BULLETIN DE LA S. M. F.

FRANÇOIS TRÈVES

Un théorème sur les équations aux dérivées partielles à coefficients constants dépendant de paramètres

Bulletin de la S. M. F., tome 90 (1962), p. 473-486
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1962__90__473_0>

Bull. Soc. math. France,
90, 1962, p. 473 à 486.

UN THÉORÈME SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES À COEFFICIENTS CONSTANTS DÉPENDANT DE PARAMÈTRES;

PAR

FRANÇOIS TREVES (*).

Il a été démontré, dans [5], que si $P(v, D)$ est un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbf{R}^n$ dépendant de façon C^∞ d'un paramètre v (point variable d'une variété C^∞ V) (1) et que si, pour deux valeurs quelconques v_1, v_2 du paramètre, $P(v_1, D)$ et $P(v_2, D)$ sont également forts, alors il existe une distribution $E(v)$ sur $\mathbf{R}^n$, dépendant de v, telle que l'opérateur de convolution $E(v)\star$ soit une fonction C^∞ de v à valeurs dans $\mathcal{L}(L^2_c;\, L^2_{\mathrm{loc}})$ (2) et que, pour chaque $v \in V$, $P(v, D)\, E(v) = \delta$ (3). Ce résultat pose tout naturellement la question de sa réciproque : en supposant toujours que $P(v, D)$ dépende de façon C^∞ de v et qu'il existe $E(v)$ avec les propriétés ci-dessus, peut-on en conclure que les polynômes différentiels $P(v, D)$ sont équivalents?

Pour que cette question soit raisonnable, il faut bien entendu supposer la variété V connexe. Même dans ce cas, la réponse est négative si l'on n'impose pas à $P(v, D)$ des conditions supplémentaires. Nous avons en effet montré dans [6] (p. 34-37) que l'opérateur différentiel ordinaire

$$P\left(t, \frac{d}{dx}\right) = e^{-1/t}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} - 1,$$

(*) L'auteur est un Fellow of the Sloan Foundation.

(1) Ceci signifie en particulier que l'ordre de $P(v, D)$ reste borné lorsque v varie dans un compact de V.

(2) L^2_c : espaces des fonctions de carré sommable sur $\mathbf{R}^n$ (pour la mesure de Lebesgue) à support compact;

L^2_{loc} : espaces des fonctions localement de carré sommable sur $\mathbf{R}^n$;

$\mathcal{L}\,(L^2_c;\, L^2_{\mathrm{loc}})$: espace des opérateurs linéaires continus de L^2_c dans L^2_{loc} (muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de L^2_c).

(3) δ est la mesure de Dirac : $E(v)$ est donc une *solution élémentaire* de $P(v, D)$.

où t varie dans la variété avec bord $[0, 1]$, a une solution élémentaire $E(t)$ qui est une fonction C^∞ de t à valeurs dans $\mathcal{L}(L^2_c\,;\, L^2_{\mathrm{loc}})$. Or $P\left(0, \frac{d}{dx}\right)$ n'est pas aussi fort que $P\left(t, \frac{d}{dx}\right)$ pour $t \neq 0$.

Ce genre d'exemple nous a conduit à poser la définition suivante :

DÉFINITION 1. — *Nous dirons que $P(v, D)$ est de type analytique sur V si toute combinaison linéaire des coefficients de $P(v, D)$ qui a un zéro d'ordre infini en un point de V, est nulle dans V entière.*

Le théorème principal qui va être démontré dans ce qui suit peut alors s'énoncer ainsi :

THÉORÈME 1. — *Supposons que $P(v, D)$ dépende de façon C^∞ de $v \in V$, que la variété V soit connexe et que $P(v, D)$ soit de type analytique sur V.*

S'il existe une distribution $E(v)$ dépendant de v telle que $v \to E(v) \bigstar$ soit une fonction C^∞ de v à valeurs dans $\mathcal{L}(L^2_c\,;\, L^2_{\mathrm{loc}})$ et telle que, pour chaque $v \in V$, $P(v, D)\,E(v) = \delta$, alors les polynômes différentiels sur $\mathbf{R}^n$ $P(v, D)$ sont également forts lorsque v parcourt V.

Nous allons aussi montrer que ce résultat est équivalent à celui énoncé ci-dessous, apparemment plus fort. Nous rappelons que H^s_{loc} est l'espace des distributions T sur $\mathbf{R}^n$ telles que, pour toute $\varphi \in C^\infty_0$ (i. e. C^∞ et à support compact), la transformée de Fourier $(\varphi T)^\wedge(\xi)$ de φT soit de carré sommable pour la mesure

$$(1 + |\xi|^2)^s\, d\xi \qquad (s \text{ réel quelconque}) \quad (^4).$$

DÉFINITION 2. — *Un espace de distributions $\mathcal{F}$ sera dit un espace de distributions d'ordre fini s'il existe un réel s tel que $\mathcal{F}$ soit plongé continûment dans H^s_{loc}.*

Le résultat auquel nous faisons allusion ci-dessus est alors le suivant :

THÉORÈME 1'. — *Mêmes hypothèses sur V et $P(v, D)$ que dans le théorème 1.*

S'il existe une fonction C^∞, $v \to E(v)$, à valeurs dans un espace de distributions d'ordre fini sur $\mathbf{R}^n$ telle que, pour tout $v \in V$, $P(v, D)\,E(v) = \delta$, les $P(v, D)$ sont également forts.

Ce résultat a été démontré dans [6] sous l'hypothèse supplémentaire que les $P(v, D)$ soient hypoelliptiques.

---

[4] H^s_{loc} est muni de la topologie définie par les semi-normes

$$T \to \left(\int (1 + |\xi|^2)^s\, |(\varphi T)^\wedge(\xi)|^2\, d\xi\right)^{1/2},$$

φ parcourant l'espace C^∞_0 des fonctions C^∞ à support compact.

Dorénavant la variété V sera supposée *connexe*. Comme il suffit de prouver le résultat *localement par rapport à* v, nous pouvons aussi supposer que V est dénombrable à l'infini (et séparée !).

1. Utilisation du fait que $P(v, D)$ est de type analytique. — Le fait que $P(v, D)$ soit de type analytique sur V est équivalent à la propriété suivante :

Pour tout $v_0 \in V$, il existe une famille finie d'opérateurs différentiels $(D_v)_j$ $(j = 1, \ldots, r)$ sur V et une famille équipotente de fonctions complexes $\{a_j(v)\}$ $(j = 1, \ldots, r)$ sur V tels qu'on ait, pour tout $v \in V$,

$$P(v, D) = \sum_{j=1}^{r} a_j(v) \, [(D_v)_j P(v, D)]_{v=v_0}. \tag{1}$$

Notre assertion est un cas particulier du lemme 2.4 de [6] (p. 40).

Prenant v_0 arbitraire, il nous suffira de prouver que les polynômes différentiels $[(D_v)_j P(v, D)]_{v=v_0}$ sont plus faibles que $P(v_0, D)$, puisque ceci entraîne trivialement que $P(v, D)$ est plus faible que $P(v_0, D)$ pour tout $v \in V$. Mais tout opérateur différentiel D_v sur V peut se mettre localement sous la forme

$$D_v = \sum_{i=1}^{q} g_i(v) \, (L_i)^{k_i},$$

où les g_i sont des fonctions C^∞ de v et les L_i des champs C^∞ de dérivations sur V ([6], lemme 2.6, p. 47). Il suffira donc de démontrer que si L est un champ C^∞ de dérivations sur V, alors pour tout $k = 1, 2, \ldots,$

$$[L^k P(v, D)]_{v=v_0} \preceq P(v_0, D)$$

($\preceq$ signifie « plus faible que »). En utilisant un morceau de variété intégrale de dimension 1, $v = v(t)$, de L passant par v_0 [en supposant que t est un paramètre réel et que $v(0) = v_0$], il nous faut donc montrer que pour tout $k = 1, 2, \ldots,$

$$\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^k P(v(t), D)\right]_{t=0} \preceq P(v(0), D).$$

Nous sommes ainsi ramenés à la situation suivante : On donne un polynôme différentiel $P(t, D_x)$ sur $\mathbf{R}_x^n$ dont les coefficients sont des fonctions C^∞ d'un paramètre réel t. Remarquer que lorsque $k = 0, 1, 2, \ldots,$ les polynômes différentiels

$$\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^k P(t, D_x)\right]_{t=0}$$

engendrent un espace vectoriel de dimension finie (simplement parce que ces polynômes différentiels sont tous d'ordre inférieur à un certain entier).

Nous faisons d'autre part l'hypothèse qu'il existe une distribution $E(t)$ sur $\mathbf{R}^n_x$ dépendant de $t \in \mathbf{R}$ telle que :

1° $t \to E(t) \bigstar$ soit une fonction C^∞ de t à valeurs dans $\mathcal{L}(L^2_c\,;\, L^2_{\text{loc}})$;

2° pour tout t réel,

$$P(t, D_x)\, E(t) = \delta_x. \tag{2}$$

2. L'algèbre $\mathfrak{A}$. — Pour simplifier nous poserons, pour $k = 0, 1, 2, \ldots,$

$$P_k = \left[\left(\frac{d}{dt}\right)^k P(t, D_x)\right]_{t=0}, \qquad E_k = \left[\left(\frac{d}{dt}\right)^k E(t)\right]_{t=0}.$$

En différentiant par rapport à t l'équation (2), on obtient, pour $j = 1, 2, \ldots,$

$$\sum_{k=0}^{j} \frac{1}{k!}\,\frac{1}{(j-k)!}\, P_k E_{j-k} = 0. \tag{3$_j$}$$

D'ailleurs, pour $t = 0$, l'équation (2) donne

$$P_0 E_0 = \delta. \tag{3$_0$}$$

Nous poserons pour $j = 1, 2, \ldots,$

$$X_j = \frac{1}{j!} P_0^{j-1} P_j, \qquad Y_j = \frac{1}{j!} P_0^{j+1} E_j,$$

et $X_0 = Y_0 = \delta$. En multipliant l'équation $(3)_j$ $(j \geq 1)$ par P_0^j, compte tenu de $(3)_0$, il vient

$$\sum_{k=0}^{j} X_k Y_{j-k} = 0. \tag{4$_j$}$$

Noter que X_k est un opérateur différentiel (nous devrions donc plutôt écrire $X_0 = 1$ que $X_0 = \delta$) et que Y_{j-k} est une distribution. En fait nous allons voir que les Y_j eux-mêmes « sont » des polynômes différentiels, c'est-à-dire des distributions de support à l'origine.

Appelons $\mathfrak{A}$ l'algèbre commutative engendrée par $X_0, X_1, \ldots, X_j, \ldots;$ nous noterons multiplicativement le produit dans $\mathfrak{A}$. Les éléments de $\mathfrak{A}$ sont des opérateurs différentiels à coefficients constants sur $\mathbf{R}^n$. Posons provisoirement, pour $j = 1, 2, \ldots,$

$$X'_j = -X_j\,\delta$$

(ainsi X'_j est une distribution de support à l'origine).

Ainsi l'équation $(4)_j$ peut s'écrire

$$(5)_j \qquad Y_j - X'_j = \sum_{k=1}^{j-1} X'_k \star Y_{j-k}.$$

Ceci montre que les Y_j sont des polynômes de convolution en les $X'_1, \ldots, X'_j$. Ceci est vrai pour $j=1$ puisque $Y_1 = X'_1$ et la formule $(5)_j$ le montre par récurrence sur j. Ainsi les Y_j sont des distributions de support à l'origine; nous noterons encore Y_j le polynôme différentiel défini par Y_j. Nous venons de voir que les Y_j sont des polynômes en les X_i, c'est-à-dire $Y_j \in \mathfrak{A}$. Nous interpréterons désormais les produits $X_k Y_{j-k}$ dans les équations $(4)_j$ comme des produits dans $\mathfrak{A}$. Et nous avons $Y_0 = X_0 = 1$ (unité de $\mathfrak{A}$).

3. Comparaison des polynômes différentiels. — Si $P(\xi)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, est un polynôme à n variables à coefficients complexes, on pose

$$\tilde{P}(\xi) = \left(\sum_p |P^{(p)}(\xi)|^2 \right)^{1/2},$$

où p varie dans N^n, c'est-à-dire dans l'ensemble des multi-indices $(p_1, \ldots, p_n)$ (p_j : entier $\geqq 0$), et où

$$P^{(p)}(\xi) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}\right)^{p_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)^{p_n} P(\xi).$$

On dit que le polynôme différentiel $P(D)$ est *plus fort* qu'un autre polynôme différentiel $Q(D)$ s'il existe une constante $C < +\infty$ telle que $\tilde{Q}(\xi) \leqq C\tilde{P}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbf{R}^n$ (5). On remarquera, en particulier, que tout $P^{(p)}(D)$ est plus faible que $P(D)$. Les faits suivants sont équivalents :

a. $Q(D)$ est plus faible que $P(D)$;

b. pour un certain (ou pour tout) ouvert borné non vide $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, pour toute fonction C^∞ φ à support (compact) contenu dans Ω,

$$\| Q(D)\varphi \|_{L^2} \leqq C_\Omega \| P(D)\varphi \|_{L^2} \quad (6),$$

où $C_\Omega < +\infty$ ne dépend pas de φ.

Pour ces résultats, *voir* [2].

LEMME 1. — *Soit ν un entier $\geqq 0$. Il existe $c > 0$ tel que, pour tout $\xi \in \mathbf{R}^n$,*

$$c\widetilde{P^\nu}(\xi) \leqq [\tilde{P}(\xi)]^\nu \leqq \frac{1}{c}\widetilde{P^\nu}(\xi).$$

---

(5) $P(D)$ s'obtient à partir du polynôme $P(\xi)$ en substituant $\dfrac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ à ξ_j $(1 \leqq j \leqq n)$.

(6) $\| \ \|_{L^2}$ est la norme de L^2.

La première inégalité est une conséquence triviale de la formule de Leibniz. Pour prouver la seconde, posons $Q(\xi)=[\tilde{P}(\xi)]^{2\nu}$. On a

$$(6)\qquad |Q(\xi)|^2 \leq C_\nu \sum_{p_1,\ldots,p_{2\nu}} |P^{(p_1)}(\xi)|^2\ldots|P^{(p_{2\nu})}(\xi)|^2,$$

Soit $\varphi\in C_0^\infty$; appelons $\hat{\varphi}$ sa transformée de Fourier :

$$\hat{\varphi}(\xi)=\int e^{-2i\pi\langle\xi,x\rangle}\varphi(x)\,dx.$$

Multiplions les deux membres de (6) par $|\hat{\varphi}(\xi)|^2$, et appliquons le théorème de Plancherel :

$$\|Q(D)\varphi\|_{L^2}^2 \leq C_\nu \sum_{p_1,\ldots,p_{2\nu}} \|P^{(p_1)}(D)\ldots P^{(p_{2\nu})}(D)\varphi\|_{L^2}^2.$$

Supposons que φ garde son support dans un ouvert borné (non vide) Ω. Puisque les $P^{(p)}(D)$ sont plus faibles que $P(D)$, on obtient

$$\|Q(D)\varphi\|_{L^2}^2 \leq C_{\nu,\Omega}\|P(D)^{2\nu}\varphi\|_{L^2}^2,$$

ce qui implique

$$Q(\xi)\leq C'\widetilde{P^{2\nu}}(\xi),\qquad C'<+\infty.$$

Mais en vertu de la première inégalité de l'énoncé, $\widetilde{P^{2\nu}}(\xi)\leq C''[\widetilde{P^{\nu}}(\xi)]^2$, d'où le lemme.

Corollaire. — *Soient P, Q, deux polynômes sur $\mathbf{R}^n$, μ, ν deux entiers ≥ 0. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *$P(D)^\mu$ est plus fort que $Q(D)^\nu$;*

(*b*) *Il existe $C<+\infty$ telle, que pour tout $\xi\in\mathbf{R}^n$,*

$$[\tilde{Q}(\xi)]^\nu \leq C[\tilde{P}(\xi)]^\mu.$$

Remarquer qu'il existe un nombre $a>0$ tel que, pour tout $\xi\in\mathbf{R}^n$, $\tilde{P}(\xi)\geq a$, $\tilde{Q}(\xi)\geq a$. Supposons que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $C_\varepsilon<+\infty$ telle que

$$\tilde{Q}(\xi)\leq C_\varepsilon[\tilde{P}(\xi)]^{1+\varepsilon},\qquad \xi\in\mathbf{R}^n.$$

C'est une conséquence facile du théorème de Seidenberg-Tarski (*voir* [3], théorème 3.2) qu'alors il existe $C<+\infty$ telle que $\tilde{Q}(\xi)\leq C\tilde{P}(\xi)$ pour tout $\xi\in\mathbf{R}^n$. D'où, en combinant avec le corollaire du lemme 1, le résultat suivant :

Lemme 2. — *Soient $P(D)$, $Q(D)$ deux polynômes différentiels sur $\mathbf{R}^n$. Soient deux suites strictement croissantes d'entiers positifs $\{\mu_k\}$, $\{\nu_k\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ telles que $\nu_k/\mu_k\to 1$ lorsque $k\to\infty$.*

Si pour tout k, $Q(D)^{\nu_k}$ est plus faible que $P(D)^{\mu_k}$, alors $Q(D)$ est plus faible que $P(D)$.

Si F est une distribution telle que l'opérateur de convolution $F\star$ applique L^2_c dans L^2_{loc}, et si

$$Q(D)\,\delta = F \star P(D)\,\delta,$$

il est facile de voir que $Q(D)$ est plus faible que $P(D)$. Supposons en particulier que $P(D)$ possède une solution élémentaire E telle que

$$Q(D)E \star L^2_c \subset L^2_{loc},$$

alors

$$Q(D)\,\delta = (Q(D)E) \star P(D)\,\delta,$$

et donc $Q(D) \preceq P(D)$ ($\preceq$: plus faible que) :

LEMME 3. — *Soient $P(D)$, $Q(D)$, $R(D)$ trois polynômes différentiels sur $\mathbf{R}^n$, non nuls. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $P(D) \succeq Q(D)$;

(ii) $R(D)P(D) \succeq R(D)Q(D)$.

Que (i) implique (ii) découle trivialement de l'équivalence de (a) et de (b) (début du paragraphe 3). Prouvons (ii) $\Rightarrow$ (i).

Il existe ([7]) une solution élémentaire G de $P(D)R(D)$ telle que $S(D)G \star L^2_c \subset L^2_{loc}$ pour tout $S(D)$ plus faible que $P(D)R(D)$. En particulier,

$$Q(D)R(D)G \star L^2_c \subset L^2_{loc}. \tag{7}$$

Mais $R(D)G$ est une solution élémentaire de $P(D)$. D'après ce que nous venons de voir, ceci, joint à (7), implique (i).

4. La fonction φ. — Nous définissons la fonction suivante, sur l'ensemble des polynômes différentiels sur $\mathbf{R}^n$: si $Q(D)$ est un tel polynôme différentiel, et s'il existe un entier ν tel que $Q(D) \preceq P(o, D)^\nu$ [pour $P(o, D)$, *voir* fin du paragraphe 1], alors $\varphi(Q(D))$ est le plus petit ν ayant cette propriété. S'il n'existe aucun ν ayant cette propriété, nous poserons $\varphi(Q(D)) = +\infty$.

La fonction φ a les propriétés suivantes :

(Φ_1) *Si* $Q(D) = \sum_{i=1}^{r} Q_i(D)$, *alors*

$$\varphi(Q(D)) \leq \sup_{1\leq i\leq r} \varphi(Q_i(D)).$$

(Φ_2) $$\varphi(Q(D)\,R,D)) \leq \varphi(Q(D)) + \varphi(R(D)).$$

(Φ_3) $$\varphi(P(o(D)^\nu) \leq \nu.$$

(Φ_4) *Si* $Q(D)\,\delta = F \star R(D)\,\delta$, *avec* $F \star L^2_c \subset L^2_{loc}$, *alors*

$$\varphi(Q(D)) \leq \varphi(R(D)).$$

La preuve est immédiate.

([7]) *Voir* [4].

Dorénavant nous considérerons la restriction de la fonction φ à l'algèbre $\mathfrak{A}$. Notons d'abord que

$$\varphi(Y_j) \leqq j+1 \qquad \text{pour} \quad j=1, 2, \ldots,$$

et que $\varphi(Y_0)=0$. Ceci découle de notre hypothèse que, pour tout j, $E_j \star L^2_c \subset L^2_{\text{loc}}$.

LEMME 4. — *Pour tout $A \in \mathfrak{A}$, $\varphi(A) < +\infty$.*

Il suffit de prouver que $\varphi(X_j) < +\infty$ pour tout j. Mais $\varphi(X_0)=0$ et $\varphi(X_1)=\varphi(Y_1) \leqq 2$. Pour $j \geqq 2$, on remarque que

$$X_j = -\sum_{k=0}^{-1} X_k Y_{j-k},$$

d'où, en vertu de (Φ_1) et (Φ_2),

$$\varphi(X_j) \leqq \sup_{0 \leqq i \leqq j-1} [\varphi(X_i) + \varphi(Y_{j-i})].$$

Le résulat intermédiaire crucial, dans la démonstration du théorème 1, est alors le suivant :

LEMME 5. — *Il existe un entier $m \geqq 1$ tel que, pour tout $j=0, 1, \ldots$ et tout $\nu=0, 1, \ldots$, on ait*

$$\varphi(X_j^\nu) \leqq \nu j + m.$$

Ce lemme 5 sera une conséquence du résultat apparemment plus général suivant :

LEMME 6. — *Il existe un entier $m \geqq 1$ tel que pour tout entier ν et tout couple de systèmes d'entiers $\geqq 0$ $(r_1, \ldots, r_{\nu+m})$, $(s_1, \ldots, s_\nu)$, on ait*

$$\varphi(Y_{r_1} \ldots Y_{r_{\nu+m}} X_{s_1} \ldots X_{s_\nu}) \leqq \sum_{=1}^{\nu+m} r_j + \sum_{k=1}^{\nu} s_k + m.$$

On passe du lemme 6 au lemme 5 en prenant $r_1 = \ldots = r_{\nu+m} = 0$. La preuve du lemme 6 est renvoyée en appendice à cause de son caractère technique [8]. Elle est basée sur les propriétés $(\Phi_1), \ldots, (\Phi_4)$ de la fonction φ, sur les relations $(4)_j$:

$$(4)_j \qquad \sum_{k=0}^{j} X_k Y_{j-k} = 0,$$

([8]) La démonstration du lemme 6 est calquée sur celle du lemme 2.5 de [6]. Nous la redonnons cependant intégralement, pour les raisons suivantes : le lemme 6 est le plus important point d'appui de la preuve du théorème 1 ; sa démonstration simplifie et corrige celle du lemme 2.5 de [6].

sur le fait que $\varphi(Y_0)=1$, $\varphi(Y_j)\leqq j+1$ $(j=1, 2, \ldots)$, et enfin sur le fait que les P_j $(j=0, 1, 2, \ldots)$ engendrent un espace vectoriel de dimension finie.

5. Fin de la preuve du théorème 1. — En vertu du lemme 5, on voit que pour tout $\nu=1, 2, \ldots,$

$$(P_0^{j-1}P_j)^\nu \preceq P_0^{j\nu+m} \preceq (P_0^j)^{\nu+m} \qquad (j=1, 2, \ldots).$$

En vertu du lemme 2, on en conclut que

$$P_0^{j-1}P_j \preceq P_0^j,$$

d'où en vertu du lemme 3,

$$P_j \preceq P_0, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

6. Preuve du théorème 1'. — Soit $\Delta_x=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2$ le laplacien sur $\mathbf{R}^n$. Quels que soient le réel s et l'entier q,

$$T \to (1-\Delta_x)^q\, T$$

est une application linéaire continue de H_{loc}^{s+2q} *sur* H_{loc}^s. Comme l'espace C_ν^∞ des fonctions C^∞ sur V, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de la fonction et de ses dérivées, est un espace de Fréchet nucléaire et que les H_{loc}^r sont des espaces de Fréchet, il résulte d'un théorème général de Grothendieck que $(1-\Delta_x)^q$ applique $C_\nu^\infty(H_{\text{loc}}^{s+2q})$ *sur* $C_\nu^\infty(H_{\text{loc}}^s)$ (9) (*voir* [1]).

Supposons alors que $E(\nu)$, solution élémentaire de $P(\nu, D)$, soit une fonction C_ν^∞ de ν à valeurs dans un espace de distributions d'ordre fini $\mathcal{F}$. Il existe un réel s tel que $\mathcal{F}\subset H_{\text{loc}}^s$ (plongement continu). Alors $E(\nu)$ est *a fortiori* dans $C_\nu^\infty(H_{\text{loc}}^s)$. D'après ce que nous venons de dire, il existe $F(\nu)\in C_\nu^\infty(H_{\text{loc}}^{s+2q})$ telle que

$$(1-\Delta_x)^q\, F(\nu)=E(\nu).$$

Choisissons l'entier q assez grand pour que $f\to f\star$ applique continûment H_{loc}^{s+2q} dans $\mathcal{L}(L_c^2; L_{\text{loc}}^2)$, choix qui est toujours possible. Alors $F(\nu)$ est une fonction C^∞ de ν à valeurs dans $\mathcal{L}(L_c^2; L_{\text{loc}}^2)$. En outre

$$(1-\Delta_x)^q\, P(\nu, D_x)\, F(\nu)=\delta.$$

En vertu du théorème 1, les polynômes différentiels $(1-\Delta_x)^q\, P(\nu, D_x)$ doivent être également forts. Du lemme 3 découle alors que les $P(\nu, D_x)$ doivent être également forts.

(9) $C_\nu^\infty(H_{\text{loc}}^r)$ est l'espace des fonctions C^∞ de $\nu\in V$ à valeurs dans H_{loc}^r.

7. Un corollaire du théorème 1'. — Supposons, pour terminer, que la variété V soit une variété analytique complexe et que les coefficients des polynômes différentiels $P(v, D)$ soient des fonctions holomorphes de $v \in V$. Dans ce cas les $P(v, D)$ sont certainement de type analytique. Utilisons alors la remarque générale suivante : si une distribution $E(v)$ en $x \in \mathbf{R}^n$ est une fonction holomorphe de v à valeurs dans $\mathcal{D}'_x$, et si c'est une fonction continue de v à valeurs dans un espace de distributions d'ordre fini $\mathcal{F}$, alors, pour un réel s tel que $\mathcal{F} \subset H^s_{\text{loc}}$ (plongement continu), c'est une fonction holomorphe de v à valeurs dans H^s_{loc} (et non plus seulement dans $\mathcal{D}'_x$). Cela tient à ce que H^s_{loc} est complet et que donc des intégrales du genre [10] :

$$\frac{1}{(2i\pi)^d}\int_{|\zeta_1 - z_1| = r_1} \cdots \int_{|\zeta_d - z_d| = r_d} \frac{E(v(\zeta))}{(\zeta_1 - z_1)^{k_1}\dots(\zeta_d - z_d)^{k_d}}\, d\zeta_1 \dots d\zeta_d$$

qui, *a priori* appartiennent simplement à $\mathcal{D}'_x$, en fait sont dans H^s_{loc}.

Si de plus $E(v)$ est, pour chaque v, une solution élémentaire de $P(v, D_x)$, il résulte du théorème 1' que les $P(v, D_x)$ doivent être également forts.

Appendice :

Démonstration du lemme 6.

Par hypothèse, l'espace vectoriel $\mathfrak{L}$ engendré par P_0, P_1, ... P_k, ... est de dimension finie. Il existe donc un entier $\mu \geqq 0$ tel que pour tout $k = 0, 1, 2, \dots$, on puisse écrire

$$P_k = \sum_{j=0}^{\mu} c_k^j P_j \qquad (c_k^j : \text{nombres complexes}).$$

Nous appellerons m_0 le plus petit entier μ ayant cette propriété. Si $m_0 = 0$, il n'y a rien à démontrer; nous supposerons donc $m_0 \geqq 1$. Nous poserons alors $m = m_0 + 1$.

Nous appellerons (A_ν) la propriété suivante :

(A_ν) *Pour tout ensemble d'indices* $(r_1, \dots, r_{\nu+m})$, $(s_1, \dots, s_\nu)$, *on a*

$$\varphi(Y_{r_1}\dots Y_{r_{\nu+m}} X_{s_1}\dots X_{s_\nu}) \leqq \sum_{j=1}^{\nu+m} r_j + \sum_{k=1}^{\nu} s_k + m.$$

---

[10] d est la dimension complexe de V, $z = (z_1, \dots, z_d)$, $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_d)$ sont des points de $\mathbf{C}^d$; $\zeta \to v(\zeta)$ est un homéomorphisme holomorphe d'un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^d$ sur un voisinage de $v(0)$ dans V; $r_1, \dots, r_d$ sont des nombres > 0 petits.

La conclusion du lemme est que (A_ν) est vraie pour tout $\nu = 0, 1, 2, \ldots$. Nous faisons la convention que si $\nu = 0$, $X_{s_1} \ldots X_{s_\nu} = 1$. Il est clair que (A_0) est vérifiée :

$$\varphi(Y_{r_1} \ldots Y_{r_m}) \leq \sum_{j=1}^{m} \varphi(Y_{r_j}) \leq \sum_{=1}^{m} (r_j + 1).$$

Nous introduirons la propriété, pour $j = 0, 1, \ldots, m + \nu - 2$:

(A_ν^j) *Pour tous* $r_{j+2}, \ldots, r_{\nu+m}$ *et tous* $s_2, \ldots, s_\nu$,

$$\varphi(Y_{r_{j+2}} \ldots Y_{r_{\nu+m}} X_j X_{s_2} \ldots X_{s_\nu}) \leq \sum_{\alpha=j+2}^{\nu+m} r_\alpha + j + \sum_{\beta=2}^{\nu} s_\beta + m.$$

Lemme A.1. — $(A_{\nu-1})$ *implique* (A_ν^j) *pour tout* $j \leq m + \nu - 2$.

Noter que $(A_\nu^0) = (A_{\nu-1})$. Ensuite récurrence sur j. On multiplie $(4)_j$ par $Y_{r_{j+2}} \ldots Y_{r_{\nu+m}} X_{s_2} \ldots X_{s_\nu}$, ce qui donne, en posant

$$\xi_\alpha = Y_{j-\alpha} Y_{r_{j+2}} \ldots Y_{r_{\nu+m}} X_\alpha X_{s_2} \ldots X_{s_\nu},$$

$$\sum_{\alpha=0}^{j} \xi_\alpha = 0. \tag{A.1}$$

Supposons $\alpha \leq j - 1$, et posons $r_{\alpha+2} = j - \alpha$ et, si $\alpha \leq j - 2$,

$$r_{\alpha+2} = \ldots = r_{j+1} = 0.$$

Alors

$$\xi_\alpha = Y_{r_{\alpha+2}} Y_{r_{\alpha+3}} \ldots Y_{r_{\nu+m}} X_\alpha X_{s_2} \ldots X_{s_\nu}.$$

Du fait de la récurrence,

$$\varphi(\xi_\alpha) \leq (j - \alpha) + \sum_{k=j+2}^{\nu+m} r_k + \alpha + \sum_{\beta=2}^{\nu} s_\beta + m,$$

soit

$$\varphi(\xi_\alpha) \leq \sum_{k=j+2}^{\nu+m} r_k + j + \sum_{\beta=2}^{\nu} s_\beta + m.$$

Ceci doit être vrai aussi pour $\alpha = j$ en vertu de (A.1).

Nous introduisons maintenant la propriété (pour $j = 1, \ldots, m$) :

(B_ν^j) *Pour tous* $r_{j+1}, \ldots, r_{\nu+m}$ *et tous* $s_1, \ldots, s_\nu$,

$$\varphi(Y_{r_{j+1}} \ldots Y_{r_{\nu+m}} X_{s_1} \ldots X_{s_\nu}) \leq \sum_{\alpha=j+1}^{\nu+m} r_\alpha + \sum_{\beta=1}^{\nu} s_\beta + m.$$

LEMME A.2. — *Si* (A_ν^j) *est vraie pour* $j = 0, 1, \ldots, m+\nu-2$, *alors* (B_ν^j) *est vraie pour* $j = 1, \ldots, m$.

Nous supposerons donc que (A_ν^j) est vraie pour $0 \leq j \leq m+\nu-2$. Nous commencerons par prouver (B_ν^m); nous prouverons ensuite (B_ν^j) pour $1 \leq j \leq m-1$ par récurrence *descendante* sur j [et en nous appuyant encore sur (A_ν^j) pour $j = 0, 1, \ldots, m+\nu-2$].

PREUVE DE (B_ν^m). — Posons

$$\xi_{r,\alpha} = Y_r Y_{r_{m+2}} \ldots Y_{r_{\nu+m}} X_\alpha X_{s_2} \ldots X_{s_\nu}.$$

Pour $\alpha \leq m-1 = m_0$, donc $(\alpha+2) \leq m+1$, (A_ν^α) implique

$$\varphi(\xi_{r,\alpha}) \leq r + \alpha + \sum_{k=2}^{\nu} (r_{k+m} + s_k) + m. \tag{A.2}$$

Nous voulons démontrer ceci pour tout α. Or

$$X_\alpha = \sum_{j=0}^{m_0} \lambda^j P_0^{\alpha-j} X_j, \qquad \lambda^j \in \mathbf{C},$$

et donc

$$\xi_{r,\alpha} = \sum_{j=0}^{m_0} \lambda^j P_0^{\alpha-j} \xi_{r,j},$$

d'où

$$\varphi(\xi_{r,\alpha}) \leq \sup_{0 \leq j \leq m-1} [\varphi(\xi_{r,j}) + \alpha - j],$$

ce qui entraîne évidemment (A.2).

PREUVE DE (B_ν^j) *pour* $1 \leq j \leq m-1$. — Posons

$$\eta_{r,\alpha} = Y_r Y_{r_{j+2}} \ldots Y_{\nu+m} X_\alpha X_{s_2} \ldots X_{s_\nu}.$$

Nous voulons montrer que

$$\varphi(\eta_{r,\alpha}) \leq r + \sum_{k=j+2}^{\nu+m} r_k + \alpha + \sum_{l=2}^{\nu} s_l + m.$$

Pour $r = 0$, le résultat découle de la récurrence descendante sur j. Pour $\alpha \leq j-1$, le résultat est une conséquence de (A_ν^α). Nous raisonnerons par récurrence (ascendante) sur r et α. Multiplions $(4)_{r+\alpha}$ par

$$Y_{r_{j+2}} \ldots Y_{r_{\nu+m}} X_{s_2} \ldots X_{s_\nu}.$$

Nous obtenons

$$\sum_{\beta=0}^{r+\alpha} \eta_{r+\alpha-\beta,\beta} = 0.$$

Pour $\beta \leqq \alpha - 1$, on a

$$\text{(A.3)} \qquad \varphi(\eta_{r+\alpha-\beta,\beta}) \leqq r + \alpha + \sum_{k=j+2}^{\nu+m} r_k + \sum_{k=2}^{\nu} s_l + m,$$

en vertu de la récurrence sur α; on a (A.3) pour $\beta \geqq \alpha + 1$, en vertu de la récurrence sur r. D'où (A.3) pour $\beta = \alpha$.

Nous introduisons enfin les propriétés suivantes :

$(C_{\nu,h})$ *Pour tous* $r_2, \ldots, r_{\nu+m}$ *et tous* $s_1, \ldots, s_\nu$,

$$\varphi(Y_h Y_{r_2} \ldots Y_{r_{\nu+m}} X_{s_1} \ldots X_{s_\nu}) \leqq h + \sum_{k=2}^{\nu+m} r_k + \sum_{l=1}^{\nu} s_l + m.$$

$(\check{C}_{\nu,h})$ *Pour tous* $r_2, \ldots, r_{\nu+m}$ *et tous* $s_2, \ldots, s_\nu$,

$$\varphi(Y_h Y_{r_2} \ldots Y_{r_{\nu+m}} X_{s_2} \ldots X_{s_\nu}) \leqq h + \sum_{k=2}^{\nu+m} r_k + \sum_{l=2}^{\nu} s_l + m.$$

LEMME A.3. — *Si* $(C_{\nu,k})$ *est vraie pour* $k = 0, \ldots, h-1$, *alors* $(\check{C}_{\nu,h})$ *est vraie.*

Il suffit de multiplier $(4)_h$ par $Y_{r_2} \ldots Y_{r_{\nu+m}} X_{s_2} \ldots X_{s_\nu}$ et d'appliquer $(C_{\nu,0}), \ldots, (C_{\nu,h-1})$.

LEMME A.4. — *Supposons vraies* $(C_{\nu,0})$ *et* $(\check{C}_{\nu,h})$. *Alors* $(C_{\nu,h})$ *est vraie.*

Posons

$$\zeta_{r,j} = Y_h Y_r Y_{r_3} \ldots Y_{r_{\nu+m}} X_j X_{s_2} \ldots X_{s_\nu}.$$

On a

$$\text{(A.4)} \qquad \varphi(\zeta_{r,j}) \leqq h + r + \sum_{k=3}^{\nu+m} r_k + j + \sum_{l=2}^{\nu} s_l + m$$

pour $r = 0$ et tout $j = 0, 1, \ldots$, en vertu de $(C_{\nu,0})$; on a aussi (A.4) pour $j = 0$ et tout r, en vertu de $(\check{C}_{\nu,h})$. Nous raisonnerons donc par récurrence (ascendante) sur r et sur j. En multipliant $(4)_{r+j}$ par

$$Y_h Y_{r_3} \ldots Y_{r_{\nu+m}} X_{s_2} \ldots X_{s_\nu},$$

on obtient

$$\sum_{\alpha=0}^{r+j} \zeta_{r+j-\alpha,\alpha} = 0.$$

On a

$$\text{(A.5)} \qquad \varphi(\zeta_{r+j-\alpha,\alpha}) \leqq h + r + \sum_{k=3}^{\nu+m} r_k + j + \sum_{l=2}^{\nu} s_l + m$$

pour $\alpha \leqq j-1$ à cause de la récurrence sur j dans (A.4); on a (A.5) pour $\alpha \geqq j+1$ à cause de la récurrence sur r. D'où (A.5) pour $\alpha = j$.

LEMME A.5. — $(C_{\nu,0})$ *implique* $(C_{\nu,h})$ *pour tout* $h = 0, 1, \ldots$.

Il suffit de combiner le lemme A.3 et le lemme A.4.

Fin de la preuve du lemme 6. — Comme (A_0) est vraie, nous raisonnons par récurrence sur ν. En combinant le lemme A.1 et le lemme A.2, nous voyons que $(A_{\nu-1}) \Rightarrow (B_\nu^1)$. Mais $(B_\nu^1) = (C_{\nu,0})$. Donc, en vertu du lemme A.5,

$$(A_{\nu-1}) \quad \Rightarrow \quad (\forall h = 0, 1, \ldots)(C_{\nu,h}).$$

Or évidemment

$$(\forall h = 0, 1, \ldots)(C_{\nu,h}) = (A_\nu).$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] GROTHENDIECK (Alexander). — *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* — Providence, American mathematical Society, 1955 (*Memoirs of the American Mathematical Society*, 16).

[2] HÖRMANDER (Lars). — On the theory of general partial differential operators, *Acta Math.*, t. 94, 1955, p. 160-248.

[3] HÖRMANDER (Lars). — On Interior Regularity of the Solutions of Partial Differential Equations, *Comm. pures and appl. Math.*, t. 2, 1958, p. 197.

[4] HÖRMANDER (Lars). Local and global properties of fundamental solutions, *Math. Scand.*, t. 5, 1957, p. 27-39.

[5] TREVES (François). — *Lectures on linear partial differential equations with constant coefficients.* — Rio de Janeiro, Instituto de Matematica pura e aplicada, 1960.

[6] TREVES (François). — Opérateurs différentiels hypoelliptiques, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 9, 1959, p. 1-73.

(Manuscrit reçu le 31 janvier 1962.)

François TREVES,
Professeur,
Yeshiva University,
New York, N. Y. (États-Unis).