BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

Sur l'intégrale $\int_x^\infty \frac{e^{-x}dx}{x}$

Bulletin de la S. M. F., tome 7 (1879), p. 72-81
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1879__7__72_1>

Sur l'intégrale $\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x}$; par M. Laguerre.

(Séances des 14 et 28 février 1879.)

I.

1. L'intégration par parties donne, en posant

$$F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1.2}{x^3} - \ldots \pm \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{x^n},$$

la relation suivante :

$$(1) \qquad \int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x} = e^{-x}F(x) \mp 1.2\ldots n\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x^{n+1}}.$$

La série que l'on obtient en faisant croître indéfiniment n dans le polynôme $F(x)$ est nécessairement divergente pour toute valeur de x, quelque grande qu'on la suppose. Néanmoins, pour de grandes valeurs de la variable, elle peut, en ne tenant compte que des premiers termes, fournir une valeur très-approchée de l'intégrale considérée ([1]).

Je me propose, dans la Note qui suit, d'obtenir le développement en fractions continues du polynôme $F(x)$.

2. En posant, pour abréger, $N = \pm 1.2.3\ldots n$, on a

$$F(x) = e^x\left(\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x} + N\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x^{n+1}}\right),$$

([1]) Relativement à ces séries demi-convergentes, *voir* la Note de M. Hermite *Sur l'intégrale* $\int_0^1 \frac{z^{a-1}-z^a}{1-z}dz$, insérée dans les *Actes de l'Académie royale de Turin* (17 novembre 1878).

d'où

$$(2) \qquad F'(x) = F(x) - \frac{1}{x} - \frac{N}{x^{n+1}}.$$

Soit $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ une réduite du polynôme $F(x)$ *dont le dénominateur soit d'un degré* $m \overline{\overline{<}} \frac{n}{2}$. On a

$$F(x) = \frac{\varphi(x)}{f(x)} + \left(\frac{1}{x^{2m+1}}\right) \quad (^1),$$

d'où

$$F'(x) = \frac{\varphi'(x) f(x) - f'(x)\varphi(x)}{f^2(x)} + \left(\frac{1}{x^{2m+2}}\right),$$

ou encore, en vertu de la relation (2), et en remarquant que $2m$ *est au plus égal à* n,

$$\frac{\varphi'(x) f(x) - f'(x)\varphi(x)}{f^2(x)} = \frac{\varphi(x)}{f(x)} - \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x^{2m+1}}\right),$$

ou encore

$$(3) \qquad x[\varphi'(x) f(x) - f'(x)\varphi(x) - \varphi(x) f(x)] + f^2(x) = A,$$

A désignant une quantité constante.

3. Formons maintenant l'équation linéaire du second ordre $My'' - Ny' + Py = 0$, qui a pour solutions

$$y_1 = f(x) \quad \text{et} \quad y_2 = \varphi(x) e^{-x} - f(x) \int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x};$$

on a, en vertu d'une formule bien connue,

$$\frac{N}{M} = \frac{d}{dx} \log \Omega, \quad \text{où} \quad \Omega = y'_1 y_2 - y'_2 y_1.$$

Or un calcul facile donne, en tenant compte de la relation (3),

$$\Omega = \frac{A e^{-x}}{x};$$

(1) Je désigne généralement, et en faisant abstraction des valeurs des coefficients, par $\left(\frac{1}{x^p}\right)$ une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x et commençant par un terme en $\frac{1}{x^p}$.

on a donc

$$\frac{N}{M} = -\left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

d'où il suit que le polynôme $f(x)$ satisfait à l'équation différentielle du second ordre

$$(4) \qquad xy'' + (x+1)y' - my = 0,$$

dont une seconde solution est

$$u = \varphi(x)e^{-x} - f(x)\int_x^{\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{x}.$$

Le développement en série donne aisément

$$f(x) = x^m + m^2 x^{m-1} + \frac{m^2(m-1)^2}{1.2}x^{m-2}$$
$$+ \frac{m^3(m-1)^2(m-2)^2}{1.2.3}x^{m-3} + \ldots + 1.2.3\ldots m.$$

4. En dérivant m fois de suite l'équation (4), il vient

$$xy^{(m+2)} + (x+m+1)y^{(m+1)} = 0,$$

d'où, en désignant par B une quantité constante,

$$y^{(m+1)} = B\frac{e^{-x}}{x^{m+1}},$$

et, par suite,

$$y = \frac{B}{1.2.3\ldots m}\int_x^{\infty} \frac{e^{-z}(z-x)^m}{z^{m+1}}\,dz;$$

c'est une solution particulière de l'équation (4), et, comme elle ne renferme pas de termes entiers en x, sa valeur est précisément la fonction que j'ai désignée précédemment par u.

On a donc, en modifiant un peu les notations déjà employées et en mettant en évidence le degré du polynôme $f(x)$,

$$u_m = \varphi_m(x)e^{-x} - f_m(x)\int_x^{\infty}\frac{e^{-x}\,dx}{x} = \frac{B}{1.2.3\ldots m}\int_x^{\infty}\frac{e^{-z}(z-x)^m}{z^{m+1}}\,dz;$$

en y faisant $x = 0$, on en déduit

$$\frac{B}{1.2.3\ldots m} = -f_m(0) = -1.2.3\ldots m = -m!,$$

et la formule précédente devient

$$(5)\quad u_m = \varphi_m(x)e^{-x} - f_m(x)\int_x^\infty \frac{e^{-x}dx}{x} = -m!\int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^m}{z^{m+1}}dz.$$

5. En dérivant l'équation précédente, on a

$$u'_m = m!m\int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^{m-1}}{z^{m+1}} = -\frac{m!m}{x}\int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^{m-1}[(z-x)-z]}{z^{m+1}}dz$$
$$= -\frac{m!m}{x}\int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^m}{z^{m+1}}dz$$
$$+\frac{m!m}{x}\int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^{m-1}}{z^m}dz = \frac{mu_m - m^2u_{m-1}}{x};$$

en combinant cette valeur de u'_m avec l'équation (4) à laquelle satisfait u_m, on obtient la relation

$$(6)\qquad u_{m+1} = (x+2m+1)u_m - m^2u_{m-1},$$

d'où l'on déduit les deux suivantes :

$$(7)\qquad f_{m+1}(x) = (x+2m+1)f_m(x) - m^2f_{m-1}(x)$$

et

$$(8)\qquad \varphi_{m+1}(x) = (x+2m+1)\varphi_m(x) - m^2\varphi_{m-1}(x).$$

6. Ayant, comme il est facile de le voir,

$$u_0 = -\int_x^\infty \frac{e^{-x}dx}{x} \quad \text{et} \quad u_1 = e^{-x} - (x+1)\int_x^\infty \frac{e^{-x}dx}{x},$$

on déduit de la formule (6) le développement suivant :

$$\int_x^\infty \frac{e^{-x}dx}{x} = e^{-x}\cfrac{1}{x+1-\cfrac{1}{x+3-\cfrac{1}{\cfrac{x+5}{4}-\cfrac{\frac{1}{4}}{\cfrac{x+7}{9}-\cfrac{\frac{1}{9}}{\cfrac{x+9}{16}-\cfrac{\frac{1}{16}}{x+\ldots}}}}}},$$

dont la loi est évidente.

Les diverses réduites de cette expression sont

$$e^{-x}\frac{1}{x+1},\quad e^{-x}\frac{x+3}{x^2+4x+2},\quad e^{-x}\frac{x^2+8x+11}{x^3+9x^2+18x+6},\quad \ldots,$$

l'expression générale de la $m^{\text{ième}}$ réduite étant $e^{-x}\frac{\varphi_m(x)}{f_m(x)}$; les formules (7) et (8) permettent d'ailleurs de calculer successivement les valeurs des polynômes $\varphi_m(x)$ et $f_m(x)$.

7. Comme la fraction continue précédente provient d'une série divergente, il est nécessaire de prouver qu'elle est convergente et a pour limite $\int_x^\infty \frac{e^{-x}dx}{x}$. A cet effet, je remarque que de l'équation (5) on déduit

$$\int_x^\infty \frac{e^{-x}dx}{x} = e^{-x}\frac{\varphi_m(x)}{f_m(x)} + \frac{m!}{f_m(x)}\int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^m}{z^{m+1}}dx.$$

De là résulte immédiatement que les diverses réduites dont l'expression générale est $e^{-x}\frac{\varphi_m(x)}{f_m(x)}$ vont toujours en croissant en restant inférieures à la valeur de l'intégrale cherchée. Pour démontrer qu'elles ont cette intégrale pour limite, il suffit de faire voir que la limite de $\frac{m!}{f_m(x)}\int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^m dz}{z^{m+1}}$ est nulle quand m croît indéfiniment.

Je ferai observer d'abord que le facteur $\frac{m!}{f_m(x)}$ tend vers zéro; puis, en désignant par A une quantité très-grande et arbitrairement choisie, je mettrai l'intégrale $\int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^m dz}{z^{m+1}}$ sous la forme suivante :

$$\int_x^A \frac{e^{-z}(z-x)^m dz}{z^{m+1}} + \int_A^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^m dz}{z^{m+1}}.$$

Relativement à la première intégrale, comme dans l'intervalle considéré $\frac{z-x}{z}$ est toujours plus petit que $1-\frac{x}{A}$, cette intégrale est plus petite que $\left(1-\frac{x}{A}\right)^m\int_x^\infty \frac{e^{-x}dx}{x}$; donc, quelque grand que soit A, elle tend vers zéro quand m augmente indéfiniment. La seconde intégrale est évidemment plus petite que $\int_{A}^{\infty} e^{-z}\,dz$, c'est-à-dire que e^{-A}; donc, pour une valeur suffisamment grande de A, elle est aussi petite que l'on veut. Ainsi, la fraction continue, quoique provenant d'une série essentiellement divergente, est elle-même convergente et a pour limite $\int_{x}^{\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{x}$.

8. Comme application, faisons $x = 1$; les réduites suivantes :

$$\frac{4}{7e},\quad \frac{20}{34e},\quad \frac{124}{209e},\quad \frac{920}{1546e},\quad \frac{7940}{13327e}$$

seront des valeurs approchées de l'intégrale $\int_{1}^{\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{x}$; en les réduisant en décimales, on obtient les expressions suivantes :

$$0{,}21;\quad 0{,}216;\quad 0{,}218;\quad 0{,}2189;\quad 0{,}2192.$$

La véritable valeur est 0,2193839.

En faisant $x = 4$, la deuxième réduite donne pour valeur approchée de l'intégrale $\int_{4}^{\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{x}$ la valeur $\frac{7}{34e^4}$, ou, en décimales, 0,00377, dont les trois premiers chiffres significatifs sont exacts.

9. Dans sa *Mécanique céleste* (t. IV, Livre X), Laplace a donné le développement en fraction continue de l'intégrale $\int_{x}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$. Sa démonstration, reposant sur l'emploi d'une série divergente, est, comme l'a fait remarquer Jacobi, entièrement inadmissible; ses résultats sont néanmoins exacts et ont été démontrés directement par l'illustre géomètre (¹) allemand.

La méthode que j'ai développée ci-dessus, relativement à l'intégrale $\int_{x}^{\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{x}$, s'applique entièrement à l'intégrale considérée

(¹) *De fractione continua, in quam integrale* $\int_{x}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ *evolvere licet* (*Journal de Crelle*, t. 12, p. 346).

par Laplace, et elle montre d'une façon très-nette comment, tout en partant d'une série divergente, on peut néanmoins arriver à une fraction continue donnant la valeur de la fonction qu'il s'agissait de développer.

II.

1. J'ai montré que les diverses réduites $\frac{\varphi_n(x)}{f_n(x)}$ de la série semi-convergente

$$F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1.2}{x^3} - \frac{1.2.3}{x^4} + \frac{1.2.3.4}{x^5} + \ldots$$

avaient pour limite la transcendante $e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x^2}dx}{x}$.

On a d'ailleurs, en représentant par $\Pi(n)$ le produit $1.2\ldots(n-1)n$,

$$(1)\quad f_n(x) = \Pi(n)\left[1 + nx + \frac{n(n-1)}{1^2.2^2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-3)}{1^2.2^2.3^2}x^3 + \ldots\right],$$

$$(2)\qquad xf_n'(x) = nf_n(x) - n^2 f_{n-1}(x)$$

et

$$(3)\qquad f_{n+1}(x) = (x + 2n + 1)f_n(x) - n^2 f_{n-1}(x).$$

La série $F(x)$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$\int_{-\infty}^0 e^z dz \frac{1}{x} + \int_{-\infty}^0 e^z z\, dz + \frac{1}{x^3}\int_{-\infty}^0 e^z z^2 dz + \ldots + \frac{1}{x^{m+1}}\int_{-\infty}^0 e^z z^m dz + \ldots.$$

Des principes posés par M. Heine, il résulte immédiatement que, $\psi(x)$ désignant un polynôme quelconque d'un degré inférieur à n, on a

$$(4)\qquad \int_{-\infty}^0 e^x f_n(x)\,\psi(x)\,dx = 0,$$

d'où l'on conclut, puisque e^x est toujours positif, que l'équation

$$f_n(x) = 0$$

a toutes ses racines réelles et inégales; elles sont d'ailleurs évidemment négatives.

2. En particulier, on déduit de l'équation (4) la relation sui-

vante, où n et n' désignent deux nombres entiers différents :

$$(5) \qquad \int_{-\infty}^{0} e^x f_n(x) f_{n'}(x)\,dx = 0.$$

Pour évaluer $\int_{-\infty}^{0} e^x f_n^2(x)\,dx$, je remarque que, en intégrant par parties, on a

$$\int_{-\infty}^{0} e^x f_n^2(x)\,dx = [e^x f_n^2(x)]_{-\infty}^{0} - 2\int_{-\infty}^{0} e^x f_n(x) f_n'(x)\,dx;$$

l'intégrale qui figure dans le second membre de cette identité est nulle, en vertu de la relation (4); on déduit donc de la relation (1)

$$(6) \qquad \int_{-\infty}^{0} e^x f_n^2(x)\,dx = \Pi^2(n).$$

Des formules précédentes résulte, comme on sait, le développement d'une fonction quelconque $\Phi(x)$ au moyen des polynômes $f_n(x)$.

Si l'on pose, en effet,

$$\Phi(x) = A_0 + A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + \ldots + A_n f_n(x) + \ldots,$$

on a

$$A_n = \frac{\int_{-\infty}^{0} e^x \Phi(x) f_n(x)\,dx}{\Pi^2(n)}.$$

3. Soit, comme application,

$$\Phi(x) = e^{tx}.$$

On aura

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{0} e^{x(1+t)} f_n(x)\,dx \\
&\quad = \Pi(n) \int_{-\infty}^{0} e^{x(1+t)} \left[1 + nx + \frac{n(n-1)}{1^2 . 2^2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1^2 . 2^2 . 3^2} x^3 + \ldots\right] \\
&\quad = \Pi(n) \left[\frac{1}{1+t} - \frac{n}{(1+t)^2} + \frac{n(n-1)}{1 . 2} \frac{1}{(1+t)^3} + \ldots\right] = \Pi(n) \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}},
\end{aligned}$$

d'où le développement suivant :

$$e^{tx}=\frac{1}{1+t}+\frac{t}{(1+t)^2}f_1(x)+\frac{t^2}{(1+t)^3}\frac{f_2(x)}{1.2}+\ldots$$
$$+\frac{t^n}{(1+t)^{n+1}}\frac{f_n(x)}{\Pi(n)}+\ldots,$$

ou encore, en posant $t=\dfrac{z}{1-z}$,

$$(7)\qquad \frac{e^{\frac{zx}{1-z}}}{1-z}=1+zf_1(x)+\frac{z^2}{1.2}f_2(x)+\ldots+\frac{z^n}{\Pi(n)}f_n(x)+\ldots,$$

développement qui subsiste évidemment pour toute valeur de z dont le module est plus petit que l'unité.

Les diverses propriétés des polynômes $f_n(x)$ se déduiraient du reste très-facilement de l'équation précédente en employant les méthodes données par Legendre relativement aux fonctions X_n.

On a, par exemple, l'identité

$$e^x\sum\frac{z^nf_n(x)}{\Pi(n)}\sum\frac{t^mf_m(x)}{\Pi(m)}=\frac{e^{x\left(\frac{z}{1-z}+\frac{t}{1-t}+1\right)}}{(1-z)(1-t)}=\frac{e^{\frac{1-tz}{(1-t)(1-z)}}}{(1-t)(1-z)},$$

d'où, en intégrant,

$$\int_{-\infty}^{0}e^x\sum\frac{z^nf_n(x)}{\Pi(n)}\sum\frac{t^mf_m(x)}{\Pi(m)}\,dx=\frac{1}{1-tz}=1+tz+t^2z^2+\ldots,$$

et de là résultent immédiatement les formules (5) et (6).

4. De la formule

$$\int_{-\infty}^{0}e^{x(1+t)}f_n(x)\,dx=\Pi(n)\frac{t^n}{(1+t)^{n+1}},$$

on déduit, en dérivant m fois par rapport à t,

$$\int_{-\infty}^{0}e^{x(1+t)}x^mf_n(x)\,dx=\Pi(n)\,D^m\frac{t^n}{(1+t)^{n+1}},$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{0}e^xx^mf_n(x)\,dx=\Pi_n\left[D^m\frac{t^n}{(1+t)^{n+1}}\right]_{t=0},$$

et, en supposant $m \gtreqless n$,

$$\int_{-\infty}^{0} e^x x^m f_n(x)\,dx = (-1)^{m-n} \frac{\Pi^2(m)}{\Pi(m-n)},$$

d'où le développement suivant :

$$x^m = (-1)^m \Pi(m) \left[f_0(x) - m f_1(x) + \frac{m(m-1)}{1^2.2^2} f_2(x) \right.$$
$$\left. - \frac{m(m-1)(m-2)}{1^2.2^2.3^2} f_3(x) - \dots \right].$$

Cette formule, on le voit, se déduit de la formule (1) (où d'ailleurs se trouve le nombre entier n au lieu du nombre m) en changeant $f_n(x)$ en $(-x)^n$ et x^n en $(-1)^n f_n(x)$.

De là résulte que, si une fonction quelconque $\Phi(x)$, ordonnée suivant les puissances croissantes de x, s'exprime au moyen des polynômes $f_n(x)$ par la formule symbolique suivante :

$$\Phi(x) = \Theta(f),$$

où, dans le second membre, la puissance $n^{\text{ième}}$ de f doit être remplacée par f_n, on a aussi symboliquement

$$\Theta(-x) = \Phi(-f).$$