BULLETIN DE LA S. M. F.

J. NASH

Le problème de Cauchy pour les équations différentielles d'un fluide général

Bulletin de la S. M. F., tome 90 (1962), p. 487-497

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1962__90__487_0>

Bull. Soc. math. France,
90, 1962, p. 487 à 497.

LE PROBLÈME DE CAUCHY POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'UN FLUIDE GÉNÉRAL ;

PAR

JOHN NASH.

Par « fluide général » nous entendons un fluide visqueux, compressible et conducteur de la chaleur. Le système des équations différentielles d'un tel fluide n'a pas souvent été l'objet d'études mathématiques, en raison de sa complexité. Pourtant, SERRIN [4] a obtenu des théorèmes d'unicité de la solution de ces équations.

Les cinq équations de ce système expriment la conservation de la masse, de la quantité de mouvement (trois équations) et de l'énergie. La forme des équations que nous employons ici est tirée du livre de LANDAU et LIFSCHITZ [*voir* (2), équations (1.3), (15.5), (49.4), p. 2, 48 et 185]. Nous écrivons celles-ci sous la forme suivante :

$$
(1)\quad \begin{cases}
(1a) & \dfrac{d\rho}{dt} = -\rho\nabla . v; \\[2ex]
(1b) & \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{\nabla p}{\rho} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k} + F(x, t); \\[2ex]
(1c) & \rho T\dfrac{dS}{dt} = \nabla . (\varkappa\nabla T) + \dfrac{\eta}{2}\left[\dfrac{\partial v_i}{\partial x_k} + \dfrac{\partial v_k}{\partial x_i} + \dfrac{2}{3}\delta_{ik}\dfrac{\partial v_l}{\partial x_l}\right]\zeta(\nabla . v)^2, \\[2ex]
& \text{où}\quad \sigma'_{ik} = \eta\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_k} + \dfrac{\partial v_k}{\partial x_k}\right) + \left(\zeta - \dfrac{2}{3}\eta\right)\delta_{ik}\dfrac{\partial v_l}{\partial x_l};
\end{cases}
$$

ρ étant la densité du fluide, v la vitesse, p la pression, F la force extérieure, η et ζ les coefficients de viscosité, S l'entropie et $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + v_k\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ la dérivée « lagrangienne » par rapport au temps. La notation $[M_{ik}]^2$ signifie $M_{ik}M_{ik}$ et nous employons la convention de sommation.

Si l'on considère S comme une fonction $S(\rho, T)$, on peut obtenir une équation pour $\frac{dT}{dt}$, puisque

$$\frac{dS}{dt} = S_\rho \frac{d\rho}{dt} + S_T \frac{dT}{dt} = -\rho S_\rho \nabla . v + S_T \frac{dT}{dt}.$$

On obtient

$$(1c') \qquad \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho T S_T}[\nabla . (\varkappa \nabla T) + \rho^2 T S_\rho \nabla . v] + \frac{\eta}{2}\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right]^2 + \zeta(\nabla . v)^2,$$

qui est une équation qui ressemble plus à (1 a) et à (1 b). On peut considérer les quantités p, S, η, ζ et $\varkappa$, qui sont toutes positives, comme des fonctions de ρ et T, qui sont déterminées par la structure physique du fluide.

Dans l'étude mathématique du système (1) nous employons les coordonnées de Lagrange, qu'entraîne le mouvement du fluide, plutôt que les coordonnées d'Euler, qui sont fixées dans l'espace. Soient X_1, X_2, X_3 les coordonnées de Lagrange. Prenons X_1, X_2, X_3, t comme variables indépendantes, et notons par $\frac{\partial}{\partial t}$ la dérivation $\left[\text{la } \frac{d}{dt} \text{ de } (1)\right]$ où les variables X_1, X_2, X_3 sont constantes. Alors

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} & v_i = \frac{\partial x^i}{\partial t}, \qquad x(X, t) = x(X, t_0) + \int_{t_0}^{t} v(X, t')\,dt', \\ & \frac{\partial x(X, t)}{\partial X} = \frac{\partial x(X, t_0)}{\partial X} + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial v(X, t)}{dX}\,dt. \end{aligned}\right.$$

De plus

$$(3) \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial X},$$

où $\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^{-1}$ signifie la matrice inverse de la matrice $\frac{\partial x}{\partial X}$.

Il est maintenant possible d'obtenir une formule pour ρ. Le jacobien $J\left(\frac{x}{X}\right)$ exprime le rapport d'un élément de volume dans l'espace de x à l'élément correspondant de volume dans l'espace de X. Donc, d'après la conservation de la masse, on a

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} & \rho(X, t_1)\, J\left(\frac{x(X, t_1)}{X}\right) = \rho(X, t_2)\, J\left(\frac{x(X, t_2)}{X}\right) \\ & \text{ou} \\ & \rho(X, t) = \rho(X, t_0)\left[J\left(\frac{x(X, t_0)}{X}\right)\Big/ J\left(\frac{x(X, t)}{X}\right)\right]. \end{aligned}\right.$$

$J\left(\frac{x}{X}\right)$ est déterminé par des éléments de la matrice $\frac{\partial x}{\partial X}$. L'équation (4) peut remplacer (1 a), et nous avons ainsi un système de quatre équations différentielles.

Nous étudierons le problème de Cauchy où ρ, T et v sont données pour $t=0$ dans tout l'espace. Il est avantageux de choisir les coordonnées de Lagrange X_1, X_2, X_3 de telle façon que $X=x$ quand $t=0$. Si nous posons u_1, u_2, u_3, u_4 pour v_1, v_2, v_3, T, si nous employons les coordonnées de Lagrange, et si nous écrivons $\frac{\partial}{\partial t}$ au lieu de $\frac{d}{dt}$, les équations prennent la forme suivante :

$$(5)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \mathcal{A}_1\left(\rho, T, \frac{\partial x}{\partial X}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \mathcal{A}_2\left(\rho, T, \frac{\partial x}{\partial X}, \frac{\partial u}{\partial X}\right)\frac{\partial \rho}{\partial X} \\ &\quad + \mathcal{A}_3\left(\rho, T, \frac{\partial x}{\partial X}, \frac{\partial u}{\partial X}\right)\frac{\partial}{\partial X}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^{-1}\right] \\ &\quad + \mathcal{A}_4\left(\rho, T, \frac{\partial x}{\partial X}, \frac{\partial u}{\partial X}, x, t\right),\end{aligned}$$

dans laquelle les quantités $\frac{\partial \rho}{\partial X}$ et $\frac{\partial}{\partial X}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^{-1}\right]$ sont distinguées parce qu'elles dépendront des dérivées, $\frac{\partial^2 x}{\partial X^2}$, du deuxième ordre. Pour éliminer x et ρ de (5), nous remplaçons x et ρ par leurs expressions données par (2), (3) et (4), et en écrivant x à la place de X, nous obtenons

$$(6)\qquad \begin{aligned}u_t &= \mathcal{A}\left(u, \rho_0, \int_0^t u_x\,dt\right)u_{xx} + \mathcal{B}\left(u, u_x, \rho_0, \int_0^t u_x\,dt\right)\int_0^t u_{xx}\,dt \\ &\quad + \mathcal{C}\left(u, u_x, \rho_0, \rho_{0_x}, \int_0^t u_x\,dt, \int_0^t u\,dt, x, t\right),\end{aligned}$$

où ρ_0 est $\rho(X, 0)$, u_x est le tenseur $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ des dérivées de u par rapport aux composantes de x, et $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des tenseurs.

Nous considérons la quantité $w=u-u_0$ pour obtenir plus facilement des évaluations nécessaires de grandeur et de continuité des fonctions qui apparaissent dans les équations différentielles. Alors

$$(7)\qquad w_t = \mathcal{A}\,w_{xx} + \mathcal{B}\int_0^t w_{xx}\,dt + \mathcal{C}',$$

où $w=0$ quand $t=0$, et où

$$\mathcal{C}' = \mathcal{C} + (\mathcal{A} + \mathcal{B}\,t)\,u_{0_{xx}}.$$

Notre démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution est basée sur un procédé itératif qui construit la solution

$$w_t^{(n+1)} = \mathcal{A}^{(n)} w_{xx}^{(n+1)} + \mathcal{B}^{(n)} \int_0^t w_{xx}^{(n)}\, dt + \mathcal{C}'^{(n)}. \tag{8}$$

Les quantités $\mathcal{A}^{(n)}$, $\mathcal{B}^{(n)}$, $\mathcal{C}'^{(n)}$ sont des fonctions de $w^{(n)}$, et $w^{(0)} = 0$ et $w^{(n)}(x, 0) = 0$. Le système (8) est linéaire et parabolique en $w^{(n+1)}$.

Pour nos démonstrations, il faut que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}'$ (c'est-à-dire $\mathcal{A}^{(n)}$, $\mathcal{B}^{(n)}$ et $\mathcal{C}'^{(n)}$) soient bornées et uniformément continues au sens de Hölder pendant un certain intervalle de temps et dans tout l'espace. Les bornes dépendent des propriétés de u_0, ρ_0 et w et des propriétés des quantités p, S, η, ζ et $\varkappa$ comme fonctions de ρ et T. Il est raisonnable de supposer qu'il existe une région ouverte R dans l'espace $(\rho > 0,\ T > 0)$ de ρ et T où p, S, η, ζ et $\varkappa$ soient fonctions analytiques de ρ et T. Cette assertion porte sur la structure physique du fluide.

Nous supposons les données initiales, pour $t = 0$, telles que (ρ_0, T_0) soit toujours dans une région fermée R_2 qui est une sous-région d'une région R_1 fermée et compacte qui est elle-même une sous-région de R. Il y aura des nombres ε_1 et ε_2 assez petits pour que, si $|\rho - \rho_0| \leqq \varepsilon_1$ et $|T - T_0| \leqq \varepsilon_2$, alors (ρ, T) soit dans R_1 et les fonctions p, S, η, ζ et $\varkappa$ de ρ et T et leurs dérivées soient bornées. De (4) et (2) nous observons que quand $\int_0^t v_x\, dt$ est assez petit alors $|\rho - \rho_0| \leqq \varepsilon_1$. Puisque $\left|\int_0^t v_x\, dt\right| \leqq |t v_{0_x}| + \left|\int_0^t w_x\, dt\right|$ et puisque $T = T_0 + w_4$, si nous imposons des bornes assez fortes à $|w|$ et à $|w_x|$, et si t est assez petit, (ρ, T) sera toujours dans R.

Soient

$$\left\{\begin{array}{llll} |\mathcal{A}| \leqq b_1, & |\mathcal{B}| \leqq b_2, & & |\mathcal{C}'| \leqq b_3, \\ H^\alpha(\mathcal{A}) \leqq b_4, & H^\alpha(\mathcal{B}) \leqq b_5, & \text{et} & H^\alpha(\mathcal{C}') \leqq b_6 \end{array}\right. \tag{9}$$

les conditions que nous voulons que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}'$ satisfassent pendant un certain intervalle de temps qui commence à $t = 0$, où H^α est l'indice de continuité höldérienne,

$$H^\alpha(f) = \sup_{0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq t} \frac{|f(x_2, t_2) - f(x_1, t_1)|}{|x_2 - x_1|^\alpha + |t_1 - t_2|^{\frac{\alpha}{2}}}. \tag{10}$$

Afin d'obtenir les bornes de (9) sur $\mathcal{C}'$ il faut qu'on ait quelques renseignements sur F. Il suffit que F soit bornée et que les premières dérivées de F soient bornées et uniformément höldériennes quand t est borné. F est une fonction des coordonnées d'Euler, et l'on peut écrire $F\left(x+\int_0^t v\,dt,\, t\right)$ comme fonction des coordonnées de Lagrange. Aussi

$$\mathcal{C}' = \mathcal{C}'_1 + F,$$

où

$$\mathcal{C}'_1 = \mathcal{C}'_1\left(u,\, u_x,\, \rho_0,\, \rho_{0_x},\, \int_0^t u\,dt,\, \int_0^t u_x\,dt,\, t,\, u_{0_{xx}}\right).$$

Nous supposons que, pour $t=0$, les fonctions ρ_0, ρ_{0_x}, u_0, u_{0_x}, $u_{0_{xx}}$ sont uniformément höldériennes et uniformément bornées. Nous supposons aussi que pendant un intervalle de temps assez petit, nous avons

$$(11)\qquad |w| \leqq \varepsilon_4,\quad |w_x| \leqq \varepsilon_5,\quad H^\alpha(w) \leqq \varepsilon_6,\quad H^\alpha(w_x) \leqq \varepsilon_7 \quad \text{et} \quad 0 \leqq t \leqq \varepsilon_3.$$

Dans le procédé itératif, (11) doit valoir pour tout $w^{(n)}$, tant que $0 \leqq t \leqq \varepsilon_3$. Si les nombres $\varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_7$ sont assez petits, (ρ, T) est donc toujours dans R_1 et $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}'$ satisfont les conditions (9). Dans notre démonstration nous emploierons (9) et nous montrerons que (11) vaut quand t est assez petit, ce qui justifie l'usage de (9). Pour obtenir des bornes de w nous nous servons des résultats de W. Pogorzelski et A. Friedman ([3] et [1]) pour des systèmes paraboliques d'équations différentielles.

L'équation (8) est de la forme

$$(12)\qquad y_t = \mathcal{A} y_{xx} + \varphi \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial y_\gamma}{\partial t} = A_{\gamma\delta}^{\lambda\mu} \frac{\partial^2 y_\delta}{\partial x_\lambda\, \partial x_\mu} + \varphi_\gamma.$$

Rappelons maintenant la condition de parabolicité uniforme de Petrovsky. Soit $M_{\gamma\delta}(\xi)$ la matrice $A_{\gamma\delta}^{\lambda\mu}(i\xi_\lambda)(i\xi_\mu)$ où ξ est un vecteur à composantes réelles. La condition de parabolicité uniforme est qu'il existe un nombre $\sigma > 0$ tel que les parties réelles des valeurs propres de la matrice $M_{\gamma\sigma}$ soient $\leqq -\sigma$ partout quand $|\xi| = 1$. Avec le système (12) les valeurs propres sont :

$$-\left|\frac{\partial x_L}{\partial x_E}\xi\right|^2 \frac{\frac{4}{3}\eta+\zeta}{\rho}, \qquad -\left|\frac{\partial x_L}{\partial x_E}\xi\right|^2 \frac{\eta}{\rho},$$
$$-\left|\frac{\partial x_L}{\partial x_E}\xi\right|^2 \frac{\eta}{\rho} \quad \text{et} \quad -\left|\frac{\partial x_L}{\partial x_E}\xi\right|^2 \frac{\varkappa}{\rho T S_T},$$

où $\dfrac{\partial x_L}{\partial x_E}$ est la matrice de la transformation des coordonnées entre les coordonnées de Lagrange et d'Euler. Nous pouvons supposer que, quand (ρ, T) est dans R_1, S_T et les nombres η, ζ et $\varkappa$ sont bornés supérieurement et inférieurement. La matrice $\dfrac{\partial x_L}{\partial x_E}$ restera voisine de l'identité quand t et v_x restent assez petits; donc nous supposons ici que les bornes de (11) sont suffisamment petites pour que la condition de parabolicité uniforme soit satisfaite. De plus, $\mathcal{A}$ et φ seront bornées et uniformément continues au sens de Hölder, ce qu'exigent aussi les théorèmes de Pogorzelski et Friedman.

Le théorème de Friedman, [1], équation (3.3), pour le système (12), est

$$\text{(13)}\quad \max(t\,|y_{xx}|) + H^{\alpha}\left(t^{\frac{\alpha}{2}}, y\right) + H^{\alpha}\left(t^{\frac{1+\alpha}{2}}, y_x\right) + H^{\alpha}\left(t^{1+\frac{\alpha}{2}}, y_{xx}\right)$$
$$\leqq K\left(\max|y| + \max(t\,|\varphi|) + H^{\alpha}\left(t^{1+\frac{\alpha}{2}}, \alpha\right)\right),$$

où $0 \leqq t \leqq \tau$ et K est déterminé par τ et par les propriétés de $\mathcal{A}$, et où

$$\text{(14)}\quad H^{\alpha}(t^{r}, f) = \sup_{0\leqq t_1 \leqq t_2 \leqq \tau}\left\{(\min(t_1, t_2))^{r}\frac{|f(x_2, t_2) - f(x_1, t_1)|}{|x_2 - x_1|^{\alpha} + |t_2 - t_1|^{\frac{\alpha}{2}}}\right\}.$$

Le résultat de Pogorzelski s'applique au cas $\varphi \equiv 0$ et nous donne une borne de la solution fondamentale du système :

$$\text{(15)}\qquad \int |\Gamma(x_2, t_2;\, x_1, t_1)\, dx_1 < c_{\mu,\tau}(t_2 - t_1)^{-\mu},$$

où $0 \leqq t_1 < t_2 \leqq \tau$ et où μ est un nombre quelconque entre 0 et 1 $(0 < \mu < 1)$. Le nombre $c_{\mu,\tau}$ dépend de μ, τ et $\mathcal{A}$. Si $z(x, t)$ est une solution de $z_t = \mathcal{A} z_{xx}$, alors $z(x_2, t_2) = \int \Gamma z(x_1, t_1)\, dx_1$; pareillement, y étant une solution de (12), et si $y(x, 0) = 0$, alors

$$\text{(16)}\qquad y(x, t) = \int\int_0^t \Gamma(x, t;\, x', t')\, \varphi(x', t')\, dx'\, dt'.$$

Afin de montrer la convergence de la suite $\{w^{(n)}\}$ définie par (8) nous considérons les quantités $(w^{(n+1)} - w^{(n)})$ et l'équation

$$\text{(17)}\quad [w^{(n+1)} - w^{(n)}]_t = \frac{\mathcal{A}^{(n)} + \mathcal{A}^{(n-1)}}{2}[w^{(n+1)} - w^{(n)}]_{xx}$$
$$+ [\mathcal{A}^{(n)} - \mathcal{A}^{(n-1)}]\left(\frac{w^{(n+1)} + w^{(n)}}{2}\right)_{xx}$$
$$+ \left(\frac{\mathcal{B}^{(n)} + \mathcal{B}^{(n-1)}}{2}\right)\int_0^t [w^{(n)} - w^{(n-1)}]_{xx}\, dt$$
$$+ [\mathcal{B}^{(n)} - \mathcal{B}^{(n-1)}]\int_0^t \left(\frac{w^{(n)} + w^{(n-1)}}{2}\right)_{xx} dt$$
$$+ [\mathcal{C}'^{(n)} - \mathcal{C}'^{(n-1)}].$$

Nous démontrerons que les fonctions $w^{(n)}$ et les différences $w^{(n+1)} - w^{(n)}$ et leurs dérivées ont les propriétés suivantes quand t est assez petit :

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{ll}
|w^{(n)}| \leqq \sigma_1 t^{1-\mu}, & H^\alpha(w^{(n)}) \leqq \sigma_2 t^{1-\mu-\frac{\alpha}{2}}, \\
|w_x^{(n)}| \leqq \sigma_3 t^{\frac{1}{2}-\mu}, & H^\alpha(w_x^{(n)}) \leqq \sigma_4 t^{\frac{1}{2}-\mu-\frac{\alpha}{2}}, \\
|w_{xx}^{(n)}| \leqq \sigma_5 t^{-\mu}, & H_x^\alpha(w_{xx}^{(n)}) \leqq \sigma_6 t^{-\mu-\frac{\alpha}{2}}, \\
|w^{(n+1)} - w^{(n)}| \leqq \beta_1 \nu^n t^{n\left(\frac{1}{2}-\mu\right)+1-\mu}, & H^\alpha(w^{(n+1)} - w^{(n)}) \leqq \beta_2 \nu^n t^{n\left(\frac{1}{2}-\mu\right)+1-\mu-\frac{\alpha}{2}}, \\
|w_x^{(n+1)} - w_x^{(n)}| \leqq \beta_3 \nu^n t^{n\left(\frac{1}{2}-\mu\right)+\frac{1}{2}-\mu}, & H^\alpha(w_x^{(n+1)} - w_x^{(n)}) \leqq \beta_4 \nu^n t^{n\left(\frac{1}{2}-\mu\right)+\frac{1}{2}-\mu-\frac{\alpha}{2}}, \\
|w_{xx}^{(n+1)} - w_{xx}^{(n)}| \leqq \beta_5 \nu^n t^{n\left(\frac{1}{2}-\mu\right)-\mu}, & H_x^\alpha(w_{xx}^{(n+1)} - w_{xx}^{(n)}) \leqq \beta_6 \nu^n t^{n\left(\frac{1}{2}-\mu\right)-\mu-\frac{\alpha}{2}}.
\end{array}\right.$$

H_x^α désigne le coefficient de Hölder d'une fonction de x et t seulement comme fonction de x, et μ est le nombre que nous utilisons dans (15) $\left(\mu \text{ doit être } < \frac{1}{2}\right)$. Les constantes $\sigma_1, \ldots, \sigma_6$ et $\beta_1, \ldots, \beta_6$ seront déterminées ci-dessous.

Pour employer (17) dans la démonstration par induction de (18) il faut avoir des bornes des valeurs absolues et des coefficients de Hölder des différences $\mathcal{A}^{(n)} - \mathcal{A}^{(n-1)}$, $\mathcal{B}^{(n)} - \mathcal{B}^{(n-1)}$ et $\mathcal{C}'^{(n)} - \mathcal{C}'^{(n-1)}$. Les quantités $\frac{1}{2}(\mathcal{A}^{(n)} + \mathcal{A}^{(n-1)})$, etc., ont les mêmes bornes, celles de (9), que les quantités $\mathcal{A}^{(n)}$, $\mathcal{B}^{(n)}$ et $\mathcal{C}'^{(n)}$.

Considérons $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{C}'$ comme fonction $\mathcal{E}(\psi, x, t)$, où ψ est un vecteur dont les composantes sont les composantes des quantités w, w_x, $\int_0^t w\, dt$ et $\int_0^t w_x\, dt$. On a

$$(19)\quad \begin{aligned}
\mathcal{E}^{(n)} - \mathcal{E}^{(n-1)} &= \mathcal{E}(\psi^{(n)}, x, t) - \mathcal{E}(\psi^{(n-1)}, x, t) \\
&= \int_{\psi^{(n-1)}}^{\psi^{(n)}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \psi}\, d\psi \leqq \left[\max\left|\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \psi}\right|\right] \cdot |\psi^{(n)} - \psi^{(n-1)}|,
\end{aligned}$$

où l'on entend par la valeur absolue la somme des valeurs absolues des composantes d'un vecteur (ou tenseur). Si nous posons

$$\psi^{(\lambda)} = (n-\lambda)\,\psi^{(n-1)} + (1-n+\lambda)\,\psi^{(n)},$$

$$\psi_i^{(\lambda)} = \psi^{(\lambda)}(x_i, t_i) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E}_\psi = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \psi},$$

nous pouvons écrire

$$H^{\alpha}(\mathcal{E}^{(n)} - \mathcal{E}^{(n-1)})$$

$$= H^{\alpha}\left[\int_{n-1}^{n} \mathcal{E}_{\psi} \frac{\partial \psi(\lambda)}{\partial \lambda} d\lambda\right]$$

$$= \sup_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t} \frac{\left| \int_{n-1}^{n} \left[\mathcal{E}_{\psi}(\psi_1^{(\lambda)}, x_1, t_1) \frac{\partial \psi_1^{(\lambda)}}{\partial \lambda} - \mathcal{E}_{\psi}(\psi_2^{(\lambda)}, x_2, t_2) \frac{\partial \psi_2^{(\lambda)}}{\partial \lambda} \right] d\lambda \right|}{|x_1 - x_2|^{\alpha} + |t_1 - t_2|^{\frac{\alpha}{2}}}$$

$$= \sup_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t} \frac{\left\{ \begin{array}{l} \left| \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{(\mathcal{E}_{\psi})_1 + (\mathcal{E}_{\psi})_2}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\psi_1^{(\lambda)} - \psi_2^{(\lambda)}) \, d\lambda \right. \\ \left. + \displaystyle\int_{n-1}^{n} [(\mathcal{E}_{\psi})_1 - (\mathcal{E}_{\psi})_2] \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\psi_1^{(\lambda)} + \psi_2^{(\lambda)}\right) d\lambda \right| \end{array} \right\}}{|x_1 - x_2|^{\alpha} + |t_1 - t_2|^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Puisque $\frac{\partial}{\partial \lambda} \psi^{(\lambda)} = \psi^{(n)} - \psi^{(n-1)}$, on obtient enfin

$$H^{\alpha}(\mathcal{E}^{(n)} - \mathcal{E}^{(n-1)}) \leq \left[\max_{\lambda} |\mathcal{E}_{\psi}|\right] H^{\alpha}(\psi^{(n)} - \psi^{(n-1)}) + \max_{\lambda} H^{\alpha}(\mathcal{E}_{\psi}) \max |\psi^{(n)} - \psi^{(n-1)})|, \tag{20}$$

où $\max_{\lambda} |\mathcal{E}_{\psi}|$ et $\max_{\lambda} H^{\alpha}(\mathcal{E}_{\psi})$ peuvent être bornées par le moyen des bornes de (11) qui donnent les mêmes résultats pour $\psi^{(\lambda)}$ que pour tout $\psi^{(n)}$. Pour démontrer (18), nous obtenons des bornes de $w^{(n+1)}$ et de $w^{(n+1)} - w^{(n)}$ à l'aide des bornes de (18) de $w^{(n)}$ et de $w^{(n)} - w^{(n-1)}$, puis nous montrons que ces bornes calculées ne sont pas plus grandes que celles de (18) si les constantes γ, $\sigma_1 \ldots \sigma_6$, $\beta_1 \ldots \beta_6$ de (18) ont des valeurs appropriées et si t est assez petit. D'abord, des équations (8), (15) et (16), on déduit

$$|w^{(n+1)}| \leq c_{\mu,\tau} \int_0^t (t - t')^{-\mu} \left[\max |\mathcal{B}| \int_0^{t'} \sigma_5 t''^{-\mu} \, dt'' + \max |\mathcal{C}'| \right] dt'$$

$$\leq c_{\mu,\tau} \int_0^t (t - t')^{-\mu} \left[\frac{b_2 \sigma_5 t'^{1-\mu}}{1 - \mu} + b_3 \right] dt' \qquad \text{et, par (9),}$$

$$\leq c_{\mu,\varepsilon_3} \left[\frac{b_2 \sigma_5 t^{1-\mu}}{1 - \mu} + b_3 \right] \frac{t^{1-\mu}}{1 - \mu}$$

$$\leq \frac{2 c_{\mu,\varepsilon_3} b_3}{1 - \mu} t^{1-\mu} = \sigma_1^{\star} t^{1-\mu} \qquad \text{quand} \quad \frac{b_2 \sigma_5 t^{1-\mu}}{1 - \mu} \leq b_3$$

ou

$$|w^{(n+1)}| \leq \sigma_1^{\star} t^{1-\mu} \qquad \text{quand} \quad t \leq \delta_1. \tag{21}$$

Le nombre δ_1 est une fonction de σ_5, mais $\sigma_1^\star$ ne dépend pas des constantes de (18). De même de (8) et (13) on peut déduire

$$(22)\quad \max(t\,|\,w_{xx}^{(n+1)}\,|) + H^\alpha\left(t^{\frac{\alpha}{2}},\ w^{(n+1)}\right) + H^\alpha\left(t^{\frac{1+\alpha}{2}},\ w_x^{(n+1)}\right) + H^\alpha\left(t^{1+\frac{\alpha}{2}},\ w_{xx}^{(n+1)}\right) \leqq 2K\sigma_1^\star t^{1-\mu} \quad \text{quand} \quad t \leqq \delta_2,$$

parce que le terme $\max|\,w^{(n+1)}\,|$ devient le terme le plus grand du côté droit de (13) pour les valeurs petites de t. Le nombre δ_2 est déterminé par les nombres b_1, ... et σ_1, ... De (22) on obtient immédiatement

$$\sigma_5^\star = \sigma_6^\star = 2K\sigma_1^\star \qquad \text{pour} \quad t \leqq \delta_2.$$

Pour les fonctions bornées, à dérivées du deuxième ordre bornées, on a

$$|\,f_x\,| \leqq c\sqrt{\max|\,f\,|\max|\,f_{xx}\,|}.$$

Donc

$$|\,w_x^{(n+1)}\,| \leqq c\sqrt{\sigma_1^\star\sigma_5^\star}\,t^{\frac{1}{2}-\mu} = c\sqrt{2K}\,\sigma_1^\star t^{\frac{1}{2}-\mu} = \sigma_3^\star t^{\frac{1}{2}-\mu}.$$

De ce résultat et de $H^\alpha\left(t^{\frac{1+\alpha}{2}},\ w_x^{(n+1)}\right) \leqq 2K\sigma_1^\star t^{1-\mu}$ nous pouvons borner $H^\alpha(w_x^{(n+1)})$. Soit $0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq \delta_2$; alors

$$t_1^{\frac{1+\alpha}{2}} \frac{|\,w_x^{(n+1)}(x_2,\,t_2) - w_x^{(n+1)}(x_1,\,t_1)\,|}{|\,x_2 - x_1\,|^\alpha + |\,t_2 - t_1\,|^{\frac{\alpha}{2}}} \leqq 2K\sigma_1^\star t_2^{1-\mu}$$

et

$$|\,w_x^{(n+1)}(x_2,\,t_2) - w_x^{(n+1)}(x_1,\,t_1)\,| \leqq 2\sigma_3^\star t_2^{\frac{1}{2}-\mu}.$$

Donc

$$|\,t_2 - t_1\,|^{\frac{\alpha}{2}} \frac{|\,w_x^{(n+1)}(x_2,\,t_2) - w_x^{(n+1)}(x_1,\,t_1)\,|}{|\,x_2 - x_1\,|^\alpha + |\,t_2 - t_1\,|^{\frac{\alpha}{2}}} \leqq 2\sigma_3^\star t_2^{\frac{1}{2}-\mu},$$

et donc

$$H^\alpha(w_x^{(n+1)}) \leqq 2t_2^{\frac{1}{2}-\mu} \sup \min_{t_1}\left[K\sigma_1^\star t_2^{\frac{1}{2}} t_1^{-\frac{1+\alpha}{2}},\ \sigma_3^\star\,|\,t_2 - t_1\,|^{-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

ou

$$H^\alpha(w_x^{(n+1)}) \leqq \sigma_4^\star t^{\frac{1}{2}-\mu-\frac{\alpha}{2}},$$

où $\sigma_4^\star$ est déterminé par $K\sigma_1^\star$ et par $\sigma_3^\star$. Pareillement nous obtenons

$$H^\alpha(w^{(n+1)}) \leqq \sigma_2^\star t^{1-\mu-\frac{\alpha}{2}}.$$

Les valeurs obtenues pour $\sigma_1^\star$, ..., $\sigma_6^\star$ ne dépendent pas de celles de σ_1, ..., σ_6; donc nous les utilisons pour définir les valeurs appropriées de

$\sigma_1, \ldots, \sigma_6$, ainsi $\sigma_i = \sigma_i^*$. La valeur de δ_2, qui dépend de $\sigma_1, \ldots, \sigma_6$, donne l'intervalle de temps pendant lequel valent les bornes associées à $\sigma_1, \ldots, \sigma_6$. Notons que ces bornes entraînent la validité de (11) pendant un intervalle de temps assez petit, soit $0 \leqq t \leqq \delta_3$, et que (11) entraîne (9). Ainsi la démonstration par induction des bornes de (18) de $w^{(n)}$ est complète.

Trouvons maintenant des bornes pour $w^{(n+1)} - w^{(n)}$ moyennant des bornes de $w^{(n-1)}$, $w^{(n)}$, $w^{(n+1)}$ et $w^{(n)} - w^{(n-1)}$. Estimons d'abord la valeur absolue et le coefficient de Hölder des quatre derniers termes de (17) qui joueront le rôle de la fonction φ de (12) ou de (16) dans le calcul des bornes de $w^{(n+1)} - w^{(n)}$; nous obtenons

$$t\,|\,\varphi^{(n)}\,| \leqq h_1\,\beta_3\,\nu^{n-1}\,t^{n\left(\frac{1}{2}-\mu\right)+1} \tag{23}$$

et

$$H^\alpha\left(t^{1+\frac{\alpha}{2}},\ \varphi^{(n)}\right) \leqq h_2\,\beta_4\,\nu^{n-1}\,t^{n\left(\frac{1}{2}-\mu\right)+1} \qquad \text{quand } t \leqq \delta_3,$$

où h_1 et h_2 ne dépendent pas de $\beta_1, \ldots, \beta_6$. C'est le terme $\mathcal{C}'^{(n)} - \mathcal{C}'^{(n-1)}$ de (17) qui devient le plus grand quand t est petit, et c'est $w_x^{(n)} - w_x^{(n-1)}$ qui contribue le plus à la grandeur de $\mathcal{C}'^{(n)} - \mathcal{C}'^{(n-1)}$ quand nous l'estimons par le moyen de (18), de (19) et de (20).

De (23), comme pour (21), on obtient

$$|\,w^{(n+1)} - w^{(n)}\,| \leqq h_3\,\beta_3\,\nu^{n-1}\,t^{n\left(\frac{1}{2}-\mu\right)+1-\mu}. \tag{24}$$

Avec (23) et (24) on peut appliquer (23) à (17) pour estimer la continuité et les dérivées de $w^{(n+1)} - w^{(n)}$, ce qui donne

$$\begin{aligned} &\max\left(t\,|\,w_{xx}^{n+1} - w_{xx}^{(n)}\,|\right) \\ &\quad + H^\alpha\left(t^{\frac{\alpha}{2}},\ w^{(n+1)} - w^{(n)}\right) + H^\alpha\left(t^{\frac{1+\alpha}{2}},\ w_x^{(n+1)} - w_x^{(n)}\right) \\ &\quad + H^\alpha\left(t^{1+\frac{\alpha}{2}},\ w_{xx}^{(n+1)} - w_{xx}^{(n)}\right) \leqq h_4\,\beta_3\,\nu^{n-1}\,t^{n\left(\frac{1}{2}-\mu\right)+1-\mu}, \end{aligned} \tag{25}$$

quand $t \leqq \delta_4$, où h_4 ne dépend pas des nombres σ_1 et β_i, et où δ_4 est déterminé de la même manière que δ_3, etc. Or le calcul de toutes les bornes pour $w^{(n+1)} - w^{(n)}$ et ses dérivées s'accomplit exactement comme celui des bornes pour $w^{(n+1)}$. Tous les résultats prennent la forme $\beta_1^* = \dfrac{c_i\,\beta_3}{\gamma}$. Nous choisissons γ de telle manière que $\beta_3^* = \beta_3$, puis nous choisissons $\beta_3 = \sigma_3$ et $\beta_i = \max\left(\sigma_i,\ \dfrac{c_i\,\beta_3}{\nu}\right)$. Les nombres σ_i et β_i étant connus, les nombres δ_i et l'intervalle de temps où les bornes sont valables seront déterminés.

Toutes les bornes de $w^{(n+1)} - w^{(n)}$ sont de la forme $\beta_i\left(\nu\,t^{\frac{1}{2}-\mu}\right)^n t^r$, donc on voit que si $\nu\,t^{\frac{1}{2}-\mu}$ est assez petit, la suite $\{\,w^{(n)}\,\}$ convergera vers une limite w

qui est la solution de (7) et qui donne la solution de (1). De plus nous savons que la limite w aura certaines dérivées et certaines propriétés de continuité. La convergence du procédé itératif nous donne aussi la démonstration de l'unicité de la solution, au moins dans la classe des solutions ayant des bornes semblables à celles de (18) pour $w^{(n)}$. Il est évident que nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution seulement pour un intervalle de temps assez petit.

Il est également possible d'énoncer quelques conditions qui, tant qu'elles sont vérifiées, assurent l'existence continue de la solution. Si les quantités $\max|w|$, $\max|w_x|$, $H^\alpha(w)$, $H^\alpha(w_x)$ restent bornées (ici on peut remplacer w par v et T) et si (ρ, T) reste toujours dans une sous-région compacte (comme R_1) de la région R, alors la solution continue d'exister.

On peut aussi démontrer l'existence et l'unicité de la solution par la méthode de la transformée de Fourier, arrivant à un résultat qui exige des données initiales petites mais qui n'a pas besoin de continuité höldérienne. Dans cette méthode, à une fonction $g(x, t)$, nous associons $\hat{g}(\xi, t)$, la transformée par rapport à x. Un intervalle $0 \leq t \leq \tau$ de temps étant prescrit, nous posons $\hat{g}^*(\xi) = \max\limits_{0 \leq t \leq \tau} |\hat{g}(\xi, t)|$ et $|g^*| = \int |g^*|\, d\xi$. Le procédé dépend de l'obtention de bornes semblables à $|g|^*$ pour les fonctions qui entrent en jeu.

Si la mesure $|\ \ |^*$ est assez petite pour les fonctions $\left(\rho_0 - \lim\limits_{|x| \to \infty} \rho_0\right)$, $\left(v_0 - \lim\limits_{|x| \to \infty} v_0\right)$, $\left(T_0 - \lim\limits_{|x| \to \infty} T_0\right)$, v_{0_x} et T_{0_x} et si cette mesure est finie pour les fonctions ρ_{0_x}, $v_{0_{xx}}$ et $T_{0_{xx}}$, alors il y aura une solution de (1) tant que t est petit.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] FRIEDMAN (Avner). — Interior estimates for parabolic systems of partial differential equations, *J. Math. and Mech.*, t. 7, 1958, p. 393-418.

[2] LANDAU (L. D.) and LIFŠIC (E. M.). — *Fluid mechanics* [Translated from " Mekhanika splošnykh sred, Izdanie vtoroe ". Moscou, 1954]. — London, Pergamon Press, 1959.

[3] POGORZELSKI (Withold). — Propriétés des solutions du système parabolique d'équations aux dérivées partielles, *Math. Scand.*, t. 6, 1958, p. 237-262.

[4] SERRIN (James). — The uniqueness of compressible fluid motions, *Arch. for rat. Mech. and Anal.*. t. 3, 1959, p. 271-288.

(Manuscrit reçu le 19 janvier 1962).

John NASH,
Institute for advanced Study,
Princeton, N. J. (États-Unis.).