérables .................. 436
5.9. Définition sémantique des ensembles récursifs .................. 437

CHAPITRE 6. — INTERPRÉTATION INTUITIVE : EFFECTIVITÉ, INDÉCIDABILITÉ ..... 437

6.1. Les questions périmathématiques .................. 438
6.2. L'« effectivité » au sens intuitif .................. 438
6.3. La « thèse de Church » .................. 442
6.4. Applications de la « filière de Church » .................. 444
6.5. Les questions d'« indécidabilité » .................. 445
6.6. Questions terminologiquement voisines .................. 446
6.7. Propriétés indécidables en Arithmétique .................. 449
6.8. Propriétés indécidables en Théorie des groupes et en Topologie algébrique.. 449
6.9. Propriétés indécidables en Logique .................. 450
6.10. Autres applications du rapport effectivité-récursivité .................. 451

CHAPITRE 7. — CLASSIFICATION DES PROPOSITIONS MATHÉMATIQUES ........ 451

7.1. Hiérarchies de formules .................. 451
7.2. Relations entre les hiérarchies de formules et les hiérarchies d'ensembles. .. 453
7.3. Localisation de quelques propositions mathématiques particulières dans la hiérarchie des formules .................. 455

Pages.

7.4. Ensembles de formules génératifs ........ 457
7.5. Applications, théorèmes de Kreisel-Shoenfield et de Kreisel-Spector ........ 457
7.6. Caractère arithmétique de tous les résultats précédents, second théorème d'incomplétude de Gödel ........ 459
7.7. Application aux théories mathématiques usuelles ........ 460

CHAPITRE 8. — RÉCURSIVITÉ RELATIVE, OPÉRATIONS RÉCURSIVES ........ 462

8.1. Récursivité relative ........ 462
8.2. Opérations récursives ........ 462
8.3. Opérations récursivement continues ........ 463
8.4. Extension aux semi-fonctions et restriction aux éléments récursifs ........ 463
8.5. Opérations fonctionnelles de types supérieurs ........ 464
8.6. Degrés d'indécidabilité ........ 465

BIBLIOGRAPHIE ........ 466

## Introduction.

La théorie des fonctions récursives a été créée entre 1930 et 1940 (principalement par Gödel, Church, Kleene, Post, Turing) et considérablement élargie depuis. On peut dire, sans exagération, qu'elle est à la base de la majorité des résultats obtenus en Logique mathématique au cours des trente dernières années.

D'une part, en effet, les fonctions récursives permettent de poser mathématiquement (et souvent de résoudre) certains problèmes logiques d'espèce particulière : les problèmes de *décidabilité* ou d'*indécidabilité* « effectives ». D'autre part un grand nombre de résultats (comme le théorème d'*incomplétude* de Gödel), bien que leur énoncé ne fasse appel ni à la notion (vague) d' « effectivité » ni à celle (précise) de récursivité, nécessitent néanmoins pour leur démonstration l'emploi — à titre d'auxiliaire technique — des fonctions récursives (ou tout au moins des fonctions « récursives primitives »). D'une façon générale, une grande partie des travaux actuellement effectués en Logique mathématique, même lorsqu'ils ne font pas appel à des résultats fins de la théorie des fonctions récursives, sont néanmoins fondés (au moins partiellement) sur des notions et des notations empruntées à cette théorie.

Les dimensions de cet exposé n'autorisent ni une démonstration complète de tous les résultats de base, ni une description (même abrégée) de toutes les extensions et applications des concepts récursifs. Nous essaierons seulement d'indiquer les principales lignes [0.1].

La définition des fonctions récursives que nous prenons comme point de départ, dans le chapitre 1, est souvent qualifié de « mathématique » (par opposition à d'autres définitions qui sont basées sur certains *systèmes formels* ou sur certaines *machines* [0.2]). Les chapitres 1 et 2 contiennent les propriétés élémentaires qui découlent plus ou moins directement de cette définition. Les rapports entre les fonctions récursives et divers domaines mathématiques sont indiqués dans les chapitres 3, 4 et 5. Le chapitre 6 examine les relations entre la notion mathématique de récursivité et la notion intuitive de « calculabilité effective » ; le contenu (d'ordre essentiellement heuristique) de ce chapitre 6 permet d'une part de mieux comprendre l'origine commune

(0.1) Comme Ouvrages de base on pourra consulter [11] sur le plan général, [5] et [39] sur des points plus particuliers; on y trouvera une importante bibliographie, ainsi que des renseignements historiques et l'indication des Mémoires originaux. D'autre part [15] constitue une excellente introduction. La bibliographie placée à la fin de cet exposé ne vise pas à être complète, mais seulement à indiquer une liste d'Ouvrages et de Mémoires où l'on puisse trouver les renseignements (mathématiques et bibliographiques) nécessaires.

(0.2) Ces autres définitions (dont nous indiquerons un certain nombre dans le cours de l'exposé) sont d'ailleurs tout aussi « mathématiques » que la première; elles font seulement appel à des structures d'un type particulier peu usité dans le reste des mathématiques.

des propriétés précédentes (à première vue un peu disparates), et d'autre part de transformer certaines de ces propriétés en des *théorèmes d'indécidabilité*. Nous indiquons enfin dans le chapitre 7 (où sont repris certains des résultats précédents) une méthode générale qui dérive de la théorie des fonctions récursives et fournit des renseignements intéressants sur la structure des mathématiques. Quant aux compléments exposés dans le chapitre 8, ils constituent une définition sommaire de la notion, constamment employée dans les travaux actuels, de fonction *récursive en* certaines autres fonctions.

Les quatre premiers chapitres, ainsi que le chapitre 8, ne font aucun appel à la Logique mathématique. D'autre part, les notions logiques introduites dans les chapitres 5 et 7 sont chaque fois définies (au moins de façon abrégée) de manière à ne supposer aucune connaissance préalable en ce domaine. Par ailleurs les chapitres 3, 4, 5 sont à peu près indépendants les uns des autres, et la lecture du chapitre 6 ne nécessite qu'une connaissance sommaire des chapitres précédents (0.3).

## CHAPITRE 1. — Définitions, Propriétés élémentaires.

Les fonctions récursives constituent une classe particulière de fonctions dont les variables (en nombre fini quelconque) et les valeurs sont des entiers naturels : ce sont les fonctions qui peuvent s'obtenir à partir de la fonction *successeur*, des fonctions *identiquement nulles* et des fonctions *projections* (ou « coordonnées ») en appliquant — un nombre (fini) quelconque de fois et dans un ordre quelconque — les opérations de *composition*, de *récurrence* et de *prise du plus petit élément d'annulation* (les définitions précises seront données dans les paragraphes qui suivent).

Lorsqu'on l'aborde directement, l'étude de ces fonctions apparaît donc comme une simple branche de l'Arithmétique, branche sans doute un peu marginale, mais sans aucun caractère « métamathématique » particulier.

**1.1. Notations.** — Soit $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels ($\geq 0$). Pour chaque $p$ de $\mathbf{N}$, soit $\mathbf{F}^{(p)}$ l'ensemble de toutes les applications de $\mathbf{N}^p$ dans $\mathbf{N}$ (dans le cas $p = 0$, nous considérons que $\mathbf{N}^0$ est un ensemble réduit à un seul élément).

Nous posons $\mathbf{F} = \bigcup_{p \in \mathbf{N}} \mathbf{F}^{(p)}$. Les éléments de $\mathbf{F}$ seront, pour abréger, appelés simplement *fonctions*.

$M$ étant un sous-ensemble quelconque de $\mathbf{F}$, nous poserons, pour chaque $p$, $M^{(p)} = M \cap \mathbf{F}^{(p)}$.

---

(0.3) Je tiens à remercier ici Georg KREISEL dont les informations et les suggestions ont été extrêmement utiles pour la rédaction de cet exposé.

**1.2. Fonctions initiales et opérations fondamentales.** — Soit sur l'élément de $\mathbf{F}^{(1)}$ ainsi défini : $\operatorname{suc}(x) = x + 1$.

Pour chaque $p$ de $\mathbf{N}$, soit $o^{(p)}$ l'élément identiquement nul de $\mathbf{F}^{(p)}$ : $o^{(p)}(x_1, \ldots, x_p) = 0$.

Pour chaque $p$ et chaque $i$ tels que $1 \leqq i \leqq p$, soit $\mathrm{pr}_i^{(p)}$ l'élément de $\mathbf{F}^{(p)}$ ainsi défini : $\mathrm{pr}_i^{(p)}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = x_i$.

Pour chaque couple $(p, q)$ d'éléments de $\mathbf{N}$, soit $\Omega_C^{(p,q)}$ l'application de $\mathbf{F}^{(p)} \times (\mathbf{F}^{(q)})^p$ dans $\mathbf{F}^{(q)}$ qui, à tout $(p+1$-uplet $(\psi, \chi_1, \ldots, \chi_p)$ (avec $\psi \in \mathbf{F}^{(p)}$, $\chi_i \in \mathbf{F}^{(q)}$), fait correspondre l'élément $\varphi$ de $\mathbf{F}^{(q)}$ défini par

$$\varphi(x_1, \ldots x_q) = \psi[\chi_1(x_1, \ldots, x_q), \ldots, \chi_p(x_1, \ldots, x_q)].$$

Pour chaque $p$ de $\mathbf{N}$, soit $\Omega_R^{(p)}$ l'application de $\mathbf{F}^{(p)} \times \mathbf{F}^{(p+2)}$ dans $\mathbf{F}^{(p+1)}$ qui, à chaque couple $(\chi, \psi)$ fait correspondre l'élément $\varphi$ défini de la façon suivante (récurrence sur la dernière variable) :

$$\psi(x_1, \ldots, x_p, 0) = \chi(x_1, \ldots, x_p),$$
$$\varphi(x_1, \ldots, x_p, n+1) = \psi[x_1, \ldots, x_p, n, \varphi(x_1, \ldots, x_p, n)].$$

Pour chaque $p$ de $\mathbf{N}$, soit $\mathbf{F}_\mu^{(p+1)}$ le sous-ensemble de $F^{(p+1)}$ ainsi défini [1.1] :

$$\psi \in \mathbf{F}_\mu^{(p+1)} \Leftrightarrow (\forall x_1) \ldots (\forall x_p)(\exists y)[\psi(x_1, \ldots, x_p, y) = 0].$$

Soit enfin $\Omega_\mu^{(p)}$ l'application de $\mathbf{F}_\mu^{(p+1)}$ dans $\mathbf{F}^{(p)}$ qui, à chaque élément $\psi$ de $\mathbf{F}_\mu^{(p+1)}$, fait correspondre l'élément $\varphi$ défini par

$\varphi(x_1, \ldots, x_p) =$ *le plus petit* $y$ *tel que* $\psi(x_1, \ldots, x_p, y) = 0$ [1.2].

**1.3. Définition de l'ensemble $\mathbf{F_R}$ des fonctions récursives.** — Nous désignerons par $\mathbf{F_R}$ le plus petit sous-ensemble de $\mathbf{F}$ qui contient suc, les $o^{(p)}$ et les $\mathrm{pr}_i^{(p)}$ et qui est *clos par rapport* aux opérations $\Omega_C^{(p,q)}$, $\Omega_R^{(p)}$ et $\Omega_\mu^{(p)}$.

---

(1.1) Nous utiliserons les abréviations mathématiques usuelles suivantes : & pour « *et* »; $\Rightarrow$ pour « *implique* »; $\Leftrightarrow$ pour « *équivaut à* »; $(\forall x)$ pour « *quel que soit x* »; $(\exists x)$ pour « *il existe un x tel que* » (le contexte indiquant sur quel ensemble — généralement $\mathbf{N}$ — varie $x$); $(\exists ! x)$ pour « il existe un unique $x$ tel que »; $(\forall x \in E)$ pour « *quel que soit l'élément x de E* »; $(\forall x < n)$ pour « *quel que soit l'entier x inférieur à n* »; de même $(\exists x \in E)$, $(\exists x < n)$; $\{x : \mathfrak{P}(x)\}$ pour « *l'ensemble de tous les x qui possèdent la propriété* $\mathfrak{P}$ »; $\complement X$ pour « *le complémentaire de X* ».

Ces signes abréviatifs, qui sont employés « intuitivement » pour remplacer des mots du langage usuel, doivent être distingués des signes homologues **&**, **∃**, **⇒**, **⟺** introduits au chapitre 5 pour désigner certains symboles ou groupements de symboles de certains systèmes formels.

(1.2) Ce *plus petit y* est généralement désigné par $\mu y[\psi(x_1, \ldots, x_p, y) = 0]$.

De facon précise, considérons, pour un sous-ensemble quelconque $M$ de $\mathbf{F}$, les propriétés suivantes :

(I) $\mathrm{suc} \in M^{(1)}$

(II) *pour chaque p*, $o^{(p)} \in M^{(p)}$;

(III) *pour chaque* $(p, i)$ *tel que* $1 \leqq i \leqq p$, $\mathrm{pr}_i^{(p)} \in M^{(p)}$;

(IV) *pour chaque* $(p, q)$, $\Omega_C^{(p,q)}[M^{(p)} \times (M^{(q)})^p] \subset M^{(q)}$;

(V) *pour chaque p*, $\Omega_R^{(p)}(M^{(p)} \times M^{(p+2)}) \subset M^{(p+1)}$;

(VI) *pour chaque p*, $\Omega_\mu^{(p)}(M_\mu^{(p+1)} \cap \mathbf{F}_\mu^{(p+1)}) \subset M^{(p)}$.

L'intersection complète d'une famille de sous-ensembles qui satisfont à (I)-(VI) satisfait aussi à (I)-(VI).

Nous définirons donc $\mathbf{F_R}$ comme l'intersection de tous les sous-ensembles de $\mathbf{F}$ qui satisfont aux six conditions (I)-(VI).

$\mathbf{F_R}$ est par conséquent un sous-ensemble (manifestement dénombrable) de $\mathbf{F}$. Les éléments de $\mathbf{F_R}$ seront appelés *fonctions récursives*.

**1.4. Ensembles récursifs et récursivement énumérables.** — Un sous-ensemble $E$ de $\mathbf{N}^p$ sera dit *récursif* si sa fonction caractéristique $\Big($c'est-à-dire la fonction qui prend la valeur 1 sur $E$, et 0 sur $\complement E\Big)$ est récursive.

Un sous-ensemble $E$ de $\mathbf{N}^p$ sera dit *récursivement énumérable* ([1.3]) s'il est la projection d'un ensemble récursif, c'est-à-dire s'il existe un sous-ensemble récursif $F$ de $\mathbf{N}^{p+1}$ tel qu'on ait

$$(x_1, \ldots, x_p) \in E \iff (\exists y)[(x_1, \ldots, x_p, y) \in F].$$

On voit immédiatement que tout ensemble récursif est récursivement énumérable (nous verrons plus loin qu'il existe par contre des ensembles récursivement énumérables qui ne sont pas récursifs).

**1.5. Exemples de résultats élémentaires de type « positif ».** — On démontre trivialement (sur les « raisons » de cette trivialité, *cf.* ci-dessous § 6.4) un grand nombre de résultats du genre suivant ([1.4]):

PROPOSITION 1.1. — *Les permutations, identifications et adjonctions de variables, ainsi que le remplacement de certaines variables par des constantes, transforment des fonctions récursives en fonctions récursives.*

---

([1.3]) Ce terme (universellement adopté) de *récursivement énumérable* risque parfois de donner lieu à des malentendus. Il serait avantageusement remplacé par *semi-récursif*, en raison de ses relations avec la notion de semi-fonction semi-récursive (ci-dessous § 1.9).

([1.4]) Certains de ces résultats nécessitent la démonstration préalable (mais elle aussi triviale) des propositions du paragraphe 2.2 ci-dessous (en particulier la proposition 2.4).

PROPOSITION 1.2. — *La somme, le produit, l'exponentiation sont des fonctions récursives; les fonctions constantes sont récursives.*

PROPOSITION 1.3. — *Les unions finies, intersections finies et complémentaires d'ensembles récursifs sont des ensembles récursifs.*

PROPOSITION 1.4. — *Les ensembles finis sont récursifs; l'ensemble des nombres pairs et l'ensemble des nombres premiers sont récursifs.*

PROPOSITION 1.5. — *Les unions finies et intersections finies d'ensembles récursivement énumérables sont des ensembles récursivement énumérables; la projection d'un ensemble récursivement énumérable est un ensemble récursivement énumérable.*

PROPOSITION 1.6. — *Pour qu'un élément de* $\mathbf{F}^{(p)}$ *soit récursif, il faut que son graphe soit un sous-ensemble récursif de* $\mathbf{N}^{p+1}$, *et il suffit que ce graphe soit un ensemble récursivement énumérable.*

PROPOSITION 1.7. — *Tout sous-ensemble récursivement énumérable non vide de* $\mathbf{N}$ *est identique à l'ensemble des valeurs d'une fonction récursive d'une variable, et réciproquement* (d'où le nom d'ensemble « récursivement énumérable »).

PROPOSITION 1.8. — *Si un sous-ensemble de* $\mathbf{N}^p$ *et son complémentaire sont tous deux récursivement énumérables, alors ils sont récursifs.*

**1.6. Exemple de résultat élémentaire de type « négatif ».** — Le résultat « négatif » suivant (dont la démonstration est, elle aussi, triviale) constitue un exemple caractéristique.

DÉFINITIONS. — $p$ et $n$ étant deux éléments quelconques de $\mathbf{N}$, et $\varphi$ un élément quelconque de $\mathbf{F}^{(p+1)}$, nous désignerons par $\varphi_{(n)}$ l'élément de $\mathbf{F}^{(p)}$ ainsi défini :

$$\varphi_{(n)}(x_1, \ldots, x_p) = \varphi(n, x_1, \ldots, x_p).$$

Un sous-ensemble $M$ de $\mathbf{F}^{(p)}$ est dit *récursivement p-énumérable* s'il existe un élément de $\mathbf{F}_{\mathbf{R}}^{(p+1)}$ tel qu'on ait : $M = \{\varphi_{(n)} : n \in \mathbf{N}\}$.

Les éléments d'un ensemble récursivement $p$-énumérable sont donc des fonctions récursives.

PROPOSITION 1.9. — *Pour* $p > 0$, $\mathbf{F}_{\mathbf{R}}^{(p)}$ *n'est pas récursivement p-énumérable.*

DÉMONSTRATION. — C'est l'application la plus simple du « procédé diagonal ». Soit $\varphi$ un élément de $\mathbf{F}_{\mathbf{R}}^{(p+1)}$. Considérons l'élément $\psi$ de $\mathbf{F}^{(p)}$ défini par

$$\psi(x_1, \ldots, x_p) = \varphi(x_1, x_1, \ldots, x_p) + 1.$$

On démontre aisément que $\psi \in \mathbf{F}_{\mathbf{R}}^{(p)}$. Et il résulte immédiatement de la définition que, pour tout $n$, $\psi \not\equiv \varphi_{(n)}$.

Définitions. — Comme précédemment, $E$ étant un sous-ensemble quelconque de $\mathbf{N}^{p+1}$ et $n$ un élément quelconque de $\mathbf{N}$, nous désignerons par $E_{(n)}$ le sous-ensemble de $\mathbf{N}^{(p)}$ ainsi défini :

$$(x_1, \ldots, x_p) \in E_{(n)} \iff (n, x_1, \ldots, x_p) \in E.$$

Une famille $C$ de sous-ensembles de $\mathbf{N}^p$ sera dite *récursivement p-énumérable* (respectivement : *semi-récursivement p-énumérable*) s'il existe un sous-ensemble récursif (respectivement : récursivement énumérable) $E$ de $\mathbf{N}^{p+1}$ tel qu'on ait : $C = \{ E_{(n)} : n \in \mathbf{N} \}$.

Proposition 1.9′. — *Pour $p > 0$, l'ensemble de tous les sous-ensembles récursifs de $\mathbf{N}^p$ n'est pas récursivement p-énumérable.*

Démonstration. — Il suffit d'associer à tout sous-ensemble récursif $E$ de $\mathbf{N}^{p+1}$ le sous-ensemble (également récursif) $F$ de $\mathbf{N}^p$ défini par

$$(x_1, \ldots, x_p) \in F \iff (x_1, x_1, \ldots, x_p) \notin E.$$

Remarque. — Cette dernière démonstration, reposant sur le fait que le complémentaire d'un ensemble récursif est récursif, ne s'étend pas aux ensembles récursivement énumérables, ainsi qu'on va le voir au paragraphe suivant.

**1.7. Théorème d'énumérabilité.** — Comme exemple de résultats moins triviaux que les précédents, considérons le théorème suivant (qui joue un rôle fondamental dans la théorie des fonctions récursives) :

Théorème 1.I. — *Pour chaque p, l'ensemble de tous les sous-ensembles récursivement énumérables de $\mathbf{N}^p$ est semi-récursivement p-énumérable* (*cf.* § 1.6).

Nous donnerons plus loin (§ 1.8, Remarque B; § 1.9, Remarque; §§ 2.4 et 2.5) quelques indications sur la démonstration de ce théorème. Le procédé diagonal (comme dans la démonstration de la proposition 1.9′) permet d'en déduire immédiatement.

Théorème 1.II. — *Pour chaque $p > 0$, il existe un sous-ensemble récursivement énumérable de $\mathbf{N}^p$ qui n'est pas récursif.*

Et de la proposition 1.8 on tire alors :

Corollaire. — *Pour chaque $p > 0$, il existe un sous-ensemble récursivement énumérable de $\mathbf{N}^p$ dont le complémentaire n'est pas récursivement énumérable.*

**1.8. Fonctions récursives primitives.** — Un grand nombre de résultats de type « positif » ( par exemple les propositions 1.1-1.4) s'obtiennent sans faire appel aux opérations $\Omega_\mu^{(p)}$.

D'autre part, les opérations $\Omega_\mu^{(p)}$ ont le défaut de n'être définies que sur une partie (à savoir $\mathbf{F}_\mu^{(p+1)}$) des ensembles $\mathbf{F}^{(p+1)}$ correspondants. Or, un élément quelconque $\varphi$ de $\mathbf{F}_\mathbf{R}^{(p+1)}$ étant donné (par sa définition explicite à partir des fonctions initiales et des opérations fondamentales), on n'aperçoit *a priori* aucun procédé général « effectif » permettant de décider si $\varphi$ appartient à $\mathbf{F}_\mu^{(p+1)}$ ou non; et les résultats énoncés plus loin montrent qu'il faut abandonner tout espoir de découvrir un tel procédé. On ne peut donc pas appliquer « mécaniquement » (ou « formellement ») les opérations $\Omega_\mu^{(p)}$.

Pour les deux raisons qui viennent d'être indiquées, il est intéressant d'étudier l'ensemble $\mathbf{F_P}$ ainsi défini : $\mathbf{F_P}$ est l'intersection complète de tous les sous-ensembles de $\mathbf{F}$ qui satisfont aux cinq premières conditions (I)-(V) du paragraphe 1.3. On a évidemment $\mathbf{F_P} \subset \mathbf{F_R}$. Les éléments de $\mathbf{F_P}$ sont appelés fonctions *récursives primitives*.

Nous verrons dans le chapitre suivant que, de la définition de $\mathbf{F_P}$ (plus précisément : du fait que les opérations $\Omega_C^{(p,q)}$ et $\Omega_\mathbf{R}^{(p)}$, contrairement aux $\Omega_\mu^{(p)}$, ne sont soumises à aucune restriction), on déduit :

PROPOSITION 1.10. — *Pour chaque $p$, $\mathbf{F}_\mathbf{P}^{(p)}$ est récursivement $p$-énumérable.*

D'où, en appliquant la proposition 1.9' :

PROPOSITION 1.11. — *Pour chaque $p > 0$, $\mathbf{F}_\mathbf{P}^{(p)} \neq \mathbf{F}_\mathbf{R}^{(p)}$.*

De la proposition 1.11, il résulte évidemment que certaines des propriétés « positives » de $\mathbf{F_R}$ ne sont pas valables pour $\mathbf{F_P}$ : ainsi les propositions 1.6 et 1.8 deviennent fausses si l'on y remplace les fonctions récursives par les fonctions récursives primitives. Néanmoins la plupart des fonctions récursives qui s'introduisent « naturellement » en mathématiques (par exemple les fonctions $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ du paragraphe 6.2) se trouvent être récursives primitives.

D'autre part, on a le résultat fondamental suivant :

PROPOSITION 1.12. — *Tout sous-ensemble récursivement énumérable non vide de $\mathbf{N}$ est identique à l'ensemble des valeurs d'un élément de $\mathbf{F}_\mathbf{P}^{(1)}$.*

DÉMONSTRATION. — Soit $\mathbf{F}_\mathbf{Q}^{(p)}$ le sous-ensemble de $\mathbf{F}^{(p)}$ constitué par toutes les fonctions telles que leur graphe (sous-ensemble de $\mathbf{N}^{p+1}$) soit la projection d'un sous-ensemble de $\mathbf{N}^{p+2}$ dont la fonction caractéristique appartienne à $\mathbf{F}_\mathbf{P}^{(p+2)}$. Et posons $\mathbf{F_Q} = \bigcup_{p \in \mathbf{N}} \mathbf{F}_\mathbf{Q}^{(p)}$.

On a $\mathbf{F_Q} \subset \mathbf{F_R}$. On voit aisément que, pour démontrer la proposition 1.12, il suffit de prouver l'inclusion inverse $\mathbf{F_R} \subset \mathbf{F_Q}$. Cela s'effectue sans difficulté en montrant que $\mathbf{F_Q}$ satisfait aux six conditions (I)-(VI) du paragraphe 1.13

(il suffit d'utiliser un certain nombre de propositions triviales du type « positif » valables pour $\mathbf{F_P}$, en particulier la proposition 2.4 ci-dessous).

Remarque A. — Les propositions 1.10 et 1.12 indiquent que, d'un certain point de vue (dont nous examinerons un aspect logique au paragraphe 6.6), $\mathbf{F_P}$ n'est « ni trop grand, ni trop petit ». Remarquons d'ailleurs que ces propositions 1.10 et 1.12 sont simultanément vérifiées par beaucoup de sous-ensembles de $\mathbf{F}$ différents de $\mathbf{F_P}$. L'intérêt particulier de $\mathbf{F_P}$ provient d'une part de son rôle historique (1.5), d'autre part de la simplicité de sa définition (tout au moins par rapport à la présentation des fonctions récursives adoptée dans ce chapitre).

Remarque B. — Le théorème 1.I se déduit immédiatement des propositions 1.12 et 1.10.

**1.9. Semi-fonctions semi-récursives.** — Une autre façon de « corriger » le défaut des $\Omega_{\mathrm{L}}^{(p)}$ consiste à utiliser des fonctions « non partout définies ».

Pour éviter les confusions, appelons *semi-fonctions* (en anglais « partial functions ») de $p$ variables toute application $\varphi$ d'un sous-ensemble quelconque $E$ de $\mathbf{N}^p$ dans $\mathbf{N}$ ($E$ dépendant de $\varphi$). Désignons par ${}^{\mathbf{s}}\mathbf{F}^{(p)}$ l'ensemble de toutes les semi-fonctions de $p$ variables. On a $\mathbf{F}^{(p)} \subset {}^{\mathbf{s}}\mathbf{F}^{(p)}$.

Nous poserons ${}^{\mathbf{s}}\mathbf{F} = \bigcup_{p \in \mathbf{N}} {}^{\mathbf{s}}\mathbf{F}^{(p)}$.

Chaque opération $\Omega_{\mathrm{C}}^{(p,q)}$ s'étend sans difficulté en une application de ${}^{\mathbf{s}}\mathbf{F}^{(p)} \times ({}^{\mathbf{s}}\mathbf{F}^{(q)})^p$ dans ${}^{\mathbf{s}}\mathbf{F}^{(q)}$. De même pour les opérations $\Omega_{\mathrm{R}}^{(p)}$. Enfin,

---

(1.5) L'ensemble $\mathbf{F_P}$ a été défini et étudié plusieurs années avant $\mathbf{F_R}$. Et le nom de *fonction récursive* (de l'allemand *rekursiv*) a tout d'abord été donné aux éléments de $\mathbf{F_P}$. Ce nom s'explique par le rôle essentiel que jouent les opérations de *récurrence* (en allemand *Rekursion*) $\Omega_{\mathrm{R}}^{(p)}$ dans la définition de $\mathbf{F_P}$. Lorsque l'insuffisance (à certains points de vue) de $\mathbf{F_P}$ et la nécessité de recourir à $\mathbf{F_R}$ ont été reconnues, les éléments de $\mathbf{F_P}$ ont été appelés fonctions *récursives primitives*, et ceux de $\mathbf{F_R}$ fonctions *récursives générales*. Dans les travaux actuels, l'adjectif *général* est omis, et la terminologie adoptée est celle de cet exposé.

Il est d'ailleurs amusant de remarquer que, dans la définition de $\mathbf{F_R}$, malgré le mot *récursif*, et contrairement à ce qui se passe pour $\mathbf{F_P}$, les opérateurs $\Omega_{\mathrm{R}}^{(p)}$ ne sont plus essentiels : à condition d'ajouter un petit nombre de fonctions initiales simples, on peut supprimer les $\Omega_{\mathrm{R}}^{(p)}$ dans la définition de $\mathbf{F_R}$. Autrement dit, lorsqu'on a la condition (VI), on peut remplacer la condition (V) par quelques conditions simples du type (I)-(III); cette possibilité se déduit aisément du théorème 3.I ci-dessous.

La proposition 1.12 et le théorème 3.I expliquent pourquoi certaines applications de la théorie des fonctions récursives à la Logique [comme le théorème d'*incomplétude* de Gödel (§ 5.6)] ont pu être effectuées à partir de $\mathbf{F_P}$ à une époque où $\mathbf{F_R}$ n'avait pas encore été défini.

chaque $\Omega_{\mu}^{(p)}$ peut s'étendre en opération définie sur $^{\mathbf{S}}\mathbf{F}^{(p+1)}$ tout entier (sans aucune restriction), les valeurs étant prises sur $^{\mathbf{S}}\mathbf{F}^{(p)}$ (1.6).

Nous désignerons par $^{\mathbf{S}}\mathbf{F}_{\mathbf{R}}$ l'intersection complète de tous les sous-ensembles de $^{\mathbf{S}}\mathbf{F}$ qui satisfont aux six conditions (I)-(VI) du paragraphe **1.3** où l'on a remplacé chaque opération fondamentale par son extension aux semi-fonctions. Les éléments de $^{\mathbf{S}}\mathbf{F}_{\mathbf{R}}$ seront appelés *semi-fonctions semi-récursives* (en anglais « partial récursive functions » ou — chez certains auteurs — « récursive partial functions »). On a évidemment $\mathbf{F}_{\mathbf{R}} \subset {}^{\mathbf{S}}\mathbf{F}_{\mathbf{R}}$.

L'absence de restriction sur les extensions des $\Omega_{\mu}^{(p)}$ aux semi-fonctions conduit (ainsi que nous le verrons dans le prochain chapitre) au résultat suivant :

THÉORÈME 1.III. — *Chaque* $^{\mathbf{S}}\mathbf{F}_{\mathbf{R}}^{(p)}$ *est semi-récursivement p-énumérable* (c'est-à-dire qu'il existe un élement $\varphi$ de $^{\mathbf{S}}\mathbf{F}_{\mathbf{R}}^{(p+1)}$ tel qu'on ait : $^{\mathbf{S}}\mathbf{F}_{\mathbf{R}}^{(p)} = \{ \varphi_{(n)} : n \subset \mathbf{N} \}$ (1.7)).

Le fait qu'il s'agit cette fois de semi-fonctions explique pourquoi le procédé diagonal ne permet de tirer aucune contradiction de ce théorème.

D'autre part, le procédé employé pour la proposition **1.12** conduit aussi au résultat suivant :

PROPOSITION **1.13**. — *Pour qu'un élément de* $^{\mathbf{S}}\mathbf{F}^{(p)}$ *appartienne à* $^{\mathbf{S}}\mathbf{F}_{\mathbf{R}}^{(p)}$, *il faut et il suffit que son graphe soit un sous-ensemble récursivement énumérable de* $\mathbf{N}^{p+1}$.

On en déduit immédiatement la propriété essentielle suivante (moins triviale que son énoncé ne le laisserait supposer) :

PROPOSITION **1.14**. — $^{\mathbf{S}}\mathbf{F}_{\mathbf{R}} \cap \mathbf{F} = \mathbf{F}_{\mathbf{R}}$.

Autrement dit : toute semi-fonction semi-récursive qui est une fonction (c'est-à-dire qui est définie sur $\mathbf{N}^p$ tout entier) est une fonction récursive.

---

(1.6) Il suffit de donner à $(\mu y)[\psi(x, y) = 0]$ la signification suivante : *le plus petit* $y$ (*s'il en existe un*) *tel que* $\psi(x, y)$ *soit défini et nul et que, pour tous les* $i < y$, $\psi(x, i)$ *soit défini et non nul.*

(1.7) $\varphi_{(n)}$ est par définition l'élément de $^{\mathbf{S}}\mathbf{F}_{\mathbf{P}}$ caractérisé par

$$(x_1, \ldots, x_p) \in \textit{graphe de } \varphi_{(n)} \Longleftrightarrow (n, x_1, \ldots, x_p) \in \textit{graphe de } \varphi.$$

La démonstration (ci-dessous § 2.4) de ce théorème 1.III fournit, en fait, un résultat plus fort. Nous dirons qu'un élément $\rho$ de $^{\mathbf{S}}\mathbf{F}_{\mathbf{R}}^{(p+1)}$ est *kleenique* s'il satisfait à la condition suivante :

$$\left(\forall \varphi \in {}^{\mathbf{S}}\mathbf{F}_{\mathbf{R}}^{(p+1)}\right)\left(\exists \psi \in \mathbf{F}_{\mathbf{R}}^{(1)}\right)(\forall n)(\varphi_{(n)} = \rho_{(\psi n)}).$$

Le théorème 1.III peut être aisément renforcé en : *Pour chaque* $p$, *il existe un élément kleenique de* $^{\mathbf{S}}\mathbf{F}_{\mathbf{R}}^{(p+1)}$ [*cf.* note (2.5)].

D'autre part H. ROGERS ([36] avec une terminologie différente) a démontré que deux éléments kleeniques $\rho$ et $\rho'$ de $^{\mathbf{S}}\mathbf{F}_{\mathbf{R}}^{(p+1)}$ sont toujours *récursivement équivalents*, c'est-à-dire qu'il existe une application biunivoque et récursive $\alpha$ de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{N}$ telle que $(\forall n)(\rho'_{(n)} = \rho_{(\alpha n)})$.

Remarque. — Le théorème 1.I se déduit immédiatement de la proposition 1.13 et du théorème 1.III.

**1.10. Ensembles inséparables.** — Un couple $(E, E_1)$ de sous-ensembles disjoints de $\mathbf{N}$ sera dit *inséparable* s'il n'existe aucun sous-ensemble récursif $F$ de $\mathbf{N}$ tel qu'on ait $E \subset F$ et $E_1 \subset \complement F$.

Énonçons un résultat qui nous sera utile dans la suite (§ 5.5) :

Proposition 1.15. — *Il existe un couple inséparable dont les deux éléments sont des sous-ensembles récursivement énumérables.*

Démonstration. — D'après le théorème 1.III, soit $\rho$ un élément de ${}^{\mathbf{S}}\mathbf{F}_{\mathbf{R}}^{(2)}$ tel qu'on ait ${}^{\mathbf{S}}\mathbf{F}_{\mathbf{R}}^{(1)} = \{\rho_{(n)} : n \in \mathbf{N}\}$. Posons

$$n \in E \Leftrightarrow [\rho(n, n) \text{ est défini et nul}]$$
$$n \in E_1 \Leftrightarrow [\rho(n, n) \text{ est défini et non nul}].$$

La proposition 1.13 prouve que $E$ et $E_1$ sont récursivement énumérables. D'autre part, s'il existait un ensemble récursif $F$ tel qu'on ait $E \subset F$ et $E_1 \subset \complement F$, alors la fonction prenant la valeur 1 sur $F$ et 0 sur $\complement F$ serait récursive, ce dont on déduirait aisément une contradiction.

Remarque. — En analysant la définition et en utilisant la proposition 1.8, on voit que l'inséparabilité d'un couple donné $(E, E_1)$ équivaut à la propriété suivante :

*Pour tout couple $(X, X_1)$ de sous-ensembles récursivement énumérables de $\mathbf{N}$, l'ensemble*

$$\Phi(X, X_1) = (X \cap X_1) \cup \complement(X \cup X_1) \cup \left(E \cap \complement X\right) \cup \left(E_1 \cap \complement X_1\right)$$

*est non vide.*

Lorsque pour tout $(X, X_1)$ on peut définir un élément particulier de $\Phi(X, X_1)$, récursivement en fonction des *nombres de Gödel* de $X$ et $X_1$ [c'est-à-dire des numéros de $X$ et $X_1$ dans une des numérotations canoniques (plus précisément *kleeniques*, *cf.* ci-dessus note (1.7)) qui découlent du théorème 1.I], alors le couple $(E, E_1)$ est dit *effectivement inséparable* (1.8). Le

(1.8) Dans la littérature actuelle, le mot *effectif* (en anglais « effective ») est souvent employé comme synonyme de *récursif relativement aux nombres de Gödel*. Cet emploi technique ne doit par être confondu avec la signification générale qui sera donnée dans le chapitre 6 à l'adverbe « effectivement ». D'autre part, la définition habituellement adoptée pour les ensembles effectivement inséparables est en apparence plus faible (et, en fait, moins maniable) que celle que nous venons de donner. Mais un procédé dû à R. Smullyan (d'après une méthode créée par J. Myhill pour les ensembles *créatifs*) permet de démontrer l'équivalence de ces deux définitions (tout au moins lorsque $E$ et $E_1$ sont récursivement énumérables).

couple particulier $(E, E_1)$ défini ci-dessus dans la démonstration de la proposition 1.15 est effectivement inséparable lorsqu'on prend pour $\rho$ un élément kleenique de $\mathbf{SF}_{\mathbf{R}}^{(2)}$ : cela résulte immédiatement de la définition.

**1.11. Prolongements de la théorie des fonctions récursives.** — Il est assez naturel de chercher à étendre, de diverses façons, les notions récursives définies dans ce chapitre. Une de ces extensions est sommairement définie dans le chapitre 8.

L'*Analyse récursive* ([9], [20], [22], [23], [24]) constitue un autre prolongement. Elle consiste à définir et à étudier des notions comme celle de *nombre réel récursif*, fonction *récursivement continue* ou *récursivement mesurable* d'une variable réelle, élément *récursif* et sous-ensemble *récursivement ouvert* ou *récursivement fermé* de certains espaces topologiques, distribution *récursive*, etc. A titre d'exemple, indiquons le résultat élémentaire suivant (qui groupe un énoncé de type « positif « et un énoncé de type « négatif ») :

*La valeur maximale d'une fonction réelle récursivement continue définie sur* $[0, 1]$ *est toujours un nombre réel récursif, mais il peut arriver que cette valeur maximale ne soit atteinte pour aucune abscisse récursive.*

Nous préciserons plus loin (§ 6.10 et 7.3 note (7.5)) l'intérêt de ces prolongements de la théorie des fonctions récursives.

## Chapitre 2. — Numérotations, schémas de définition.

Certaines propriétés des fonctions récursives, ainsi que la plupart de leurs applications, ne s'obtiennent qu'à condition d'avoir étendu les notions de base (fonctions récursives, sous-ensembles récursifs ou récursivement énumérables) à des ensembles dénombrables autres que $\mathbf{N}$. Ces extensions s'obtiennent immédiatement lorsqu'on a « numéroté » les ensembles en question.

**2.1. Numérotations.** — Nous appellerons *numérotation* d'un ensemble $A$ toute application biunivoque de $A$ sur $\mathbf{N}$.

Deux numérotations $\alpha$ et $\alpha_1$ de $A$ seront dites *récursivement équivalentes* si $\alpha_1\alpha^{-1}$ (et par conséquent aussi $\alpha\alpha_1^{-1}$) est récursive.

$\alpha$ et $\alpha'$ étant respectivement des numérotations de $A$ et $A'$, une application $\varphi$ de $A$ dans $A'$ sera dite *récursive relativement à* $(\alpha, \alpha')$ si $\alpha'\varphi\alpha^{-1}$ est récursive. Un sous-ensemble $E$ de $A$ sera dit *récursif* (respectivement : *récursivement énumérable*) *relativement à* $\alpha$ si $\alpha(E)$ est un sous-ensemble récursif (respectivement : récursivement énumérable) de $\mathbf{N}$. Ces propriétés restent invariantes lorsqu'on remplace $\alpha$ et $\alpha'$ par des numérotations qui leur soient récursivement équivalentes.

**2.2 Numérotations récursives.** — Tous les ensembles dénombrables que nous serons amenés à prendre comme ensembles de base se déduisent de $\mathbf{N}$ (ou de certains ensembles fixes numérotés une fois pour toutes) par les applications successives des trois opérations suivantes (dont la première peut d'ailleurs se ramener aux deux autres) : produit direct, passage de $A$ à l'ensemble de toutes les suites finies d'éléments de $A$, passage de $A$ à un sous-ensemble récursivement énumérable de $A$.

DÉFINITION A. — $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ étant respectivement des numérotations de $A$, $B$ et $A \times B$, $\gamma$ sera dite *récursive relativement à* $(\alpha, \beta)$ si l'application $(x, y) \to \gamma(\alpha^{-1}x, \beta^{-1}y)$ de $\mathbf{N}^2$ dans $\mathbf{N}$ est récursive.

PROPOSITION 2.1. — (a) *Il existe au moins une numérotation de $A \times B$ qui est récursive relativement à* $(\alpha, \beta)$; (b) *deux numérotations de $A \times B$ qui sont récursives relativement à* $(\alpha, \beta)$ *sont récursivement équivalentes entre elles*; (c) *si $\gamma$ est récursive relativement à* $(\alpha, \beta)$, *toute numérotation de $A \times B$ qui est récursivement équivalente à $\gamma$ est récursive relativement à* $(\alpha, \beta)$.

DÉFINITION B. — $A$ étant un ensemble quelconque, nous désignerons par $\mathfrak{S}(A)$ l'ensemble de toutes les suites finies d'éléments de $A$ [c'est-à-dire l'ensemble de toutes les applications d'un segment initial fini (éventuellement vide) de $\mathbf{N}$ dans $A$].

Si $X = (x_1, \ldots, x_p)$ et $Y = (y_1, \ldots, y_q)$ sont deux éléments de $\mathfrak{S}(A)$, de *longueurs* respectives $p$ et $q$, nous désignerons par $X \circ Y$ l'élément $(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ de $\mathfrak{S}(A)$, de longueur $(p+q)$ (2.1).

DÉFINITION C. — Une numérotation $\sigma$ de $\mathfrak{S}(A)$ sera dite *récursive relativement à* une numérotation $\alpha$ de $A$ si l'application $\tau$ de $\mathbf{N}^2$ dans $\mathbf{N}$ ainsi définie :

$$\begin{aligned} i < \textit{longueur de } \sigma^{-1}n \quad &\Rightarrow \quad \tau(n, i) = 1 + \alpha[(i+1)\textit{-ième terme de } \sigma^{-1}n] \\ i \geq \textit{longueur de } \sigma^{-1}n \quad &\Rightarrow \quad \sigma(n, i) = 0 \end{aligned}$$

est récursive.

PROPOSITION 2.2. — *Comme la proposition 2.1, en remplaçant le produit par l'opération* $\mathfrak{S}$.

PROPOSITION 2.3. — *Si $\sigma$ est récursive relativement à $\alpha$, alors l'application $n \to$ longueur de $\sigma^{-1}n$, les applications $(n_1, \ldots, n_p) \to \sigma(\alpha^{-1}n_1, \ldots, \alpha^{-1}n_p)$ et l'application $(m, n) \to \sigma(\sigma^{-1}m \circ \sigma^{-1}n)$ sont récursives.*

---

(2.1) Cette opération $\circ$ est généralement appelée *concaténation*. Elle est associative et admet la « suite vide » comme élément neutre. L'ensemble $\mathfrak{S}(A)$ muni de la concaténation est le *monoïde libre* engendré par $A$.

PROPOSITION 2.4. — *Si $\sigma$ est une numérotation de $\mathfrak{S}(\mathbf{N})$ récursive relativement à la numérotation identique de $\mathbf{N}$, et si $\varphi$ est un élément de $\mathbf{F}_{\mathbf{R}}^{(1)}$, alors l'élément $\tilde{\varphi}$ de $\mathbf{F}^{(1)}$ défini par $\tilde{\varphi}(n) = \sigma((\varphi(0), \ldots, \varphi(n-1)))$ est également récursif.*

DÉFINITION D. — Soient $A$ un ensemble dénombrable numéroté par $\alpha$, $B$ un sous-ensemble infini de $A$ numéroté par $\beta$. On dira que $\beta$ est *récursive relativement à* $\alpha$ si $\alpha\beta^{-1}$ est récursive.

PROPOSITION 2.5. — (a) *Pour qu'il existe une numérotation de $B$ qui soit récursive relativement à $\alpha$, il faut et il suffit que $B$ soit récursivement énumérable relativement à $\alpha$;* (b) *et* (c) *comme dans les propositions* 2.1 *et* 2.2.

DÉMONSTRATION DES PROPOSITIONS 2.1-2.5. — Les propositions 2.3, 2.4 et 2.5, ainsi que le (b) et le (c) de 2.1 et 2.2, sont des résultats plus ou moins triviaux du type « positif » indiqué au paragraphe 1.5.

Pour démontrer le (a) de 2.1 et 2.2, il suffit de construire une numérotation de $\mathbf{N}^2$ et une numérotation de $\mathfrak{S}(\mathbf{N})$ qui soient récursives relativement à la numérotation identique de $\mathbf{N}$.

Pour $\mathbf{N}^2$ nous prendrons la *numérotation de Cantor* (par diagonales successives) $\varkappa^{(2)}$ ainsi définie :

$$\varkappa^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + 3x_2).$$

Plus généralement, nous prendrons pour chaque $p \geqq 2$, la numérotation $\varkappa^{(p)}$ de $\mathbf{N}^p$ définie par récurrence sur $p$ de la façon suivante :

$$\varkappa^{(p+1)}(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}) = \varkappa^{(2)}[\varkappa^{(p)}(x_1, \ldots, x_p), x_{p+1}].$$

On voit aisément que chaque $\varkappa^{(p)}$ est récursive ainsi que ses $p$ fonctions inverses.

En utilisant la correspondance biunivoque et canonique qui existe entre $\mathfrak{S}(\mathbf{N})$ et l'ensemble $\{\varnothing\} \cup \left(\bigcup_{p \geqq 1} \mathbf{N}^p\right)$, puis les numérotations $\varkappa^{(p)}$ et enfin la numérotation $\varkappa^{(2)}$ (l'union infinie étant assimilée à un produit direct), on définit une certaine numérotation $\sigma$ de $\mathfrak{S}(\mathbf{N})$ dont on démontre aisément qu'elle possède la propriété cherchée (2.2).

---

(2.2) $\sigma(X)$ est souvent appelé le *nombre de Gödel* de la suite $X$, pour la raison historique suivante : c'est dans la démonstration du théorème d'incomplétude de GÖDEL que sont appliquées pour la première fois les propriétés récursives d'une numérotation particulière de $\mathfrak{S}(A)$, dans le cas où $A$ est l'ensemble (numéroté une fois pour toutes) des symboles d'un certain système formel (c'est donc cette numération qui a permis d' « arithmétiser la syntaxe »). En fait, la numérotation de $\mathfrak{S}(\mathbf{N})$ utilisée par GÖDEL (numérotation basée sur la décomposition en facteurs premiers) est différente de celle

(*à suivre page* 409)

Applications. — Pour tout ensemble $A$ construit à partir de $\mathbf{N}$ au moyen de trois opérations indiquées plus haut, on définit donc (par récurrence sur la construction de $A$) la notion de *numérotation récursive* de $A$ (sous-entendu : relativement à la numérotation identique de $\mathbf{N}$). Des théorèmes faciles (du type « positif ») assurent que, si un même $A$ peut être défini à partir de $\mathbf{N}$ de deux façons trivialement équivalentes (ou encore : à une bijection triviale près), alors les deux notions correspondantes de récursivité pour une numérotation de $A$ coïncident.

**2.3. Applications à divers exemples.** — $\mathbf{Z}$ étant l'ensemble de tous les entiers rationnels ($\lesseqgtr 0$), désignons par $\mathbf{P}^{(p)}$ l'ensemble de tous les polynomes de $p$ variables à coefficients dans $\mathbf{Z}$. Et posons $\mathbf{P} = \bigcup_{p \in \mathbf{N}} \mathbf{P}^{(p)}$.

Désignons par $\mathbf{P}_{\mathbf{S}}^{(p)}$ l'ensemble de tous les éléments $\mathbf{P}^{(p)}$ qui s'annulent pour au moins un élément de $\mathbf{Z}^p$ (c'est-à-dire qui sont tels que l'équation diophantienne correspondante admette au moins un système de solutions). Et posons $\mathbf{P}_{\mathbf{S}} = \bigcup_{p \in \mathbf{N}} \mathbf{P}_{\mathbf{S}}^{(p)}$.

D'après ce qui a été dit au paragraphe précédent, on définit canoniquement la notion de *numérotation récursive* pour chacun des ensembles $\mathbf{Z}$, $\mathbf{P}^{(p)}$, $\mathbf{P}$ et $\mathfrak{S}(\mathbf{P}^{(p)})$. Et l'on démontre sans difficulté que, relativement à toute numérotation récursive, on a :

Proposition 2.6. — $\mathbf{P}_{\mathbf{S}}$ *est un sous-ensemble récursivement énumérable de* $\mathbf{P}$; $\mathbf{P}_{\mathbf{S}}^{(1)}$ *est un sous-ensemble récursif de* $\mathbf{P}^{(1)}$; *le plus grand commun diviseur* (*p.g.c.d.*) *est une application récursive de* $(\mathbf{P}^{(1)})^2$ *dans* $\mathbf{P}^{(1)}$; *l'opération de Lagrange de séparation des racines multiples* ([2.3]) *est une application récursive de* $\mathbf{P}^{(1)}$ *dans* $\mathfrak{S}(\mathbf{P}^{(1)})$.

Il existe une multitude de propositions de ce genre, portant sur des ensembles de nature très variée. Nous en utiliserons un certain nombre dans la suite de cet exposé.

**2.4. Les schémas de définition des fonctions récursives primitives.** — Toute fonction récursive primitive $\varphi$(§1.8) est définie par un certain

---

que nous avons définie ici (mais lui est récursivement équivalente). On a pris l'habitude, pour des ensembles $E$ de nature très variée, et certaines numérotations $\eta$ de ces ensembles, de désigner $\eta(x)$ par l'expression *nombre de Gödel de* $x$; et cela même dans des cas où $\eta$ est multiforme (inverse d'une application non biunivoque) : par exemple pour les numérotations de $\mathbf{F}_{\mathbf{P}}^{(p)}$ et de ${}^{\mathbf{S}}\mathbf{F}_{\mathbf{R}}^{(p)}$ respectivement déduites de la proposition 1.10 et du théorème 1.III.

(2.3) C'est-à-dire l'opération qui, à tout élément $P$ de $\mathbf{P}^{(1)}$, fait correspondre la suite $(Q_1, \ldots, Q_n)$ telle que chaque $Q_i$ ne possède que des racines simples et qu'on ait : $P = Q_1(Q_2)^2 \ldots (Q_n)^n$.

« schéma », qui indique de quelle façon $\varphi$ est obtenue à partir des fonctions initiales en appliquant les opérations $\Omega_C^{(p,q)}$ et $\Omega_R^{(p)}$. Nous allons préciser cette notion de schéma.

A chacun des éléments suc, $o^{(p)}$, $pr_i^{(p)}$, $\Omega_C^{(p,q)}$, $\Omega_R^{(p)}$ associons un certain *symbole* (objet de nature quelconque, que nous pouvons d'ailleurs très bien considérer comme identique à l'élément correspondant). Soit $\mathbf{S}$ l'ensemble de tous ces symboles. $\mathbf{S}$ est supposé muni, une fois pour toutes, d'une numérotation possédant certaines propriétés récursives (qui la définissent à une équivalence récursive près). L'ensemble $\mathbf{D}$ de tous les schémas de définition apparaît comme un certain sous-ensemble de $\mathfrak{S}(\mathbf{S})$ (*cf.* § 2.2. Définitions B), sous-ensemble dont nous ne donnons pas ici la définition exacte, le principe de cette définition étant évident (2.4). Nous désignerons par $\mathbf{D}^{(p)}$ l'ensemble des éléments de $\mathbf{D}$ qui correspondent à des fonctions de $p$ variables.

On démontre aisément :

PROPOSITION 2.7. — *$\mathbf{D}$ et chaque $\mathbf{D}^{(p)}$ sont des sous-ensembles récursifs de $\mathfrak{S}(\mathbf{S})$.*

Soit alors $\delta^{(p)}$ une numérotation de $\mathbf{D}^{(p)}$ qui soit récursive relativement à la numérotation de $\mathbf{S}$ [par l'intermédiaire d'une numérotation récursive de $\mathfrak{S}(\mathbf{S})$]. Pour chaque $p$ de $\mathbf{N}$, désignons par $\theta_n^{(p)}$ la fonction récursive primitive qui est définie par le schéma $(\delta^{(p)})^{-1}(n)$.

On a donc : $\mathbf{F}_{\mathbf{P}}^{(p)} = \{\theta_n^{(p)} : n \in \mathbf{N}\}$.

Soit $\theta^{(p)}$ l'élément de $\mathbf{F}^{(p+1)}$ défini par $(\forall n)\,(\theta_{(n)}^{(p)} = \theta_n^{(p)})$ (*cf.* § 1.6).

D'un certain nombre de lemmes quasi triviaux de type « positif » on déduit sans difficulté [sur ce point, *cf.* § 6.4 et note (6.10)] :

PROPOSITION 2.8. — $\theta^{(p)} \in \mathbf{F}_{\mathbf{R}}^{(p+1)}$.

D'où l'on tire la proposition 1.10.

**2.5. Les schémas de définition des semi-fonctions semi-récursives.** — Reprenons la définition de $\mathbf{S}$, en considérant que les symboles qui représentaient les opérations $\Omega_C^{(p,q)}$ et $\Omega_R^{(p)}$ représentent maintenant les extensions de ces opérations aux semi-fonctions (§ 1.9). Et ajoutons de nouveaux symboles représentant les extensions des $\Omega_\mu^{(p)}$ aux semi-fonctions. Si $\mathbf{S}_{\mathbf{R}}$ est l'ensemble de tous ces symboles, l'ensemble de tous les schémas de définition des semi-fonctions semi-récursives apparaît comme un certain sous-ensemble récursif

(2.4) On voit aisément que l'emploi de « parenthèses formelles » et de « virgules formelles » est parfaitement inutile (toute question de commodité mise à part). En effet un schéma tel que, par exemple, le suivant (qui représente la multiplication)

$$\Omega_R^{(1)}(o^{(1)},\ \Omega_C^{(2,3)}(\Omega_R^{(1)}(pr_1^{(1)},\ \Theta_C^{(1,3)}(suc,\ pr_1^{(3)}),\ pr_1^{(2)},\ pr_3^{(3)})))$$

est caractérisé sans ambiguïté (c'est là un théorème « combinatoire » trivial) par la suite

$$\Omega_R^{(1)}\,o^{(1)}\,\Omega_C^{(2,3)}\,\Omega_R^{(1)}\,pr_1^{(1)}\,\Omega_C^{(1,3)}\,suc\,pr_1^{(3)}\,pr_1^{(3)}\,pr_3^{(3)}.$$

$\mathbf{D_R}$ de $\mathfrak{S}(\mathbf{S_R})$. En numérotant $\mathbf{D_R^{(p)}}$ on obtient comme précédemment un certain élément $\rho^{(p)}$ de ${}^{\mathbf{S}}\mathbf{F}^{(p+1)}$ tel qu'on ait : ${}^{\mathbf{S}}\mathbf{F}^{(p)} = \{ \rho^{(p)}_{(n)} : n \in \mathbf{N} \}$.

Et l'on démontre, dans les mêmes conditions que pour la proposition 2.7 :

PROPOSITION 2.9. — $\rho^{(p)} \in {}^{\mathbf{S}}\mathbf{F_R}^{(p+1)}$.

D'où le théorème 1.III (2.5).

REMARQUE. — Désignons par $\mathbf{D_{FR}^{(p)}}$ l'ensemble des éléments de $\mathbf{D_R^{(p)}}$ qui définissent des fonctions (et pas seulement des semi-fonctions). Le procédé diagonal montre que $\mathbf{D_{FR}^{(p)}}$ n'est pas un sous-ensemble récursivement énumérable (ni *a fortiori* récursif) de $\mathbf{D_R^{(p)}}$ [ou de $\mathfrak{S}(\mathbf{S_R})$]. On démontrerait de même que l'ensemble des éléments de $\mathbf{D}^{(p+1)}$ qui sont tels que la fonction récursive primitive correspondante appartienne à $\mathbf{F}_{\mu}^{(p+1)}$ n'est pas récursivement énumérable.

## CHAPITRE 3. — Propriétés arithmétiques.

Les familles d'ensembles (de nombres ou de fonctions) étudiées dans ce chapitre paraîtront peut-être plus familières — ou tout au moins plus « naturelles » — que celles qui sont définies au chapitre 1. Nous esquissons d'autre part une classification hiérarchique des ensembles « définissables » (en un certain sens de ce terme), classification qui joue un rôle essentiel dans les recherches logiques sur la structure des mathématiques (*voir* le chapitre 7).

**3.1. Ensembles arithmétiques, théorème de Gödel.** — Désignons respectivement par $G_+$ et $G_\times$ le graphe des opérations d'addition et de multiplication dans $\mathbf{N}$, autrement dit les sous-ensembles de $\mathbf{N}^3$ définis par

$$(x, y, z) \in G_+ \iff x + y = z,$$
$$(x, y, z) \in G_\times \iff xy = z.$$

Nous appellerons *ensemble arithmétique* tout sous-ensemble de $\mathbf{N}^p$ ($p$ quelconque dans $\mathbf{N}$) qui peut être obtenu à partir de $G_+$ et $G_\times$ par intersection (finie), complémentation, projection et changement de variables (3.1).

(2.5) Soit $\varphi$ un élément fixe quelconque de ${}^{\mathbf{S}}\mathbf{F_R^{(p+1)}}$. En examinant comment le schéma de définition de $\varphi_{(n)}$ dépend de l'entier $n$, on démontre aisément que $\rho^{(p)}$ est *kleenique* [ci-dessus, note (1.7)].

(3.1) De façon précise, si nous posons $\mathfrak{E} = \bigcup_{p \in \mathbf{N}} \mathfrak{P}(\mathbf{N}^p)$, nous définissons la classe $\mathfrak{A}$ de tous les ensembles arithmétiques comme le plus petit sous-ensemble de $\mathfrak{E}$ qui contient $G_+$ et $G_\times$ et qui est clos par rappport aux opérations $\Phi^{(p)}$, $\Psi^{(p)}$, $\Theta^{(p)}$ et $\Lambda^\alpha$ définies de la façon suivante : $\Phi^{(p)}(X, Y) = X \cap Y$ et $\Psi^{(p)}(X) = \complement X$, les variables

(*à suivre page* 412)

On voit aisément qu'à tout sous-ensemble arithmétique $E$ de $\mathbf{N}^p$ on peut associer un entier $k$ (dépendant de $E$, et non pas seulement de $p$) et un polynome $P$ de $p+k$ variables à coefficients dans $\mathbf{Z}$ (ensemble des entiers $\lesseqgtr 0$) tel qu'on ait :

$$(x_1, \ldots, x_p) \in E \iff (\mathrm{Q}_1 y_1) \ldots (\mathrm{Q}_k y_k) [P(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_k) = 0],$$

où chacun des $\mathrm{Q}_i$ représente soit le quantificateur existentiel $\exists$, soit le quantificateur universel $\forall$ (la suite $\mathrm{Q}_1, \ldots, \mathrm{Q}_k$ dépendant de $E$), et où les $y_j$ varient sur $\mathbf{N}$ (de même que les $x_i$).

Réciproquement, tout ensemble $E$ défini par une relation de cette forme est évidemment arithmétique.

Gödel a démontré le résultat fondamental suivant :

Théorème 3.I. — *Tout ensemble récursif est arithmétique.*

Démonstration. — Désignons par $\mathbf{F_A}$ l'ensemble des éléments de $\mathbf{F}$ dont le graphe est un ensemble arithmétique. Il faut prouver que $\mathbf{F_R} \subset \mathbf{F_A}$. Il est à peu près immédiat que $\mathbf{F_A}$ contient suc, les $0^{(p)}$ et les $\mathrm{pr}_i^{(p)}$, et est clos par rapport aux $\Omega_{\mathrm{C}}^{(p,q)}$ et aux $\Omega_{\mu}^{(p)}$. La seule difficulté consiste à montrer que $\mathbf{F_A}$ est clos par rapport aux $\Omega_{\mathrm{R}}^{(p)}$.

Or on remarque que, pour ce dernier point, il suffit de démontrer l'existence d'un entier $h$ et d'un élément $\beta$ de $\mathbf{F_A}^{(h+1)}$ tel que si, pour tout $(n_1, \ldots, n_h)$ de $\mathbf{N}^h$, on pose $\beta_{(n_1, \ldots, n_h)}(x) = \beta(n_1, \ldots, n_h, x)$, alors l'ensemble $\{\beta_{(n_1, \ldots, n_h)} : (n_1, \ldots, n_h) \in \mathbf{N}^h\}$ soit *dense* sur $\mathbf{F}^{(1)}$ ($\mathbf{F}_1 = \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ étant considéré avec la topologie d'espace produit déduite de la topologie discrète de $\mathbf{N}$).

On voit en effet qu'une telle fonction $\beta$ permet, dans la formule qui donne explicitement $\Omega_{\mathrm{R}}^{(p)}(\chi, \psi)(x_1, \ldots, x_p, y)$ en fonction de $(\chi, \psi, x_1, \ldots, x_p, y)$, de remplacer les quantifications portant sur un élément variable de $\mathbf{F}^{(1)}$ par des quantifications portant sur un élément variable de $\mathbf{N}$. Car, si $\beta$ satisfait à la condition indiquée, et si $\varphi = \Omega_{\mathrm{R}}^{(p)}(\chi, \psi)$, on a

$$\begin{aligned} z = \varphi(x_1, \ldots, x_p, y) &\iff (\exists \xi \in \mathbf{F}^{(1)})\, \mathfrak{T}_{\chi,\psi}(x_1, \ldots, x_p, y, z, \xi) \\ &\iff (\exists n_1) \ldots (\exists n_h)\, \mathfrak{T}_{\chi,\psi}(x_1, \ldots, x_p, y, z, \beta_{(n_1, \ldots, n_h)}), \end{aligned}$$

---

décrivant $\mathfrak{P}(\mathbf{N}^p)$; $\Theta^{(p)}$ est l'application de $\mathfrak{P}(\mathbf{N}^{p+1})$ dans $\mathfrak{P}(\mathbf{N}^p)$ définie par :

$$(x_1, \ldots, x_p) \in \Theta^{(p)}(X) \iff (\exists y)[(x_1, \ldots, x_p, y) \in X];$$

enfin, pour toute application $\alpha$ de l'ensemble $\{0, \ldots, p\}$ dans l'ensemble $\{0, \ldots, q\}$, $\Lambda^\alpha$ est l'application de $\mathfrak{P}(\mathbf{N}^p)$ dans $\mathfrak{P}(\mathbf{N}^q)$ définie par

$$(x_1, \ldots, x_q) \in \Lambda^\alpha(X) \iff (x_{\alpha(1)}, \ldots, x_{\alpha(p)}) \in X.$$

$\mathfrak{A}$ est donc un sous-ensemble dénombrable de $\mathfrak{E}$. $\mathfrak{A}$ est évidemment clos par rapport à l'union (finie) et à la quantification universelle ($\forall$). Sans changer les principaux résultats on pourrait, dans cette définition, remplacer $\mathbf{N}$ par $\mathbf{Z}$ (comme domaine décrit par les variables). Cette possibilité est due au fait que tout élément de $\mathbf{Z}$ est représentable comme différence de deux éléments de $\mathbf{N}$, et tout élément de $\mathbf{N}$ représentable comme somme de quatre carrés d'éléments de $\mathbf{Z}$.

où l'on a posé

$$\mathcal{R}_{\chi,\psi}(x_1, \ldots, x_p, y, z, \xi) \iff \{\xi(0) = \chi(x_1, \ldots, x_p) \;\; \& \;\; (\forall i < y)[\xi(i+1) = \psi(x_1, \ldots, x_p, i, \xi(i)] \;\; \& \;\; \xi(y) = z\}.$$

La fonction $\beta$ particulière utilisée par Gödel est la suivante (on a $h = 2$):

$$\beta(n_1, n_2, x) = \textit{reste de } n_1 \quad \textit{modulo}\,[1 + n_2(x+1)].$$

On voit immédiatement que $\beta \in \mathbf{F_A}$. Et une application simple du « théorème chinois » montre que l'ensemble des $\beta_{(n_1, n_2)}$ est dense sur $\mathbf{F}^{(1)}$ (3.2).

**3.2. Définition « arithmétique » des ensembles récursivement énumérables.** — Appelons *quantification universelle bornée* (d'ordre $p$) l'opération qui, à tout sous-ensemble $E$ de $\mathbf{N}^{p+1}$, fait correspondre le sous-ensemble $F$ de $\mathbf{N}^{p+1}$ défini par

$$(x_1, \ldots, x_p, y) \in F \iff (\forall i < y)[x_1, \ldots, x_p, i) \in E].$$

Théorème 3. II. — *Pour qu'un ensemble soit récursivement énumérable, il faut et il suffit qu'il puisse s'obtenir à partir de $G_+$ et $G_\times$ par union, intersection, projection, quantification universelle bornée et changement de variables.*

Démonstration. — La suffisance de la condition est une propriété triviale du type de celles indiquées au paragraphe 1.5. La nécessité s'obtient en examinant de près la démonstration du théorème 3.I.

Remarque. — Ce théorème 3.II fournit une nouvelle définition des ensembles récursivement énumérables. De la notion d'ensemble récursivement énumérable on peut déduire ensuite les notions d'ensemble récursif et de fonction récursive (respectivement grâce aux propositions 1.8 et 1.6).

**3.3. Hiérarchie arithmétique de Kleene.** — Du théorème 3.I on déduit immédiatement:

Proposition 3.1. — *Tout ensemble récursivement énumérable est arithmétique.*

(3.2) Une application « combinatoire » de cette méthode a été fournie par Quine [29]: Remplaçons $\mathbf{N}$ par $\mathfrak{S}(A)$ (*cf.* § 2.2) où $A$ est un ensemble fini quelconque contenant au moins deux éléments distincts; remplaçons les relations $x+y=z$ et $xy=z$ par les relations $X = (a_i)$ (pour chaque élément $a_i$ de $A$) et $X \circ Y = Z$ (*cf.* § 2.2); et considérons la classe de tous les sous-ensembles de $(\mathfrak{S}(A))^p$ ($p$ quelconque) qui peuvent être définis à partir de ces dernières relations par union (finie), complémentation, projection et changement de variables. On démontre que cette classe contient tous les sous-ensembles récursifs [par rapport à une numérotation récursive, (*cf.* § 2.2)]. L'« astuce » consiste à construire une fonction (à variables et valeurs dans $\mathfrak{S}(A)$) ayant la même propriété de densité que la fonction $\beta$ de Gödel.

D'où, d'après le corollaire du théorème 1.II (§ 1.7) :

PROPOSITION 3.2. — *Pour chaque $p > 0$, il existe un sous-ensemble arithmétique de $\mathbf{N}^p$ qui n'est pas récursivement énumérable (et* a fortiori *n'est pas récursif).*

Plus généralement, on peut classifier les ensembles arithmétiques d'après la méthode suivante, due à KLEENE (nous nous bornons aux sous-ensembles de $\mathbf{N}$, rien n'étant changé pour les sous-ensembles de $\mathbf{N}^p$ avec $p > 1$) :

De la définition et des propositions 1.1, 1.2 et 1.3 (§ 1.5) il résulte immédiatement que tout sous-ensemble arithmétique $E$ de $\mathbf{N}$ peut se définir par une relation de la forme

$$(1) \qquad x \in E \iff (Q_1 y_1) \ldots (Q_k y_k)[(x, y_1, \ldots, y_k) \in R],$$

où $R$ est un sous-ensemble récursif (qu'on peut même prendre récursif primitif lorsque $k > 0$) de $\mathbf{N}^{k+1}$, et chaque $Q_i$ identique soit à $\exists$, soit à $\forall$.

Réciproquement, il résulte immédiatement du théorème 3.I que tout ensemble $E$ défini par une relation de la forme (1) (avec $R$ récursif) est arithmétique. Et l'on démontre sans peine (en utilisant les numérotations de Cantor $\varkappa^{(p)}$ définies au paragraphe 2.2) qu'on peut toujours supposer les $Q_i$ alternés, chaque $\forall$ étant suivi immédiatement d'un $\exists$ et inversement.

Pour chaque $k \in \mathbf{N}$, désignons donc par $\Sigma_k^0$ [respectivement : $\Pi_k^0$] l'ensemble de tous les sous-ensembles de $\mathbf{N}$ définissables par une relation de la forme (1) (avec $R$ récursif) où les $k$ quantificateurs sont alternés, le premier d'entre eux $Q_1$ étant le quantificateur existentiel $\exists$ [respectivement : le quantificateur universel $\forall$] (3.3).

Avec cette notation, la proposition 1.8 montre que l'ensemble de tous les sous-ensembles récursifs de $\mathbf{N}$ est identique à $\Sigma_1^0 \cap \Pi_1^0$.

D'autre part, on a évidemment :

$$k' < k \Rightarrow (\Sigma_{k'}^0 \cup \Pi_{k'}^0) \subset (\Sigma_k^0 \cap \Pi_k^0).$$

Enfin, d'après ce qui vient d'être dit, les ensembles $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} \Sigma_k^0$ et $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} \Pi_k^0$ sont identiques entre eux et identiques à l'ensemble de tous les sous-ensembles arithmétiques de $\mathbf{N}$.

Du théorème 1.I on déduit immédiatement, grâce au procédé diagonal :

THÉORÈME 3.III. — *Pour chaque $k > 0$, il existe un élément de $\Sigma_k^0$ qui n'appartient pas à $\Pi_k^0$ (et par conséquent n'appartient à aucun des $\Sigma_{k'}^0$ ou $\Pi_{k'}^0$ pour $k' < k$), et inversement.*

---

(3.3) Ces notations (universellement adoptées) $\Sigma_k^0$ et $\Pi_k^0$ proviennent de ce que certains logiciens (principalement de l'École polonaise) remplacent respectivement les signes $\exists$ et $\forall$ par $\Sigma$ et $\Pi$. Sur la signification de l'indice supérieur $^0$, voir la fin du paragraphe 3.5.

La structure de cette hiérarchie des $\Sigma_k^0$ et $\Pi_k^0$ donne lieu à d'intéressants problèmes. Par ailleurs, se pose la question, pour un ensemble arithmétique donné, de savoir où cet ensemble se place exactement dans la hiérarchie. Nous allons voir que, mêmes aux échelons les plus bas, cette question donne lieu à des problèmes non encore résolus.

**3.4. Ensembles diophantiens.** — Appelons *ensemble diophantien* tout sous-ensemble $E$ de $\mathbf{N}^p$ ($p$ quelconque) tel qu'il existe un entier $k$ et un polynome $P$ de $p+k$ variables à coefficients dans $\mathbf{Z}$ satisfaisant à

$$(x_1, \ldots, x_p) \in E \iff (\exists y_1) \ldots (\exists y_k) [P(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_k) = 0]$$ (3.4).

Des propositions 1.1, 1.2, 1.3 et 1.5 (§ 1.5) il résulte immédiatement :

PROPOSITION 3.3. — *Tout ensemble diophantien est récursivement énumérable.*

On peut alors se poser le problème suivant (dont nous verrons au chapitre 6 la connexion avec le « *dixième problème de Hilbert* ») :

PROBLÈME ($H_0$). *Tout ensemble diophantien est-il récursif?*

La réponse à ($H_0$) serait évidemment négative (d'après le théorème 1.II) si l'on pouvait démontrer l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE ($H_1$). — *Tout ensemble récursivement énumérable est diophantien.*

Bien que ($H_1$) et ($H_0$) n'aient pas encore reçu de solution, on peut néanmoins déduire de la proposition 3.2 des résultats intéressants au sujet des ensembles diophantiens, par exemple le suivant :

PROPOSITION 3.4. — *Pour chaque* $p > 0$, *il existe un sous-ensemble diophantien de* $\mathbf{N}^p$ *dont le complémentaire n'est pas diophantien.*

DÉMONSTRATION. — De la numérotation de Cantor des $p$-uplets il résulte immédiatement que, si la proposision est vérifiée pour un entier $p$ particulier, alors elle est vérifiée pour tout entier positif $p$. Raisonnons donc par l'absurde en supposant que le complémentaire de tout ensemble diophantien est diophantien. Comme l'ensemble de tous les ensembles diophantiens est clos par rapport aux quantifications existentielles (projections), il en résulterait que cet ensemble serait aussi clos par rapport aux quantifications universelles,

---

(3.4) Dans cette relation, les variables $y_i$ (de même que les $x_i$) décrivent $\mathbf{N}$ (tandis que les coefficients de $P$ sont quelconques dans $\mathbf{Z}$); sur le remplacement possible de $\mathbf{N}$ par $\mathbf{Z}$, voir la fin de la note (3.1). La raison de l'emploi du mot « diophantien » est évidente.

et par conséquent que tout ensemble arithmétique serait diophantien ([3.5]), ce qui est en contradiction avec les propositions 3.2 et 3.3.

Remarque. — L'énoncé de cette proposition 3.4 ne fait pas appel à la notion de fonction récursive. Néanmoins je ne connais aucune démonstration de cette proposition autre que celle qui est donnée ici (et qui est basée sur des résultats non triviaux de la théorie des fonctions récursives) ([3.6]).

3.5. **La hiérarchie analytique de Kleene.** — La hiérarchie arithmétique de Kleene se prolonge en une hiérarchie plus vaste (également due à Kleene, cf. [12] et [13]) obtenue en quantifiant des *variables fonctionnelles* (ou, ce qui revient à peu près au même, des variables de sous-ensembles de $\mathbf{N}$). La numérotation des $p$-uplets permet de se ramener aux fonctions d'une seule variable.

Considérons le sous-ensemble $G_0$ de $\mathbf{F}^{(1)} \times \mathbf{N}^2$ ainsi défini :

$$(\xi, x, y) \in G_0 \iff \xi(x) = y.$$

Nous qualifierons d'*arithmétique* tout sous-ensemble de $\mathbf{N}^p \times (\mathbf{F}^{(1)})^q$ ($p$ et $q$ quelconques dans $\mathbf{N}$, éventuellement nuls) qui peut être obtenu à partir de $G_+$, $G_\times$ (*cf.* § 2.1) et $G_0$ par intersection, complémentation, quantification existentielle (donc aussi universelle) sur une variable numérique [opération : $(\exists x \in \mathbf{N}) \ldots$] et changement de variables. On voit immédiatement que dans le cas où $q = 0$ on retrouve les sous-ensembles arithmétiques de $\mathbf{N}^p$ précédemment définis (l'intervention de variables fonctionnelles non quantifiées ne pouvant rien apporter de nouveau).

---

(3.5) Remarquons en effet que, par exemple, l'inégalité $P(x, y, z, t) \neq 0$ équivaut à $(\exists u)\,[Q(x, y, z, t, u) = 0]$, où l'on a posé

$$Q(x, y, z, t, u) = [P(x, y, z, t)]^2 - u - 1$$

(en se rappelant que les variables décrivent $\mathbf{N}$ ; si elles décrivaient $\mathbf{Z}$, on remplacerait $u$ par $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$).

Considérons alors, par exemple, le sous-ensemble arithmétique $A$ de $\mathbf{N}$ défini par :

$$x \in A \iff (\forall y)\,(\exists z)\,(\forall t)\,[P(x, y, z, t) = 0].$$

Soit $Q$ le polynome défini comme ci-dessus à partir de $P$. On a :

$$x \in A \iff \textit{non}\,(\exists y)\,\textit{non}\,(\exists z)\,\textit{non}\,(\exists t)\,(\exists u)\,[Q(x, y, z, t, u) = 0].$$

(3.6) Cette proposition 3.4 offre un autre sujet d'intérêt. C'est en effet un exemple du phénomène (relativement rare) suivant : on démontre l'existence d'un polynome à coefficients entiers satisfaisant à certaines conditions, mais on ne possède aucune méthode (même très longue) permettant d'exhiber effectivement ce polynome. Pour la proposition 3.4 on ne peut même pas indiquer (dans l'état actuel de nos connaissances) le degré et le nombre de variables du polynome en question (il suffit, pour constater cette impossibilité, de vérifier que la démonstration par l'absurde qui a été indiquée est absolument « non constructive »).

Nous appellerons *analytique* (3.7) tout sous-ensemble de $\mathbf{N}^p \times (\mathbf{F}^{(1)})^q$ qui peut être obtenu à partir de $G_+$, $G_\times$ et $G_0$ par union, complémentation, changement de variables, quantifications sur une variable de $\mathbf{N}$ et quantifications sur une variable de $\mathbf{F}^{(1)}$. On montre aisément que tout sous-ensemble analytipue $U$ de $\mathbf{N}^p \times (\mathbf{F}^{(1)})^q$ est définissable par une relation de la forme

$$\begin{aligned}&(x_1, \ldots, x_p, \xi_1, \ldots, \xi_q) \in U\\ &\quad \Longleftrightarrow (Q_1\eta_1)\ldots(Q_k\eta_k)\,[(x_1, \ldots, x_p, \xi_1, \ldots, \xi_q, \eta_1, \ldots, \eta_k) \in V],\end{aligned}$$

où $V$ est un sous-ensemble arithmétique de $\mathbf{N}^p \times (\mathbf{F}^{(1)})^{q+k}$, et la suite $Q_1, \ldots, Q_k$ composée de quantificateurs alternés [les variables $\eta_i$ décrivant $\mathbf{F}^{(1)}$ (3.8)].

En nous bornant au cas $q = 0$, $p = 1$, nous désignerons par $\Sigma_k^1$ (resp. $\Pi_k^1$) l'ensemble de tous les sous-ensembles de $\mathbf{N}$ définissables par une relation de la forme précédente, où $Q_1$ est identique à $\exists$ (resp. à $\forall$).

On voit sans difficulté (par la même méthode que pour la hiérarchie arithmétique) que chaque $\Sigma_k^1$ contient des ensembles qui n'appartiennent pas à $\Pi_k^1$ (et par conséquent n'appartiennent à aucun des $\Sigma_{k'}^1$ ou $\Pi_{k'}^1$ pour $k' < k$), et inversement.

Les éléments de $\Sigma_1^1 \cap \Pi_1^1$ sont appelés ensembles *hyper-arithmétiques* (sur d'autres définitions équivalentes de la classe des ensembles hyper-arithmétiques, *cf.* [18]) (3.9).

On démontre aisément (3.10).

---

(3.7) Sur les analogies entre ces ensembles et les ensembles *analytiques* et *projectifs* de nombres réels au sens de BOREL et LUSIN (*cf.* [2]).

(3.8) Si le dernier quantificateur $Q_k$ est $\forall$, on peut prendre pour $V$ la projection (quantification existentielle $\exists$ sur la dernière variable, élément de $\mathbf{N}$) d'un sous-ensemble *récursif* (*cf.* § 8.2) de $\mathbf{N}^p \times (\mathbf{F}^{(1)})^{q+k} \times \mathbf{N}$. De même en intervertissant les rôles de $\forall$ et $\exists$.

On pourrait d'autre part, dans la définition des ensembles analytiques, remplacer $G_+$ et $G_\times$ par l'unique ensemble $G_S$, graphe de la relation « $y = x + 1$ ». En effet, l'addition et la multiplication se définissent par récurrence à partir de cette relation, et la récurrence s'exprime sans difficulté à l'aide de variables fonctionnelles (*cf.* Démonstration du théorème 3.I).

(3.9) L'ensemble $\Sigma_1^1 \cap \Pi_1^1$ de tous les ensembles hyperarithmétiques se subdivise lui-même en une hiérarchie transfinie ordonnée par les ordinaux récursifs (*cf.* [12] ou [18]). Lorsqu'on part de la définition donnée dans ce paragraphe, le théorème fondamental de la théorie des ensembles hyper-arithmétiques est le suivant ([12] p. 204-205); *Tout couple de sous-ensembles disjoints de* $\mathbf{N}$ *qui appartiennent à* $\Sigma_1^1$ *peut être effectivement* [*cf.* note (1.8)] *séparé par un ensemble hyper-arithmétique.*

(3.10) Le principe de la démonstration [principe qui est aussi utilisé dans la partie sémantique du théorème de complétude de HERBRAND-GÖDEL (*cf.* ci-dessous § 5.2)] consiste à ramener les quantificateurs numériques à des quantificateurs fonctionnels

(*à suivre page* 418)

Proposition 3.5. — *L'ensemble de tous les sous-ensembles arithmétiques de* $\mathbf{N}$ *est énumérable* (au sens indiqué dans le paragraphe 1.6) *par un sous-ensemble hyper-arithmétique de* $\mathbf{N}^2$).

D'où, par le procédé diagonal (qui ne fait pas sortir de la classe des ensembles hyper-arithmétiques) :

Proposition 3.6. — *Il existe un sous-ensemble hyper-arithmétique de* $\mathbf{N}$ *qui n'est pas arithmétique.*

En utilisant des variables qui décrivent l'ensemble de toutes les applications de $\mathbf{F}^{(1)}$ dans $\mathbf{N}$ (« fonctions de fonctions » ou « fonctionnelles »), et ainsi de suite (fonctions de fonctions de fonctions...), on définit, pour chaque $h$ de $\mathbf{N}$, la hiérarchie des $\Sigma_k^h$ et des $\Pi_k^h$.

Un des problèmes étudiés en Logique consiste à rechercher où se placent, dans cette hiérarchie de hiérarchies, les principaux ensembles utilisés en mathématiques (par exemple les graphes de transformations fondamentales de l'Analyse, ou des fonctions introduites en Topologie algébrique). Nous reviendrons sur ce problème dans le chapitre 7.

## Chapitre 4. — Propriétés « combinatoires ».

Dans des domaines mathématiques très divers (arithmétique, théorie des groupes, topologie algébrique, théorie des jeux, étude de certains systèmes formels, théorie des machines et des automates), certaines définitions, et plus encore certaines méthodes, présentent un aspect particulier que nous caractériserons (faute de mieux, et sans essayer de donner au mot un sens précis) par l'adjectif « combinatoire ». Cet aspect est particulièrement marqué dans le présent chapitre 4, dont le contenu (relations entre les fonctions récursives, la théorie des machines et la théorie des groupes) a été obtenu en choisissant (de façon nécessairement arbitraire), parmi de multiples applications combinatoires des fonctions récursives, celles qui paraissent offrir un intérêt mathématique particulier.

---

existentiels, de la façon suivante : $\mathcal{R}$ étant une relation quelconque portant (par exemple) sur quatre variables de $\mathbf{N}$, on a :

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(\exists t)\,\mathcal{R}(x, y, z, t)$$
$$\Longleftrightarrow (\exists \eta \in \mathbf{F}^{(1)})(\exists \tau \in \mathbf{F}^{(2)})(\forall x)(\forall z)\,\mathcal{R}[x, \eta(x), z, \tau(x, z)].$$

Par la numérotation des $p$-uplets on peut ramener toutes les variables fonctionnelles à une seule fonction (quantifiée existentiellement) d'une variable, et toutes les variables numériques à une seule (quantifiée universellement). D'autre part, en passant au complémentaire, on peut intervertir le rôle des quantificateurs $\exists$ et $\forall$.

Les machines à calculer actuelles sont venues donner un contenu (théorique et pratique) assez riche à la notion intuitive fort ancienne de calcul « purement mécanique », c'est-à-dire d'un calcul qui pourrait — théoriquement — être effectué par une machine dont la structure (autrement dit : l'ensemble des configurations possibles d'une part, et le tableau de marche d'autre part) serait déterminée par un nombre fini de liaisons. Les *machines de Turing* et les *algorithmes de Markov* ([5], [11], [29], [30]) constituent des cas particuliers de telles « machines finies » (4.1). Il est intéressant de constater (c'est l'objet du théorème 4.I, vrai aussi pour les algorithmes de Markov) que, malgré leur grande simplicité théorique, les machines de Turing sont capables de « calculer » toutes les fonctions récursives (d'où il résulte, pour des raisons indiquées dans le chapitre 6, qu'elles sont aussi puissantes que n'importe quelle machine « effective », si compliquée que soit cette dernière). Ajoutons que de telles machines donnent une interprétation concrète très simple de la notion — à première vue un peu tératologique — de semi-fonction semi-récursive (ci-dessus § 1.9).

Les théorèmes 4.III, 4.IV et 4.V expriment respectivement la non-récursivité du « problème des mots » pour un *groupe de Thue* particulier, la non-récursivité des principaux problèmes algébriques portant sur des groupes de Thue quelconques, et la non-récursivité du problème de l'homéomorphie pour les polyèdres de dimension supérieure à 3. Ainsi qu'il sera expliqué dans le chapitre 6, ces résultats ont une assez grande importance au point de vue « périmathématique ». Outre son intérêt propre (qui est considérable), le théorème 4.II de HIGMAN permet d'obtenir directement le théorème 4.III de NOVIKOV ; dans les démonstrations originales, en effet, ce théorème 4.III était obtenu (de façon assez pénible) soit à partir du théorème 4.I, soit à partir de la non-récursivité du problème des mots pour un *monoïde de Thue* particulier (ce dernier résultat, considérablement antérieur au théorème 4.III, est dû à POST et peut se déduire du théorème 4.I grâce aux *systèmes de Post*).

**4.1. — Machines.** — Nous appellerons *machine* (4.2) tout couple $(C, \Phi)$

(4.1) C'est seulement le « schéma de construction » de ces machines qui est fini. Mais, dans le cas général, on autorise une telle machine à stocker et utiliser une quantité illimitée d'information (cette quantité étant, bien entendu, finie à chaque instant $t$, mais sans être soumise à une borne indépendante de $t$). Autrement dit, il s'agit de *machines finies à mémoire potentiellement infinie*. Pour se rapprocher davantage de la pratique, on peut imposer une borne à la mémoire, par exemple en exigeant que la quantité d'information $I(t)$ qui est stockée à l'instant $t$ n'excède jamais $\varphi(I_0)$, où $\varphi$ est une fonction fixe et $I_0$ l'information initialement fournie comme point de départ du calcul : on obtient alors des notions comme celle d'*automate fini* (principalement due à KLEENE, *cf.* [35]). Comme on peut aisément le prévoir, les machines à mémoire finie sont moins puissantes que les machines à mémoire potentiellement infinie : une fonction récursive quelconque n'est pas en général calculable par un automate fini.

(4.2) Une dénomination plus exacte serait : *machine à fonctionnement déterministe discret* (ce dernier adjectif étant pris au sens topologique).

où $C$ est un ensemble quelconque (non nécessairement dénombrable) et $\Phi$ une application de $C$ dans lui-même. Les éléments de $C$ sont appelés les *configurations* (possibles) de la machine, et la fonction $\Phi$ le *programme* de la machine.

Une configuration $x$ est dite *stable* si l'on a $\Phi(x)=x$. Nous désignerons par $C^*$ l'ensemble des configurations stables.

La *fonction de marche* d'une machine $(C, \Phi)$ est l'application $\Psi$ de $C \times \mathbf{N}$ dans $C$ définie par récurrence de la façon suivante :

$$\Psi(x, 0)=x; \qquad \Psi(x, i+1)=\Phi(\Psi(x, i)).$$

L'interprétation « concrète » du programme $\Phi$ est la suivante : le temps étant supposé divisé en une suite infinie $t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots$ d'instants successifs, si à l'instant $t_i$ la configuration de la machine est $x$, alors à l'instant suivant $t_{i+1}$ la configuration est $\Phi(x)$ [le passage de $x$ à $\Phi(x)$ étant imposé par certaines liaisons mécaniques ou électroniques, et réalisé au moyen d'une certaine force motrice, liaisons et force dont nous n'avons évidemment pas à nous occuper ici].

La fonction de marche $\Psi$ s'interprète donc ainsi : si à l'instant $t_0$ la configuration est $x$, alors à l'instant $t_i$ la configuration sera $\Psi(x, i)$.

Si à un instant $t_i$ la machine se trouve dans une configuration stable, elle y reste indéfiniment.

**4.2. Machines codées.** — $M=(C, \Phi)$ étant une machine quelconque, nous appellerons *code sur $M$* tout triplet $(\theta_0, C_1, \theta_1)$ où $\theta_0$ est une application de $\mathbf{N}$ dans $C$, $C_1$ un sous-ensemble de $C^*$, et $\theta_1$ une application de $C_1$ dans $\mathbf{N}$. Les éléments de $\theta_0(\mathbf{N})$ peuvent être appelés les *configurations d'entrée* (ou « initiales »), $\theta_0$ le *code d'entrée*, les éléments de $C_1$ les *configurations de sortie* (ou « finales ») et $\theta_1$ le *code de sortie*. Le quintuplet $(C, \Phi, \theta_0, C_1, \theta_1)$ s'appellera une *machine codée*.

Soit alors $m$ un élément quelconque de $\mathbf{N}$, et soit $x=\theta_0(m)$ la configuration initiale correspondante. A l'instant initial $t_0$, plaçons la machine dans la configuration $x$. Trois cas peuvent se produire :

*Premier cas* : au bout d'un certain temps, la machine parvient à une configuration $y$ appartenant à $C_1$ (et y reste indéfiniment puisque $C_1 \subset C^*$).

*Deuxième cas* : au bout d'un certain temps, la machine parvient à une configuration stable n'appartenant pas à $C_1$.

*Troisième cas* : la machine ne parvient jamais à une configuration stable, et par conséquent demeure toujours en mouvement.

La machine codée sera dite *régulière* si le deuxième cas ne se présente pour aucune valeur de $m$.

Désignons par $D$ l'ensemble des entiers $m$ qui se trouvent dans le premier cas. Pour chaque élément $m$ de $D$, posons $\varphi(m) = \theta_1(y)$, où $y$ est l'élément de $C_1$ correspondant (configuration finale d'arrêt). Nous dirons que $\varphi$ est la semi-fonction (*cf.* § 1.9) *calculée par* la machine codée en question.

Supposons maintenant que $C$ soit dénombrable, et soit $\gamma$ une numérotation de $C$. Nous dirons que la machine codée $(C, \Phi, \theta_0, C_1, \theta_1)$ est *récursive relativement* à $\gamma$ si, relativement à $\gamma$ (*cf.* 2.1), l'ensemble $C_1$ est récursif et les applications $\Phi$, $\theta_0$ et $\theta_1$ récursives. On démontre aisément :

PROPOSITION 4.1. — *S'il existe une numérotation $\gamma$ de $C$ telle que la machine codée considérée soit récursive relativement à $\gamma$, alors la semi-fonction calculée par cette machine est semi-récursive.*

**4.3. Machines de Turing.** — Une *machine de Turing* est définie par la donnée de deux ensembles *finis* $A$ et $E$, d'un élément particulier $a_0$ de $A$, et de trois applications $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ de $A \times E$ respectivement dans $A$, dans $E$ et dans $\mathbf{Z}$ (donc au total un ensemble fini de données). Les éléments de $A$ seront appelés les *symboles*, et ceux de $E$ les *états intérieurs* de la machine.

Par définition, on prend comme ensemble $C$ des configurations de la la machine l'ensemble $F \times E \times \mathbf{Z}$, où $F$ est l'ensemble de toutes les applications de $\mathbf{Z}$ (ensemble des entiers $\lesseqgtr 0$) dans $A$ qui prennent la valeur $a_0$ sauf pour un nombre fini de valeurs de la variable. $C$ est donc dénombrable.

La fonction de marche $\Phi$ est l'application de $C$ dans lui-même qui, à toute configuration $(\xi, e, z)$ (avec $\xi \in F$, $e \in E$, $z \in \mathbf{Z}$), fait correspondre la configuration $(\xi', e', z')$ définie par

$$\xi'(z) = \alpha_1(\xi(z), e) \quad \& \quad [i \neq z \Rightarrow \xi'(i) = \xi(i)],$$
$$e' = \alpha_2(\xi(z), e),$$
$$z' = z + \alpha_3(\xi(z), e).$$

L'interprétation « concrète » d'une telle machine est aisée et sans intérêt autre qu'heuristique (4.3) : on « réalise » la machine en question au moyen d'un ruban linéaire (infini dans les deux sens et divisé en cases successives identiques) sur lequel sont « inscrits » des symboles matériels correspondant aux éléments de $A$ ($a_0$ pouvant être représenté par l'absence de tout symbole matériel), et d'un organe lecteur-inscripteur mobile relativement au ruban et susceptible de se trouver dans des « états intérieurs » correspondant aux éléments de $E$.

Un élément $e$ de $E$ sera dit *inerte* si l'on a, pour tout $a$ de $A$, $\alpha_1(a, e) = a$, $\alpha_2(a, e) = e$ et $\alpha_3(a, e) = 0$. On voit que, si $e$ est inerte, la configuration $(\xi, e, z)$ est stable quels que soient $\xi$ et $z$.

---

(4.3) L'intérêt historique de ces machines provient en particulier de ce qu'elles ont été définies par TURING *avant* l'invention des grands « ordinateurs » électroniques, dont elles préfigurent certains aspects de façon satisfaisante.

**4.4. Fonctions et semi-fonctions Turing-calculables.** — Soit $M = (C, \Phi)$ une machine de Turing définie comme ci-dessus.

Soit $a_1$ un élément particulier de $A$, différent de $a_0$. Soit $e_0$ un élément particulier de $E$, et $e_1$ un élément inerte particulier. Pour chaque $n$ de $\mathbf{N}$, soit $\xi_n$ l'élément de $F$ ainsi défini :

$$[(i < 0 \text{ ou } i > n) \Rightarrow \xi_n(i) = a_0] \quad \& \quad [(0 \leqq i \leqq n) \Rightarrow \xi_n(i) = a_1].$$

On définit un *code canonique* sur $M$ de la façon suivante : $\theta_0$ est l'application $n \to (\xi_n, e_0, 0)$; $\theta_1^{-1}$ est l'application $n \to (\xi_n, e_1, 0)$ (4.4).

Une semi-fonction d'une variable est dite *Turing-calculable* s'il existe une machine de Turing canoniquement codée qui la calcule (au sens indiqué dans le paragraphe 4.2).

On démontre trivialement (sur le sens des mots employés, *cf.* § 4.2 et 2.2) :

Proposition 4.2. — *Toute machine de Turing canoniquement codée est récursive relativement à toute numérotation récursive de l'ensemble C de ses configurations.*

Des propositions 4.1 et 4.2 on déduit alors immédiatement :

Proposition 4.3. — *Toute semi-fonction Turing-calculable est semi-récursive.*

Le résultat suivant, inverse de la proposition 4.3, s'obtient par un « bricolage » adéquat des machines de Turing (par exemple en *composant* entre elles certaines machines élémentaires) :

Théorème 4.I. — *Toute semi-fonction semi-récursive* (*et en particutier toute fonction récursive*) *est Turing-calculable.*

Il est possible de renforcer ce théorème en imposant à la machine de Turing utilisée des conditions supplémentaires, par exemple les suivantes (qu'on peut satisfaire simultanément) : $A$ est réduit aux éléments $a_0$ et $a_1$; $\alpha_3$ ne prend que les valeurs $-1$, $0$, $+1$; la machine codée est régulière (*cf.* § 4.2); quels que soient $n$ et $i$ dans $\mathbf{N}$, $\Psi(\theta_0(n), i)$ est une configuration $(\xi, e, z)$ telle que $z$ soit $\geqq 0$ (ce qui permet de n'utiliser qu'un ruban « infini dans un seul sens »).

La proposition 4.3 et le théorème 4.I fournissent une nouvelle définition des semi-fonctions semi-récursives et des fonctions récursives.

---

(4.4) Bien entendu, les propositions 4.2 et 4.3 et le théorème 4.1 restent vrais lorsqu'on remplace cette définition par d'autres conventions analogues. On peut, par exemple, prendre pour $\theta_1^{-1}$ l'application $n \to (\xi_n, e_1, n)$. D'autre part, on définit aisément des codes canoniques correspondant au calcul des semi-fonctions de plusieurs variables.

**4.5 Groupes à nombre fini de générateurs et groupes de Thue.** — Soient $E$ un ensemble fini quelconque, $G_E$ le groupe libre engendré par $E$. $G_E$ est dénombrable et l'on en définit aisément une numérotation relativement à laquelle l'opération de groupe soit récursive (ce qui définit cette numérotation à une équivalence récursive près, *cf* § 2.2).

Soit $M$ un sous-ensemble quelconque de $(G_E)^2$. Désignons par $\mathcal{R}_M$ la plus petite relation d'équivatence sur $G_E$ qui soit compatible avec la loi de groupe et dont le graphe contienne $M$. On définit le groupe quotient $G_E/\mathcal{R}_M$. Inversement, tout groupe à nombre fini de générateurs peut être obtenu de cette façon.

On démontre aisément :

PROPOSITION 4.4. — *Si $M$ est récursivement énumérable, alors le graphe de $\mathcal{R}_M$ est récursivement énumérable (d'où il résulte que chaque classe d'équivalence par $\mathcal{R}_M$ est alors un sous-ensemble récursivement énumérable de $G_E$).*

$G_{E'}/\mathcal{R}_{M'}$ est appelé une *extension conservative de* $G_E/\mathcal{R}_M$ si l'on a

$$E \subset E' \quad \& \quad \textit{graphe de } \mathcal{R}_M = G_E^2 \cap \textit{graphe de } \mathcal{R}_{M'}.$$

Lorsque $M$ est fini, le groupe $G_E/\mathcal{R}_M$ est appelé un *groupe de Thue.*

G. HIGMAN a démontré le résultat fondamental suivant (non encore publié), où l'on voit la notion d'ensemble récursivement énumérable constituer la solution d'un problème posé en des termes qui ne font appel à aucune notion récursive :

THÉORÈME 4.II. — *Pour que le groupe à nombre fini de générateurs $G_E/\mathcal{R}_M$ possède une extension conservative qui soit un groupe de Thue, il faut et il suffit que $M$ (ou, ce qui revient au même, le graphe de $\mathcal{R}_M$) soit récursivement énumérable.*

**4.6. Groupes de Thue récursifs.** — Un groupe de Thue $G_E/\mathcal{R}_M$ (avec $M$ fini) est dit *récursif* si le graphe de $\mathcal{R}_M$ est un sous-ensemble récursif de $G_E^2$ (c'est déjà un sous-ensemble récursivement énumérable d'après la proposition 4.4). Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la classe d'équivalence de l'élément neutre soit un sous-ensemble récursif de $G_E$.

Cette notion de récursivité est « intrinsèque », c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de la présentation adoptée pour le groupe de Thue en question. De façon précise on a :

PROPOSITION 4.5. — *Si $G_E/\mathcal{R}_M$ et $G_{E'}/\mathcal{R}_{M'}$ sont deux groupes de Thue isomorphes et si l'un d'entre eux est récursif, l'autre l'est aussi.*

Des théorèmes 1.II et 4.II on déduit sans difficulté le résultat suivant (démontré pour la première fois par NOVIKOV [28], puis indépendamment par BOONE) :

THÉORÈME 4.III. — *Il existe un groupe de Thue non récursif.*

**4.7. Problèmes relatifs aux présentations des groupes de Thue.** — On peut toujours considérer l'ensemble $E$ des générateurs d'un groupe de Thue comme un sous-ensemble fini de $\mathbf{N}$. Nous désignerons donc par $\mathbf{T}$ l'ensemble de tous les couples $(E, M)$ où $E$ est un sous-ensemble fini quelconque de $\mathbf{N}$, et $M$ un sous-ensemble fini quelconque de $G_E^2$. $\mathbf{T}$ est dénombrable, et nous le considérerons comme muni d'une numérotation récursive. Nous appellerons *présentation de Thue* tout élément $X$ de $\mathbf{T}$, et désignerons par $\Gamma_X$ le groupe de Thue correspondant.

Désignons par $\mathbf{I}$ l'ensemble de tous les couples $(X, Y)$ d'éléments de $\mathbf{T}$ tels que $\Gamma_X$ et $\Gamma_Y$ soient isomorphes, et par $\mathbf{U}$ l'ensemble de tous les éléments $X$ de $\mathbf{T}$ tels que $\Gamma_X$ soit réduit à l'élément unité.

On démontre aisément :

PROPOSITION 4.6. — $\mathbf{I}$ *est un sous-ensemble récursivement énumérable de* $\mathbf{T}^2$ (*et par conséquent* $\mathbf{U}$ *est un sous-ensemble récursivement énumérable de* $\mathbf{T}$).

Un sous-ensemble $M$ de $\mathbf{T}$ sera dit *héréditaire* s'il satisfait, pour tout élément $(X, Y)$ de $\mathbf{T}^2$, à la conditions suivante :

$$(X \in M \quad \& \quad \Gamma_Y \textit{ est isomorphe à un sous-groupe de } \Gamma_X) \quad \Rightarrow \quad Y \in M.$$

Pour chacune des conditions suivantes :

(a) $\Gamma_X$ *est réduit à l'élément neutre;*
(b) $\Gamma_X$ *est fini;*
(c) $\Gamma_X$ *est commutatif;*
(d) $\Gamma_X$ *est localement infini;*
(e) $\Gamma_X$ *est un groupe de torsion;*
(f) $\Gamma_X$ *est d'ordre* $n$ ($n$ donné)*;*
(g) $\Gamma_X$ *est cyclique;*
(h) $\Gamma_X$ *est un groupe libre*,

l'ensemble des $X$ correspondants est héréditaire.

D'autre part, la proposition 4.5 se renforce aisément en :

PROPOSITION 4.7. — *L'ensemble de tous les éléments* $X$ *de* $\mathbf{T}$ *tels que* $\Gamma_X$ *soit récursif est héréditaire.*

Du théorème 4.III, RABIN [33] a déduit le résultat suivant (partiellement obtenu aussi par ADJAN) :

THÉORÈME 4.IV. — *Les seuls ensembles héréditaires qui soient récursifs sont l'ensemble vide et* $\mathbf{T}$ *lui-même.*

COROLLAIRE — $\mathbf{U}$ *n'est pas récursif* (*et par conséquent* $\mathbf{I}$ *n'est pas non plus récursif*).

**4.8. Homéomorphie des polyèdres.** — Soit $\mathbf{K}$ l'ensemble de tous les complexes simpliciaux finis, c'est-à-dire l'ensemble de tous les couples $(E, S)$, où $E$ est un ensemble fini quelconque (qu'on peut toujours considérer comme un sous-ensemble de $\mathbf{N}$) et $S$ une famille de parties de $E$ satisfaisant à la condition :

$$(\forall x \in E)(\{x\} \in S) \quad \& \quad (\forall X \in S)(\forall Y \subset X)(Y \in S).$$

Pour chaque $p$ de $\mathbf{N}$, soit $\mathbf{K}^{(p)}$ l'ensemble des éléments de $\mathbf{K}$ qui sont *homogènes de dimension p*. $\mathbf{K}^{(p)}$ est dénombrable et peut être muni d'une numérotation canonique récursive.

Pour chaque $p$ de $\mathbf{N}$, soit $\mathbf{H}^{(p)}$ $\left[\text{respectivement : } \mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{(p)}\right]$ le sous-ensemble de $(\mathbf{K}^{(p)})^2$ constitué par tous les couples $(K, K')$ tels que les polyèdres $|K|$ et $|K'|$ correspondants soient homéomorphes [respectivement : homéomorphes par décomposition simpliciale].

On démontre aisément :

Proposition 4.8. — *Chaque* $\mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{(p)}$ *est récursivement énumérable.*

Par contre on ne sait pas démontrer que $\mathbf{H}^{(p)}$ est récursivement énumérable (ou même arithmétique) sans utiliser la *Hauptvermutung* (c'est-à-dire l'hypothèse que $\mathbf{H}^{(p)}$ et $\mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{(p)}$ sont identiques).

Markov [25] a défini une construction permettant d'attacher récursivement à toute présentation de Thue $X$ un complexe simplicial $K_X$ de dimension 4 de telle façon que :

(1) si le groupe de Thue $\Gamma_X$ est réduit à l'élément neutre, alors le polyèdre $K_X$ est homéomorphe par décomposition simpliciale à un simplexe de dimension 4 ;

(2) si $\Gamma_X$ n'est pas réduit à l'élément neutre, $K_X$ n'est pas homéomorphe au simplexe de dimension 4.

Du théorème 4.IV (Corollaire) on déduit alors :

Théorème 4.V. — *Pour* $p > 3$, $\mathbf{H}^{(p)}$ *et* $\mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{(p)}$ *ne sont pas récursifs.*

## Chapitre 5. — Propriétés sémantiques et syntaxiques.

La logique mathématique est principalement constituée par l'étude de certaines structures : les *systèmes formels* (ou systèmes « logistiques »). Lorsque cette étude porte uniquement sur les systèmes formels eux-mêmes (directement définis par des méthodes « formelles » comme celle indiquée au paragraphe 5.3), elle est souvent qualifiée de *syntaxe*; lorsqu'elle concerne en outre les *modèles* de ces systèmes (c'est-à-dire certaines structures ensemblistes associées), on la qualifie de *sémantique*; cette distinction, qui est naturelle et commode, ne présente évidemment aucun caractère absolu (5.1).

Nous nous intéresserons surtout ici à un système formel particulier (qui joue un rôle fondamental), le *calcul classique* (5.2) *des prédicats du premier ordre* (ou « logique classique du premier ordre »), et aux systèmes qui en *dérivent*. Nous prendrons comme point de départ la définition « sémantique » des *thèses* (ou « théorèmes formels »), et nous indiquerons quelques connexions essentielles entre les fonctions récursives et l'ensemble des thèses de certains systèmes.

5.1. **Formules logiques du premier ordre.** — Soit $B$ un ensemble quelconque (non nécessairement dénombrable), et soit $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}_i : i \in I\}$ une famille finie ou infinie de relations à un nombre quelconque (dépendant de l'indice $i$) de variables décrivant $B$ (chaque $R_i$ peut, si l'on veut, être assimilée à son graphe). Comme dans le cas particulier examiné au paragraphe 3.1, on peut définir la *clôture logique* de $\mathcal{R}$, c'est-à-dire la famille constituée par toutes les relations qu'on peut obtenir à partir des $\mathcal{R}_i$ en appliquant les opérations suivantes : *conjonction* (correspondant, pour les graphes, à l'intersection de deux sous-ensembles), *négation* (correspondant à la complémentation), *quantification existentielle* (correspondant à la projection) et *changement de variables*.

Chaque élément de la clôture logique de $\mathcal{R}$ est manifestement déterminé, à partir des $\mathcal{R}_i$, par une certaine *formule* (qui joue le même rôle que les « schémas de définition » pour les fonctions récursives). Mais ces formules peuvent se définir indépendamment du choix de $B$ et des $\mathcal{R}_i$; nous allons préciser cette définition « formelle » des formules.

Soit $\mathbf{V}$ un ensemble dénombrable (supposé numéroté une fois pour toutes) dont les éléments (objets de nature quelconque) seront appelés *symboles de variables*. Pour chaque $p$ de $\mathbf{N}$, soit $\mathbf{R}^{(p)}$ un ensemble dénombrable et numéroté d'objets quelconques que nous appellerons *symboles de relations* (ou « prédicats formels ») *à p places*. Soit enfin $\mathbf{L} = \{\,\&, \neg, \exists\,\}$ un ensemble formé de trois éléments distincts appelés *symboles logiques* (respectivement de conjonction, de négation et de quantification existentielle « formelles »). Les ensembles $\mathbf{V}$, $\mathbf{R}^{(p)}$, $\mathbf{L}$ sont supposés deux à deux disjoints.

Posons $\mathbf{R} = \bigcup_{p \in \mathbf{N}} \mathbf{R}^{(p)}$ et $\mathbf{A} = \mathbf{V} \cup \mathbf{R} \cup \mathbf{L}$.

(5.1) La séparation entre syntaxe et sémantique coïncide en partie (mais en partie seulement) avec la séparation entre : d'une part l'étude « purement finitiste » (*cf.* § 7.6) des systèmes formels, et d'autre part les recherches effectuées sur ces systèmes à l'aide de tous les moyens fournis par la théorie des ensembles.

(5.2) *Classique* est pris ici comme opposé d'*intuitionniste*. Une grande partie des résultats énoncés dans ce chapitre restent d'ailleurs vrais dans les systèmes intuitionnistes (*cf.* aussi ci-dessous § 7.5).

On définit aisément l'ensemble de toutes les formules (qui, dans le cas présent, seront appelées *formules logiques du premier ordre*) comme un certain sous-ensemble $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{S}(\mathbf{A})$ (*cf.* § 2.2, Définitions B) (5.3). Et l'on définit de même, pour chaque $p$, le sous-ensemble $\mathfrak{F}^{(p)}$ de $\mathfrak{F}$ constitué par toutes les formules *à $p$ variables libres* (5.4) (les éléments de $\mathfrak{F}^{(0)}$ étant appelés formules *closes*).

On démontre sans difficulté que, par rapport à toute numérotation récursive (relativement aux numérotations fixes de $\mathbf{V}$ et des $\mathbf{R}^{(p)}$) de $\mathfrak{S}(\mathbf{A})$, on a :

PROPOSITION 5.1. — *$\mathfrak{F}$ et chaque $\mathfrak{F}^{(p)}$ sont des sous-ensembles récursifs de $\mathfrak{S}(\mathbf{A})$.*

Soit $n$ un élément de $\mathbf{N}$, et $(\mathrm{r}_1, \ldots, \mathrm{r}_n)$ un élément quelconque de $\mathbf{R}^n$. Nous désignerons par $\mathfrak{F}(\mathrm{r}_1, \ldots, \mathrm{r}_n)$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{F}$ qui ne contiennent (comme termes appartenant à $\mathbf{R}$) que les éléments de $\{\mathrm{r}_1, \ldots, \mathrm{r}_n\}$. Pour chaque X de $\mathfrak{F}$, il existe évidemment un $n$ (dépendant de X) et un $(\mathrm{r}_1, \ldots, \mathrm{r}_n)$ tel que $\mathrm{X} \in \mathfrak{F}(\mathrm{r}_1, \ldots, \mathrm{r}_n)$.

Nous posons $\mathfrak{F}^{(p)}(\mathrm{r}_1, \ldots, \mathrm{r}_n) = \mathfrak{F}^{(p)} \cap \mathfrak{F}(\mathrm{r}_1, \ldots, \mathrm{r}_n)$. C'est évidemment un sous-ensemble récursif de $\mathfrak{F}$ (ou de $\mathfrak{S}(\mathbf{A})$)),

5.2. **Multirelations, modèles.** — Soit $(p_1, \ldots, p_n)$ un élément quelconque de $\mathbf{N}^n$. Un élément $(\mathrm{r}_1, \ldots, \mathrm{r}_n)$ de $\mathbf{R}^n$ sera dit de *signature* $(p_1, \ldots, p_n)$ si, pour chaque $i (1 \leqq i \leqq n)$, $\mathrm{r}_i \in \mathbf{R}^{(p_i)}$.

Nous appellerons d'autre part *multirelation* de *signature* $(p_1, \ldots, p_n)$ tout $(n+1)$-uplet $\mathfrak{M} = (B, \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n)$, où $B$ est un ensemble non vide quelconque (qu'on appellera *base* de $\mathfrak{M}$), et chaque $\mathcal{R}_i$ une relation à $p_i$ variables définie sur $B$ (5.5).

Si $(\mathrm{r}_1, \ldots, \mathrm{r}_n)$ et $\mathfrak{M} = (B, \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n)$ ont la même signature, on définit aisément (de façon purement mathématique, par récurrence sur la longueur de la formule X) une application canonique $\nu$ de $\mathfrak{F}(\mathrm{r}_1, \ldots, \mathrm{r}_n)$ sur la clôture logique (*cf.* § 5.1) de $\{\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n\}$ telle que, si $\mathrm{X} \in \mathfrak{F}^{(p)}(\mathrm{r}_1, \ldots, \mathrm{r}_n)$,

---

(5.3) $\mathfrak{F}$ est le plus petit sous-ensemble de $\mathfrak{S}(\mathbf{A})$ satisfaisant aux conditions suivantes (pour les notations, *cf.* § 2.2) :

$$(\forall p \in \mathbf{N})\,(\forall \mathrm{r} \in \mathbf{R}^{(p)})\,(\forall \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_p \in \mathbf{V})\,[(\mathrm{r}, \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_p) \in \mathfrak{F}],$$
$$(\mathrm{X} \in \mathfrak{F} \;\&\; \mathrm{Y} \in \mathfrak{F}) \Rightarrow [(\boldsymbol{\&}) \circ \mathrm{X} \circ \mathrm{Y} \in \mathfrak{F} \;\&\; (\neg) \circ \mathrm{X} \in \mathfrak{F}],$$
$$(\forall \mathrm{v} \in \mathbf{V})\,[\mathrm{X} \in \mathfrak{F} \Rightarrow (\exists, \mathrm{v}) \circ \mathrm{X} \in \mathfrak{F}].$$

Comme pour la note (2.4), on constate que, dans la définition des formules et de leurs réalisations (*cf.* ci-dessous § 5.2), il n'y a pas besoin de parenthèses ni de virgules « formelles » (c'est-à-dire qui appartiendraient à l'ensemble des symboles du système) : un élément de $\mathfrak{F}$ ne peut se « lire » que d'une seule façon.

(5.4) Un symbole de variable v est *libre* dans une formule X lorsqu'il n'y est pas *lié*. Et, par définition, v est lié dans X lorsqu'il se rencontre au moins une fois dans X précédé immédiatement du symbole $\exists$.

(5.5) C'est uniquement pour la commodité de l'écriture que nous nous écartons légèrement de la terminologie de FRAÏSSÉ (en introduisant explicitement $B$).

$\nu(X)$ soit la relation à $p$ variables qui est « définie » (au sens intuitif) par X (5.6). $\nu(X)$ sera appelée la *réalisation* de X *dans* $\mathcal{M}$.

Un élément X de $\mathfrak{F}^{(p)}(r_1, \ldots, r_n)$ est dit *valide dans* $\mathcal{M}$ lorsque sa réalisation $\nu(X)$ est identiquement vérifiée [c'est-à-dire lorsque le graphe de la relation $\nu(X)$ est identique à $B^p$] (5.7).

Un élément X de $\mathfrak{F}$ est dit *universellement valide* si, pour tout $(r_1, \ldots, r_n)$ tel que $X \in \mathfrak{F}(r_1, \ldots, r_n)$ [mais il suffit évidemment de considérer un seul $(r_1, \ldots, r_n)$ satisfaisant à cette condition] et toute multirelation $\mathcal{M}$ de même signature que $(r_1, \ldots, r_n)$, X est valide dans $\mathcal{M}$. Nous désignerons par $\mathfrak{T}$ l'ensemble de toutes les formules universellement valides.

On démontre le résultat fondamental suivant, qu'on peut appeler *partie sémantique du théorème de Herbrand-Gödel* (5.8) :

Théorème 5.I. — $\mathfrak{T}$ *est un sous-ensemble récursivement énumérable de* $\mathfrak{F}$

Par contre, l'exemple du chapitre 3 (obtenu en prenant **N** comme ensemble de base, et en le munissant des relations d'addition et de multiplication) montre que l'ensemble des formules qui sont valides dans une multirelation particulière (même privilégiée) n'est généralement pas récursivement énumérable (5.9).

Soit $(r_1, \ldots, r_n)$ un élément de $\mathbf{R}^n$, et $U$ un sous-ensemble quelconque de $\mathfrak{F}(r_1, \ldots, r_n)$. Nous appellerons *modèle de* $(r_1, \ldots, r_n, U)$ [ou, en abrégé, *modèle de* $U$] toute multirelation $\mathcal{M}$ de même signature que $(r_1, \ldots, r_n)$ qui est telle que chaque élément de $U$ soit valide dans $\mathcal{M}$.

---

(5.6) A quelques détails près (dus aux faits que les symboles de variables libres de X et de Y ne sont pas nécessairement les mêmes), les propriétés de récurrence qui définissent $\nu$ sont les suivantes (ainsi qu'on pouvait le prévoir) :

$$\nu((\&)\circ X \circ Y) = \nu(X) \cap \nu(Y),$$

$$\nu((\neg)\circ X) = \complement \nu(X);$$

$\nu((\exists, v)\circ X) =$ *projection de* $\nu(X)$ (par rapport à une coordonnée dont le rang dépend d'une certaine façon du numéro de v dans la numérotation de **V** et du fait que v est libre ou non dans X).

Dans l'énoncé de ces propriétés, nous avons utilisé (au second membre) des notations ensemblistes, c'est-à-dire assimilé les relations à leurs graphes.

(5.7) $B^0$ étant par définition réduit à un seul élément, la réalisation d'une formule *close* X est soit la relation identiquement vraie, soit la relation identiquement fausse.

(5.8) Ce résultat peut s'obtenir à partir d'un certain nombre de lemmes, dont quelques-uns relativement immédiats [*cf.* note (3.10)]. La principale étape de la démonstration a été franchie par Herbrand au moyen de la notion de *champ fini*. On utilise par ailleurs la compacité des ensembles $\mathfrak{P}(B^p) = 2^{(B^p)}$.

(5.9) Soit en effet P une formule (par exemple à une variable libre) dont la réalisation dans **N** ait pour graphe un ensemble arithmétique $E$ non récursivement énumérable. En utilisant la correspondance définie au paragraphe 5.7, notes (5.17) et (5.18), on a $n \in E \Longleftrightarrow (P_{(n)}$ *est valide dans* $\mathbf{N})$. L'ensemble des formules valides dans **N** ne peut donc pas être récursivement énumérable.

$U$ sera dit *validable* s'il admet au moins un modèle.

Nous désignerons par $\mathfrak{T}(r_1, \ldots, r_n, U)$ [ou, en abrégé, $\mathfrak{T}(U)$] l'ensemble des éléments de $\mathfrak{F}(r_1, \ldots, r_n)$ qui sont valides dans tous les modèles de $U$. On a évidemment $U \subset \mathfrak{T}(U)$. D'autre part, pour chaque $(r_1, \ldots, r_n)$, on a $\mathfrak{T} \cap \mathfrak{F}(r_1, \ldots, r_n) = \mathfrak{T}(r_1, \ldots, r_n, \emptyset)$. Enfin on voit aisément que, pour que $U$ soit validable, il faut et il suffit que $\mathfrak{T}(r_1, \ldots, r_n, U) \neq \mathfrak{F}(r_1 \ldots, r_n)$.

Des lemmes qui conduisent au théorème 5.I on tire aussi :

PROPOSITION 5.2. — *Pour que U soit validable, il faut* (évidemment) *et il suffit que tout sous-ensemble fini de U soit validable.*

PROPOSITION 5.3. — *Si U est validable, il existe un modèle* $\mathfrak{M}$ *de U dont l'ensemble de base B est dénombrable.*

Cette proposition 5.3 (antérieure au théorème de HERBRAND-GÖDEL) est parfois appelée « paradoxe de SKOLEM ».

De la proposition 5.2 on déduit aisément le résultat suivant (qu'on peut appeler *forme sémantique du théorème de la déduction* et qui est dû à HERBRAND) ;

PROPOSITION 5.4. — *Pour que la formule* X *appartienne à* $\mathfrak{T}(U)$, *il faut* (et il suffit évidemment) *qu'il existe un sous-ensemble fini* (*dépendant de* X) $\{P_1, \ldots, P_m\}$ *de U tel que la formule* $((P'_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} P'_m) \Rightarrow X)$ *appartienne à* $\mathfrak{T}$, *en désignant par* $P'_i$ *la clôture de* $P_i$.

Dans cet énoncé, $(A \mathbin{\&} B)$ est une abréviation de $(\&) \circ A \circ B$ (*cf.* § 2.2 Définitions B), et $(A \Rightarrow B)$ une abréviation de $(\neg, \&) \circ A \circ (\neg) \circ B$. Nous appellerons d'autre part « quantification (formelle) universelle sur le symbole de variable v » l'opération qui, à toute formule A, fait correspondre la formule $(\neg, \exists, v, \neg) \circ A$. Et nous appellerons *clôture* de A la formule obtenue en quantifiant universellement (dans leur ordre de numérotation, par exemple) toutes les variables libres de A. Pour que A soit valide dans une multirelation $\mathfrak{M}$, il faut et il suffit que sa clôture soit valide dans $\mathfrak{M}$.

Enfin, de la proposition 5.4 et du théorème 5.I, il résulte immédiatement:

PROPOSITION 5.5. — *Si U est récursivement énumérable, il en est de même pour* $\mathfrak{T}(U)$.

**5.3. Le calcul des prédicats du premier ordre et le théorème de Herbrand-Gödel.** — En logique mathématique, on définit (5.10) l'association, à tout sous-ensemble $U$ de $\mathfrak{F}$ [ou de $\mathfrak{F}(r_1, \ldots, r_n)$] d'un certain sous-ensemble $\mathfrak{D}(U)$ de $\mathfrak{S}(\mathfrak{F})$ dont les éléments sont appelés *déductions* (ou « démonstrations formelles ») *à partir de U.* Et l'on démontre trivialement :

---

(5.10) La définition exacte, trop longue pour être donnée ici, se trouve dans n'importe quel traité de Logique symbolique (*cf.* par exemple [11]).

PROPOSITION 5.6. — *Si $U$ est récursif* (resp. *récursivement énumérable*), *alors $\mathfrak{D}(U)$ est aussi récursif* (resp. *récursivement énumérable*).

Considérons alors le sous-ensemble $\mathfrak{T}^{\star}(U)$ de $\mathfrak{F}$ [ou de $\mathfrak{F}(\mathrm{r}_1, \ldots, \mathrm{r}_n)$] constitué par toutes les formules X telles qu'il existe un élément de $\mathfrak{D}(U)$ dont X soit le dernier terme. Et posons $\mathfrak{T}^{\star} = \mathfrak{T}^{\star}(\varnothing)$.

Des propriétés de $\mathfrak{D}$ il résulte qu'on a $U \subset \mathfrak{T}^{\star}(U)$. D'autre part, de la définition et de la proposition 5.6 on tire immédiatement :

PROPOSITION 5.7. — *Si $U$ est récursivement énumérable, il en est de même pour $\mathfrak{T}^{\star}(U)$. En particulier, $\mathfrak{T}^{\star}$ est récursivement énumérable.*

En utilisant d'une part les lemmes qui servent à démontrer le théorème 5.I et d'autre part des lemmes purement formels (ou « syntaxiques ») portant sur $\mathfrak{D}$, on obtient le résultat suivant, connu sous le nom de *théorème de complétude* et démontré (indépendamment) par HERBRAND et GÖDEL :

THÉORÈME 5.II. — $\mathfrak{T}^{\star}(U) = \mathfrak{T}(U)$ *pour tout $U$.*

COROLLAIRE A. — $\mathfrak{T}^{\star} = \mathfrak{T}$.

*$U$* est dit *consistant* (ou « non-contradictoire ») si l'on a

$\mathfrak{T}^{\star}(U) \neq \mathfrak{F}(\mathrm{r}_1, \ldots, \mathrm{r}_n)$.

COROLLAIRE B. — *Pour que $U$ soit consistant, il faut et il suffit qu'il soit validable.*

Historiquement (si l'on ne considère que les définitions exactes et complètes, et non pas les aperçus plus ou moins intuitifs), la définition de $\mathfrak{T}^{\star}$ est considérablement antérieure à celle de $\mathfrak{T}$ (ou, si l'on préfère, la caractérisation « syntaxique » de $\mathfrak{T}$ est antérieure à sa caractérisation « sémantique »). Mais, en un certain sens, c'est le théorème 5.II qui « justifie » intuitivement la définition « formelle » de $\mathfrak{T}^{\star}$ (5.II).

Le couple ($\mathfrak{F}$, $\mathfrak{T}$) est généralement appelé *calcul* (*classique*) *des prédicats du premier ordre* (ou « logique formelle du premier ordre »). Les éléments de $\mathfrak{T}$ sont appelés les *thèses* (ou « théorème formels ») de ce calcul.

---

(5.II) La définition sémantique de $\mathfrak{T}$, telle que nous l'avons donnée, est évidemment plus « naturelle » (par rapport aux préoccupations mathématiques habituelles) que les définitions formelles de $\mathfrak{T}^{\star}$ [qui correspondent à des préoccupations « périmathématiques » de *démonstrabilité* (*cf.* chap. 6)]. Par contre, la définition sémantique fait appel (tout au moins sous sa forme directe) à des notions ensemblistes générales, alors que la définition syntaxique de $\mathfrak{T}^{\star}$ est « purement finitiste » (*cf.* § 7.6).

On a vu d'autre part qu'il existe deux façons de prouver que $\mathfrak{T}$ est récursivement énumérable : par le théorème 5.I et par la proposition 5.7. Or on constate que c'est la première méthode (fondée sur les *champs finis* de HERBRAND ou sur les *tableaux sémantiques* de BETH) qui semble la mieux adaptée au problème pratique suivant (dont la solution est d'ailleurs peu avancée, *cf.* [8]) : construire une machine réelle (et non pas seulement théorique) permettant d'obtenir mécaniquement des éléments intéressants de $\mathfrak{T}$ dans des limites de temps raisonnables.

**5.4. Systèmes formels dérivant du calcul des prédicats.** — Soit $n \in \mathbf{N}$, et $(\mathrm{r}_1, \ldots, \mathrm{r}_n)$ un élément quelconque de $\mathbf{R}^n$. Soit $U$ un sous-ensemble de $\mathfrak{F}(\mathrm{r}_1, \ldots, \mathrm{r}_n)$ qui soit *clos relativement aux déductions*, c'est-à-dire tel qu'on ait $U = \mathfrak{T}(U)$. Le $(n+1)$-uplet $S = (\mathrm{r}_1, \ldots, \mathrm{r}_n, U)$ sera appelé *système formel dérivant du calcul des prédicats du premier ordre* (ou simplement *système*, vu que tous les systèmes formels que nous étudierons dans ce chapitre seront obtenus de cette façon).

Nous poserons, pour abréger $\mathfrak{F}(\mathrm{r}_1, \ldots, \mathrm{r}_n) = \mathfrak{F}(S)$ [et de même $\mathfrak{F}^{p)}(\mathrm{r}_1, \ldots, \mathrm{r}_n) = \mathfrak{F}^{p)}(S)$] et $U = \mathfrak{T}(S)$. Les éléments de $\mathfrak{F}(S)$ seront appelés les *formules* (ou « propositions ») de $S$, et les éléments de $\mathfrak{T}(S)$ les *thèses* (ou « théorèmes ») de $S$.

Nous appellerons *base axiomatique* de $S$ tout sous-ensemble $V$ de $\mathfrak{F}(S)$ tel qu'on ait $\mathfrak{T}(V) = \mathfrak{T}(S)$ [on a alors nécessairement $V \subset \mathfrak{T}(S)$]. Chaque système admet évidemment une infinité de bases axiomatiques différentes.

$S$ sera dit *consistant* si l'on a $\mathfrak{T}(S) \neq \mathfrak{F}(S)$. Pour qu'un système soit consistant, il est nécessaire et suffisant qu'il admette une base axiomatique consistante (§ 5.3).

$S$ sera dit *récursif* (respectivement : *récursivement énumérable*) si $\mathfrak{T}(S)$ est un sous-ensemble récursif (resp. : récursivement énumérable) de $\mathfrak{F}(S)$. On démontre aisément :

PROPOSITION 5.8. — *Pour que S soit récursivement énumérable, il suffit que S admette une base axiomatique récursivement énumérable, et il faut que S admette une base axiomatique récursive.*

Le cas où $S$ admet une base axiomatique finie se ramène au cas ou $S$ admet une base réduite à un seul élément : il suffit de prendre la conjonction formelle des éléments de la base axiomatique finie.

Nous appelleons *antithèse* de $S$ toute formule X de $S$ dont la négation $(\neg) \circ \mathrm{X}$ est une thèse de $S$. Nous désignerons par $\mathfrak{T}_{\neg}(S)$ l'ensemble de toutes les antithèses de $S$.

Une formule de $S$ qui n'est ni une thèse ni une antithèse est dite *neutre* (dans $S$). Si $\mathfrak{F}^{0)}(S)$ contient au moins une formule neutre (il en contient alors une infinité), $S$ est dit *non-saturé* (ou encore « incomplet ») [5.12].

$S'$ sera dit une *extension* de $S$ si l'on a $\mathfrak{F}(S) \subset \mathfrak{F}(S')$ et $\mathfrak{T}(S) \subset \mathfrak{T}(S')$ [d'où l'on déduit $\mathfrak{T}_{\neg}(S) \subset \mathfrak{T}_{\neg}(S')$] [5.13].

---

(5.12) Dans cette définition de la non-saturation, le fait de se restreindre aux formules closes est essentiel si l'on veut obtenir des résultats intéressants. En effet, dans la plupart des systèmes usuels, on construit trivialement des formules neutres non closes.

(5.13) En fait, nous ne définissons ainsi que les extensions *simples* (ou *directes*). Il existe des extensions indirectes qui s'effectuent par voie de *traduction*. C'est ainsi par exemple que les « théories des ensembles » usuelles peuvent être considérées, grâce à une traduction adéquate, comme des extensions des « arithmétiques formelles » usuelles. Lorsque la traduction est *récursive*, la proposition 5.11 ci-dessous reste vraie.

Si $S'$ est une extension de $S$ et si, de plus, on a $\mathfrak{T}(S) = \mathfrak{F}(S) \cap \mathfrak{T}(S')$, alors $S'$ est appelé une extension *conservative* de $S$.

Un système sera dit *essentiellement non-récursif* s'il est consistant et s'il ne possède aucune extension qui soit à la fois consistante et récursive. Tout système étant une extension de lui-même, un système essentiellement non-récursif est non-récursif.

Remarque. — Pour des raisons de commodité, on est souvent amené à utiliser des systèmes formels dont l'alphabet contient des *symboles fonctionnels* (et en particulier des symboles fonctionnels à o place, ou *constantes formelles*). On est aussi conduit à employer des systèmes (comme la « théorie des types » ou le « calcul des prédicats d'ordre supérieur ») dont les symboles de variables sont répartis en un certain nombre (fini ou infini) d'espèces disjointes. Mais il existe des procédés canoniques permettant de ramener (par voie de « traduction ») les systèmes de ce genre à des systèmes dérivant simplement du calcul des prédicats du premier ordre.

5.5 **Di-systèmes, di-représentativité.** — Les notions très générales introduites dans ce paragraphe nous serviront à mettre en évidence le rôle des fonctions récursives dans la démonstration des théorèmes du paragraphe suivant.

Nous appellerons *di-système* tout quadruplet $D = (F, \alpha, T, T_1)$, où $F$ est un ensemble dénombrable quelconque, $\alpha$ une numérotation de $F$, $T$ et $T_1$ deux sous-ensembles de $F$. $D$ sera dit *consistant* si $T$ et $T_1$ sont disjoints.

$D$ sera dit *di-représentatif* si, pour tout couple $(E, E_1)$ de sous-ensembles récursivement énumérables disjoints de $\mathbf{N}$, il existe une application $\varphi$ de $\mathbf{N}$ dans $F$ récursive relativement à $\alpha$ et telle qu'on ait :

$$\varphi(E) \subset T \quad \& \quad \varphi(E_1) \subset T_1.$$

De la proposition 1.15 on déduit immédiatement :

Proposition 5.9. — *Si $D$ est consistant et di-représentatif, alors ni $T$ ni $T_1$ ne sont récursifs.*

5.6. **Application aux systèmes logiques usuels, théorème de Gödel-Rosser.** — Soit $S$ un système dérivant du calcul des prédicats du premier ordre (§ 5.4). Posons $F = \mathfrak{F}^{0)}(S)$, $T = F \cap \mathfrak{T}(S)$, $T_1 = F \cap \mathfrak{T}\neg(S)$. Et soit $\alpha$ une numérotation récursive (définie à une équivalence récursive près) de $F$. Le quadruplet $(F, \alpha, T, T_1)$ ainsi défini sera appelé le *di-système associé à S*.

$S$ sera dit *représentatif* si le di-système associé est di-représentatif.

On voit immédiatement que :

Proposition 5.10. — *Pour que S soit consistant, il faut et il suffit que le di-système associé soit consistant.*

**Proposition 5.11.** — *Toute extension d'un système représentatif est un système représentatif.*

Et des propositions 5.9 et 5.11 on tire :

**Proposition 5.12.** — *Tout système représentatif consistant est essentiellement non-récursif* (5.14).

Des propositions 1.8 (§ 1.5) et 5.12 [et du fait que $\mathfrak{T}_{\neg}(S)$ est récursivement énumérable en même temps que $\mathfrak{T}(S)$] on déduit le résultat fondamental suivant, dû à Gödel et Rosser (5.15) :

**Théorème 5.III.** *Si $S$ est à la fois consistant, récursivement énumérable et représentatif, alors $S$ est non saturé.*

La notion de non-saturation ne fait aucun appel à la théorie des fonctions récursives. Lorsque le théorème 5.III est appliqué à un système particulier (dont il permet de prouver la non-saturation), il constitue par conséquent un exemple caractérisé d' « application technique » de la théorie des fonctions récursives (exemple qu'on peut rapprocher de la proposition 3.4 du paragraphe 3.4) (5.16).

Soit $S$ un système particulier, et soit $V$ une base axiomatique de $S$. Pour prouver que $S$ est représentatif, il suffit de montrer qu'il constitue une exten-

---

(5.14) En utilisant un couple *effectivement inséparable* d'ensembles récursivement énumérables (§ 1.10, Remarque), et en appliquant certaines propriétés de ces ensembles, on démontre que, pour tout système $S$ récursivement énumérable, consistant et représentatif, le degré d'indécidabilité (ci-dessous § 8.6) de $\mathfrak{T}(S)$ n'est autre que l'élément maximal de l'ensemble des degrés d'indécidabilité de tous les ensembles récursivement énumérables.

(5.15) Le résultat original de Gödel était restreint à un système particulier (ou à une classe particulière de systèmes) dont l'énumérabilité récursive et la représentativité avaient été préalablement démontrées. D'autre part, la démonstration de Gödel prenait comme hypothèse, non pas la consistance, mais une propriété plus forte : l'$\omega$-*consistance* (*cf.* note [5.18)]. C'est Rosser qui a montré que l'$\omega$-consistance pouvait être remplacée par la simple consistance.

(5.16) Soit $S$ un système récursivement énumérable explicitement déterminé (par exemple par la donnée du schéma de définition d'une fonction récursive primitive énumérant une base axiomatique de $S$). Considérons le couple *effectivement inséparable* $(E, E_1)$ d'ensembles récursivement énumérables qui est obtenu au paragraphe 1.10. Soit $\varphi$ une fonction récursive qui applique $E$ dans $\mathfrak{T}(S) \cap \mathfrak{F}^{(0)}(S)$ et $E_1$ dans $\mathfrak{T}_{\neg}(S) \cap \mathfrak{F}^{(0)}(S)$; l'existence d'une telle fonction $\varphi$ constitue une condition nécessaire (et aussi suffisante, mais la démonstration n'en est pas immédiate) pour que $S$ soit représentatif. Supposons que $\varphi$ puisse être explicitement déterminée (par la donnée de son schéma de définition). On peut alors, en utilisant simplement la définition des ensembles effectivement inséparables, exhiber explicitement un élément A de $\mathfrak{F}^{(0)}(S)$ ayant la propriété suivante :

$$S \text{ est consistant} \Longleftrightarrow \text{A est neutre dans } S.$$

Autrement dit, la démonstration du théorème 5.III est « constructive » (contrairement à ce qui se passait pour la proposition 3.4).

sion d'un autre système $S_0$ dont on a prouvé au préalable la représentativité. Dans le paragraphe suivant, nous allons définir un certain système $S_0$ (dû à Robinson) dont tous les systèmes formels usuels « suffisamment forts » sont des extensions; et nous démontrerons la représentativité de $S_0$. D'autre part, nous définirons un modèle particulier $\mathcal{M}_0$ de $S_0$; si $S$ est une extension de $S_0$, pour que $S$ soit consistant, il est suffisant (mais non nécessaire) que $\mathcal{M}_0$ soit aussi un modèle de $S$, c'est-à-dire que chaque élément de $V$ soit valide dans $\mathcal{M}_0$ [sur la possibilité de démontrer ce fait et d'en tirer la conclusion cherchée, *cf.* § 7.6 et 7.7].

Remarque. — La méthode indiquée dans la note (5.9) permet de démontrer très rapidement (sans recourir aux ensembles inséparables, mais en utilisant le théorème 3.III) la non-saturation de toute extension $S$ du système de Robinson $S_0$ qui satisfait aux deux conditions suivantes (dont la première est plus faible que le fait d'être récursivement énumérable, mais dont la seconde est beaucoup plus forte que la consistance) :

(1) $\mathfrak{T}(S)$ est un sous-ensemble arithmétique de $\mathfrak{F}(S)$;

(2) $S$ admet comme modèle l'ensemble $\mathbf{N}$ muni des relations d'addition et de multiplication.

En utilisant la hiérarchie analytique de Kleene (§ 3.5), cette méthode peut aussi s'appliquer au cas où $\mathfrak{T}(S)$ n'est pas arithmétique, mais où $S$ contient (directement ou indirectement) des variables fonctionnelles.

5.7. **Théorèmes de Robinson et Church.** — R. M. Robinson a obtenu le résultat suivant :

Théorème 5.IV. *Il existe un système à base axiomatique finie qui est représentatif et consistant.*

Démonstration (*schéma*). — Soient $\mathrm{r}_0$ et $\mathrm{r}'_0$ deux éléments particuliers de $\mathbf{R}^{(3)}$. Soient d'autre part $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}'_0$ les relations à trois variables ainsi définies sur $\mathbf{N}$ :

$$\mathcal{R}_0(x, y, z) \iff x + y = z,$$
$$\mathcal{R}'_0(x, y, z) \iff xy = z.$$

Les éléments de la clôture logique (§ 5.1) de $\{\mathcal{R}_0, \mathcal{R}'_0\}$ sont donc les relations qui ont pour graphes les ensembles arithmétiques (§ 3.1).

Posons $\mathcal{M}_0 = (\mathbf{N}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}'_0)$. Et désignons par $T_0$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{F}^{(0)}(\mathrm{r}_0, \mathrm{r}'_0)$ qui sont valides dans cette multirelation particulière $\mathcal{M}_0$.

On définit aisément une correspondance canonique qui, à tout élément $n$ de $\mathbf{N}$, associe un certain élément $\mathrm{D}_n$ de $\mathfrak{F}^{(1)}(\mathrm{r}_0, \mathrm{r}'_0)$ tel que la réalisation de

$D_n$ dans $\mathfrak{M}_0$ soit la relation « $x = n$ » (par rapport à l'unique variable $x$) (5.17). On en déduit immédiatement une autre correspondance canonique qui, à tout élément P de $\mathfrak{F}^{(1)}(r_0, r'_0)$ et tout élément $n$ de $\mathbf{N}$, associe un élément $P_{(n)}$ de $\mathfrak{F}^{(1)}(r_0, r'_0)$ tel que, si $\mathcal{R}$ est la réalisation de P dans $\mathfrak{M}_0$, la réalisation de $P_{(n)}$ soit la relation à zéro variables « $\mathcal{R}(n)$ » (vérifiée si et seulement si $n$ satisfait à $\mathcal{R}$) (5.18).

En se servant du théorème 3.I et de certaines propriétés syntaxiques, on construit un sous-ensemble fini $V_0$ de $T_0$ tel que, à tout couple $(E, E_1)$ de sous-ensembles récursivement énumérables disjoints de $\mathbf{N}$, on puisse associer un élément P de $\mathfrak{F}^{(1)}(r_0, r'_0)$ satisfaisant aux conditions suivantes (5.19) :

$$n \in E \quad \Rightarrow \quad P_{(n)} \in \mathfrak{T}(V_0),$$
$$n \in E_1 \quad \Rightarrow \quad (\neg) \circ P_{(n)} \in \mathfrak{T}(V_0).$$

Considérons alors le système $S_0 = (r_0, r'_0, \mathfrak{T}(V_0))$. Puisque $V_0 \subset T_0$, $\mathfrak{M}_0$ constitue un modèle de $V_0$, et $S_0$ est par conséquent consistant. On voit d'autre part aisément que la correspondance $(P, n) \to P_{(n)}$ est récursive, d'où il résulte que $S_0$ est représentatif. C. Q. F. D.

Du théorème 5.IV et des propositions 5.12 et 5.4 on déduit immédiatement la propriété fondamentale suivante, due à CHURCH :

THÉORÈME 5.V. *$\mathfrak{T}$ n'est pas un sous-ensemble récursif de $\mathfrak{F}$.*

---

(5.17) On peut même prend $D_n \in \mathfrak{F}^{(0)}(r_0)$. En effet, chaque élément de $\mathbf{N}$ se laisse « définir » à partir de $\mathcal{R}_0$. On a :

$$x = 0 \iff \mathcal{R}_0(x, x, x),$$
$$x = 1 \iff (\forall y)(\forall z)[\mathcal{R}_0(y, z, x) \Rightarrow (y = 0 \text{ ou } z = 0)],$$
$$x = n + 1 \iff (\exists y)(\exists z)[y = n \ \&\ z = 1 \ \&\ \mathcal{R}_0(y, z, x)].$$

$D_n$ sera l'homologue formel de la relation $\mathcal{D}_n$ définissant $n$ ainsi obtenue.

(5.18) On peut prendre pour $P_{(n)}$ l'une ou l'autre des deux formules suivantes (avec des notations abrégées dont la signification est évidente) : $(\exists v)\,[D_n(v)\ \&\ P(v)]$; $(\forall v)\,[D_n(v) \Rightarrow P(v)]$.

A partir de cette correspondance $(P, n) \to P_{(n)}$, on peut définir l'$\omega$-*consistance* (ou « $\omega$-non-contradiction ») comme la propriété suivante de $S$ : *il n'existe aucun élément* P *de $\mathfrak{F}^{(1)}(S)$ tel que la formule $(\exists v)P(v)$ d'une part, et toutes les formules $\neg P_{(n)}$ d'autre part, soient des théorèmes de S.* Pour que $S$ soit $\omega$-consistant, il est évidemment suffisant (mais non nécessaire) que $S$ admette $\mathbf{N}$ muni de l'addition (et éventuellement d'autres relations) comme modèle.

(5.19) SMULLYAN et PUTNAM d'une part, SHEPHERDSON d'autre part [37] ont montre (par des méthodes différentes) que, pour toute extension récursivement énumérable et consistante $S$ de $S_0$ (et en particulier pour $S_0$ lui-même), et pour tout couple $(E, E_1)$ de sous-ensembles récursivement énumérables disjoints de $\mathbf{N}$, il existe un élément P de $\mathfrak{F}^{(1)}(S_0)$ [P dépendant non seulement de $(E, E_1)$, mais aussi de $S$] qui satisfait aux deux conditions suivantes (beaucoup plus fortes que celles dont nous nous servons dans le texte ) :

$$x \in E \iff P_{(n)} \in \mathfrak{T}(S),$$
$$x \in E_1 \iff P_{(n)} \in \mathfrak{T}_{\neg}(S).$$

5.8. **Définition syntaxique des ensembles récursivement énumérables.** — KLEENE a obtenu le très important résultat suivant dont la démonstration, trop longue pour être donnée ici, est néanmoins relativement aisée à partir des théorèmes 5.I (ou 5.II) et 5.IV (*cf.* [10]) :

THÉORÈME 5.VI. — *Pour qu'un système S dérivant du calcul des prédicats du premier ordre possède une extension conservative* (*cf.* § 5.4) *admettant une base axiomatique finie, il faut et il suffit que S soit récursivement énumérable.*

Ce théorème, qu'on peut comparer au théorème 4.II (§ 4.5), constitue un nouvel exemple de la façon dont la notion d'ensemble récursivement énumérable permet de résoudre des problèmes dont l'énoncé ne fait appel à aucune notion récursive (ici, le problème syntaxique de trouver une caractérisation directe des systèmes qui possèdent une extension conservative à base axiomatique finie).

D'autre part ce théorème 5.VI fournit aisément une nouvelle définition des ensembles récursivement énumérables. Soit en effet r un élément quelconque de $\mathbf{R}^{(2)}$. On construit aisément une application récursive particulière $\varphi$ de $\mathbf{N}$ dans $\mathfrak{F}^{(0)}(\mathrm{r})$ telles que les formules $\varphi(n)$ soient *indépendantes* entre elles, c'est-à-dire qu'on ait, pour tout $n$,

$$\varphi(n) \notin \mathfrak{T}(\{\varphi(i) : i \neq n\} \text{ (5.20)}.$$

$E$ étant alors un sous-ensemble quelconque de $\mathbf{N}$, on déduit immédiatement du théorème 5.VI que, pour que $E$ soit récursivement énumérable, il faut et il suffit que le système $(r, \mathfrak{T}[\varphi(E)])$ possède une extension conservative admettant une base axiomatique finie.

REMARQUE. — En général, un système récursivement énumérable n'admet pas *lui-même* de base axiomatique finie. Le procédé qui vient d'être indiqué fournit même un système récursif qui n'admet aucune base axiomatique finie (5.21).

(5.20) On peut par exemple prendre pour $\varphi(n)$ une formule telle que, pour toute multirelation $\mathfrak{M} = (B, \mathcal{R})$ de signature (2), la validité de $\varphi(n)$ dans $\mathfrak{M}$ soit équivalente la propriété suivante « $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, et le nombre d'éléments de l'ensemble quotient $B/\mathcal{R}$ est différent de $n$ ».

(5.21) Soit $\varphi$ la correspondance indiquée dans la note (5.20) ci-dessus. S. FEFERMAN a montré que, pour tout sous-ensemble $E$ de $\mathbf{N}$, $E$ et $\mathfrak{T}[\varphi(E)]$ ont le même *degré d'indécidabilité* (§ 8.6); en particulier, si $E$ est récursif et infini, le système $(\mathrm{r}, \mathfrak{T}[\varphi(E)])$ est récursif, mais n'admet aucune base axiomatique finie (à cause de l'indépendance des $\varphi(n)$). En utilisant la proposition 5.8 et ce résultat général de Feferman, on voit que, pour tout ensemble récursivement énumérable $X$, il existe un système $S$ à base axiomatique récursive tel que $X$ et $\mathfrak{T}(S)$ aient le même degré. La question reste posée de savoir si, pour tout $X$ récursivement énumérable, il existe un système $S$ à base axiomatique *finie* tel que $X$ et $\mathfrak{T}(S)$ aient le même degré [le théorème 5.VI ne résout pas cette question car, si $S'$ est une extension conservative de $S$, alors $\mathfrak{T}(S)$ est *récursif en* $\mathfrak{T}(S')$ (§ 8.1) mais n'a généralement pas le même degré].

**5.8 Définition sémantique des ensembles récursifs.** — Une multirelation $\mathcal{M} = (B, \mathcal{R}_0, \ldots, \mathcal{R}_m)$ sera dite *semi-standard* (sous-entendu : relativement à $\mathcal{R}_0$ et à l'addition) si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

(1) $\mathbf{N} \subset B$;

(2) $\mathcal{R}_0$ est à trois variables, et la restriction de $\mathcal{R}_0$ à $\mathbf{N}^3$ est identique à la relation d'addition ordinaire.

Un sous-ensemble $E$ de $\mathbf{N}^p$ sera dit *absolument définissable* s'il existe un entier $m$, un élément $(\mathrm{r}_0, \ldots, \mathrm{r}_m)$ de $\mathbf{R}^{m+1}$ avec $\mathrm{r}_0 \in \mathbf{R}^{(3)}$, un sous-ensemble *fini* $U$ de $\mathfrak{F}(\mathrm{r}_0, \ldots, \mathrm{r}_m)$ et un élément P de $\mathfrak{F}^{(p)}(\mathrm{r}_0, \ldots, \mathrm{r}_m)$ tels que :

(a) $U$ possède au moins un modèle semi-standard;

(b) dans tout modèle semi-standard de $U$, la restriction à $\mathbf{N}^p$ de la réalisation de P admet $E$ pour graphe.

De la proposition 1.8 et des théorèmes 5.I et 5.IV on déduit sans difficulté.

Théorème 5.VII. — *Pour qu'un ensemble soit absolument définissable, il faut et il suffit qu'il soit récursif.*

Cette caractérisation « sémantique » des ensembles récursifs est essentiellement due à Tarski et Mostowski.

Remarque A. — On pourrait remplacer la condition (2) par l'une des conditions suivantes :

(2′) $\mathcal{R}_0$ est à deux variables, et la restriction de $\mathcal{R}_0$ à $\mathbf{N}^2$ est la relation « $x + 1 = y$ »;

(2″) $\mathcal{R}_0$ est à deux variables, et la restriction de $\mathcal{R}_0$ à $\mathbf{N}^2$ est la relation d'ordre ordinaire.

L'essentiel est que le seul automorphisme de $(\mathbf{N}, \mathcal{R}_0)$ soit l'automorphisme identique (*cf.* note (5.17)).

Remarque B. — Comme le montre la note (5.9), le théorème deviendrait faux si, dans les définitions, on remplaçait la condition (1) par la condition $\mathbf{N} = B$.

## Chapitre 6. — Interprétation intuitive : effectivité, indécidabilité.

On peut admettre que la conjonction des diverses propriétés indiquées dans les chapitres précédents « justifie » suffisamment la définition et l'étude des fonctions récursives. Il n'en reste pas moins nécessaire d' « expliquer » comment toutes ces propriétés peuvent découler d'une définition en apparence aussi arbitraire que celle de $\mathbf{F_R}$ (pourquoi utiliser telles fonctions initiales et telles opérations fondamentales plutôt que telles autres tout aussi simples?). L'interprétation « intuitive » des fonctions récursives fournit cette explication, en même temps qu'une raison supplémentaire de s'intéresser aux questions de récursivité.

Ce n'est là, d'ailleurs, qu'un cas particulier d'un fait extrêmement général. Il est bien évident que beaucoup de théories mathématiques ont été construites (au moins initialement) pour « reproduire » — et, partant, pour approfondir — la structure de certains domaines extra-mathématiques. Autrement dit, une notion mathématique donnée constitue souvent une « traduction abstraite » (ou, comme on dit parfois, une « formalisation ») de certains phénomènes « concrets ». Dans le cas des fonctions récursives, ces phénomènes concrets sont d'ordre « périmathématique ».

**6.1. Les questions périmathématiques.** — Convenons de désigner par le mot *périmathématique* (employé adjectivement ou substantivement) les questions qui portent sur la mathématique considérée comme un « fait » (d'ordre historique, sociologique, psychologique, logique — au sens le plus général de ce mot —, pratique, etc.) (6.1). Ces questions, lorsqu'on les envisage directement, ne sont évidemment pas d'ordre mathématique, quelle que soit l'extension qu'on donne à ce dernier terme.

On peut — très grossièrement — séparer les problèmes périmathématiques en deux groupes principaux : d'une part ceux qui concernent les notions (« intuitives ») d'*énoncé mathématique* et de *démonstration* (d'où l'on déduit la notion de *théorème*), d'autre part ceux qui concernent les questions de *calculabilité effective* et de *décidabilité effective*. La reproduction mathématique des concepts du premier groupe s'effectue grâce à des *systèmes formels* adéquats (tels que ceux étudiés dans le chapitre 5); quant aux concepts du second groupe, nous nous proposons de montrer, dans ce chapitre, comment la notion de récursivité en constitue une traduction mathématique satisfaisante.

**6.2. L'« effectivité » au sens intuitif.** — Il nous faut d'abord préciser quelque peu, sur le plan « pratique » (ou « intuitif ») le contenu concret de cette notion périmathématique d' « effectivité ».

Une application $\varphi$ de $\mathbf{N}^p$ dans $\mathbf{N}$ (c'est-à-dire un élément de $\mathbf{F}^{(1)}$) est dite *effectivement calculable* s'il existe un procédé général et « uniforme », défini une fois pour toutes, permettant de passer de chaque $p$-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ à la valeur $\varphi(x_1, \ldots, x_p)$ au moyen d'une suite finie et effectivement déterminée d'opérations effectivement réalisables.

(6.1) Le mot *métamathématique* conviendrait au moins aussi bien; et il est d'ailleurs employé en ce sens par certains auteurs. Malheureusement la plupart des logiciens utilisent ce terme soit pour désigner la logique (considérée comme branche des mathématiques) dans son ensemble, soit (en un sens encore plus technique) pour caractériser l'étude « purement finitiste » des systèmes formels [*cf.* ci-dessus note (5.1), et ci-dessous § 7.6].

Une telle « définition » n'offre évidemment aucun sens mathématique précis. Il ne saurait en être autrement, puisqu'il ne s'agit pas d'une notion mathématique, mais d'un concept pratique qu'on peut seulement essayer de « décrire » ou de « circonscrire », ce qui ne peut guère s'effectuer que par voie d'exemples.

Exemples de fonctions qui doivent manifestement être considérées comme effectivement calculables : Les fonctions (de deux variables) *somme*, *produit*, *exponentiation*, ainsi que toutes les fonctions constantes; de même les fonctions d'une variable $\varphi_1$ et $\varphi_2$, et la fonction de deux variables $\varphi_3$, respectivement définies par

$$\varphi_1(n) = n\text{-ième } \textit{décimale du nombre } \pi;$$
$$\varphi_2(n) = \textit{partie entière de } \log(1+n);$$
$$\varphi_3(m, n) = \textit{partie entière de la partie réelle de } e^{m+in} \ (6.2).$$

Un sous-ensemble $E$ de $\mathbf{N}^p$ sera dit *effectivement décidable* s'il existe un procédé uniforme permettant de reconnaître, pour chaque $p$-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$, au terme d'une suite finie et effectivement déterminée d'opérations élémentaires effectivement réalisables, si $(x_1, \ldots, x_p)$ appartient ou non à $E$.

Exemples de sous-ensembles de $\mathbf{N}$ effectivement décidables : l'ensemble des nombres pairs, l'ensemble des nombres premiers, les ensembles finis et leurs complémentaires.

Exemples de sous-ensembles de $\mathbf{N}^p$ effectivement décidables : l'ensemble $S_i^{(p)}(i = 1, \ldots, 5)$ des $p$-uplets $(x_1, \ldots, x_p)$ tels que l'équation en $t$

$$t^p + x_1 t^{p-1} + \ldots + x_p = 0$$

admette : (1) au moins une racine entière; (2) au moins une racine rationnelle; (3) au moins une racine réelle; (4) au moins une racine double; (5) une racine double et une seule [et il en serait évidemment de même pour beaucoup d'autres $S_i^{(p)}$ correspondant à des conditions ($i$) de ce genre].

Un sous-ensemble $E$ de $\mathbf{N}^p$ sera dit *effectivement semi-décidable* s'il existe un procédé uniforme permettant, pour chaque $(x_1, \ldots, x_p)$ de définir effectivement une suite d'opérations telle que : si $(x_1, \ldots, x_p)$ appartient à $E$, la suite aboutisse à reconnaître cette appartenance; mais si $(x_1, \ldots, x_p)$ n'appartient pas à $E$, la suite se prolonge sans jamais aboutir.

---

(6.2) Supposons qu'on sache obtenir « effectivement » des nombres rationnels aussi approchés qu'on le désire d'un certain nombre réel $a$. Alors la détermination effective de la partie entière de $a$ ne présente aucune difficulté, sauf dans le cas particulier où $a$ serait un entier (et où l'on ne connaîtrait pas ce fait à l'avance). Plus généralement, le calcul effectif du développement décimal de $a$ à partir d'une suite d'approximations rationnelles ne présente de difficulté que lorsque $a$ se trouve être un nombre décimal exact. Pour les fonctions $\varphi_1$, $\varphi_2$ et $\varphi_3$, des théorèmes connus assurent l'exclusion de ces cas particuliers gênants.

L'exemple-type d'ensembles effectivement semi-décidables est constitué par les ensembles diophantiens (§ 3.4). Si $E$ est défini par

$$(x_1, \ldots, x_p) \in E \iff (\exists_{y_1}) \ldots (\exists_{y_k}) [P(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_k) = 0],$$

la suite d'opérations consiste à *essayer* successivement chaque élément $(y_1, \ldots, y_k)$ de $\mathbf{N}^k$ (ces éléments étant rangés dans un ordre déterminé quelconque) jusqu'à ce qu'on en trouve un (s'il en existe) qui soit solution.

Dans la mesure où les trois notions qui viennent d'être définies ont un sens intuitif, elles possèdent les propriétés suivantes (parmi beaucoup d'autres analogues) :

($A_1$) *Pour qu'un ensemble soit effectivement décidable, il faut et il suffit que sa fonction caractéristique soit effectivement calculable.*

($A_2$). *Pour qu'une fonction soit effectivement calculable, il faut que son graphe soit effectivement décidable, et il suffit que ce graphe soit effectivement semi-décidable* (6.3).

($A_3$). *Si un ensemble et son complémentaire sont tous deux effectivement semi-décidables, alors ils sont effectivement décidables.*

Plus généralement, il résulte de la définition intuitive que l'ensemble de toutes les fonctions effectivement calculables doit (dans la mesure où il est défini) satisfaire aux conditions (I)-(VI) du paragraphe 1.3. Et de même les propositions 1.1-1.8 du paragraphe 1.5 doivent être satisfaites lorsqu'on y remplace respectivement « fonction récursive » par « fonction effectivement calculable », « ensemble récursif » par « ensemble effectivement décidable », et « ensemble récursivement énumérable » par « ensemble effectivement semi-décidable ».

On peut donc en particulier affirmer l'énoncé (périmathématique et « intuitivement évident ») suivant :

(B). *Toutes les fonctions récursives sont effectivement calculables; tous les ensembles récursifs sont effectivement décidables; tous les ensembles récursivement énumérables sont effectivement semi-décidables.*

Nous examinerons plus loin la réciproque de cet énoncé (cette réciproque est également périmathématique, mais n'est plus du tout évidente à première vue).

---

(6.3) La première partie est évidente. Supposons donc que le graphe de $\varphi$ est effectivement semi-décidable, et prenons un $(x_1, \ldots, x_p)$ particulier. Rangeons dans un ordre effectif déterminé l'ensemble de tous les couples $(y, S)$, où $y$ est un élément quelconque de $\mathbf{N}$, et $S$ l'une quelconque des suites finies d'opérations qu'on peut (d'après la définition) effectuer à partir de $(x_1, \ldots, x_p, y)$ pour reconnaître l'appartenance éventuelle de ce $(p+1)$-uplet au graphe de $\varphi$. Le calcul de $\varphi(x_1, \ldots, x_p)$ consiste à essayer tous ces couples $(y, S)$ jusqu'à ce qu'on en trouve un (car il en existe au moins un par hypothèse) tel que $S$ constitue une preuve de l'appartenance de $(x_1, \ldots, x_p, y)$ au graphe de $\varphi$.

Remarque A. — Nous ne définissons pas ici (faute de place) le concept intuitif de *semi-fonction effectivement semi-calculable*. L'homologue mathématique de ce concept est fourni par la notion de semi-fonction semi-récursive (§ 1.9).

Remarque B. — Les notions de calculabilité et de décidabilité (ou de semi-décidabilité) effectives, sous la forme intuitive qui vient de leur être donnée, peuvent être définis *directement* (c'est-à-dire sans recourir à une numérotation) sur des ensembles dénombrables autres que $\mathbf{N}$. Il suffit pour cela que chacun des éléments d'un tel ensemble soit caractérisé par un certain nombre (fini) de données.

C'est ainsi, par exemple (*cf.* § 2.3) que $\mathbf{P_S}$ doit manifestement être considéré comme un sous-ensemble effectivement semi-décidable de $\mathbf{P}$ (pour la même raison que les ensembles diophantiens), $\mathbf{P}_{\mathbf{S}}^{(1)}$ comme un sous-ensemble effectivement décidable de $\mathbf{P}^{(1)}$, le p. g. c. d. comme une application effectivement calculable de $(\mathbf{P}^{(1)})^2$ dans $\mathbf{P}^{(1)}$, et l'opération de Lagrange comme une application effectivement calculable de $\mathbf{P}^{(1)}$ dans $\mathfrak{S}(\mathbf{P}^{(1)})$.

Définissons (d'une façon encore plus générale que dans le chapitre 3) un *système formel* comme un triplet $S = (A, F, D)$, où $A$ (« alphabet » de $S$) est un ensemble quelconque (qu'on peut supposer fini (6.4)), $F$ (ensemble des « formules ») un sous-ensemble de $\mathfrak{S}(A)$, et $D$ (ensemble des « déductions ») un sous-ensemble de $\mathfrak{S}(F)$. Pour qu'un tel système $S$ puisse constituer une traduction adéquate des notions périmathématiques d' « énoncé » et de « démonstration » relatives à une certaine mathématique (classique ou intuitionniste, ensembliste ou finitiste) ou à une certaine partie des mathématiques, il est évidemment nécessaire (ou tout au moins fortement souhaitable) que $F$ et $D$ soient effectivement décidables. Il en résulte alors que, si nous désignons par $T$ (ensemble des « thèses ») l'ensemble des éléments de $F$ qui peuvent être obtenus comme dernier terme d'un élément de $D$, $T$ est un sous-ensemble effectivement semi-décidable de $F$ (ou de $\mathfrak{S}(A)$).

Remarque C. — Dans l'expression « effectivement calculable » ou « effectivement décidable »), l'adverbe « effectivement » est souvent remplacé par *mécaniquement*. On fait ainsi allusion à la notion périmathématique (assez vague) de « machine finie » (*cf.* début du chapitre 4), notion dont les machines de Turing (entre autres) constituent une traduction mathématique possible. L'identité entre les fonctions effectivement calculables et les fonctions Turing-calculables est une conséquence immédiate de la proposition 4.3, du théorème 4.I et de la « thèse de Church » (ci-dessous § 6.3).

(6.4) Un alphabet dénombrable numéroté $\{a_0, \ldots, a_n, \ldots\}$ peut être canoniquement remplacé par un alphabet $\{b, c\}$ à deux éléments; il suffit de remplacer $(a_n)$ par $(b, c, \ldots, c)$ avec $n$ signes $c$.

REMARQUE D. — Les notions d'effectivité, telles que nous venons de les décrire, constituent une « idéalisation » de la pratique. C'est ainsi que nous considérons comme effectivement calculables toutes les fonctions Turing-calculables, même celles qui ne peuvent être obtenues que par des machines dont le nombre d'éléments matériels dépasserait toutes les possibilités de construction humaine, ou par des machines telles que le calcul de $\varphi(n)$ pour de petites valeurs de $n$ nécessiterait un délai de plusieurs siècles et l'usage d'une mémoire employant tous les électrons du système solaire (6.5).

**6.3. La « thèse de Church ».** — Il est bien évident que l'adéquation d'une théorie mathématique à un domaine extra-mathématique ne peut faire l'objet ni d'un *énoncé* mathématique, ni *a fortiori* d'une *démonstration* mathématique (quelque satisfaisante que soit la correspondance en question, et quelque large que soit le domaine mathématique où l'on se place). Une telle adéquation peut seulement se « justifier » expérimentalement (ce qui ne signifie nullement, bien entendu, que la confirmation expérimentale se réduise nécessairement à une suite de vérifications individuelles : cette confirmation peut être rationnellement conduite, et dirigée de façon à mettre en évidence les analogies de structure entre le domaine concret étudié et sa reproduction mathématique). Ces remarques générales restent valables lorsque le domaine concret en question est d'ordre périmathématique, et plus particulièrement lorsqu'il s'agit du second d'entre les deux domaines périmathématiques fondamentaux que nous avons sommairement définis au paragraphe 6.1 (6.6).

Nous nous proposons donc d'établir (moyennant les restrictions qui viennent d'être indiquées) l'adéquation de la notion mathématique de récursivité à la notion périmathématique d'effectivité. Cette adéquation, qui constitue la réciproque de l'énoncé (B) du paragraphe précédent, peut s'énoncer sous plusieurs formes équivalentes. Nous adopterons la forme (C) suivante :

(C). *Toute fonction effectivement calculable est récursive.*

---

(6.5) Ce second défaut (délai et mémoire irréalisablement longs) peut affecter des machines de construction — théorique et pratique — extrêmement simple.

(6.6) Remarques valables aussi pour le premier des deux domaines périmathématiques (celui qui concerne les notions intuitives d'*énoncé* et de *théorème*). Considérons par exemple la théorie des ensembles formelle de ZERMELO (ou bien celle de ZERMELO-FRAENKEL, ou celle de NEUMANN-BERNAYS, ou encore celle de GÖDEL) dans sa définition syntaxique : ensemble de symboles, règles de formation, axiomes et règles de déduction du calcul des prédicats du premier ordre, axiomes ou schémas d'axiomes propres au système considéré. Pour persuader un mathématicien (habitué à travailler dans une théorie des ensembles « naïve ») de l'aptitude d'un tel système à formaliser convenablement les mathématiques ordinaires, des arguments philosophiques *a priori* seraient sans doute de peu de poids : seule une pratique plus ou moins prolongée peut entraîner la conviction (pratique accompagnée, bien entendu, de définitions et démonstrations « métamathématique » relatives aux propriétés syntaxiques ou sémantiques du système, aux procédés abréviatifs et aux règles de déduction dérivées).

Cette proposition (C) est généralement appelée *thèse* (6.7) *de Church* (du nom du logicien qui l'a formulée le premier). Il s'agit-là, répétons-le, d'un énoncé *non mathématique;* en effet cette « thèse », jointe à l'énoncé (B), exprime l'identité entre deux ensembles dont l'un — $\mathbf{F_R}$ — est mathématiquement défini, mais dont l'autre — l'ensemble de toutes les fonctions effectivement calculables — n'a qu'une existence purement pratique (ou « idéalement » pratique).

Il ne peut donc être question de *prouver* la proposition (C), mais seulement de la justifier par des arguments expérimentaux aussi convaincants que possible. Or la signification expérimentale de (C) est la suivante :

*Toutes les fois qu'on aura défini un sous-ensemble $E$* (éventuellement réduit à un seul élément) *de* $\mathbf{F}$ *tel que*

(1) *les éléments de $E$ doivent manifestement être considérés comme effectivement calculables,*

*alors on pourra démontrer que* $E \subset \mathbf{F_R}$.

La justification de la thèse de Church réside dans le fait suivant : pour tous les sous-ensembles $E$ satisfaisant à la condition (1) qui ont déjà été définis (6.8), l'inclusion $E \subset \mathbf{F_R}$ se démontre *trivialement* (6.9).

De façon plus précise on constate que, chaque fois que $E$ est un sous-ensemble de $\mathbf{F}$ satisfaisant à la condition (1) ci-dessus, et $M$ un autre sous-ensemble de $\mathbf{F}$, l'inclusion $E \subset M$ s'obtient de façon triviale (bien qu'éventuellement longue lorsque la définition de $E$ est compliquée) si l'on a pu montrer au préalable que $M$ possède un certain nombre (à peu près une

(6.7) Il est bien évident que le sens (quasi-philosophique) où ce mot de *thèse* est pris ici n'offre aucun rapport avec la signification technique qui a été donnée à ce mot dans la définition des systèmes formels (§ 5.4).

(6.8) Il existe une multitude de sous-ensembles $E$ « usuels » (souvent réduits à un seul élément) qui satisfont à (1). D'autre part la pratique de la logique mathématique et de certaines théories (comme la théorie des machines) a conduit à définir un grand nombre de tels ensembles. Enfin les logiciens auteurs de la proposition (C) ont tout d'abord essayé de lui trouver des contre-exemples; et c'est seulement après l'échec de toutes leurs tentatives (et en réalisant les raisons de cet échec) qu'ils ont été conduits à affirmer (C) comme une « thèse ».

(6.9) C'est seulement le problème suivant qui est trivial : $\varphi$ étant une fonction (ou une famille de fonctions) déterminée, définie par un procédé de calcul qui est *manifestement* effectif, montrer que $\varphi$ est récursive. Mais lorsque $\varphi$, déterminée par une certaine définition $\mathcal{D}$, se trouve être effectivement calculable sans que l'existence d'un procédé de calcul effectif (au sens intuitif) résulte immédiatement de $\mathcal{D}$, il est bien évident que les tranformations qu'il faut effectuer sur $\mathcal{D}$ pour faire apparaître un tel procédé de calcul ne sont pas nécessairement triviales et ne ressortissent pas en général à la théorie des fonctions récursives [en remplaçant « récursive » par « semi-récursive », un exemple de ce phénomène est fourni par le théorème 5.I; *cf.* aussi note (6.11) et fin du § 6.9].

vingtaine, mais cela dépend évidemment des appréciations) de propriétés ($P_i$) (définissables une fois pour toutes, indépendamment de $E$) ayant l'une ou l'autre des formes (a) et (b) suivantes :

(a) $M$ contient certaines fonctions particulières;

(b) $M$ est clos par rapport à certaines opérations particulières;

[les propriétés (I)-(III) du paragraphe 1.3 appartiennent au type (a), les propriétés (IV)-(VI) au type (b)].

Or on montre aisément que $\mathbf{F_R}$ possède toutes ces propriétés ($P_i$) (cela correspond à des propositions du type indiqué au paragraphe 1.5).

Nous appellerons « *filière de Church* » le processus plus ou moins long, mais toujours dépourvu d'« astuces », qui permet, pour chaque $E$ satisfaisant à (1), de démontrer l'inclusion $E \subset \mathbf{F_R}$ au terme d'un enchaînement quasi-mécanique déroulé à partir des propriétés ($P_i$) de $\mathbf{F_R}$. On peut donc dire, en bref, que c'est la puissance de la filière de Church qui justifie la thèse de Church.

Remarque. — De ce qui vient d'être dit il résulte que, tous comptes faits, la définition la plus « naturelle » de $\mathbf{F_R}$ serait la suivante : *le plus petit sous-ensemble de* $\mathbf{F}$ *qui possède toutes les propriétés* ($P_i$) *de la famille ci-dessus indiquée.* Il se trouve, comme nous l'avons vu, que cette vingtaine de propriétés ($P_i$) peut se déduire d'un nombre restreint d'entre elles. Mais cette sous-famille restreinte peut être choisie de façon relativement arbitraire, les propriétés ($P_i$) étant fortement reliées les unes aux autres. Le choix que nous avons fait (les conditions (I)-(VI) du paragraphe 1.3) est le plus usité : il correspond à des fonctions initiales et à des opérations fondamentales relativement simples, et il permet de déduire rapidement les autres ($P_i$).

**6.4. Applications de la « filière de Church ».** — Dans les chapitres précédents, la plupart des résultats qualifiés d'« aisés » ou de « triviaux » (par exemple les propositions 1.1-1.8, 2.1-2.7, 3.3, 4.1-4.8, 5.1, 5.6, 5.7) sont simplement des applications de la filière de Church.

On obtient de la même façon :

Proposition 6.1. — *Les fonctions* $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ *définies au paragraphe* 6.2 *sont récursives.*

Une application particulièrement intéressante de la filière de Church est fournie par la démonstration des propositions 2.8 et 2.9 (§ 2.4 et 2.5). Cette démonstration (pratiquement la même dans les deux cas), bien qu'elle soit assez longue dans son détail, est néanmois triviale dans son principe : en effet, elle consiste seulement à expliciter la liaison, *manifestement effective*, qui relie le schéma de définition d'une fonction récursive primitive (ou d'une semi-fonction semi-récursive) aux valeurs de cette fonction (6.10).

Considérons de même l'ensemble $\mathbf{F_T}$ de toutes les fonctions Turing-calculables. L'inclusion $\mathbf{F_T} \subset \mathbf{F_R}$ (proposition 4.3) se démontre trivialement par la filière de Church. Par contre, l'inclusion $\mathbf{F_R} \subset \mathbf{F_T}$ (théorème 4.1) ne peut être prouvée qu'à l'aide d'un certain nombre de procédés combinatoires (dont le but est de montrer que $\mathbf{F_T}$ satisfait aux conditions (I)-(VI) du paragraphe 1.3). La même remarque s'applique aux définitions des ensembles récursivement énumérables données dans les paragraphes 3.2 et 5.8. De même encore, dans le théorème 4.II, la nécessité s'obtient immédiatement par la filière de Church, tandis que la suffisance constitue toute la difficulté du résultat.

6.5. **Les questions d' « indécidabilité »**. — Soit $E$ un sous-ensemble (explicitement défini) de $\mathbf{N}$ (ou d'un ensemble dénombrable explicitement numéroté). Considérons la question périmathématique suivante : « *$E$ est-il effectivement décidable?* ».

Dans le cas où la réponse est affirmative (c'est-à-dire lorsqu'une méthode effective de décision peut être explicitemeut fournie), la théorie des fonctions récursives n'apporte rien de bien nouveau : on peut vérifier, en appliquant la filière de Church, que cette méthode de décision est traductible dans $\mathbf{F_R}$; cela confirme la thèse de Church, mais n'augmente pas beaucoup nos connaissances relativement à $E$ (6.11).

(6.10) Certaines démonstrations des propositions 2.8 ou 2.9 font appel à des systèmes formels particuliers. C'est ce qui se produit, par exemple, lorsqu'on part du *système de Herbrand-Gödel* pour aboutir à la *forme normale de Kleene*, c'est-à-dire à une définition particulière d'une semi-fonction kleenique [*cf.* note (1.7)] particulière. Mais ce recours à un système formel n'est nullement nécessaire (bien qu'il puisse être intéressant en lui-même). Il augmente même plutôt les difficultés car il consiste à démontrer, en plus du résultat cherché, la *représentativité* (en un sens voisin de celui défini au paragraphe 5.6) du système considéré.

(6.11) Les mathématiques contiennent de nombreux énoncés de décidabilité ou de calculabilité effectives, dont la plupart ont été obtenus (pour des raisons historiques ou personnelles évidentes) d'une façon complètement indépendante de la théorie des fonctions récursives. Pour en donner un exemple moins ancien et beaucoup moins trivial que ceux déjà indiqués (§ 6.2), citons la méthode de Brown [3] pour calculer $\pi_n(\mathcal{X})$ lorsque $\mathcal{X}$ est un complexe simplicial fini simplement connexe. On peut aussi citer les méthodes de Tarski pour résoudre effectivement certains problèmes algébriques ou géométriques très généraux.

D'une façon générale, une démonstration complète de récursivité pour un ensemble $E$ donné comprendrait trois parties bien distinctes : 1° la définition (purement mathématique, bien entendu) d'un ensemble $E'$ dont la décidabilité (au sens intuitif) soit manifeste; 2° la preuve que $E'$ est identique à $E$ (c'est cette preuve qui constitue en général le nœud du problème); 3° la preuve que $E'$ est récursif (ce qui ne constitue qu'une application, éventuellement longue mais toujours triviale, de la filière de Church). Les mathématiciens se bornent en général — et pour cause — aux deux premiers points.

Il en va tout autrement dans le cas négatif. En effet, l'énoncé « *E n'est pas effectivement décidable* » suppose définie la classe de *tous* les procédés effectifs de décision (puisque cet énoncé s'obtient en quantifiant universellement sur cette classe). Or une telle classe, non seulement n'a pas d'existence mathématique, mais n'a pas davantage d'existence « intuitive » ou « pratique » (c'est seulement *chaque* procédé de définition explicitement défini qui possède une existence pratique). Les questions de décidabilité ne peuvent donc recevoir une réponse négative (même sur le plan pragmatique) que si la classe des procédés de définition considérés a été complètement caractérisée, ce qui s'effectue en remplaçant les mots « effectivement décidable » par « récursif ».

Autrement dit, les « théorèmes de non-décidabilité effective » revêtent la forme purement mathématique suivante (où $E$ est chaque fois un sous-ensemble explicitement défini) : « *E n'est pas récursif* ». La signification mathématique et la démonstration éventuelle d'un tel énoncé sont évidemment indépendantes de toute considération périmathématique. C'est seulement l'*intérêt* de cet énoncé qui dépend de l'adéquation des fonctions récursives à la notion d'effectivité, c'est-à-dire de la thèse de Church (6.12).

Bien entendu, un théorème de non-récursivité peut aussi revêtir la forme plus générale : « *Il n'existe aucune fonction récursive satisfaisant à telle condition* » (*cf.* par exemple le théorème 6.II ci-dessous).

Chacune des propositions de type « négatif » indiquées dans les chapitres précédents peut donc se transformer en un théorème de non-décidabilité effective. Dans les paragraphes 6.7-6.9 nous examinerons de plus près les résultats ainsi obtenus.

6.6. **Questions terminologiquement voisines.** — On qualifie souvent d'*indécidable* (en anglais « undecidable » ou « unsolvable ») toute propriété ou relation (portant sur $p$ variables d'un ensemble $A$) dont le graphe est un sous-ensemble non-récursif de $A^p$. On dit de même « groupe de Thue indécidable » pour « groupe de Thue non-récursif » (§ 4.6) et « système formel indécidable » pour « système formel non-récursif » (§ 5.4).

Mais ce terme d' « indécidable » peut donner lieu à des malentendus, car il est parfois employé comme synonyme de « ni démontrable, ni réfutable », c'est-à-dire pour désigner un concept périmathématique dont l'homologue mathématique est constitué par la notion de formule *neutre* (§ 5.4).

On voit immédiatement (d'après la proposition 1.8) que tout système récursivement énumérable indécidable (c'est-à-dire non-récursif) contient des formules neutres (on voit même que l'ensemble de toutes les formules

(6.12) On peut remarquer à ce propos, ainsi que l'a noté G. Kreisel, que dans la plupart des cas le passage d'un énoncé (mathématique) de non-récursivité à un énoncé (périmathématique) de non-décidabilité utilise seulement l'affirmation suivante (plus faible que la thèse de Church) : *Il existe un sous-ensemble récursivement énumérable de* **N** *qui n'est vas effectivement décidable.*

neutres est alors infini, et n'est pas récursivement énumérable). Il existe par contre des systèmes formels faibles (tels le *calcul des propositions* ou « logique sans quantificateurs », ou encore la *théorie de l'équivalence* dérivée du calcul des prédicats du premier ordre) qui contiennent une infinité de formules neutres, mais sont néanmoins décidables (c'est-à-dire que l'ensemble de leurs thèses, et par conséquent aussi l'ensemble de leurs antithèses et l'ensemble de leurs formules neutres, sont récursifs) (6.13).

D'une façon générale, on rencontre fréquemment des confusions entre les deux notions suivantes, portant sur une même fonction $\varphi$ :

(a) récursivité de $\varphi$;

(b) existence, pour tout $x$ de $\mathbf{N}$, d'un $y$ tel qu'on puisse *démontrer* l'égalité « $\varphi(x) = y$ » à partir d'une certaine *définition* de $\varphi$.

La première notion est intrinsèque et purement mathématique, tandis que la deuxième est relative à la définition choisie et d'ordre périmathématique.

On peut évidemment remplacer la notion (b) par une notion mathématique (b′) en recourant à un système formel $S$ déterminé; (b′) dépendra alors aussi de $S$.

Soit donc $\mathfrak{A}$ une relation à deux variables définie sur $\mathbf{N}$ telle qu'on ait :

$$(1) \qquad (\forall x)\ (\exists !\, y)\ \mathfrak{A}(x, y),$$

et soit $\varphi$ la fonction (élément de $\mathbf{F}^{(1)}$) définie par $\mathfrak{A}$.

Soit $S$ un système formel dont nous supposerons, pour simplifier, qu'il constitue une extension du système de Robinson $S_0$ indiqué dans le paragraphe 5.7. Soit A un élément de $\mathfrak{F}^{(2)}(S)$. Supposons que $S$ soit consistant et que la formule A puisse être considérée comme une traduction adéquate (d'une certaine définition) de $\mathfrak{A}$. Pour qu'il en soit ainsi, il est évidemment nécessaire qu'on ait (en employant une notation analogue à celle définie dans le paragraphe 5.7) :

$$(2) \qquad (\forall x)\ (\forall y)\ [\mathrm{A}_{(x,y)} \in \mathfrak{T}(S) \Rightarrow \mathfrak{A}(x, y)].$$

Considérons alors la propriété suivante :

$$(3) \qquad (\forall x)\ (\exists y)\ [\mathrm{A}_{(x,y)} \in \mathfrak{T}(S)].$$

Si $S$ est récursivement énumérable, la conjonction de (1), (2) et (3) entraîne que $\mathfrak{A}$ est récursivement énumérable, et par conséquent que $\varphi$ est récursive. Mais la réciproque est fausse : il peut arriver que $\varphi$ soit récursive, que $S$ soit

(6.13) Remarquons par ailleurs que la notion de relation indécidable (au sens de non-récursive) n'a de sens que pour les relations de $p$ variables avec $p > 0$ (puisque $A^0$ est réduit à un seul élément). De même, seules peuvent être non-récursives les fonctions d'au moins une variable. Au contraire [*cf.* § 5.4, note (5.12)], ce sont seulement les formules neutres *closes* qui sont intéressantes.

récursivement énumérable et que (2) soit vérifiée, sans que (3) soit vérifiée; tout dépend du choix de la définition de $\mathcal{A}$ et de sa traduction A.

*A fortiori*, une fonction peut être récursive sans que sa récursivité soit *démontrable* dans un système $S$ donné à partir d'une définition donnée.

Soit $\rho^{(1)}$ une fonction kleenique (par exemple celle définie au paragraphe 2.5) qui énumère ${}^{S}\mathbf{F}_{\mathbf{R}}^{(1)}$. Et soit $\mathcal{F}$ la propriété, pour un élément variable $n$ de $\mathbf{N}$, d'être tel que $\rho_{(n)}^{(1)}$ appartienne à $\mathbf{F}_{\mathbf{R}}^{(1)}$ (c'est-à-dire soit définie sur $\mathbf{N}$ tout entier).

Soit $\mathcal{A}$ une relation satisfaisant à (1), et soit $\mathcal{B}$ la propriété ainsi définie, pour un entier variable $n$ :

$$\mathcal{B}(n) \iff [\mathcal{F}(n) \quad \& \quad (\forall x)\,\mathcal{A}(x,\, \rho_{(n)}^{(1)}(x))]$$

$\mathcal{B}(n)$ exprime donc qu'on a $\varphi = \rho_{(n)}^{(1)}$, où $\varphi$ est la fonction définie par $\mathcal{A}$.

Soit enfin F et B deux éléments de $\mathfrak{F}^{(1)}(S)$ constituant respectivement des traductions « canoniques » de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{B}$ (*cf.* ci-dessous début du § **7.3**). Considérons les trois propriétés suivantes :

(4) $\qquad (\exists n)\,[\mathrm{B}_{(n)} \in \mathfrak{T}(S)]$;

(5) $\qquad ((\exists \mathrm{x})\,\mathrm{B}(\mathrm{x})) \in \mathfrak{T}(S)$;

(6) $\qquad$ la fonction $\varphi$ définie par $\mathcal{A}$ est récursive.

(4) entraîne (5), mais non réciproquement (même lorsque $S$ est $\omega$-consistant). D'autre part, si $S$ est $\omega$-consistant, (4) entraîne (6), mais non réciproquement. Autrement dit, les deux cas suivants peuvent se produire, même avec $S$ $\omega$-consistant : [(6) & *non* (5)]; [(6) & (5) & *non* (4)] (6.14).

Ces remarques s'appliquent même au cas où, $\varphi$ étant récursive, la définition choisie pour $\varphi$ n'est autre que la donnée d'un de ses « schémas de définition » (§ **2.5**). On démontre en effet aisément, en utilisant les résultats du chapitre 5 :

PROPOSITION **6.2**. — *Si S est récursivement énumérable et consistant, alors* :

$$(\forall \varphi \in \mathbf{F}_{\mathbf{R}}^{(1)})\,(\exists n)\,[\varphi = \rho_{(n)}^{(1)} \quad \& \quad \mathrm{F}_{(n)} \notin \mathfrak{T}(S)].$$

PROPOSITION **6.3**. — *Si S est récursivement énumérable et $\omega$-consistant, alors :*

$$(\exists \varphi \in \mathbf{F}_{\mathbf{R}}^{(1)})\,(\forall n)\,[\varphi = \rho_{(n)}^{(1)} \;\Rightarrow\; \mathrm{F}_{(n)} \notin \mathfrak{T}(S)] \quad (6.15).$$

(6.14) Donnons un exemple simple du second cas. Pour chaque $n$, soit $\mathrm{P}_n$ la formule close qui constitue la traduction canonique de la relation (fausse) à 0 variable « $n+1=0$ ». Et soit $E = \{ n : \mathrm{P}_n \in \mathfrak{T}(S) \}$. Si $S$ est consistant, $E = \emptyset$; et si $S$ n'est pas consistant, $E = \mathbf{N}$. La fonction caractéristique de $E$ est donc toujours récursive, et la démonstration de ce fait peut s'effectuer dans n'importe quelle extension de $S_0$, en particulier dans $S$ lui-même : (5) est donc toujours vérifiée. Par contre, si $S$ est consistant, (4) n'est pas vérifiée, car il faudrait pour cela que la consistance de $S$ soit démontrable dans $S$, ce qui est impossible comme nous le verrons au paragraphe 7.6.

(6.15) En opposition avec ces deux propositions, on a le résultat suivant : *Si S est une extension du système de Robinson, et si n est le numéro d'un schéma de définition qui ne fait pas intervenir les* $\Omega_{\mu}^{(p)}$ ($\rho_{(n)}^{(1)}$ est donc alors une fonction récursive primitive), *alors* $\mathrm{F}_{(n)} \in \mathfrak{T}(S)$.

**6.7. Propriétés indécidables en arithmétique.** — En Arithmétique, le problème de décidabilité le plus intéressant a été posé par D. Hilbert. C'est le suivant (*dixième* de la fameuse série) :

« $\mathbf{P_S}$ (*cf.* § 2.3) *est-il effectivement décidable?* »

Hilbert (qui était, comme on sait, de tendance « optimiste » en métamathématique) semble avoir espéré une réponse positive. A l'heure actuelle, les propriétés arithmétiques des fonctions récursives (*cf.* chap. 3) feraient plutôt présager une réponse négative, qui prendrait donc la forme suivante :

(H) $\mathbf{P_S}$ *n'est pas récursif.*

Pour démontrer cet énoncé (H), il suffirait évidemment de démontrer l'hypothèse ($H_1$) énoncée au paragraphe 3.4.

Si elles n'ont pas abouti à prouver cette hypothèse, les recherches entreprises ont néanmoins permis de démontrer la non-récursivité de certains ensembles dont la définition arithmétique est très simple (quoique moins simple que celles des ensembles diophantiens).

C'est ainsi que H. Putnam [31] a obtenu le résultat suivant :

Proposition 6.4. — *Pour tout sous-ensemble récursivement énumérable $E$ de $\mathbf{N}^p$, il existe un entier $q$ et un polynome $P$ de $p+q$ variables à coefficients dans $\mathbf{Z}$ tel qu'on ait (les variables $y$, $z_1$, ..., $z_q$ décrivant $\mathbf{Z}$) :*

$$(x_1, \ldots, x_p) \in E \Longleftrightarrow (\exists y)(\forall z_1)\ldots(\forall z_q)[P(x_1, \ldots, x_p, z_1, \ldots, z_q) \neq y],$$

De cette proposition on déduit immédiatement :

Théorème 6.I. — *La propriété, pour un polynome à coefficients dans $\mathbf{Z}$, de pouvoir prendre toute valeur de $\mathbf{Z}$ (lorsque les variables décrivent $\mathbf{Z}$), est indécidable.*

**6.8. Propriétés indécidables en Théorie des groupes et en Topologie algébrique.** — Les théorèmes 4.III, 4.IV et 4.V expriment respectivement l'*indécidabilité du problème des mots* pour un groupe de Thue particulier, l'*indécidabilité de toute propriété héréditaire non triviale* dans l'ensemble des présentations de Thue, et l'*indécidabilité de l'homéomorphie* pour les complexes simpliciaux finis de dimension $\geq 4$.

De ce dernier résultat on déduit :

Théorème 6.II. — *En dimension $\geq 4$, il n'existe aucun système d'invariants d'homéomorphie qui soit effectivement calculable et complet* (6.16).

(6.16) Il semble indéniable que certains des fondateurs de la topologie algébrique avaient l'espoir (plus ou moins vague) de pouvoir attacher à chaque complexe simplicial fini une quantité suffisante d' « invariants » (effectivement déterminables à partir de la définition abstraite du complexe) pour que l'égalité de tous ces invariants entraîne l'homéomorphie. Le théorème 6.II détruit définitivement cet espoir.

Les définitions précises sont les suivantes (en utilisant les notations du paragraphe 4.8) :

Une application $\alpha$ de $\mathbf{K}^{(p)} \times \mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ (ou dans tout autre ensemble — par exemple $\mathbf{Z}$ — muni d'une numérotation canonique) sera appelée *système d'invariants d'homéomorphie* en dimension $p$ si l'on a, pour tout couple $(K, K')$ d'éléments de $\mathbf{K}^{(p)}$ :

$$(K, K') \in \mathbf{H}^{(p)} \Rightarrow (\forall n)[\alpha(K, n) = \alpha(K', n)].$$

Le système d'invariants d'homéomorphie $\alpha$ sera dit *complet* si l'on a en outre la propriété suivante (réciproque de la précédente) :

$$\{(\forall n)[\alpha(K, n) = \alpha(K', n)]\} \Rightarrow [(K, K') \in \mathbf{H}^{(p)}].$$

La démonstration du théorème 6.II est alors immédiate à partir du théorème 4.V, de la proposition 4.8 et de la proposition 1.8.

On obtient des définitions analogues, et le théorème 6.II reste vrai, lorsqu'on remplace $\mathbf{H}^{(p)}$ par $\mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{(p)}$ (homéomorphie par décomposition simpliciale).

**6.9. Propriétés indécidables en Logique.** — On transforme en théorèmes d'indécidabilité la proposition 5.12 et le théorème 5.V (ce dernier constituant, historiquement, le premier résultat important d'indécidabilité qui ait été démontré comme tel).

D'autre part, la proposition 5.11 et le théorème 5.IV montrent que toute extension consistante du système de Robinson $S_0$ est indécidable.

On peut se poser des problèmes de décidabilité à propos de certains ensembles particuliers de formules. C'est ainsi, par exemple, que de la consistance (supposée ou admise) de la théorie des ensembles de Gödel (système formel particulier, dont l'unique symbole relationnel est le symbole d'appartenance, et qui possède une base finie d'axiomes), on déduit immédiatement le résultat suivant (qui renforce le théorème 5.V) (6.17) :

THÉORÈME 6.III. — r *étant un élément quelconque de* $\mathbf{R}^{(2)}$, *l'ensemble* $\mathfrak{F}(\mathrm{r}) \cap \mathfrak{T}$ *n'est pas récursif.*

Par contre, l'ensemble des thèses du calcul des prédicats qui ne contiennent que des symboles relationnels à *une* place est récursif. Et il existe de nombreux

(6.17) La consistance d'une quelconque des théories des ensembles usuelles (*cf.* § 7.7) constitue une hypothèse extrêmement forte, indémontrable dans cette théorie elle-même (*cf.* § 7.6). Aussi est-il intéressant d'obtenir une démonstration du théorème 6.III à partir d'une hypothèse plus faible. En fait, on peut construire un système particulier $S$ tel que : 1° $S$ ne contient qu'un seul symbole relationnel (à 2 places); 2° $S$ possède une base axiomatique finie; 3° $S$ est représentatif; 4° la consistance de $S$ est démontrable avec des moyens mathématiques peu étendus. Un tel système $S$ peut être obtenu : soit en partant de $S_0$ et en réduisant tous les symboles relationnels à un symbole unique à deux places (méthode de Lâszlo Kalmàr); soit en partant de la théorie des ensembles de Gödel et en supprimant l'*axiome d'infinité* (méthode de Bernays et Kreisel).

autres sous-ensembles récursifs (plus ou moins intéressants) $E$ de $\mathfrak{F}$ tels que $E \cap \mathfrak{T}$ soit récursif [1]. A ces résultats (plus ou moins récents) de décidabilité, on peut appliquer les remarques de la note (6.11) ci-dessus.

**6.10. Autres applications du rapport effectivité-récursivité.** — En plus de leurs applications à différents domaines logiques, l'*analyse récursive* (§ 1.11) et la théorie des *opérations récursives* (8.2-8.5) tirent évidemment un certain intérêt périmathématique du fait que la récursivité peut être considérée comme une traduction adéquate de la calculabilité effective.

En fait, dans n'importe quelle branche des mathématiques, il peut être intéressant de rechercher ce qui se produit lorsqu'on se restreint (suivant des modalités à déterminer) aux éléments « effectivement calculables », c'est-à-dire *récursifs* (en donnant chaque fois une définition de ce dernier adjectif adaptée à l'espèce d'éléments considérée). On peut ainsi se demander si un système donné admet ou non des modèles récursifs ou récursivement énumérables [34], ou bien des modèles non-standard récursifs [40]. Pareillement, en théorie des probabilités, il est assez naturel (et, semble-t-il, assez conforme aux vues intuitives de Von Mises lui-même) de s'intéresser aux *collectifs* définis par rapport à l'ensemble des *sélections récursives* [4]. Et même la théorie de la *cardinalité* (c'est-à-dire l'étude des applications biunivoques dans ou sur) se laisse « récursiviser » et fournit alors des résultats curieux [26].

## Chapitre 7. — **Classification des propositions mathématiques.**

Les résultats (dont certains assez récents) indiqués dans ce chapitre nous paraissent devoir être rangés parmi les plus importants de la Logique mathématique, tout au moins du point de vue périmathématique. Dans leur démonstration, la théorie des fonctions récursives joue un rôle indirect, mais capital.

En particulier, les systèmes formels sur lesquels portent les propriétés les plus intéressantes satisfont toujours aux deux conditions essentielles suivantes : l'ensemble de leurs théorèmes est récursivement énumérable; et ils sont capables de « représenter » tous les ensembles récursifs.

**7.1 Hiérarchies de formules.** — Soit $S$ un système formel constituant une extension, directe ou indirecte, du système de Robinson $S_0$ esquissé au paragraphe 5.7 (dans le cas où $S$ est une extension indirecte de $S_0$, les définitions ci-dessus dépendent évidemment de la traduction de $S_0$ dans $S$ qui est adoptée).

En utilisant les schémas de définitions des fonctions récursives primitives (§ 2.4) et le théorème 3.I (§ 3.1), on définit aisément la notion de *formule récursive primitive*. On en déduit immédiatement une hiérarchie de formules obtenues suivant le même principe que la hiérarchie arithmétique de KLEENE (§ 3.3).

Si $S$ contient des variables fonctionnelles ou des variable de sous-ensembles de type $>$ o (directement comme dans la théorie des types, ou indirectement comme dans la théorie des ensembles), on peut définir une hiérarchie de formules analogue à celles des $\Sigma_k^h$ et $\Pi_k^h$ (§ 3.5).

La classification ainsi obtenue ne dépend pas de l'ensemble $\mathfrak{T}(S)$, mais elle offre peu d'intérêt. Pour en faire un outil aceptable, il est nécessaire de l'étendre par la relation d'équivalence $\mathcal{E}$ ainsi définie sur $\mathfrak{F}(S)$ :

$$\mathcal{E}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \iff (\mathrm{X} \Longleftrightarrow \mathrm{Y}) \in \mathfrak{T}(S).$$

Nous désignerons donc par $\Sigma_k^0(S)$ l'ensemble des formules X de $S$ telles qu'il existe une formule récursive primitive Y de $S$ satisfaisant à

$$[\mathrm{X} \Longleftrightarrow (\exists \mathrm{x}_1)(\forall \mathrm{x}_2) \ldots \mathrm{Y}] \in \mathfrak{T}(S),$$

avec $k$ quantificateurs formels alternés (si $S$ contient plusieurs espèces de variables, les $\mathrm{x}_i$ doivent appartenir à l'espèce qui est censée représenter les entiers naturels).

On définit de même $\Pi_k^0(S)$. Et aussi les $\Sigma_k^h(S)$ et $\Pi_k^h(S)$ lorsque $S$ contient des variables fonctionnelles allant au moins jusqu'à $h$.

Le fait que cette hiérarchie dépende de $S$ est clairement marqué par les résultats suivants :

PROPOSITION 7.1. — $\mathfrak{T}(S) \cup \mathfrak{T}_{\neg}(S) \subset \Sigma_0^0(S)\,[=\Pi_0^0(S)]$ (7.1)

PROPOSITION. 7.2. — *Si l'on se borne aux formules closes,*

$$\mathfrak{T}(S) \cup \mathfrak{T}_{\neg}(S) = \Sigma_0^0(S).$$

PROPOSITION 7.3. — *Si S est ω-consistant et si l'on se borne aux formules closes*, $\mathfrak{T}(S) \cup \mathfrak{T}_{\neg}(S) = \Sigma_1^0(S) \cap \Pi_1^0(S)$.

Comme dans la hiérarchie des ensembles, on a évidemment :

$$\Sigma_k^0(S) \cup \Pi_k^0(S) \quad \subset \quad \Sigma_{k+1}^0(S) \cap \Pi_{k+1}^0(S).$$

Mais pour que l'inclusion soit stricte, il faut que $S$ satisfasse à certaines conditions. On démontre (7.2) :

THÉORÈME 7.I. — *Si S est récursivement énumérable et consistant, alors,*

(7.1) Ce résultat découle immédiatement du fait bien connu suivant : lorsque X et Y sont deux thèses de $S$, ou bien deux antithèses, alors la formule ($\mathrm{X} \Longleftrightarrow \mathrm{Y}$) est une thèse.

(7.2) Le théorème 7.I, de même que son extension aux variables fonctionnelles, constitue un cas particulier d'un théorème très général portant sur des couples ($M$, P), où $M$ est une classe à peu près quelconque de formules et P une formule « énumérant » (en un sens qu'il faut préciser) les éléments de $M$. Remarquons d'autre part que la formule close particulière dont le théorème 7.I affirme l'existence est nécessairement neutre dans $S$, d'après la proposition 7.1.

*pour tout $k > 0$, il existe une formule close de $\Sigma_k^0(S)$ qui n'appartient pas à $\Pi_k^0(S)$ (et par conséquent n'appartient ni aux $\Sigma_{k'}^0(S)$ ni aux $\Pi_{k'}^0(S)$ pour $k' < k$), et inversement.*

La nécessité, pour obtenir une inclusion stricte, d'imposer à $S$ une condition additionnelle (en plus de la consistance) est marquée par le contre-exemple suivant : si nous définissons $S$ en prenant pour $\mathfrak{T}(S)$ l'ensemble (non-arithmétique, et *a fortiori* non récursivement énumérable, *cf.* (5.9)) de toutes les formules qui sont valides dans $\mathbf{N}$ [c'est-à-dire dans $\mathfrak{M}_0$ (*cf.* § 5.7 et 7.2)], alors $S$ est *saturé* (§ 5.4) et par conséquent, d'après la proposition 7.1, tous les ensembles $\Sigma_k^0 \cap \mathfrak{F}^{(0)}(S)$ et $\Pi_k^0 \cap \mathfrak{F}^{(0)}(S)$ sont identiques entre eux et à $\mathfrak{F}^{(0)}(S)$.

Dans le cas où $S$ contient des variables de fonctions ou de sous-ensembles et satisfait à certains axiomes élémentaires, ces résultats s'étendent aux $\Sigma_k^h(S)$ et $\Pi_k^h(S)$. On a, en particulier,

$$\bigcup_{k\in\mathbf{N}} \Sigma_k^h(S) = \bigcup_{k\in\mathbf{N}} \Pi_k^h(S) \quad \subset \quad \Sigma_1^{h+1}(S) \cap \Pi_1^{h+1}(S),$$

et l'inclusion est stricte dans le cas où $S$ est consistant et récursivement énumérable.

**7.2. Relations entre les hiérarchies de formules et les hiérarchies d'ensembles.** — Supposons, pour simplifier, que $S$ est une extension directe de $S_0$ et ne contient comme symboles relationnels que les symboles $\mathrm{r}_0$, $\mathrm{r}_0'$ indiqués dans le paragraphe 5.7.

Considérons d'autre part la multirelation $\mathfrak{M}_0 = (\mathbf{N}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}_0')$ définie aussi au paragraphe 5.7 (7.3). Même lorsque $S$ est $\omega$-consistant (*cf.* note (5.18)), et *a fortiori* lorsque $S$ est simplement consistant, $\mathfrak{M}_0$ ne constitue pas nécessairement un modèle de $S$. Lorsque $S$ admet $\mathfrak{M}_0$ comme modèle, $\mathfrak{M}_0$ est appelé le *modèle standard* [même lorsque $\mathfrak{M}_0$ n'est pas un modèle de $S$, il existe, pour tout modèle $\mathfrak{M} = (E, \mathcal{R}, \mathcal{R}')$ de $S$ une application canonique biunivoque de $\mathbf{N}$ sur un sous-ensemble $N$ de $E$ telle que $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_0'$ sont appliquées sur les restrictions de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ à $N$].

A toute formule X de $S_0$ nous pouvons faire correspondre sa réalisation $\nu(\mathrm{X})$ dans $\mathfrak{M}_0$ (§ 5.2). Pour qu'un sous-ensemble $E$ de $\mathbf{N}^p$ appartienne à $\Sigma_k^0$ (avec $k > 0$), il faut et il suffit, d'après la définition même, qu'il existe un élément X de $\Sigma_k^0(S_0) \cap \mathfrak{F}^{(p)}(S_0)$ tel que $\nu(\mathrm{X})$ admette $E$ pour graphe. De même pour $\Pi_k^0$ et $\Pi_k^0(S_0)$.

(7.3) Dans le cas où $S$ contient des variables de sous-ensembles avec un symbole formalisant l'appartenance, on désigne par $\mathfrak{M}_0$ la multirelation à une infinité de composantes obtenue en adjoignant à $\mathbf{N}$ les ensembles $\mathfrak{P}(\mathbf{N})$, ..., $\mathfrak{P}(\ldots(\mathfrak{P}(\mathbf{N})))$, ... et en considérant toutes les relations d'appartenance correspondantes [le graphe de chacune de ces relations étant un sous-ensemble de $U \times \mathfrak{P}(U)$, avec $U = \mathfrak{P}(\ldots(\mathfrak{P}(\mathbf{N})))$]. On procède de même dans le cas où $S$ contient des variables fonctionnelles.

Mais, pour un sous-ensemble donné $E$ de $\mathbf{N}^p$, il existe une infinité de formules X à $p$ variables telles qu'on ait $E =$ graphe de $\nu(\mathrm{X})$. Or, si X et X′ sont deux formules satisfaisant à cette condition, et si $S$ est une extension de $S_0$, la formule $(\mathrm{X} \Longleftrightarrow \mathrm{X}')$ n'est pas nécessairement une thèse de $S$ (même lorsque $S$ admet $\mathfrak{M}_0$ comme modèle, et même lorsque $S$ est beaucoup plus puissant que $S_0$). Autrement dit, même lorsqu'on remplace $\mathfrak{F}(S)$ par le quotient $\mathfrak{F}(S)/\mathcal{E}$ (où $\mathcal{E}$ est la relation d'équivalence définie au paragraphe précédent), $\nu$ n'est pas biunivoque [sauf dans le cas où $\mathfrak{T}(S)$ contient toutes les formules qui sont valides dans $\mathfrak{M}_0$]. Et si $E$ appartient à $\Sigma_k^0$, parmi toutes les formules X qui vérifient la condition $E =$ graphe de $\nu(\mathrm{X})$, certaines n'appartiennent pas à $\Sigma_k^0(S)$.

Ce qui précède peut encore s'exprimer ainsi : en général la relation $\mathcal{E}$ est strictement plus fine que la relation « $\nu(\mathrm{X}) = \nu(\mathrm{Y})$ », et la hiérarchie des $\Sigma_k^h(S)$ et $\Pi_k^h(S)$ est strictement plus fine que la hiérarchie de formules qu'on obtiendrait en appliquant la hiérarchie ensembliste des $\Sigma_k^h$ et $\Pi_k^h$ aux graphes des réalisations. En particulier, dans le cas où $\mathrm{X} \in \mathfrak{F}^{(0)}(S)$, $\nu(\mathrm{X})$ appartient toujours à $\Sigma_0^0$ [puisque $\mathbf{N}^0$ est réduit à un seul élément, et $\mathfrak{P}(\mathbf{N}^0)$ à deux éléments qui doivent évidemment être considérés comme récursifs]; au contraire, le théorème 7.I montre que, même pour les formules closes, la suite des $\Sigma_k^0(S)$ est strictement croissante (tout au moins lorsque $S$ est récursivement énumérable).

Examinons donc de plus près le cas des formules et des relations sans variables libres. $S$ étant une extension quelconque de $S_0$, et X un élément quelconque de $\mathfrak{F}^{(0)}(S)$, considérons les deux propriétés suivantes :

(1) $\mathrm{X} \in \mathfrak{T}(S)$;

(2) la réalisation $\nu(\mathrm{X})$ de X dans $\mathfrak{M}_0$ est vérifiée [c'est-à-dire que le graphe de $\nu(\mathrm{X})$ est identique à $\mathbf{N}^0$].

On démontre aisément (en utilisant les propriétés élémentaires de $S_0$) :

Proposition 7.4. — *Pour que* (2) *entraîne* (1), *il suffit que* $\mathrm{X} \in \Sigma_1^0(S)$.

On en déduit [ le (a) étant immédiat par lui-même] :

Proposition 7.5 — *Pour que* (1) *entraîne* (2), *il suffit que l'une des conditions suivantes soit réalisée :*

(*a*) *$S$ admet $\mathfrak{M}_0$ comme modèle*;

(*b*) *$S$ est $\omega$-consistant et* $\mathrm{X} \in \Sigma_2^0(S)$;

(*c*) *$S$ est consistant et* $\mathrm{X} \in \Pi_1^0(S)$.

Soit maintenant Y un élément de $\mathfrak{F}^{(p)}(S)$. En employant une notation qui généralise celle du paragraphe 5.7, considérons toutes les formules closes $\mathrm{X} = \mathrm{Y}_{(n_1, \ldots, n_p)}$, où $(n_1, \ldots, n_p)$ est un élément variable de $\mathbf{N}^p$. Si (1) et (2) sont équivalentes pour toutes les formules X ainsi obtenues, et si $S$ est récursivement énumérable, alors le graphe de $\nu(\mathrm{Y})$ est nécessairement un sous-ensemble récursivement énumérable de $\mathbf{N}^p$.

On voit donc, d'une façon générale, que les rapports sont loin d'être simples entre la démonstrabilité dans un système donné $S$ et la validité dans la multi-relation standard $\mathfrak{M}_0$.

Remarque. — Soit $S$ un système formel usuel; c'est une extension de $S_0$, et l'on peut admettre que $\mathfrak{M}_0$ constitue un modèle de $S$. Même dans ce cas, nous avons vu que l'équivalence formelle (relation $\mathcal{E}$) et l'équivalence ensembliste (égalité des graphes) ne coïncident pas sur $\mathfrak{F}(S)$. En fait, si $E$ est un sous-ensemble arithmétique (ou éventuellement analytique) variable de $\mathbf{N}^p$, il n'est pas possible de déterminer, parmi tous les éléments X de $\mathfrak{F}^{(p)}(S)$ tels que $E =$ graphe de $\nu(\mathrm{X})$, une formule $\mathrm{X}_E$ suffisamment privilégiée pour que la correspondance $E \rightarrow \mathrm{X}_E$ ainsi défini possède des propriétés véritablement satisfaisantes. Par conséquent, lorsqu'on dit que « la formule X *constitue la formalisation de* la relation $\mathcal{X}$ », cette expression ne possède en général qu'une signification *intensionnelle*, et non pas *extensionnelle*; autrement dit, une telle phrase peut traduire une certaine relation (plus ou moins aisée à définir exactement) entre X et telle ou telle *définition* explicite (c'est-à-dire encore: tel ou tel *énoncé*) de $\mathcal{X}$, mais non pas simplement entre X et le graphe de $\mathcal{X}$ (7.4).

**7.3. Localisation de quelques propositions mathématiques particulières dans la hiérarchie des formules.** — Nous allons examiner, dans ce paragraphe, divers énoncés mathématiques « naïfs » $(\mathrm{a}_i)$ (sans variables libres) appartenant à des théories variées. A chacun de ces $(\mathrm{a}_i)$ nous attacherons une certaine formule close $\mathrm{A}_i$ que nous appellerons la « traduction formelle canonique » de $(\mathrm{a}_i)$. De la remarque qui termine le paragraphe précédent, il résulte que cette correspondance $(\mathrm{a}_i) \rightarrow \mathrm{A}_i$ ne peut pas être simplement extensionnelle. Il faudrait donc chaque fois expliciter : 1° dans quel système $S$ (capable de formaliser la théorie considérée) on se place; 2° quelle est la construction exacte de $\mathrm{A}_i$ à partir des symboles relationnels de $S$ [construction évidemment calquée sur la façon dont $(\mathrm{a}_i)$ est exprimé dans le langage de la théorie considérée]. Faute de telles précisions (que nous ne donnons pas — par manque de place — mais que le lecteur pourrait reconstituer sans difficultés) les résultats subséquents seraient dépourvus de sens.

Considérons donc les énoncés mathématiques $(\mathrm{a}_i)$ $(i = 1, \ldots, 9)$ suivants :

$(\mathrm{a}_1)$ « *$P$ peut prendre toute valeur dans* $\mathbf{Z}$ *lorsque les variables décrivent* $\mathbf{Z}$ », où $P$ est un polynome donné quelconque à coefficients dans $\mathbf{Z}$;

(7.4) Il peut certes arriver que, $\mathcal{X}$ étant donnée, certains résultats syntaxiques soient valables pour toutes les formules X qui présentent, vis-à-vis du graphe de $\mathcal{X}$, certaines propriétés syntaxiques et sémantiques. Mais c'est seulement dans quelques cas très particuliers que ces propriétés peuvent se réduire à l'unique condition sémantique « $\nu(\mathrm{X}) = \mathcal{X}$ ». Nous avons déjà noté que, lorsque X et $\mathcal{X}$ sont sans variables libres, cette unique condition sémantique n'apporte qu'un seul renseignement syntaxique sur X, d'ordre purement négatif (et encore est-ce en supposant que le système $S$ utilisé est consistant), à savoir : si $\nu(\mathrm{X}) = \emptyset$, alors $X \notin \mathfrak{T}(S)$; si $\nu(\mathrm{X}) = \mathbf{N}^0$, alors $\mathrm{X} \notin \mathfrak{T}_{\neg}(S)$.

($a_2$) l'hypothèse connue sous le nom de *dernier théorème de Fermat*;

($a_3$) « $\mathcal{F}(n)$ », où $\mathcal{F}$ est la propriété définie au paragraphe 6.6, et $n$ un entier positif donné quelconque;

($a_4$) « $X \equiv 1 \ mod\ \mathcal{R}_M$ », où $X$ est un élément donné quelconque de $G_E$, et $(E, M)$ une présentation de Thue donnée quelconque (§ 4.5 et 4.7);

($a_5$) « $(K, K') \in \mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{(p)}$ » où $p$ est un entier positif donné quelconque, et $K$ et $K'$ deux éléments donnés quelconques de $\mathbf{K}^{(p)}$ (§ 4.8);

($a_6$) « $(K, K') \in \mathbf{H}^{(p)}$ » (§ 4.8);

($a_7$) la *Hauptvermutung*, c'est-à-dire « $(\forall p)\left(\mathbf{H}^{(p)} = \mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{(p)}\right)$ »;

($a_8$) l'*hypothèse de Riemann*;

($a_9$) « $S_1$ *est consistant* », où $S_1$ est un système formel récursivement énumérable dérivant du calculs des prédicats du premier ordre (et par ailleurs quelconque), explicitement déterminé par la donnée de l'ensemble $\{r_1, \ldots, r_n\}$ de ses symboles et par le schéma de définition d'une fonction récursive primitive énumérant ses axiomes.

Avec les conditions restrictives indiquées au début de ce paragraphe, désignons par $S$ une extension de $S_0$ capable de formaliser la théorie à laquelle appartient ($a_i$) ($S$ peut dépendre de l'indice $i$, mais on peut aussi prendre une fois pour toutes pour $S$ l'un des trois systèmes $S_A^{(\omega)}$, $S_Z$, $S_{ZF}$ indiqués au paragraphe 7.7), et désignons par $A_i$ la formule close qui constitue la formalisation canonique de ($a_i$) dans $S$. On obtient alors les résultats suivants:

$$\begin{array}{lll} A_1 \in \Pi_2^0(S); & A_2 \in \Pi_1^0(S); & A_3 \in \Pi_2^0(S); \\ A_4 \in \Sigma_1^0(S); & A_5 \in \Sigma_1^0(S); & A_6 \in \Sigma_1^1(S); \\ A_7 \in \Pi_1^1(S); & A_8 \in \Pi_1^0(S); & A_9 \in \Pi_1^0(S). \end{array}$$

De ces neuf résultats, seuls ceux relatifs à $A_7$ et $A_8$ ne sont pas absolument triviaux. Or ces deux résultats non triviaux peuvent être considérés, en un certain sens, comme des sous-produits de l'*analyse récursive* (§ 1.11) (7.5).

Remarque. — Il ne faut pas oublier que, avec nos conventions terminologiques, l'appartenance d'une formule X à $\Sigma_k^0(S)$ (par exemple) n'exclus pas son appartenance éventuelle à $\Sigma_{k'}^0(S)$ pour $k' < k$. En particulier, si l'un des $A_i$ se trouve être une thèse de $S$, alors la proposition 7.1 montre que cet $A_i$ appartient à $\Sigma_0^0(S) = \Pi_0^0(S)$. Pour $i = 2, 7$ et 8, on ignore actuellement s'il existe une extension consistante $S$ de $S_0$ telle que $A_i$ appartienne à $\mathfrak{T}(S)$; nous démontrerons d'autre part (§ 7.6) que $A_9$ n'appartient pas

(7.5) De façon plus précise, un des objectifs de l'analyse récursive (voire son objectif principal) consiste à remplacer les définitions et les propriétés relatives aux éléments fondamentaux de l'analyse ordinaire (nombres réels ou complexes, fonctions continues, fonctions holomorphes, etc.) par des énoncés équivalents qui, non seulement ne portent que sur des éléments de $\mathbf{N}$ ou de $\mathbf{F}$ (ce qui s'obtient en général trivialement), mais encore se situent aussi bas que possible dans la hiérarchie des $\Sigma_h^0(S)$, $\Pi_h^0(S)$, $\Sigma_h^1(S)$, $\Pi_h^1(S)$. Sur $A_8$, *cf.* [16], p. 168.

à $\mathfrak{T}(S)$ lorsque $S_1$ est une extension de $S$ (éventuellement identique à $S$) et que $S$ est consistant. Par contre, pour toutes les autres valeurs de $i$, $(\mathrm{a}_i)$ dépend d'un ou plusieurs paramètres (polynomes, entiers, présentations de Thue, etc.); et l'on voit immédiatement qu'on peut, dans chaque cas, choisir ces paramètres de façon que $\mathrm{A}_i$ soit une thèse de $S$.

7.4. **Ensembles de formules génératifs.** — Un sous-ensemble $M$ de $\mathfrak{F}^{(0)}(S)$ sera dit *génératif* (relativement à $S$) si la clôture de $M$ par la relation d'équivalence $\mathcal{E}$ (§ 7.1) contient $\Pi_1^0(S) \cap \mathfrak{F}^{(0)}(S)$ [autrement dit si, pour toute formule close X de $\Pi_1^0(S)$, il existe un élément Y de $M$ tel que la formule $(\mathrm{X} \Longleftrightarrow \mathrm{Y})$ soit une thèse de $S$].

Les méthodes employées pour démontrer respectivement les théorèmes 6.I, 4.III et 4.V conduisent aisément aux résultats suivants (où les formules $A_i$ considérées sont celles qui ont été définies au paragraphe précédent) :

Proposition 7.6. — 1° *L'ensemble de toutes les formules* $\mathrm{A}_1$ *obtenues en faisant varier* $P$ *sur* $\mathbf{P}$ (§ 2.3) *est génératif.*

2° *Il existe une présentation de Thue particulière* $(E_0, M_0)$ *telle que l'ensemble de toutes les formules* $\mathrm{A}_4$ *obtenues en faisant varier* $X$ *sur* $G_{E_0}$ *est génératif.*

3° *Pour chaque* $p \geqq 4$, *l'ensemble des formules* $\mathrm{A}_5$ *obtenues en faisant varier* $K$ *et* $K'$ *sur* $\mathbf{K}^{(p)}$ *est génératif, ainsi que l'ensemble des formules* $\mathrm{A}_6$ *obtenues dans les mêmes conditions.*

Soit $S$ une extension de $S_0$, et $S'$ une extension de $S$. Supposons qu'il existe une formule P de $\mathfrak{F}^{(0)}(S)$ qui appartienne à $\mathfrak{T}(S')$ mais non à $\mathfrak{T}(S)$ ($S'$ n'est donc pas alors une extension conservative de $S$). Et supposons de plus que cette formule P appartient à $\Pi_1^0(S)$ (nous verrons plus loin qu'il en est ainsi dans les principaux cas usuels). Alors, pour chaque sous-ensemble génératif $M$ de $\mathfrak{F}^{(0)}(S)$, il existe un élément Q de $M$ qui appartient à $\mathfrak{T}(S')$ et n'appartient pas à $\mathfrak{T}(S)$.

7.5. **Applications, théorèmes de Kreisel-Shœnfield et de Kreisel-Spector.** — Les théorèmes cités dans ce paragraphe vont contribuer à mettre en évidence l'utilité de la classification effectuée dans les paragraphes précédents.

Soit $S_E$ l'une quelconque des théories formelles des ensembles usuelles (c'est-à-dire essentiellement l'un des trois systèmes $S_A^{(0)}$, $S_Z$, $S_{ZF}$ indiqués ci-dessous au paragraphe 7.7), sans l'axiome du choix. Et soit $S'_E$ le système obtenu en ajoutant à $S_E$ l'*axiome du choix* et l'*hypothèse du continu généralisée.*

En employant un lemme fondamental dû à Gödel et relatif aux ensembles *constructibles*, J. R. Shoenfield a obtenu (*cf.* [18]) le résultat suivant (qui généralise un résultat antérieur dû à Kreisel) :

Théorème 7.II. — *Si* $X \in \Sigma_3^1(S_E) \cap \mathfrak{F}^{(0)}(S_E) \cap \mathfrak{T}(S'_E)$, *alors* $X \in \mathfrak{T}(S_E)$.

Autrement dit, toute proposition close exprimable dans $\Sigma_3^1(S_E)$ qui est démontrable avec l'axiome du choix et l'hypothèse du continu généralisée est aussi démontrable sans ces axiomes additionnels. L'application (hypothétique) de ce théorème aux propositions ($a_2$), ($a_7$) et ($a_8$) offre évidemment un certain intérêt. Il importe d'ailleurs de remarquer que presque toutes les propositions (démontrées ou non) de l'analyse classique appartiennent à $\Sigma_3^1(S_E)$.

Soit maintenant $S_A$ le système habituellement appelé *arithmétique* (*classique*) *du premier ordre* ; il peut s'obtenir en ajoutant à $S_0$ une infinité d'axiomes (tous dérivés d'un même « schéma ») destinés à formaliser la règle d'induction complète. Et soit $S_A^\star$ la forme *intuitionniste* de $S_A$, c'est-à-dire le système formel qui a le même alphabet que $S_A$ (7.6) et qui contient tous les axiomes propres à $S_A$, mais où les axiomes et les règles de déduction du calcul classique des prédicats du premier ordre (§ 5.3) ont été remplacés par les axiomes et les règles de déduction (plus faibles) du calcul des prédicats intuitionniste. On a donc $\mathfrak{F}(S_A^\star) = \mathfrak{F}(S_A)$ et $\mathfrak{T}(S_A^\star) \subset \mathfrak{T}(S_A)$. La définition et les propriétés élémentaires des formules récursives primitives (§ 7.1) sont essentiellement les mêmes dans $S_A$ et dans $S_A^\star$.

G. Kreisel a démontré le résultat suivant : [16], p. 172.

Théorème 7.III. — *Si* $X \in \Pi_2^0(S_A^\star) \cap \mathfrak{T}(S_A)$, *alors* $X \in \mathfrak{T}(S_A^\star)$.

Autrement dit, toute proposition qui est démontrable dans $S_A$ et qui est *intuitionnistiquement équivalente* à une proposition de la forme $(\forall x)(\exists y)\,A$ (avec A récursive primitive ) est aussi démontrable dans $S_A^\star$. En plus de son application aux hypothèses ($a_2$) et ($a_8$) du paragraphe 7.3, ce résultat permet d'obtenir très rapidement des théorèmes intuitionnistes très variés.

Considérons par exemple le *théorème de d'Alembert*, c'est-à-dire la formule qui exprime l'existence et l'unicité — aux permutations près — de l'ensemble des racines complexes d'un polynome à coefficients complexes (en supposant que l'unicité en question est exprimée sous une forme intuitionniste

(7.6) En fait, si nous considérons (comme nous l'avons fait au paragraphe 5.1) que les seuls symboles logiques primitifs de $S_A$ sont $\neg$, & et $\exists$, alors il faut ajouter à cette liste les symboles $\Rightarrow$ et $\forall$. En effet, contrairement à ce qui se passe dans le calcul des prédicats classique, ces derniers symboles ne se laissent pas définir intuitionnistiquement à partir de &, $\neg$, $\exists$. Par contre, Kreisel ([17], p. 112) a montré que la *disjonction* (symbole « *ou* ») est définissable dans $S_A^\star$ (mais non dans le calcul des prédicats intuitionnistes) à partir de &, $\neg$, $\exists$ et du symbole d'égalité.

forte). On démontre aisément (7.7) que cette formule est intuitionnistiquement équivalente (dans l'analyse intuitionniste) à une formule P de la forme $(\forall x)(\exists y)$ A. On voit d'autre part sans difficulté que cette formule P est démontrable dans $S_A$ (c'est-à-dire en n'utilisant ni la notion générale d'élément de $\mathbf{F}$, ni celle de nombre réel, etc.). Il en résulte donc *immédiatement*, d'après le théorème 7.III, que le théorème de d'Alembert est intuitionnistiquement démontrable.

G Kreisel et C. Spector ont démontré que le théorème 7.III reste vrai lorsqu'on y remplace $\Pi_0^2$ par $\Pi_1^1$, et $S_A$ (resp. : $S_A^*$) par une forme assez faible de l'arithmétique classique (resp. : intuitionniste) d'ordre supérieur.

**7.6. Caractère arithmétique de tous les résultats précédents, second théorème d'incomplétude de Gödel.** — On constate aisément que *tous* les résultats contenus dans les chapitres précédents et dans les paragraphes précédents de ce chapitre, à la seule exception de ceux qui concernent la hiérarchie analytique de Kleene (§ 3.5) ou la définition sémantique de l'ensemble des thèses du calcul des prédicats (Théorèmes 5.I, 5.II, 5.VII) sont exprimables et démontrables dans l'arithmétique du premier ordre $S_A$ définie au paragraphe précédent (7.8) (ceci, encore une fois, sous réserve des conditions exprimées dans la remarque finale du paragraphe 7.2 et au début du paragraphe 7.3).

Plus spécialement, considérons chaque instance particulière du théorème 5.III : Soit $S$ une extension récusivement énumérable explicitement définie de $S_0$. Désignons de façon abrégée par « $\mathcal{C}(S)$ » l'énoncé mathématique (intuitif) « *$S$ est consistant* ». Le théorème 5.IV et la note (5.16) montrent qu'on peut exhiber explicitement un élément A de $\mathfrak{F}^{(0)}(S)$ tel qu'on ait

$$(1) \qquad \mathcal{C}(S) \Rightarrow (\text{A est neutre dans } S).$$

La démonstration complète (que nous n'avons pas effectuée) du théorème 5.IV fournit le résultat suivant :

Proposition 7.7. — *La formule* A *satisfaisant à* (1) *peut être prise dans* $\Pi_1^0(S)$.

(7.7) Comme cas particulier d'un théorème général relatif à l'équivalence intuitionniste entre : d'une part la proposition affirmant qu'un certain sous-ensemble *récursivement fermé* d'un espace topologique *récursivement compact* est réduit à un élément unique, et d'autre part la proposition affirmant qu'un certain sous-ensemble récursivement énumérable (dépendant de l'espace topologique et du sous-ensemble fermé considérés) de $\mathbf{N}$ est identique à $\mathbf{N}$.

(7.8) Dans le cas du théorème 3.III, ce n'est pas la forme générale de ce théorème (avec un quantificateur universel portant sur $k$) qui est canoniquement exprimable dans $S_A$, mais seulement les instances particulières obtenues en donnant à $k$ une valeur fixe quelconque. Par contre le théorème 7.I, qui est purement syntaxique, s'énonce et se démontre dans $S_A$ sous sa forme la plus générale.

Remarquons d'autre part que la majorité des résultats contenus dans cet exposé sont non seulement « arithmétiques », mais encore « finitistes » (en un sens qu'il faudrait préciser). Il se trouve que nous n'aurons pas besoin d'utiliser ici ce caractère finitiste.

Soit alors $\nu(A)$ la réalisation de A dans $\mathcal{M}_0$. A partir de (1), de la proposition 7.7 et de la proposition 7.5 [condition (c)], on déduit :

(2) $$\mathcal{C}(S) \Rightarrow [\nu(A) \text{ est vérifiée}].$$

Soit alors $C_S$ l'élément de $\mathfrak{F}(S_0)$ qui formalise « canoniquement » dans $S_0$ la proposition $\mathcal{C}(S)$. Considérons la formule $(C_S \Rightarrow A)$; on peut admettre qu'elle constitue la formalisation canonique de l'énoncé (2). Toujours est-il qu'on obtient sans difficulté :

**Proposition 7.8.** — $(C_S \Rightarrow A) \in \mathfrak{T}(S_0)$.

**Corollaire.** — $(C_S \Rightarrow A) \in \mathfrak{T}(S)$.

De ce corollaire et de (1) on déduit immédiatemeut (7.9) le résultat suivant, dû à Gödel, et connu sous le nom de *second théorème d'incomplétude* :

**Théorème 7.IV.** — $\mathcal{C}(S) \quad \Rightarrow \quad C_S \notin \mathfrak{T}(S)$.

Autrement dit : la consistance d'un système récursivement énumérable représentatif consistant n'est jamais démontrable dans ce système.

**7.7. Application aux théories mathématiques usuelles.** — Les principaux systèmes formels, ceux dans lesquels il est le plus usuel de formaliser tout ou partie des mathématiques ordinaires, sont les suivants :

$$S_0, S_A, S_A^2, \ldots, S_A^h, \ldots, S_A^\omega, S_Z, S_{ZF}, S_I.$$

$S_0$ et $S_A$ ont été précédemment définis; $S_A^h$ $(h \geqq 2)$ est l'*arithmétique* (*classique*) *d'ordre h* obtenue en ajoutant à $S_A$ (ou, ce qui revient au même, à $S_0$) des variables fonctionnelles ou ensemblistes de types $< h$; $S_A^\omega$ est la « réunion » de tous les $S_A^h$, et est aussi appelé *théorie des types*; $S_Z$ est la théorie des ensembles de Zermelo; $S_{ZF}$ est la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel (ou bien la théorie de Neumann-Bernays, ou celle de Gödel, car on peut prouver que ces dernières sont équivalentes à $S_{ZF}$) (7.10); enfin $S_I$ est la théorie obtenue en ajoutant à $S_{ZF}$ un axiome exprimant l'existence d'ensembles « très grands » (ou, ce qui revient au même, d'*ordinaux* suffisamment *inaccessibles*). Chacun de ses systèmes est récursivement énumérable et peut être considéré [directement ou indirectement (*cf.* § 5.4, remarque]) comme dérivant du calcul des prédicats du premier ordre.

(7.9) On utilise le fait que les systèmes dérivant du calcul des prédicats satisfont à la *règle de détachement* (ou *modus ponens*) : $[X \in \mathfrak{T}(S) \,\&\, (X \Longleftrightarrow Y) \in \mathfrak{T}(S)] \Rightarrow Y \in \mathfrak{T}(S)$.

(7.10) En fait, toutes les mathématiques usuelles peuvent être formalisées dans $S_Z$ (elles peuvent même l'être dans $S_A^\omega$, mais de façon moins commode). $S_{ZF}$ permet de construire des ensembles « plus grands » que ceux obtenus dans $S_Z$, mais ces ensembles ne sont jamais utilisés dans la mathématique ordinaire. D'autre part, la théorie de Neumann-Bernays et celle de Gödel sont des extensions conservatives de $S_{ZF}$ (extension effectuée, dans le cas de la théorie de Gödel, par l'intermédiaire d'une certaine « traduction »).

Considérons d'autre part l'ordre dans lequel nous avons rangé ces systèmes. Convenons que si nous désignons l'un d'eux par $S_i$, nous désignerons le suivant par $S_{i+1}$. On voit alors que, pour chaque $S_i$, $S_{i+1}$ constitue une extension (directe ou indirecte) de $S_i$.

THÉORÈME 7.V. — *Pour chaque $S_i$, la formule $C_{S_i}$ qui exprime la consistance de $S_i$ est une thèse de $S_{i+1}$.*

La démonstration de ce théorème fondamental est très simple dans son principe : on définit dans $S_{i+1}$ une certaine multirelation, et l'on démontre dans $S_{i+1}$ que cette multirelation constitue un modèle (le « modèle standard ») de $S_i$.

Du théorème 7.IV on déduit alors :

COROLLAIRE. — *Si $S_i$ est consistant, $S_{i+1}$ constitue une extension non conservative de $S_i$* (7.11).

Du théorème 7.V et de la localisation de $A_9$, indiquée au paragraphe 7.3, on déduit :

PROPOSITION 7.9. — *Si $S_i$ est consistant et si $M$ est un sous-ensemble génératif de $\mathfrak{F}^{(0)}(S_i)$, alors il existe une formule Q de $M$ qui est une thèse de $S_{i+1}$ mais non de $S_i$.*

On peut alors appliquer la proposition 7.6 pour obtenir des formules Q, offrant un caractère à la fois élémentaire et mathématiquement intéressant, qui soient démontrables dans $S_{i+1}$ mais non dans $S_i$.

Si nous comparons maintenant cette proposition 7.9 au théorème 7.II, nous constatons le phénomène suivant, en apparence assez paradoxal : à l'intérieur d'une classe très étendue de propositions [à savoir $\Sigma_3^1(S_i)$], l'axiome du choix et l'axiome du continu généralisé ne fournissent aucun résultat supplémentaire; par contre des hypothèses relatives à l'existence d'ensembles très grands ou d'ordinaux très inaccessibles, bien qu'elles semblent à première vue dénuées de toute possibilité d'application « pratique », permettent néanmoins de démontrer des propriétés extrêmement élémentaires [comme $(a_1)$, $(a_4)$ ou $(a_5)$] qui restent indémontrables sans l'adjonction de ces hypothèses (7.12).

(7.11) Bien entendu, le répertoire de tous les systèmes formels « utilisables » ou simplement « intéressants » ne se réduit pas à la liste ordonnée ci-dessus. Il faudrait ajouter à cette liste des échelons intermédiaires, des branches plus ou moins ramifiées, et enfin des prolongements non nécessairement limités (obtenus par adjonction d'axiomes affirmant l'existence d'ensembles « de plus en plus grands » ou d'ordinaux « de plus en plus inaccessibles »). Lorsque, pour un couple $(S, S')$ de tels systèmes, on sait démontrer que $S'$ constitue une extension (directe ou indirecte) non conservative de $S$, c'est « généralement » parce qu'on sait prouver que $C_S$ constitue une thèse de $S'$.

(7.12) Par contre, dans la plupart des cas, on peut montrer que la *négation* de ces hypothèses ne fournit aucun résultat nouveau à l'intérieur d'une classe qui contient la quasi-totalité des propositions mathématiques ordinaires.

## Chapitre 8. — Récursivité relative, opérations récursives.

Le but de ce chapitre est seulement d'esquisser certains prolongements actuels de la théorie des fonctions récursives (prolongements auxquels il a déjà été fait allusion dans les chapitres précédents), indépendamment de leurs applications possibles à d'autres branches.

**8.1. Récursivité relative.** — Un sous-ensemble $M$ de $\mathbf{F}$ sera dit *récursivement fermé* s'il satisfait aux conditions (I)-(VI) du paragraphe 1.3.

$M$ étant un sous-ensemble quelconque de $\mathbf{F}$, nous appellerons *fermeture récursive* de $M$, et désignerons par $\overline{M}$, le plus petit sous-ensemble récursivement fermé qui contient $M$. On a donc $\mathbf{F_R} = \overline{\emptyset}$ et, pour tout $M$, $\overline{(\overline{M})} = \overline{M}$.

Lorsqu'on a $\varphi \in \overline{\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}}$, on dit que $\varphi$ est *récursive en* $(\psi_1, \ldots, \psi_n)$.

En considérant les fonctions caractéristiques, ces notions s'étendent aux sous-ensembles de $\mathbf{N}^p$.

8.2. — **Opérations récursives.** — Chaque fonction $\varphi$ récursive en $(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ est déterminée à partir de $(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ par un certain *schéma de définition* obtenu comme au paragraphe 2.5 (en ajoutant des symboles pour $\psi_1, \ldots, \psi_n$), Si nous gardons le même schéma en faisant varier $(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ (chaque $\psi_i$ variant sur un $\mathbf{F}^{(p_i)}$ déterminé), $\varphi$ varie (sur un certain $\mathbf{F}^{(q)}$) en fonction de $(\psi_1, \ldots, \psi_n)$. Le schéma en question définit donc une certaine application $\Phi$ d'un certain sous-ensemble de $\mathbf{F}^{(p_1)} \times \ldots \times \mathbf{F}^{(p_n)}$ dans $\mathbf{F}^{(q)}$ ($\Phi$ n'est pas en général définie sur $\mathbf{F}^{(p_1)} \times \ldots \times \mathbf{F}^{(p_n)}$ tout entier à cause des opérations $\Omega_\mu^{(p)}$ qui sont définies seulement sur les $\mathbf{F}_\mu^{(p+1)}$). Une telle application $\Phi$ est appelée une *opération récursive* (en anglais « récursive functional »). Les $\Omega_C^{(p,q)}$, $\Omega_R^{(p)}$ el $\Omega_\mu^{(p)}$ sont des cas particuliers d'opérations récursives.

Certains des indices supérieurs $p_1, \ldots, p_n$, $q$ peuvent être nuls ($\mathbf{F}^{(0)}$ étant mis en correspondance canonique et biunivoque avec $\mathbf{N}$). On peut donc par exemple définir, comme cas particuliers d'opérations récursives, les *applications récursives* de $\mathbf{N}^p \times (\mathbf{F}^{(1)})^q$ dans $\mathbf{N}$.

Un sous-ensemble de $\mathbf{N}^p \times (\mathbf{F}^{(1)})^q$ sera dit *récursif* si sa fonction caractéristique est récursive (au sens qui vient d'être défini). On démontre que, pour tout sous-ensemble récursif $M$ de $\mathbf{N}^p \times (\mathbf{F}^{(1)})^q$, il existe deux sous-ensembles récursifs (et même récursifs primitis) $A$ et $B$ de $\mathbf{N}^{p+q}$ tels qu'on ait :

$$\begin{aligned}(x_1, \ldots, x_p, \xi_1, \ldots, \xi_q) \in M &\Leftrightarrow (\exists_y)\left[(x_1, \ldots, x_p, \tilde{\xi}_1(y), \ldots, \tilde{\xi}_q(y)) \in A\right] \\ &\Leftrightarrow (\forall_z)\left[(x_1, \ldots, x_p, \tilde{\xi}_1(z), \ldots, \tilde{\xi}_q(z)) \in B\right]\end{aligned}$$

où les $\tilde{\xi}_i$ sont définis à partir des $\xi_i$ comme dans la proposition 2.4 du paragraphe 2.2.

8.3. — **Opérations récursivement continues.** — $\varphi$ et $\psi$ étant deux éléments quelconques de $^{\mathbf{S}}\mathbf{F}$ (§ 1.9), on définit les relations « $\varphi$ est une *extension* de $\psi$ » (c'est une relation d'ordre non total, que nous noterons $\psi \subset \varphi$ car elle correspond à l'inclusion pour les graphes) et « $\varphi$ et $\psi$ sont *compatibles* » (c'est-à-dire admettent une commune extension qui sera désignée par $\varphi \cup \psi$).

Soit $\mathbf{G}^{(n)}$ l'ensemble de tous les éléments de $^{\mathbf{S}}\mathbf{F}^{(n)}$ dont le domaine de définition est fini. $\mathbf{G}^{(n)}$ est dénombrable, et l'on en définit aisément une numérotation récursive (§ 2.2).

Soit $E$ un sous-ensemble quelconque de $\mathbf{G}^{(p)} \times \mathbf{G}^{(q)}$. Pour chaque élément $\varphi$ de $\mathbf{F}^{(p)}$, soit $U_E(\varphi)$ le sous-ensemble de $\mathbf{G}^{(q)}$ ainsi défini :

$$\eta \in U_E(\varphi) \Longleftrightarrow (\exists \xi \in \mathbf{G}^{(q)}) [\xi \subset \varphi \;\&\; (\xi, \eta) \in E].$$

Et soit $D_E$ le sous-ensemble suivant de $\mathbf{F}^{(p)}$ :

$$\varphi \in D_E \Longleftrightarrow (\exists ! \, \psi \in \mathbf{F}^{(q)}) \, (\forall \eta \in U_E(\varphi)) \, (\eta \subset \psi).$$

En prenant, pour chaque $\varphi$ de $D_E$, l'élément $\psi$ correspondant, nous avons ainsi défini une application $\Phi_E$ de $D_E$ dans $\mathbf{F}^{(q)}$.

Si l'on munit $\mathbf{F}^{(p)} = \mathbf{N}^{(\mathbf{N}^p)}$ de la topologie produit déduite de la topologie discrète de $\mathbf{N}$, et de même pour $\mathbf{F}^{(q)}$, on voit aisément que $\Phi_E$ est continue sur $D_E$ (mais non nécessairement prolongeable par continuité à $\mathbf{F}^{(p)}$ tout entier).

Une application $\Psi$ d'un sous-ensemble de $\mathbf{F}^{(p)}$ dans $\mathbf{F}^{(q)}$ sera dite *récursivement continue* s'il existe un sous-ensemble récursivement énumérable (ou — cela revient au même — récursif, ou récursif primitif) $E$ de $\mathbf{G}^{(p)} \times \mathbf{G}^{(q)}$ tel qu'on ait $\Psi = \Phi_E$. On démontre aisément :

PROPOSITION 8.1. — *Toute opération récursive est récursivement continue, et réciproquement.*

Les définitions et la proposition 8.1 s'étendent immédiatement aux applications de $\mathbf{F}^{(p_1)} \times \ldots \times \mathbf{F}^{(p_n)}$ dans $\mathbf{F}^{(q)}$,

8.4. **Extension aux semi-fonctions et restriction aux éléments récursifs.** — Les deux procédés indiqués respectivement dans les paragraphes 8.2 et 8.3 s'étendent aux semi-fonctions et permettent de définir des applications (totales ou partielles) de $^{\mathbf{S}}\mathbf{F}^{(p_1)} \times \ldots \times {}^{\mathbf{S}}\mathbf{F}^{(p_n)}$ dans $^{\mathbf{S}}\mathbf{F}^{(q)}$. Le procédé du paragraphe 8.3 peut d'ailleurs s'étendre de deux façons différentes, suivant qu'on impose ou non à $E$ une condition de *consistance totale* (8.1). Et les trois définitions ainsi obtenues ne sont pas équivalentes.

Ceci fait, on peut se restreindre aux applications (partielles ou totales) de ${}^{\mathbf{S}}\mathbf{F}_{\mathbf{R}}^{(p_1)} \times \ldots \times {}^{\mathbf{S}}\mathbf{F}_{\mathbf{R}}^{(p_n)}$ dans ${}^{\mathbf{S}}\mathbf{F}_{\mathbf{R}}^{(q)}$. On définit la notion d'*opération effective* [*cf.* § **1.10**. remarque et note (1.8)] comme cas particulier de telles applications. Et l'on démontre ([27], [21]) que, moyennant des conditions assez larges portant sur le domaine de définition, une telle opération est équivalente à la restriction d'une opération récursive (au sens suivant : généralisation du paragraphe 8.3, avec condition de consistance totale), et inversement.

En exigeant que toute suite (semi-) récursive soit transformée en une suite (semi-) récursive, on définit les *opérations de Banach-Mazur*. R. M. FRIEDBERG [7] a montré qu'une opération de Banach-Mazur dont le domaine de définition est identique à $\mathbf{F}_{\mathbf{R}}^{(p_1)} \times \ldots \times \mathbf{F}_{\mathbf{R}}^{(p_n)}$ n'est pas nécessairement récursive (8.2). Un certain nombre d'autres cas ont été étudiés par Marian B. POUR-EL.

**8.5 Opérations fonctionnelles de types supérieurs.** — Définissons par récurrence les ensembles $\mathbf{F}^{[n]}$ et $\mathbf{F}_{\mathbf{C}}^{[n]}$ de la façon suivante :

$\mathbf{F}^{[0]} = \mathbf{F}_{\mathbf{C}}^{[0]} = \mathbf{N}$;

$\mathbf{F}^{[n+1]} =$ l'ensemble de toutes les applications de $\mathbf{F}^{[n]}$ dans $\mathbf{N}$;

$\mathbf{F}_{\mathbf{C}}^{[n+1]} =$ l'ensemble de toutes les applications continues de $\mathbf{F}_{\mathbf{C}}^{[n]}$ dans $\mathbf{N}$ ($\mathbf{N}$ étant considéré avec la topologie discrète, et $\mathbf{F}_{\mathbf{C}}^{[n]}$ avec une certaine topologie dont la définition — également par récurrence — est assez compliquée).

(8.1) Un sous-ensemble $E$ de $\mathbf{G}^{(p)} \times \mathbf{G}^{(q)}$ est dit *totalement consistant* s'il vérifie :

$$(\forall \xi, \xi' \in \mathbf{G}^{(p)})\, (\forall \eta, \eta' \in \mathbf{G}^{(q)})$$
$$\{ [(\xi, \eta) \in E \,\&\, (\xi', \eta') \in E \,\&\, (\xi \textit{ et } \xi' \textit{ compatibles})] \Rightarrow (\eta \textit{ et } \eta' \textit{ compatibles}) \}.$$

On voit aisément que, dans le cas des fonctions, toute opération récursivement continue peut être définie par un ensemble $E$ récursivement énumérable et totalement consistant. Mais il n'en est pas de même pour les semi-fonctions.

Tout sous-ensemble totalement consistant $E$ de $\mathbf{G}^{(p)} \times \mathbf{G}^{(q)}$ définit une application $\Phi_E$ de ${}^{\mathbf{S}}\mathbf{F}^{(p)}$ tout entier dans ${}^{\mathbf{S}}\mathbf{F}^{(q)}$, en posant

$$\Phi_E(\varphi) = \bigcup \{ \eta : (\exists \xi)\, [\xi \subset \varphi \,\&\, (\xi, \eta) \in E] \}.$$

(8.2) Considérons, pour simplifier, les opérations de Banach-Mazur définies sur $\mathbf{F}_{\mathbf{R}}^{(1)}$ et à valeurs dans $\mathbf{N}$. Au moyen d'un procédé qui est maintenant couramment employé dans ce genre de problèmes (mais qu'il serait trop long d'analyser ici), MAZUR a prouvé que ces opérations sont continues sur $\mathbf{F}_{\mathbf{R}}^{(1)}$, et par conséquent sont définies par leur restriction à l'ensemble $\mathbf{Q}^{(1)}$ constitué par toutes les fonctions (d'une variable) nulles à partir d'un certain rang. $\mathbf{Q}^{(1)}$ étant récursivement numéroté, chaque opération de Banach-Mazur est donc définie par une certaine application récursive de $\mathbf{Q}^{(1)}$ dans $\mathbf{N}$.

Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une énumération *kleenique* [*cf.* note (1.7)] de toutes les semi-applications semi-récursives de $\mathbf{Q}^{(1)}$ dans $\mathbf{N}$. Soient $A$ et $B$ les sous-ensembles de $\mathbf{N}$ ainsi définis :

$n \in A \Longleftrightarrow \big(\varphi_n$ est définie sur $\mathbf{Q}^{(1)}$ tout entier et peut être prolongée par continuité en une application de Banach-Mazur de $\mathbf{F}_{\mathbf{R}}^{(1)}$ dans $\mathbf{N}\big)$;

(*à suivre page* 465)

On a $\mathbf{F}^{[1]} = \mathbf{F}_{\mathbf{C}}^{[1]} = \mathbf{F}^{(1)}$.

Pour chaque $n$, on peut définir la notion d'élément *récursif* de $\mathbf{F}^{[n]}$ ([13]). On peut d'autre part définir les notions d'élément *récursif* et d'élément *récursivement continu* de $\mathbf{F}_{\mathbf{C}}^{[n]}$ ([14], [17]); W. W. Tait a démontré (*cf.* [19], p. 127) que, pour $n \geqq 3$, ces deux notions ne sont pas équivalentes (8.3).

Ces opérations de type supérieur (« functionals of higher type ») soulèvent des problèmes intéressants et sont étroitement reliées à diverses questions de Logique mathématique.

**8.6. Degrés d'indécidabilité.** — La relation binaire « $\varphi$ est récursive en $(\psi)$ » (§ 8.1) est une relation d'ordre (non total) sur $\mathbf{F}$ (8.4).

La relation « $\varphi$ est récursive en $(\psi)$ et $\psi$ est récursive en $(\varphi)$ » est une relation d'équivalence (8.5); les classes d'équivalence qu'elle détermine dans $\mathbf{F}$ sont appelées *degrés d'indécidabilité* (ou « degrés de non-récursivité », ou simplement « degrés »).

L'ensemble des degrés, ordonné par la relation quotient de la relation d'ordre ci-dessus définie, constitue un semi-treillis supérieur (ou semi-treillis à droite).

---

$n \in B \Longleftrightarrow \big(\varphi_n$ est définie sur $\mathbf{Q}^{(1)}$ tout entier et peut être prolongée par continuité en une application récursive de $\mathbf{F}_{\mathbf{R}}^{(1)}$ dans $\mathbf{N}\big)$.

On voit aisément que $A \in \Pi_4^0$ et $B \in \Sigma_4^0$ (§ 3.3). Friedberg a prouvé que $B$ est *complet* pour la classe $\Sigma_4^0$, c'est-à-dire qu'à tout ensemble $X$ appartenant à cette classe on peut faire correspondre une fonction récursive $\xi$ telle qu'on ait, pour tout $x$ de $\mathbf{N}$, $x \in X \Longleftrightarrow \xi(x) \in B$. Il en résulte immédiatement, d'après le théorème 3.III, que $B \neq A$. Et comme $B \subset A$, il existe par conséquent une opération de Banach-Mazur qui n'est pas récursive (comme le raisonnement peut se mettre sous forme constructive, l'entier $n$ correspondant à cette opération peut être explicitement exhibé).

(8.3) Tout élément récursif de $\mathbf{F}_{\mathbf{C}}^{[n]}$ est récursivement continu. D'autre part ces deux notions coïncident pour $n \leqq 2$.

Désignons par $\mathbf{F}_1^{(1)}$ l'ensemble de tous les éléments de $\mathbf{F}^{(1)}$ qui ne prennent que les valeurs 0 et 1. La continuité uniforme, conséquence de la compacité de $\mathbf{F}_1^{(1)}$, permet de définir un élément particulier $\Phi$ de $\mathbf{F}_{\mathbf{C}}^{[3]}$ au moyen de l'égalité suivante (où $\Xi$ désigne un élément variable de $\mathbf{F}_{\mathbf{C}}^{[2]}$, et où $(\mu n)$ signifie « le plus petit $n$ tel que ... ») :

$$\Phi(\Xi) = (\mu n)(\forall \varphi, \psi \in \mathbf{F}_1^{(1)}) \{[(\forall x < n)(\varphi x = \psi x)] \Rightarrow \Xi(\varphi) = \Xi(\psi)\}.$$

Tait a montré que cette opération $\Phi$ est récursivement continue, mais n'est pas récursive [ni même *semi-récursive* (« partial recursive ») lorsqu'on considère $\mathbf{F}_{\mathbf{C}}^{[2]}$ comme un sous-ensemble de $\mathbf{F}^{[2]}$].

(8.4) Il ne faut pas confondre cette relation avec la suivante : « il existe une fonction récursive $\alpha$ telle que, pour tout $n$, $\varphi(n) = \psi(\alpha(n))$ ». Lorsque cette dernière relation est vérifiée, $\varphi$ est évidemment récursive en $\psi$; mais l'inverse est faux.

(8.5) Certains auteurs [26] réservent le nom d'*équivalence récursive* à une relation définie par un procédé analogue à celui qui est indiqué dans la note (8.4) ci-dessus.

On montre aisément que, pour chaque $k$, il existe un élément $E$ de $\Sigma_k^0$ ou de $\Pi_k^0$ (*cf.* § 3.3) tel que tous les éléments de $\Sigma_{k+1}^0 \cap \Pi_{k+1}^0$ (et *a fortiori* les éléments de $\Sigma_k^0 \cup \Pi_k^0$) soient récursifs en $E$; deux tels éléments $E$ (correspondant au même $k$) appartiennent évidemment au même degré, qui est désigné par $o'^{\cdots}{}'$ avec $k$ signes $'$. Le degré des fonctions récursives est donc o; et si $\varphi$ est la fonction caractéristique d'un sous-ensemble récursivement énumérable de $\mathbf{N}^{p+1}$ qui « énumère » l'ensemble de tous les sous-ensembles récursivement énumérables de $\mathbf{N}^p$ (*cf.* § 1.6, et § 1.7, théorème 1.I), alors le degré de $\varphi$ est $o'$.

Le procédé ainsi employé se généralise en une opération qui fait passer de tout degré $d$ à un degré $d'$ appelé le *jump* de $d$.

La structure du semi-treillis des degrés muni de la fonction jump, et la place occupée dans ce treillis par les degrés de certains ensembles (par exemple les ensembles récursivement énumérables) posent des problèmes intéressants et non tous résolus ([6], [38], [40]; *cf.* aussi ci-dessus note (5.21)).

## BIBLIOGRAPHIE.

[1] Ackermann (Wilhelm). — *Solvable cases of the decision problem.* — Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1954 (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics).

[2] Addison (John W.). — Separation principles in the hierarchies of classical and effective descriptive set theory, *Fund. Math.*, t. 46, 1958, p. 123-135.

[3] Brown (Edgar H.). — Finite computability of Postnikov complexes, *Annals of Math.*, Series 2, t. 65, 1957, p. 1-20.

[4] Church (Alonzo). — On the concept of a random sequence, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 46, 1940, p. 130-135.

[5] Davis (Martin). — *Computability and unsolvability.* — New-York, Mc Graw-Hill Book Company, 1958 (Mc Graw-Hill Series in Information Processing and Computers).

[6] Friedberg (Richard M.). — Two recursively enumerable sets of incomparable degrees of unsolvability (solution of Post's problem, 1944), *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 43, 1957, p. 236-238.

[7] Friedberg (Richard M.). — 4-quantifier completeness : a Banach-Mazur functional not uniformly partial recursive, *Bull. Acad. polon. Sc.*, t. 6, 1958, p. 1-5.

[8] Gilmore (C.). — A proof method for quantification theory : its justification and realization, *I. M. B. J. of Research and Development*, t. 4, 1960, p. 28-35.

[9] Grzegorczyk (Andrzej). — Some approaches to constructive analysis, *Constructivity in mathematics, Proc. Coll. Amsterdam*, 1957, p. 43-61. — Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1959 (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics).

[10] Kleene (S. C.). — Finite axiomatizability of theories in the predicate calculus using additional predicate symbols, *Memoirs Am. math. Soc.*, n° 10, 1952, p. 27-68.

[11] Kleene (S. C.). — *Introduction to metamathematics.* — Amsterdam, North-Holland publishing Company; Groningen, Noordhoff, 1952 (Bibliotheca Mathematica, 1).

[12] Kleene (S. C.). — Hierarchies of number-theoretic predicates, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 61, 1955, p. 193-213.

[13] KLEENE (S. C.). — Recursive functionals and quantifiers of finite type I, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 91, 1959, p. 1-52.

[14] KLEENE (S. C.). — Countable functionals, *Constructivity in mathematics*, *Proc. Coll. Amsterdam* 1957; p. 81-100. — Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1959 (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics).

[15] KLEENE (S. C.). — Mathematical Logic : constructive and non-constructive operations, *Proc. Intern. Congr. Math.* [1958. Edinburgh]; p. 137-153. — Cambridge, at the University Press, 1960.

[16] KREISEL (Georg). — Mathematical significance of consistency proofs, *J. of symb. Logic*, t. 23, 1958, p. 155-182.

[17] KREISEL (Georg). — Interpretation of analysis by means of constructive functionals of finite type, *Constructivity in mathematics*, *Proc. Coll. Amsterdam*, 1957; p. 101-128. — Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1959. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics).

[18] KREISEL (Georg). — La prédicativité, *Bull. Soc. math. France*, t. 88, 1960, p. 371-391.

[19] KREISEL (Georg). — Set theoretic problems suggested by the notion of potentiel totality, *Proceedings of the Symposium on infinitistic methods in the foundations of mathematics* [1959. Warszawa]; p. 103-140. — Warszawa, 1960.

[20] KREISEL (G.) et LACOMBE (D.). — Ensembles récursivement mesurables et ensembles récursivement ouverts ou fermés, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 245, 1957, p. 1106-1109.

[21] KREISEL (G.), LACOMBE (D.) and SHOENFIELD (J. R.). — Partial recursive functionals and effective operations, *Constructivity in mathematics*, *Proc. Coll. Amsterdam* 1957; p. 290-297. — Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1959 (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics).

[22] LACOMBE (Daniel). — Quelques propriétés d'analyse récursive, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 244, 1957, p. 996-997.

[23] LACOMBE (Daniel). — Les ensembles récursivement ouverts ou fermés et leurs applications à l'analyse récursive, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 245, 1957, p. 1040-1043.

[24] LACOMBE (Daniel). — Quelques procédés de définition en topologie récursive, *Constructivity in mathematics*, *Proc. Coll. Amsterdam* 1957; p. 129-158. Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1959 (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics).

[25] MARKOV (A. A.). — The problem of homeomorphy [en russe], *Proc. Intern. Congr. Math.* [1958. Edinburgh]; p. 300-306. — Cambridge, at the University Press, 1960.

[26] MYHILL (J.) and DEKKER (J. C. E.). — *Recursive equivalence types.* — Berkeley, University of California (à paraître).

[27] MYHILL (J.) and SHEPHERDSON (J. C.). — Effective operations on partial recursive functions, *Z. für math. Logik und Grundl. der Math.*, t. 1, 1955, p. 310-317.

[28] NOVIKOV (P. S.). — Sur l'insolubilité algorithmique du problème des mots [en russe], *Trudy Mat. Inst. Steklov*, t. 44, 1955, p. 143.

[29] PORTE (Jean). — Une simplification de la théorie de Turing, *Actes du 1er Congrès international de Cybernétique* [1956. Namur]; p. 251-280. — Paris, Gauthier-Villars; Namur, Association internationale de Cybernétique, 1958.

[30] PORTE (Jean), — Systèmes de Post et algorithmes de Markov, *Cybernetica*, n° 2 (1958), 1959.

[31] PUTNAM (Hilary). — An unsolvable problem in number theory, *J. of symb. Logic* (à paraître).

[32] QUINE (W. V.). — Concatenation as a basis for arithmetic, *J. of symb. Logic*, t. 11, 1946, p. 105-114.

[33] RABIN (Michael O.). — Recursive unsolvability of group theoretic problems, *Annals of Math.*, Series 2, t. 67, 1958, p. 172-194.

[34] RABIN (Michael O.). — On recursively enumerable and arithmetic models of set theory, *J. of symb. Logic*, t. 23, 1958, p. 408-416.

[35] Rabin (Michael O.) and Scott (Dana). — Finite automata and their decision problems, *I. B. M. J. of Research and Development*, t. 3, 1959, p. 114-125.
[36] Rogers (Hartley, Jr). — Gödel numberings of partial recursive functions, *J. of symb. Logic*, t. 23, 1958, p. 331-341.
[37] Shepherdson (J. C.). — Representability of recursively enumerable sets in formal theories, *Archiv für math. Logik und Grundlagenforschung* (à paraître).
[38] Spector (Clifford). — On degrees of recursive unsolvability, *Annals of Math.*, Series 2, t. 64, 1956, p. 581-592.
[39] Tarski (A.), Mostowski (A.) and Robinson (R. M.). — *Undecidable theories.* Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1953 (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics).
[40] Tennenbaum (S.). — Non-archimedean models for arithmetic, *Notices Amer. math. Soc.*, t. 6, 1959, p. 270.

(Manuscrit reçu le 15 septembre 1960.)

Daniel Lacombe
Institut de Mathématiques
13 Place Philippe Lebon
Lille (Nord).