BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN BASS

Espaces de Besicovitch, fonctions presque-périodiques, fonctions pseudo-aléatoires

Bulletin de la S. M. F., tome 91 (1963), p. 39-61
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1963__91__39_0>

Bull. Soc. math. France,
91, 1963, p. 39 à 61.

ESPACES DE BESICOVITCH, FONCTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES, FONCTIONS PSEUDO-ALÉATOIRES ;

PAR

JEAN BASS.

SOMMAIRE. — Les fonctions complexes $f(t)$ telles que la moyenne quadratique

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt$$

existe ne constituent pas dans leur ensemble un espace vectoriel. Mais on peut les grouper en espaces vectoriels incomplets E. Dans un espace E, toute suite de Cauchy converge vers une limite, et la limite obtenue est un prolongement de l'espace E. Une suite de Cauchy particulière permet de représenter la classe des translatées d'une fonction $f(t)$ de E pour la formule

$$f(t+h) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2i\pi\omega h)\; Y(t, d\omega),$$

où $Y(t, \Delta)$ est une fonction spectrale telle que la moyenne de $\overline{Y}(t, \Delta)\; Y(t, \Delta')$ soit nulle lorsque Δ et Δ' sont disjoints. Suivant les propriétés de $Y(t, \Delta)$, on classe les fonctions f en fonctions presque-périodiques, fonctions pseudo-aléatoires, fonctions singulières.

1. **Espace de Besicovitch.** — Nous considérons des fonctions complexes de la variable réelle t, définies pour $t > 0$, et localement intégrables au sens de Riemann. Une fonction $f(t)$ satisfaisant à ces conditions générales possède une *moyenne temporelle* sur l'intervalle $(0, T)$, définie par

$$M_T f = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt. \tag{1}$$

Elle possède aussi une *moyenne quadratique*

$$M_T |f|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt. \tag{2}$$

Lorsque $T \to \infty$, ces moyennes peuvent se comporter de façons très diverses. Si $M_T |f|^2$ reste bornée par un nombre fixe, on dit que $f(t)$ appartient à l'*espace* B_2 de *Besicovitch.* Cet espace a été introduit pour l'étude des fonctions presque-périodiques. C'est évidemment un *espace vectoriel.* On peut lui donner une structure topologique en définissant la distance $\| f - g \|$ de deux fonctions par

$$\| f - g \|^2 = \limsup_T \int_0^T | f(t) - g(t) |^2 \, dt.$$

On peut en outre préciser cette structure topologique [4]. L'espace B_2 est en effet un *espace complet* (*théorème de Marcinkiewicz*). Soit f_n une suite de fonctions de B_2. C'est une suite de Cauchy si, à tout ε, on peut faire correspondre un nombre $n_0(\varepsilon)$ tel que les conditions

$$n > n_0(\varepsilon), \qquad k > n_0(\varepsilon)$$

entraînent

$$\| f_n - f_k \| < \varepsilon.$$

Il existe alors une fonction f, appartenant à B_2, telle que

$$\lim_{n \to \infty} \| f_n - f \| = 0.$$

Cette fonction n'est pas très bien définie. En effet, dans B_2, la fonction nulle, c'est-à-dire la fonction de norme nulle, peut prendre n'importe quelle valeur sur tout ensemble borné de valeur de t. Deux fonctions « égales » peuvent donc avoir une différence non nulle sur tout ensemble borné. C'est grâce à cette remarque qu'il est possible, non seulement de démontrer l'existence de la limite f, mais même de construire effectivement cette limite. Marcinkiewicz définit f de la façon suivante :

De la suite f_n, on peut d'abord extraire une sous-suite f_{n_i} telle que

$$\| f_{n_i} - f_{n_{i+1}} \| \leq \frac{1}{2^{i+1}}.$$

On choisit une suite λ_i de valeurs de t telle que

$$\text{(a)} \qquad \lambda_{i+1} > 2\lambda_i,$$

$$\text{(b)} \qquad \limsup_{T > \lambda_i} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T | f_{n_{i+1}} - f_{n_i} |^2 \, dt} < \frac{1}{2^i}.$$

On pose alors

$$\begin{aligned} f(t) &= f_{n_i}(t) && \text{si } \lambda_i < t < \lambda_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots), \\ &= 0 && \text{si } 0 < t < \lambda_1 \end{aligned}$$

et l'on démontre sans difficultés que f est bien limite de la suite f_{n_i}, que plus généralement f est limite de la suite f_n, et que f appartient à B_2.

L'espace B_2 apparaît ainsi comme assez analogue à l'espace L^2 des fonctions de carrés sommables sur un intervalle. La différence la plus caractéristique est que, dans L^2, une fonction de norme nulle est nulle presque partout, c'est-à-dire non nulle sur un ensemble de mesure nulle, alors que dans B_2, une fonction de norme nulle peut être non nulle sur un ensemble borné arbitraire. La structure des fonctions de B_2 dépend seulement de leurs propriétés à l'infini. En outre, B_2 n'est pas un espace de Hilbert.

2. **Espace** *P*. — L'espace de Besicovitch est d'un emploi commode, mais il n'est pas assez précis pour bien des applications. Ce qui est le plus souvent requis, c'est que $M_T |f|^2$ *ait une limite finie,* et non pas seulement une limite supérieure, lorsque $T \to \infty$. Nous poserons

$$M|f|^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt$$

et désignerons par *espace* P l'ensemble des fonctions pour lesquelles $M|f|^2$ existe. Nous dirons des fonctions appartenant à P ou que ce sont des P-fonctions.

Le symbole M désignera d'une façon générale l'opérateur de *valeur moyenne,* défini par

$$M(\ ) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (\ )\, d_t.$$

Pour le moment, nous ne nous préoccupons pas de l'existence de Mf.

L'espace P est un sous-ensemble de l'espace B_2. Mais *ce n'est pas un espace vectoriel.* Si f et g appartiennent à P, il n'est pas sûr que $f+g \in P$. Cela équivaut à dire que, si $M|f|^2$ et $M|g|^2$ existent, $Mf\bar{g}$ n'existe pas nécessairement.

Exemple 1. — $f(t) = 1$, $g(t) = \exp(i \log t)$.

On a d'abord $M|f|^2 = M|g|^2 = 1$.

On vérifie que

$$Mg = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \exp(i\log t)\ dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{1+i}\exp(i \log T).$$

n'existe pas. Or

$$M|f+g|^2 = M|1+g|^2 = 2 + Mg + M\bar{g},$$

Mg et $M\bar{g}$ n'existent pas. $Mg + M\bar{g}$ est la limite de

$$\frac{1}{2}(\cos\log T + \sin\log T)$$

et n'existe pas non plus. Donc $M\,|\,f+g\,|^2$ n'existe pas et $f+g$ n'appartient pas à P.

EXEMPLE 2. — Soit $t_1 = 0, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ une suite croissante de valeurs de t.

Posons

$$f(t) = 1, \qquad g(t) = (-1)^n \qquad \text{si} \quad t_n < t < t_{n+1}.$$

Pour que $f+g \in P$, il est nécessaire et suffisant que $g(t)$ possède une moyenne. Or posons

$$t_n - t_{n-1} = l_n, \qquad t_n = l_1 + \ldots + l_n.$$

Si la moyenne existe, elle est définie par la limite de la somme

$$M_N = \frac{1}{t_N}\sum_{n=1}^{N}(-1)^n l_n = \frac{\sum\limits_{n=1}^{N}(-1)^n l_n}{\sum\limits_{n=1}^{N} l_n}.$$

Posons

$$\begin{aligned} l_1 + l_3 + \ldots + l_{2N-1} &= U_N, \\ l_2 + l_4 + \ldots + l_{2N} &= V_N. \end{aligned}$$

On a

$$M_{2N} = \frac{V_N - U_N}{U_N + V_N}, \qquad M_{2N+1} = \frac{V_N - U_{N+1}}{U_N + V_N} = M_{2N} + \frac{U_N - U_{N+1}}{U_N + V_N}.$$

Supposons alors que la longueur l_n des intervalles choisis augmente rapidement avec n, et d'une façon précise qu'il existe un nombre $a > 1$ et un nombre $b > 1$ tels que

$$\lim_{N\to\infty}\frac{V_N}{U_N} = a, \qquad \lim_{N\to\infty}\frac{U_{N+1}}{U_N} = b.$$

Alors M_{2N} a une limite égale à $\frac{a-1}{a+1}$, et M_{2N+1} a une limite égale à $\frac{a-b}{a+1}$. Ces deux limites sont différentes, de sorte que M_N n'a pas de limite unique lorsque $N\to\infty$, et que Mg n'existe pas. Si par exemple $l_n = a^n$, on a

$$\frac{V_N}{U_N} = a, \qquad \frac{U_{N+1}}{U_N} = \frac{1-a^{2N+2}}{1-a^{2N-1}}, \qquad b = a^2.$$

L'espace P n'est donc pas un espace vectoriel. Mais l'*espace P contient des sous-espaces vectoriels*. Le plus connu est celui des combinaisons linéaires de fonctions exponentielles de la forme $\exp(2i\pi\omega t)$. C'est l'*espace des fonctions presque-périodiques.* Ce sous-espace n'est qu'un exemple, parmi bien d'autres aussi importants, des sous-espaces vectoriels de P. Introduisons, avec J.-P. BERTRANDIAS, la terminologie suivante. Nous dirons que deux P-fonctions f, g sont *comparables* si $Mf\bar{g}$ existe, et nous écrirons $f \smile g$. Un *sous-espace vectoriel de P est formé de fonctions deux à deux comparables* (et par hypothèse comparables à leurs conjuguées).

CAS PARTICULIERS.

1. — Les constantes complexes sont des P-fonctions. Un sous-espace vectoriel de P contenant les constantes est constitué par des P-fonctions ($M|f|^2$ existe) qui ont aussi une moyenne (Mf existe : $f \smile 1$).

2. — Considérons l'*ensemble des translatées $f(t+h)$ d'une P-fonction donnée.* Si ces translatée sont comparables entre elles, elles engendrent un espace vectoriel, sous-espace de P. Le produit moyen

$$M\bar{f}(t)\,f(t+h)$$

s'appelle alors *fonction de corrélation* de $f(t)$.

C'est ce qui se passe en particulier pour les fonctions presque-périodiques. Mais on peut trouver des fonctions $f(t)$ non comparables à leurs translatées.

EXEMPLE. — $f(t) = \exp(it\log t)$.

On a $M|f|^2 = 1$.

Or,

$$\begin{aligned}\bar{f}(t)\,f(t+h) &= \exp\,[i(t+h)\log(t+h) - t\log t] \\ &= \exp\left[it\log\left(1+\frac{h}{t}\right)\right]\exp\,[ih\log(t+h)].\end{aligned}$$

$f(t)\,f(t+h)$ est le produit de deux facteurs : le premier tend vers une limite, et le second n'a pas de moyenne. $M\bar{f}(t)\,f(t+h)$ n'existe donc pas.

3. **Convergence dans les sous-espaces vectoriels de l'espace P.** — Soit E un sous-espace vectoriel de P. Considérons une suite infinie f_n de fonctions appartenant à E. Nous dirons que c'est une suite de Cauchy si, à tout ε, on peut associer un nombre $n(\varepsilon)$ tel que les conditions $n > n_0(\varepsilon)$, $k > n_0(\varepsilon)$ entraînent

$$M|f_n - f_k|^2 < \varepsilon.$$

On a alors le résultat suivant :

THÉORÈME 1. — *Si f_n est une suite de Cauchy dans un sous-espace vectoriel E de P, cette suite converge vers une P-fonction qui est comparable à toutes les fonctions de E.*

Démonstration. — La suite f_n est une suite de P-fonctions. Elle appartient donc à l'espace B_2 de Besicovitch. Or, dans P, sous-espace de B_2, $M\,|\,f\,|^2$ s'identifie avec la norme dans B_2, la « limite supérieure » étant alors une vraie limite. D'après le théorème de Marcinkiewicz, la suite f_n a donc dans B_2 une limite f. Il faut montrer que f est comparable à tout élément g de E, c'est à dire que $\|f-g\|$, et en particulier $\|f\|$, existe.

Utilisons la notation suivante

$$\|f\|_T=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |f|^2\,dt}.$$

D'après l'inégalité triangulaire

$$\left.\begin{matrix}\|f_n-f\|_T-\|f_n-g\|_T\\ \|f_n-g\|_T-\|f_n-f\|_T\end{matrix}\right\}\leq\|f-g\|_T\leq\|f-f_n\|_T+\|f_n-g\|_T.$$

ε étant donné, on peut choisir n assez grand pour que

$$\sqrt{\limsup_T \frac{1}{T}\int_0^T |f-f_n|^2\,dt}<\varepsilon,$$

n étant ainsi choisi, on peut choisir T assez grand pour que

$$\|f-f_n\|_T<2\varepsilon$$

D'autre part, comme f_n et g appartiennent à E, on peut choisir T assez grand pour que $\|g-f_n\|_T$ diffère de moins de ε de sa limite l, qui existe par hypothèse. En choisissant T convenablement, on voit qu'on a

$$\left.\begin{matrix}0\\ l-\varepsilon-2\varepsilon\end{matrix}\right\}\leq\|f-g\|_T<2\varepsilon+l+\varepsilon$$

ou

$$\left.\begin{matrix}0\\ l-3\varepsilon\end{matrix}\right\}\leq\|f-g\|_T<l+3\varepsilon.$$

Si $l>3\varepsilon$, on voit que, dès que T est suffisamment grand, $\|f-g\|_T$ est assujetti à rester dans un intervalle d'amplitude 6ε (contenant l). Si $l<3\varepsilon$, $\|f-g\|_T$ est compris entre o et 6ε. Dans tous les cas, $\|f-h\|_T$ oscille dans un intervalle d'amplitude inférieure à 6ε. On peut donc trouver un nombre T_0 tel que, si $T>T_0$, l'intervalle de variation possible pour $\| f - g \|_T$ soit arbitrairement petit. On en déduit que la suite numérique $\| f - g \|_T$ est une suite de Cauchy par rapport à T.

Donc $\| f - g \|_T$ tend vers une limite. Il en résulte que la partie réelle de $\bar{f}g$ admet une moyenne. En reprenant le raisonnement avec ig à la place de g, on démontre que la partie imaginaire de $\bar{f}g$ admet une moyenne. On en déduit que f est comparable à tout élément g de E, et, si l'on prend $g = 0$, on voit que $M|f|^2$ existe.

Ce théorème peut être complété par le suivant :

THÉORÈME 2. — *Soient f_n et φ_n deux suites de Cauchy appartenant à un même sous-espace vectoriel E de P. Les limites f et φ de ces deux suites sont comparables.*

DÉMONSTRATION. — D'après le théorème 1, la limite f de la suite f_n est comparable aux f_n et aux φ_n. On peut donc constituer un espace vectoriel unique avec les f_n, les φ_n et f. Or la suite φ_n a une limite φ. D'après le théorème 1, cette limite peut servir de prolongement à l'espace vectoriel dans lequel se trouvent les φ_n. Elle est donc comparable à f, élément de cet espace.

4. **Prolongements d'un sous-espace vectoriel E de l'espace P.** — On peut définir les prolongements naturels et les prolongements artificiels.

On dira que f est un *prolongement naturel* de E si f est la limite d'une suite de Cauchy appartenant à E.

D'après le théorème 2, si f et φ sont deux prolongements naturels de E, la réunion de E, f, φ constitue un espace vectoriel. On dira que f est un *prolongement artificiel* de E si f est comparable à tous les éléments de E, sans avoir *a priori* d'autre rapport avec E.

Si f et φ sont deux prolongements artificiels de E, leur réunion avec E n'est pas nécessairement un nouvel espace vectoriel. Les espaces $(E \cup f)$ et $(E \cup \varphi)$ constituent deux espaces vectoriels qui ne se prolongent peut-être pas mutuellement. Il en résulte qu'il existe effectivement des prolongements de E qui ne sont pas la limite de suites de Cauchy de E. Cela n'est d'ailleurs pas étonnant, puisque la structure de E n'a pas été précisée. E peut être un sous-espace très incomplet de P.

EXEMPLE. — Constituons E par l'unique fonction égale à $\cos t$. Prenons

$$f = 1, \qquad \varphi = \exp(i \log t).$$

On a évidemment

$$f \smile \cos t.$$

On démontre facilement que

$$\varphi \smile \cos t$$

et même que

$$M(\varphi \cos t) = 0.$$

f et φ prolongent donc E. Mais on a vu que f et φ ne sont pas comparables. f et φ prolongent E dans deux directions distinctes.

De ces diverses remarques on déduit que, *si l'on complète un sous-espace vectoriel E de P par les limites de toutes les suites de Cauchy qu'il renferme, on obtient un espace E' qui a la structure d'un espace hilbertien.*

En effet, nous avons vu que les deux éléments quelconques f, φ de E' sont comparables. La moyenne $M\bar{f}\varphi$ a les propriétés d'un produit scalaire, d'où il résulte que E' est préhilbertien. Mais E' est complet par construction. C'est donc bien un espace hilbertien.

Supposons que f et φ soient deux P-fonctions non comparables. Il est intéressant de se poser la question suivante : existe-t-il un nombre complexe λ non nul tel que $\lambda f + \varphi$ soit une P-fonction ? La réponse est partiellement donnée par le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *Si f et φ sont deux P-fonctions non comparables, il existe au plus un nombre complexe λ de module 1 tel que $\lambda f + \varphi$ soit une P-fonction. Si λ existe, son produit par un nombre réel arbitraire est une solution du problème posé.*

DÉMONSTRATION :

$$|\lambda f + \varphi|^2 = |\lambda|^2 . |f|^2 + |\varphi|^2 + \lambda f \bar{\varphi} + \bar{\lambda} \varphi \bar{f}.$$

Si f, φ et $\lambda f + \varphi$ sont des P-fonctions, l'expression

$$\lambda f \bar{\varphi} + \bar{\lambda} \varphi \bar{f}$$

admet une moyenne. Si l'on pose

$$M_T(\ ) = \frac{1}{T} \int_0^T (\ )\, dt,$$

la fonction

$$U_T = \lambda M_T f \bar{\varphi} + \bar{\lambda} M_T \varphi \bar{f}$$

tend vers une limite lorsque $T \to \infty$. Supposons qu'il existe un second nombre λ' tel que

$$U'_T = \lambda' M_T f \bar{\varphi} + \bar{\lambda}' M_T \varphi \bar{f}$$

tende vers une limite. Alors $M_T \bar{f} \varphi$ et $M_T f \bar{\varphi}$ tendent tous deux vers des limites, de sorte que $f \smile \varphi$, contrairement à l'hypothèse. Le problème n'a donc de solution que si

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\bar{\lambda}'}{\bar{\lambda}},$$

$\frac{\lambda'}{\lambda}$ est donc réel. Tous les nombres λ possibles, s'ils existent, sont les produits par des nombres réels d'un nombre complexe λ_0 de module 1 déterminé.

Exemple 1. — Soit a une constante donnée. Soit g une fonction non comparable à l'unité : g n'a pas de moyenne. Posons

$$f = g + ia,$$
$$\varphi = g - ia,$$

d'où

$$|f|^2 = |\varphi|^2 = |g|^2 + a^2,$$
$$f\bar{\varphi} = (g + ia)^2 = g^2 - a^2 + 2iag,$$
$$\varphi\bar{f} = (g - ia)^2 = g^2 - a^2 - 2iag.$$
$$f\bar{\varphi} + \varphi\bar{f} = 2(g^2 - a^2).$$

Choisissons pour g la fonction étudiée précédemment, égale à ± 1 sur des intervalles de plus en plus grands. g est réelle, et $g^2 = 1$. Donc $M|f|^2$ et $M|\varphi|^2$ existent. $M\bar{f}\varphi$ et $Mf\bar{\varphi}$ n'existent pas. Mais, comme $\varphi\bar{f} + f\bar{\varphi} = 2(1 - a^2)$, la moyenne de $\varphi\bar{f} + f\bar{\varphi}$ existe. On a ici $\lambda_0 = 1$. f et φ sont deux P-fonctions non comparables. $f + \varphi$ est cependant une P-fonction.

Exemple 2. — Posons

$$f = 1, \qquad \varphi = \exp(i \log t).$$

Peut-on trouver un nombre complexe $\lambda = a + i\,b$ non nul tel que la fonction réelle

$$\lambda \exp(-i \log t) + \bar{\lambda} \exp(i \log t)$$

ait une moyenne ? Cette fonction a pour expression

$$a \cos \log t + b \sin \log t.$$

Elle n'a de valeur moyenne pour aucune valeur des constantes a et b. Dans ce cas, le nombre λ n'existe pas.

5. **Inégalité de Schwarz.** — Si f et φ sont des P-fonctions comparables, appartenant par conséquent à un même sous-espace vectoriel de E, on a l'inégalité classique

$$M|\bar{f}\varphi| \leq \sqrt{M|f|^2}\sqrt{M|g|^2}.$$

Si f et φ ne sont pas comparables, il n'y a en général aucune limitation inférieure au produit des normes de f et de φ. Si cependant il existe un nombre λ_0 de module 1 tel que $\lambda_0 f + \varphi$ soit une P-fonction, on a, quel que soit le nombre réel r :

$$M \, | \, r\lambda_0 f + \varphi \, |^2 \geqq 0.$$

Désignons par θ la fonction *réelle* (et comparable à l'unité) :

$$\theta = \frac{1}{2}(\lambda_0 f \bar{\varphi} + \bar{\lambda}_0 \varphi \bar{f}).$$

L'inégalité ci-dessus devient

$$r^2 M \, | \, f \, |^2 + 2 r M \theta + M \, | \, \varphi \, |^2 \geqq 0.$$

D'où l'inégalité

$$| \, M\theta \, | \leqq \sqrt{M \, | \, f \, |^2} \, \sqrt{M \, | \, \varphi \, |^2}.$$

Cette inégalité tient lieu d'inégalité de Schwarz pour les fonctions non comparables, lorsque λ_0 existe, et seulement dans ce cas.

6. **Espaces de fonctions comparables à leurs translatées.** — Soit $f(t)$ une P-fonction qui soit comparable à $f(t+h)$, et cela quel que soit h. Cela veut dire que la fonction de corrélation

$$\gamma(h) = M \bar{f}(t) f(t+h)$$

existe.

$\gamma(h)$ est une fonction à symétrie hermitienne :

$$\gamma(-h) = \overline{\gamma(h)}.$$

Elle vérifie l'inégalité

$$| \, \gamma(h) \, | \leqq \gamma(0).$$

Enfin, elle est de type positif. On démontre facilement que, quel que soit le nombre entier n, les nombres réels

$$h_1, \, \ldots, \, h_n$$

et les nombres complexes

$$\xi_1, \, \ldots, \, \xi_n,$$

la forme hermitienne

$$\sum \gamma(h_k - h_l) \, \bar{\xi}_k \xi_l$$

est non négative.

Supposons que $\gamma(h)$ *soit une fonction continue.* Cette hypothèse n'est pas obligatoire. Par exemple, la fonction de corrélation de

$$\exp it^2$$

est égale à 1 si $h = 0$, à 0 si $h > 0$. Elle est discontinue à l'origine. Nous ne ferons jamais intervenir dans la suite des fonctions de ce genre.

Alors, il résulte d'un *théorème de Bochner* que $\gamma(h)$ est la transformée de Fourier-Stieltjes d'une fonction $\sigma(\omega)$, non décroissante, à variation totale bornée, appelée *fonction spectrale :*

$$\gamma(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2i\pi\omega h)\, d\sigma(\omega).$$

Si $\sigma(\omega)$ est une fonction de sauts, $\gamma(h)$ est une fonction presque-périodique. Si $\sigma(\omega)$ est absolument continue, $\gamma(h)$ tend vers 0 lorsque $h \to \infty$. $\gamma(h)$ admet relativement à h une moyenne, réelle et non négative, qui est égale au saut de $\sigma(\omega)$ à l'origine. Si $\gamma(h)$ est continue à l'origine, $\gamma(h)$ est nulle en moyenne.

Soit maintenant $K_\Delta(\alpha)$ la transformée de Fourier de la fonction caractéristique d'un intervalle donné Δ :

$$K_\Delta(\alpha) = \int_\Delta \exp(-2i\pi\alpha s)\, ds.$$

Posons

$$J_\Delta(\lambda, \omega) = \int_{-\lambda}^{\lambda} K_\Delta(\alpha) \exp(2i\pi\alpha\omega)\, d\alpha = \int_\Delta \frac{\sin 2\pi\lambda(s-\omega)}{\pi(s-\omega)}\, ds.$$

Lorsque $\lambda \to \infty$, $J_\Delta(\lambda, \omega)$ tend vers une fonction $J_\Delta(\omega)$ égale à :

$$\begin{array}{ll} 1 & \text{si } \omega \text{ est intérieur à } \Delta, \\ \frac{1}{2} & \text{si } \omega \text{ est frontière de } \Delta, \\ 0 & \text{si } \omega \text{ est extérieur à } \Delta. \end{array}$$

Considérons alors la fonction

$$Y_\lambda(t, \Delta) = \int_{-\lambda}^{\lambda} f(\alpha + t) K_\Delta(\alpha)\, d\alpha.$$

$Y_\lambda(t, \Delta)$ appartient à tout sous-espace vectoriel contenant les translatées de f. Nous désignerons dans ce qui suit par E l'un, choisi, de ces espaces vectoriels.

THÉORÈME 4. — *Lorsque* $\lambda \to \infty$, $Y_\lambda(t, \Delta)$ *tend vers une limite* $Y(t, \Delta)$, *au sens de la convergence dans l'espace* P.

DÉMONSTRATION. — Il suffit de montrer que la suite $Y_\lambda(t, \Delta)$ est une suite de Cauchy. Or

$$|Y_\lambda(t, \Delta) - Y_{\lambda'}(t, \Delta)|^2 = |Y_\lambda(t, \Delta)|^2 + |Y_{\lambda'}(t, \Delta)|^2 - Y_\lambda(t, \Delta)\, \overline{Y}_{\lambda'}(t, \Delta') - \overline{Y}_\lambda(t, \Delta)\, Y_{\lambda'}(t, \Delta').$$

Un calcul simple montre que

$$\overline{Y}_\lambda(t, \Delta)\, Y_{\lambda'}(t, \Delta) = \iint \overline{f}(\alpha + t)\, f(\beta + t)\, \overline{K}_\Delta(\alpha)\, K_\Delta(\beta)\, d\alpha\, d\beta$$
$$(-\lambda < \alpha < \lambda, \quad -\lambda' < \beta < \lambda').$$

On peut, pour chaque couple λ, λ' fixé, prendre les moyennes sous le signe $\iint\cdot$ On voit apparaître

$$M\, \overline{f}(\alpha + t)\, f(\beta + t) = \gamma(\beta - \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\,[2\, i\pi(\beta - \alpha)\,\omega]\, d\sigma(\omega).$$

On obtient ainsi

$$M\, \overline{Y}_\lambda(t, \Delta)\, Y_{\lambda'}(t, \Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{J}_\Delta(\lambda, \omega)\, J_\Delta(\lambda', \omega)\, d\sigma(\omega).$$

On en déduit

$$M\,|\, Y_\lambda(t, \Delta) - Y_{\lambda'}(t, \Delta)\,|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\, J_\Delta(\lambda, \omega) - J_\Delta(\lambda', \omega)\,|^2\, d\sigma(\omega).$$

Or $J_\Delta\,(\lambda, \omega)$ est une fonction presque partout continue de ω, ainsi que sa limite $J_\Delta\,(\omega)$. Ces deux fonctions sont donc sommables par rapport à la mesure $\sigma\,(\omega)$:

D'autre part, l'intégrale

$$\int_a^b \frac{\sin 2\pi x}{\pi x}\, dx$$

est une fonction continue de a et b, qui tend vers des limites bien déterminées lorsque a et b tendent, indépendamment de l'autre, vers $\pm\infty$. Il existe donc un nombre L, indépendant de a et b, tel que

$$\left| \int_a^b \frac{\sin 2\pi x}{\pi x}\, dx \right| < L.$$

Il en résulte que

$$|\, J_\Delta(\lambda, \omega)\,| = \left| \int_\Delta \frac{\sin 2\pi\lambda(s - \omega)}{\pi(s - \omega)} \right| < L$$

quels que soient Δ et λ. La quantité

$$|\, J_\Delta(\lambda, \omega) - J_\Delta(\omega)\,|^2$$

est donc inférieure à un nombre fixe, indépendant de ω. C'est d'ailleurs une fonction sommable par rapport à la mesure $\sigma\,(\omega)$, et elle tend vers o presque partout lorsque $\lambda \to \infty$. Il en résulte que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\, J_\Delta(\lambda, \omega) - J_\Delta(\omega)\,|^2\, d\sigma(\omega)$$

tend vers o avec $\frac{1}{\lambda}$. En appliquant à l'envers à cette intégrale la condition de Cauchy dans l'espace L^2, on voit que, ε étant donné, on peut trouver un nombre $\lambda_0(\varepsilon)$ tel que les conditions $\lambda > \lambda_0(\varepsilon)$, $\lambda' > \lambda_0(\varepsilon)$ entraînent

$$\int_{-\infty}^{\infty} |J_\Delta(\lambda, \omega) - J_\Delta(\lambda', \omega)|^2 \, d\sigma(\omega) < \varepsilon.$$

Mais cette inégalité exprime que, dans l'espace P, la suite $Y_\lambda(t, \Delta)$ vérifie la condition de Cauchy. Elle tend donc vers une limite $Y(t, \Delta)$, qui est comparable aux fonctions $f(t+h)$, et plus généralement à toutes les fonctions de l'espace vectoriel E.

Nous dirons que $Y(t, \Delta)$ est la *fonction spectrale de* $f(t)$. Pour éviter les confusions, $\sigma(\omega)$ sera appelée *fonction spectrale énergétique*. A partir de maintenant, nous conviendrons de compléter E en lui adjoignant les fonctions spectrales de toutes les fonctions f de E.

7. **Propriétés de la fonction spectrale Y** (t, Δ). — C'est une fonction de t et de l'intervalle Δ. Elle est additive par rapport à Δ. En généralisant le calcul du paragraphe précédent, on trouve tout de suite que

$$M\,\overline{Y}(t, \Delta)\, Y(t+h, \Delta') = \int_{\Delta \cap \Delta'} \exp(2 i \pi \omega h)\, d\sigma(\omega),$$

$$M\,\overline{Y}(t, \Delta)\, f(t+h) = \int_{\Delta} \exp(2 i \pi \omega h)\, d\sigma(\omega),$$

à condition de définir partout $\sigma(\omega)$ par la formule

$$\sigma(\omega) = \frac{1}{2}[\sigma(\omega - 0) + \sigma(\omega + 0)].$$

Soit $g(t)$ une fonction de l'espace vectoriel E. Elle admet une fonction spectrale $\sigma_2(\omega)$. Formons alors la combinaison linéaire

$$\lambda f + \mu g.$$

C'est encore une fonction de E, qui a pour fonction de corrélation

$$\begin{aligned} M[\overline{\lambda}\,\overline{f}(t) + \overline{\mu}\,\overline{g}(t)][\lambda f(t+h) + \mu g(t+h)] \\ = \lambda\overline{\lambda} M\,\overline{f}(t)\, f(t+h) + \mu\overline{\mu}\,\overline{g}(t)\, g(t+h) \\ + \overline{\lambda}\mu\,\overline{f}(t)\, g(t+h) + \lambda\overline{\mu} M\,\overline{g}(t)\, f(t+h). \end{aligned}$$

Mais $\lambda f + \mu g$ possède elle-même une fonction spectrale $\sigma_0(\omega)$. On a donc

$$\bar{\lambda}\mu \bar{f}(t)\, g(t+h) + \lambda\bar{\mu}\, \bar{g}(t)\, f(t+h)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2 i\pi\omega h)[d\sigma_0(\omega) - d\sigma(\omega) - d\sigma_1(\omega)].$$

En faisant successivement $\lambda = 1$, $\mu = 1$ et $\lambda = 1$, $\mu = i$, on en déduit qu'il existe une fonction complexe σ_{12} à variation bornée telle que

$$M \bar{f}(t)\, g(t+h) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2 i\pi\omega h)\, d\sigma_{12}(\omega),$$
$$M \bar{g}(t)\, f(t+h) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2 i\pi\omega h)\, d\bar{\sigma}_{12}(\omega).$$

L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(2 i\pi\omega h)\left[\lambda\bar{\lambda}\, d\sigma(\omega) + \bar{\lambda}\mu\, d\sigma_{12}(\omega) + \lambda\bar{\mu}\, d\bar{\sigma}_{12}(\omega) + \mu\bar{\mu}\, d\sigma_2(\omega)\right]$$

est la fonction de corrélation de $\lambda f + \mu g$. Sa fonction spectrale énergétique est une fonction non décroissante. Il en résulte que, quels que soient les nombres complexes λ, μ, la fonction

$$\lambda\bar{\lambda}\,\sigma(\omega) + \bar{\lambda}\mu\,\sigma_{12}(\omega) + \lambda\bar{\mu}\,\bar{\sigma}_{12}(\omega) + \mu\bar{\mu}\,\sigma_2(\omega)$$

est non décroissante. Jointes à des propriétés de symétrie évidentes, ces propriétés caractérisent les fonctions $\sigma_{12}(\omega)$.

A l'aide de $\sigma_{12}(\omega)$, on peut former la moyenne de $\bar{Y}(t, \Delta)\, g(t+h)$. On trouve facilement que

$$M\, \bar{Y}(t, \Delta)\, g(t+h) = \int_{\Delta} \exp(2 i\pi\omega h)\, d\sigma_{12}(\omega).$$

Propriétés d'orthogonalité. — Si $h = 0$,

$$M\, \bar{Y}(t, \Delta)\, Y(t, \Delta') = \int_{\Delta\cap\Delta'} d\sigma(\omega).$$

Donc :

Théorème 5. — *Si Δ et Δ' sont deux intervalles sans points communs intérieurs, les fonctions $Y(t, \Delta)$ et $Y(t, \Delta')$ sont orthogonales, au sens du produit scalaire dans l'espace vectoriel E.*

8. **Analyse harmonique dans** *P*. — Nous avons associé à toute fonction $f(t)$, pourvue d'une fonction de corrélation, une *fonction spectrale*

$$Y(t, \Delta) = \lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} K_\Delta(\alpha)\, f(\alpha + t)\, d\alpha.$$

Nous allons maintenant représenter à l'envers f à l'aide de $Y(t, \Delta)$. Précisons bien que la représentation cherchée concerne la classe des translatées $f(t+h)$ de f, et non la fonction $f(t)$ prise individuellement. Cette distinction est importante.

THÉORÈME 6. — *Soit $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ une suite de n intervalles de l'axe des ω ayant les propriétés suivantes :*

Lorsque $n \to \infty$, la longueur du plus grand des Δ_k tend vers o; la réunion des Δ_k recouvre à la limite l'axe des ω.

Soit ω_k un point de Δ_k. Lorsque $n \to \infty$, la somme

$$S_n = \sum_k \exp(2i\pi\omega_k h)\, Y(t, \Delta_k).$$

tend, au sens de la norme dans P, vers $f(t+h)$.

DÉMONSTRATION. — On forme

$$M\,|f(t+h) - S_n|^2$$

et l'on utilise les propriétés d'orthogonalité des $Y(t, \Delta)$.

$$\begin{aligned} M\,|S_n|^2 &= \sum_k \exp[2i\pi(\omega_k - \omega_l)h]\, M\, Y(t, \Delta_k)\, \overline{Y}(t, \Delta_l) \\ &= \sum_k M\,|Y(t, \Delta_k)|^2 = \sum_k \int_{\Delta_k} d\sigma(\omega) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} M\,|f(t+h) - S_n|^2 = M\,|f(t+h)|^2 \\ + M\,|S_n|^2 - M\overline{S}_n f(t+h) - MS_n \overline{f}(t+h), \end{aligned}$$

avec

$$M\,|f(t+h)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(\omega),$$

$$\begin{aligned} M\overline{S}_n f(t+h) &= \sum_k \exp(-2i\pi\omega_k h)\, M\, \overline{Y}(t, \Delta_k)\, f(t+h) \\ &= \sum_k \int_{\Delta_k} \exp[2i\pi(\omega - \omega_k)h]\, d\sigma(\omega). \end{aligned}$$

A cause de la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(\omega)$, on peut choisir n assez grand pour que, en la remplaçant par $\sum_k \int_{\Delta_k} d\sigma(\omega)$, on commette une erreur inférieure à ε. Il suffit donc de montrer qu'on peut choisir en outre n assez grand pour que l'expression

$$\left| \sum \int_{\Delta_k} \{1 - \exp[2i\pi(\omega - \omega_k)h]\} \, d\sigma(\omega) \right|$$

soit arbitrairement petite.

Or

$$|1 - \exp[2i\pi(\omega - \omega_k)h]| < 2\pi|h|.|\omega - \omega_k|$$

Choisissons n assez grand pour que la longueur de Δ_k soit inférieure à ε. On a alors

$$|\omega - \omega_k| < \varepsilon,$$
$$|1 - \exp[2i\pi(\omega - \omega_k)h]| < 2\pi|h|\varepsilon$$
$$\left| \sum \int_{\Delta_k} \{1 - \exp[2i\pi(\omega - \omega_k)h]\} \, d\sigma(\omega) \right|$$
$$< 2\pi|h|\varepsilon \sum \int_{\Delta_k} d\sigma(\omega) < 2\pi|h|\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(\omega).$$

Cette majoration est bien ce qu'on voulait obtenir. Il en résulte que

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{M}\,|f(t+h) - S_n|^2 = 0$$

et que S_n tend vers $f(t+h)$.

Il est naturel d'employer pour la limite de S_n la notation d'une intégrale de Stieltjes. On écrira donc

$$Y(t, \lambda) = \lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} K_\Delta(\alpha) f(\alpha + t) \, d\alpha,$$
$$f(t+h) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2i\pi\omega h) \, Y(t, d\omega),$$

la signification de ces symboles étant celle qui a été expliquée précédemment.

En particulier,

$$K_\Delta(\alpha) = \int_\Delta \exp(-2i\pi\alpha s) \, ds,$$

Du point de vue des calculs formels, $Y(t, d\omega)$ jouit des propriétés suivantes :

$$M\,\overline{Y}(t, d\omega)\,Y(t, d\omega') = 0, \qquad \omega' \neq \omega$$
$$M\,|Y(t, d\omega)|^2 = d\sigma(\omega).$$

Rappelons que

$$\gamma(h) = M\bar{f}(t)f(t+h) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2i\pi\omega h)\,d\sigma(\omega),$$

et que $Y(t, \Delta)$ a pour fonction de corrélation

$$\gamma_Y(h) = M\,\overline{Y}(t, \Delta)\,Y(t+h, \Delta) = \int_\Delta \exp(2i\pi\omega h)\,d\sigma(\omega).$$

En particulier

$$M\,|\,Y(t, \Delta)\,|^2 = \int_\Delta d\sigma(\omega) \quad (^1).$$

9. **Fonctions presque-périodiques. Fonctions pseudo-aléatoires.** — Les formules qui viennent d'être démontrées établissent une correspondance entre les fonctions d'un sous-espace vectoriel E de P et les fonctions spectrales. Toute fonction comparable à ses translatées est susceptible d'une telle représentation. Nous allons l'utiliser pour classer les P-fonctions.

Si, sur Δ, $\sigma(\omega)$ ne varie pas, on a

$$M\,|\,Y(t, \Delta)\,|^2 = 0,$$

$Y(t, \Delta)$ est donc alors une P-fonction nulle.

$\sigma(\omega)$ est en général la somme d'une fonction de sauts et d'une fonction continue. La linéarité de la représentation permet de décomposer Y et f d'une façon analogue. Nous n'étudierons pas ici en détail cette décomposition, et nous nous limiterons à quelques remarques incomplètes.

Premier cas. — *$\sigma(\omega)$ est une fonction de sauts.*

Il existe alors une *fonction presque-périodique* compatible avec $\sigma(\omega)$. Pour le voir on construit d'abord une fonction spectrale $Y(t, \Delta)$ qui soit compatible avec $\sigma(\omega)$. $\sigma(\omega)$ subit, en des points $\omega = \lambda_j$, des sauts positifs c_j. Il en résulte que

$$\gamma(h) = \sum_j c_j \exp(2i\pi\omega_j h), \qquad \sum_j c_j < \infty.$$

---

(1) Soit $c(\omega)$ un élément de l'espace $L^2(\sigma)$ des fonctions de carré sommable relativement à la mesure $\sigma(\omega)$. On peut définir, au sens de la P-convergence, l'intégrale

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega)\,Y(t, d\omega).$$

On démontre les résultats suivants : l'ensemble des fonctions $g(t)$ constitue un espace vectoriel complet E de P-fonctions (espace de Hilbert). E est isométrique à $L^2(\sigma)$: $\|g\|_P = \|c\|_{L_2}$. C'est la fermeture des combinaisons linéaires finies de translatées de $f(t)$, qu'on obtient lorsque $c(\omega) = \exp(2i\pi\omega h)$.

Choisissons

$$Y(t, \Delta) = \sum_{\lambda_j \in \Delta} a_j \exp(2 i \pi \lambda_j t)$$

où a_j est un nombre complexe tel que $|a_j|^2 = c_j$.

Y (t, Δ) est une fonction nulle dans tout intervalle ne contenant aucun des λ_j, égale à a_j si Δ contient le seul point λ_j.
La somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \exp(2 i \pi \omega_k h) Y(t, \Delta_k)$$

est égale à

$$\sum_{k=1}^{n} \exp(2 i \pi \omega_k t) \sum_{\lambda_j \in \Delta_k} a_j \exp(2 i \pi \lambda_j h) \qquad (\omega_k \in \Delta_k).$$

On voit immédiatement que, au sens de la norme dans P, elle tend vers une limite égale à la somme de la série convergente

$$f(t+h) = \sum_j a_j \exp[2 i \pi \lambda_j (t+h)], \qquad \sum |a_j|^2 < \infty;$$

$f(t+h)$ est une fonction presque-périodique de Besicovitch.

Mais réciproquement, M. Bertrandias a montré que, parmi les fonctions qui admettent $\sigma(\omega)$ pour fonction spectrale, il en existe qui ne sont pas presque-périodiques au sens ordinaire. Par exemple $\exp(i \log t)$ admet pour fonction spectrale la fonction $\sigma(\omega)$ nulle pour $\omega < 0$, égale à 1 pour $\omega > 0$. Ce n'est pas une fonction presque-périodique, bien que sa fonction de corrélation le soit.

Deuxième cas. — $\sigma(\omega)$ *est une fonction continue.*

$\sigma(\omega)$ est la somme d'une fonction absolument continue et d'une fonction singulière. Si $\sigma(\omega)$ est absolument continue,

$$\gamma(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2 i \pi \omega h) \sigma'(\omega) d\omega$$

tend vers 0 lorsque $h \to \infty$. Si $\sigma(\omega)$ est singulière, on ne peut rien dire de général.

Supposons que $\gamma(h)$ *tende vers* 0 *avec* $\frac{1}{h}$, ce dont on est assuré en tous cas si $\sigma(\omega)$ est absolument continue. On dit alors que $f(t)$ est une *fonction pseudo-aléatoire.* $Y(t, \Delta)$ est aussi une fonction pseudo-aléatoire. Ainsi :

Théorème 7. — *Toute fonction pseudo-aléatoire f est la transformée de Fourier-Stieltjes d'une fonction spectrale pseudo-aléatoire $Y(t, \Delta)$, dont la moyenne quadratique tend vers o avec la longueur de Δ.*

Ce résultat est à peine un théorème. C'est une conséquence immédiate de la définition des fonctions pseudo-aléatoires.

On voit que la classe des fonctions pseudo-aléatoires est essentiellement distincte de celle des fonctions presque-périodiques.

10. Quelques propriétés des fonctions pseudo-aléatoires.

Théorème 8. — *Toute fonction pseudo-aléatoire $f(t)$ bornée est comparable à* $\exp(2i\pi\omega t)$, *quel que soit ω donné. Le produit $f(t)\exp(2i\pi\omega t)$ est pseudo-aléatoire et sa moyenne est nulle.*

La seconde partie du théorème est presque évidente, car $f(t)\exp(2i\pi\omega t)$ a pour fonction de corrélation

$$\gamma(h)\exp(2i\pi\omega h),$$

où $\gamma(h)$ est la fonction de corrélation de $f(t)$. La première se ramène alors à un cas particulier : *si $f(t)$ est pseudo-aléatoire, $f(t)$ est comparable à l'unité, et $Mf(t) = 0$.*

On trouvera la démonstration de ce résultat dans ([1], p. 9).

Corollaire. — *Toute fonction pseudo-aléatoire bornée est comparable aux translatées de toute fonction presque-périodique continue.*

Soit en effet

$$g(t) = \sum_j c_j \exp(2i\pi\lambda_j t), \qquad \sum |c_j| < \infty$$

une fonction presque-périodique continue. D'après le théorème 8, le produit de $g(t+h)$ par une fonction pseudo-aléatoire $f(t)$ a bien une moyenne, qui est d'ailleurs nulle.

On voit que, si E_0 représente l'espace des fonctions presque-périodiques continues, on peut le prolonger par tout espace vectoriel E_1 de fonctions pseudo-aléatoires bornées. Dans l'espace vectoriel obtenu par réunion de E_0 et E_1, les espaces E_0 et E_1 sont orthogonaux.

Remarque. — *On peut trouver deux fonctions pseudo-aléatoires f et g qui ne soient pas comparables entre elles.* Voici un exemple où cette circonstance se produit.

Soit $f(t)$ une fonction pseudo-aléatoire de module 1. Posons

$$g(t) = f(t)\exp(i\log t).$$

On a

$$\bar{g}(t)\, g(t+h) = \bar{f}(t)\, f(t+h) \exp\left[i \log\left(1 + \frac{h}{t}\right)\right]$$

h étant fixé, la limite pour $t \to \infty$ de $\exp\left[i \log\left(1 + \frac{h}{t}\right)\right]$ est égale à 1. $g(t)$ a donc une fonction de corrélation, égale à celle de $f(t)$. Or

$$\bar{f}(t)\, g(t) = \bar{f}(t)\, f(t) \exp(i \log t) = \exp(i \log t).$$

Le produit $\bar{f}g$ n'a donc pas de moyenne, et f n'est pas comparable à g. Par conséquent :

L'ensemble des fonctions pseudo-aléatoires ne constitue pas un espace vectoriel.

Il existe cependant d'importants espaces vectoriels de fonctions pseudo-aléatoires. L'élément de base de ces espaces, qui y joue jusqu'à un certain point le rôle de l'exponentielle $\exp(2i\pi\omega t)$ dans les espaces de fonctions presque-périodiques, est défini de la façon suivante.

Soit

$$\varphi(t) = At^{\nu} + A_1 t^{\nu-1} + \ldots + A_{\nu}$$

un polynôme réel de degré $\nu \geqq 2$, tel que l'un au moins des coefficients $A, A_1, \ldots, A_{\nu-2}$ soit un nombre irrationnel. La fonction $f(t)$ égale à

$$\begin{array}{lll} \exp(2i\pi\varphi(n)) & \text{si} \quad n \leqq t < n+1 & (n \geqq 0), \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 & \end{array}$$

est pseudo-aléatoire. Sa fonction de corrélation est égale à

$$\begin{array}{ll} 1 - |h| & \text{si} \quad 0 \leqq |h| < 1, \\ 0 & \text{si} \quad |h| \geqq 1. \end{array}$$

On trouvera la démonstration de ce résultat dans [1]. Elle est en relation étroite avec le fait que, dans les conditions indiquées, *la suite de nombres réels* $\varphi(n)$ est *uniformément dense modulo* 1.

Deux fonctions pseudo-aléatoires du type ci-dessus, correspondant à deux polynômes $\varphi(t)$ et $\psi(t)$, sont toujours comparables. Leur produit est pseudo-aléatoire si les coefficients du polynôme $\varphi(t) - \psi(t)$ correspondant aux termes de degré au moins égal à 2 ne sont pas tous rationnels, périodique dans le cas où tous les coefficients sont rationnels.

Comme une fonction pseudo-aléatoire a une moyenne nulle, on voit que, si chacun des trois polynômes

$$\varphi(t), \quad \psi(t), \quad \varphi(t) - \psi(t)$$

a au moins un coefficient irrationnel (autre que le coefficient constant et le coefficient de t), les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ égales respectivement à

$$\begin{array}{lll} \exp(2i\pi\varphi(n)) \quad \text{et} \quad \exp(2i\pi\psi(n)) & \text{si} & n \leqq t < n+1, \\ 0 & \text{si} & t < 0 \end{array}$$

sont pseudo-aléatoires, comparables et orthogonales.

C'est ce qui se passe en particulier lorsque les coefficients des termes de plus haut degré sont irrationnels, et lorsque les polynômes φ, et ψ sont de degrés différents.

11. Espace P et fonctions aléatoires stationnaires. — Soient U un espace abstrait, u un point de U. Définissons sur U un corps de Borel C, et sur C une mesure $\mu(u)$. Supposons que la mesure de U soit égale à 1. On appelle *variable aléatoire* une fonction complexe $F(u)$, mesurable sur C.

Supposons maintenant que $F(u)$ soit de carré sommable. L'intégrale

$$E|F|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 \, d\mu(u)$$

existe et définit la moyenne quadratique (au sens du calcul des probabilités) de F, et l'on dit que $F(u)$ est une variable aléatoire de second ordre. D'après les propriétés de l'intégrale de Lebesgue, l'existence de $E|F|^2$ et celle de $E|G|^2$ entraînent celle de l'intégrale

$$E\overline{F}G = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F}(u)\, G(u)\, d\mu(u).$$

Par conséquent, sous les mêmes hypothèses, $E|F+G|^2$ existe. L'ensemble des variables aléatoires de second ordre constitue un espace vectoriel. En particulier, avec $F = 1$, on voit que $E(G)$ existe, sans nouvelles hypothèses.

Si maintenant F est une fonction de u et d'une variable réelle t, on dit que $F(u, t)$ est une *fonction aléatoire* de t. Pour une valeur choisie de u, c'est une fonction de t. Pour une valeur choisie de t, c'est une variable aléatoire, qui dépend ainsi du paramètre t.

En général, si F est une fonction aléatoire, les moyennes $E(F)$, $E|F|^2$ dépendent de t. L'existence de la seconde entraîne celle de la *covariance*.

$$\gamma(t, h) = E\,\overline{F}(t, u)\, F(t+h, u).$$

L'ensemble des fonctions aléatoires de second ordre et de leurs translatées constitue donc un espace vectoriel.

Si $E(F)$ ne dépend pas de t, et si $\gamma(t, h)$ ne dépend pas de t, mais seulement de h, on dit que $F(t, u)$ est une *fonction aléatoire stationnaire* (de second ordre). On peut représenter les fonctions aléatoires stationaires de second ordre par la formule

$$F(t, u) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2i\pi\omega t)\, d\xi(t, u),$$

où l'intégrale est définie en moyenne quadratique, et où $\xi(t, u)$ est une *fonction spectrale aléatoire,* ou fonction aléatoire à accroissements orthogonaux. Cela veut dire que :

$$(a) \qquad E\bar{\xi}(t_1 - t_2, u)\,\xi(t_3 - t_4, u) = 0$$

si les intervalles (t_2, t_1) et (t_4, t_3) sont disjoints.

$$(b) \qquad E\,|\,\xi(t_1 - t_2, u)\,|^2 = \int_{t_2}^{t_1} d\sigma(\omega),$$

où $\sigma(\omega)$ est la fonction spectrale énergétique relative à la fonction de corrélation, $\xi(t, u)$ présente beaucoup d'analogie avec la fonction spectrale $Y(t, \Delta)$ des paragraphes 7 et 8. Cependant, lorsqu'on passe des moyennes stochastiques de variables aléatoires aux moyennes temporelles de fonctions, la situation change sensiblement. Considérons une fonction $f(t)$ telle que $\lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T |\,f(t)\,|^2\, dt$ existe. Il n'en résulte pas nécessairement que $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\, dt$ ait une limite lorsque $T \to \infty$. Le procédé de calcul de $f(t)$ fait en effet intervenir essentiellement l'ordre de succession des valeurs de $f(t)$ dans le temps, ordre que l'intégrale de Lebesgue néglige. D'autre part, le passage de la variable aléatoire à la fonction aléatoire n'a pas d'équivalent exact. La même variable t sert à la fois de variable « temps » et d'intermédiaire pour le calcul des moyennes. Ce qui correspond à la fonction aléatoire, fonction de t et de u, c'est la *classe* des translatées de f. Une fonction $f(t)$ ne peut donner naissance qu'à des phénomènes stationnaires, mais pour cela, il faut d'abord que sa fonction de corrélation existe. Au contraire, la fonction de corrélation (covariance) d'une fonction aléatoire de second ordre existe toujours, mais ellè n'a pas nécessairement le caractère stationnaire.

Les premières tentatives pour édifier une théorie de la représentation spectrale des fonctions ordinaires semblent dues à N. Wiener [5]. Mais, dans cette « generalized harmonic analysis », la notion de fonction spectrale n'apparaît pas très nettement. Wiener cite des exemples de séries de Fourier généralisées, de « fonctions nulles » (intégrales de Fourier dans L^2), de fonctions dont la fonction de corrélation est identiquement égale à 1 $\left(\exp\left(i\sqrt{t}\right)\right)$, de fonctions dont la fonction de corrélation est discontinue à l'origine $(\exp(it^2))$. En ce qui concerne les fonctions pseudo-aléatoires, il se limite à l'exemple suivant. Soit λ un nombre compris entre 0 et 1 dans le système de base 2; il s'écrit

$$\lambda = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{2^n} + \ldots.$$

WIENER définit la fonction $f(t)$ par

$$f(t) = 2\,a_n - 1 \qquad \text{si} \quad n \leqq t < n + 1$$

et il démontre (à des détails de présentation près) que, pour presque toutes les valeurs de λ, $f(t)$ est pseudo-aléatoire. Mais cet énoncé, qui est pratiquement probabiliste, ne permet pas de savoir si, pour une valeur choisie de λ, la fonction $f(t)$ correspondante est pseudo-aléatoire. Or, pour les applications, une telle incertitude est défavorable. Les théorèmes résumés au paragraphe 10 sont donc beaucoup plus précis. Ils servent à construire des fonctions aléatoires un peu différentes de celles de WIENER, car l'ensemble de leurs valeurs est dense sur le cercle unité. Mais il est facile d'en déduire d'autres fonctions aléatoires ayant un nombre fini de valeurs, et en particulier des fonctions prenant les deux valeurs 1 et — 1.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BASS (Jean). — Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires, *Bull. Soc. math. France*, t. 87, 1959, p. 1-64.

[2] BASS (Jean). — Transformées de Fourier des fonctions pseudo-aléatoires, *C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 254, 1962, p. 3072-3074.

[3] BLANC-LAPIERRE (A.) et FORTET (R.). — *Théorie des fonctions aléatoires*. Paris, Masson, 1953.

[4] MARCINKIEWICZ (Joseph). — Une remarque sur les espaces de M. Besicowitch, *C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 208, 1939, p. 157-159.

[5] WIENER (Norbert). — *The Fourier integral and certain of its applications*. Cambridge, at the University Press, 1933.

(Manuscrit reçu le 11 mai 1962.)

Jean BASS,
Prof. Éc. nat. sup. Aéron.,
Examinateur à l'Éc. Polytechnique,
24, rue Ferdinand-Jamin,
Bourg-la-Reine (Seine).