

BULLETIN DE LA S. M. F.

BERNARD MALGRANGE

Sur les fonctions différentiables et les ensembles analytiques

Bulletin de la S. M. F., tome 91 (1963), p. 113-127

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1963__91__113_0

© Bulletin de la S. M. F., 1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LES FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES
ET LES ENSEMBLES ANALYTIQUES ;**

PAR

BERNARD MALGRANGE

[Paris].

Cet article reproduit très sensiblement le texte d'une conférence faite au *Séminaire Lelong*, le 28 février 1961 (*).

L'auteur, peu versé dans les questions d'algèbre locale, a bénéficié de l'aide de J.-P. SERRE, qui lui a notamment fourni une démonstration du théorème 1, et de P. SAMUEL qui a relu la version primitive du paragraphe 1, suggéré des améliorations, et aussi (faut-il l'avouer ?) éliminé une erreur. Il les prie de trouver ici l'expression de sa gratitude.

1. RAPPELS SUR LES ANNEAUX ANALYTIQUES.

Soit $\mathbf{R}\{x_1, \dots, x_n\}$ (resp. $\mathbf{R}[[x_1, \dots, x_n]]$) l'anneau des séries entières à n indéterminées, convergentes au voisinage de 0 (resp. formelles), à coefficients réels. Nous appellerons anneau analytique réel (resp. formel réel) un anneau du type $\mathbf{R}\{x_1, \dots, x_n\}/\mathfrak{P}$ (resp. $\mathbf{R}[[x_1, \dots, x_n]]/\mathfrak{P}$), où \mathfrak{P} est un idéal de l'anneau considéré, distinct de l'idéal unité. Ces anneaux contiennent de manière canonique un sous-anneau isomorphe à \mathbf{R} (les « constantes »). En remplaçant \mathbf{R} par \mathbf{C} , on définit de la même manière les anneaux analytiques complexes, et formels complexes. Nous allons rappeler rapidement certaines de leurs propriétés.

(*) MALGRANGE (Bernard). — Sur les fonctions différentiables et les ensembles analytiques, *Séminaire Lelong*, analyse, t. 3, 1961, n° 7, 15 pages.

1. Un anneau analytique (resp. formel) A est *local* i. e. possède un plus grand idéal \mathfrak{M} , formé de tous les éléments non inversibles de A (évident). Il est de plus *noethérien* (pour le cas « complexe », cf. [9], par exemple; le cas « réel » est analogue).

Soit alors M un A -module ⁽¹⁾ de type fini; on munit M de la structure de groupe topologique (et, si $M = A$, d'anneau topologique) pour laquelle un système fondamental de voisinages de 0 est constitué par les $\mathfrak{M}^p M$ (p , entier > 0), structure que nous appellerons « topologie naturelle du A -module M ». On a alors les résultats suivants (théorème de Krull; voir par exemple [10] ou [1], chap. 3) :

a. M est séparé; en particulier, $M \neq \mathfrak{M} M$ si $M \neq \{0\}$.

b. Si N est un sous-module de M , la topologie naturelle de M induit la topologie naturelle de N .

L'énoncé a, appliqué à M/N , signifie que N est fermé dans M ; en particulier, tout idéal \mathfrak{P} de A est *fermé*.

2. Désignons par \hat{A} le complété de A pour la topologie précédente (lorsque $A = \mathbf{R}\{x_1, \dots, x_n\}$, on a trivialement $\hat{A} = \mathbf{R}[[x_1, \dots, x_n]]$). Soit \mathfrak{P} un idéal de A , muni de la topologie induite; son complété $\hat{\mathfrak{P}}$, qui s'identifie à son adhérence dans A , est identique à $\hat{A}\mathfrak{P}$, puisque \mathfrak{P} est évidemment dense dans $\hat{A}\mathfrak{P}$, et que ce dernier est fermé.

Posons, d'autre part, $B = A/\mathfrak{P}$. La topologie naturelle de l'anneau local B coïncide, comme on le voit immédiatement, avec la topologie quotient (et aussi avec sa topologie naturelle de A -module); comme les espaces A , \mathfrak{P} , B sont métrisables, il résulte alors des propriétés de la complétion dans les groupes topologiques qu'on a $\hat{B} = \hat{A}/\hat{\mathfrak{P}}$ (plus généralement, on a des propriétés analogues pour les complétés des A -modules de type fini, voir [1] ou [10]).

Il découle de là que le complété d'un anneau analytique est un anneau formel, et que tout anneau formel est complet; il en résulte aussi que, \mathfrak{P} et \mathfrak{Q} étant deux idéaux de A , on a

$$(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q})^\wedge = \hat{\mathfrak{P}} + \hat{\mathfrak{Q}}.$$

3. A est un A -module *fidèlement plat*, ce qui signifie ceci :

a. Si \mathfrak{P} est un idéal de A , on a $\hat{A}\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{P}$.

b. A est un A -module *plat*; autrement dit, pour toute suite exacte de A -modules

$$M' \rightarrow M \rightarrow M'',$$

(1) Que nous supposons *unitaire*, une fois pour toutes.

la suite

$$\hat{A} \otimes_A M' \rightarrow \hat{A} \otimes_A M \rightarrow \hat{A} \otimes_A M''$$

est exacte (voir [10], ou [1], chap. 1 et 3).

Soit \mathfrak{P} un idéal de A ; en appliquant b à la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathfrak{P} \rightarrow A \rightarrow A/\mathfrak{P} \rightarrow 0$$

on trouve que $\hat{\mathfrak{P}}$ (resp. $\hat{A}/\hat{\mathfrak{P}}$) s'identifie canoniquement à $\hat{A} \otimes_A \mathfrak{P}$ (resp. $\hat{A} \otimes_A (A/\mathfrak{P})$). Plus généralement, on peut voir ceci : si M est un A -module de type fini, \hat{M} s'identifie canoniquement à $\hat{A} \otimes_A M$ (cf. [1], [10]).

Soit \mathfrak{Q} un autre idéal de A ; en appliquant maintenant b à la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathfrak{P} \cap \mathfrak{Q} \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\hat{\delta}} (A/\mathfrak{P}) + (A/\mathfrak{Q}),$$

où i désigne l'injection, et $\hat{\delta}$ l'application diagonale

$$a \rightarrow (a \bmod \mathfrak{P}, a \bmod \mathfrak{Q}),$$

on trouve le résultat suivant :

$$(\mathfrak{P} \cap \mathfrak{Q})^\wedge = \hat{\mathfrak{P}} \cap \hat{\mathfrak{Q}}$$

(voir dans [1], chap 1, une démonstration légèrement différente).

4. Soit A un anneau analytique (resp. formel), et soit B un sous-anneau de A qui soit encore analytique (resp. formel), et tel que A soit un B -module de type fini. Alors la topologie naturelle d'anneau local de A induit sur B sa topologie naturelle d'anneau local (voir [1], chap. 3, ou [8], chap. 8).

Rappelons rapidement comment on parvient à ce résultat. Soit \mathfrak{M} (resp. \mathfrak{N}) l'idéal maximal de A (resp. B). Munissons A de sa topologie naturelle de B -module; d'après le théorème de Krull, cette topologie induit sur B sa topologie naturelle; tout revient donc à montrer que les deux topologies ainsi définies sur A coïncident; pour cela, il suffira d'établir que, pour un entier $k > 0$, on a $\mathfrak{M} \supset A \mathfrak{N} \supset \mathfrak{M}^k$. Or, la première inclusion résulte de ce qu'on a $A \mathfrak{N} \neq A$ (n° 1). La seconde signifie que $A \mathfrak{N}$ est \mathfrak{M} -primaire; elle résulte aussitôt de ce que $A/A \mathfrak{N}$ est un module de ce type fini sur $B/\mathfrak{N} \approx \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} , donc est un anneau artinien, et des propriétés du radical d'un anneau artinien.

Il résulte de là que le complété \hat{B} de B s'identifie canoniquement à un sous-anneau de \hat{A} ; il en résulte aussi l'isomorphisme $\hat{A} \approx A \otimes_B \hat{B}$ (n° 3).

5. Soit A un anneau local noethérien; on appelle *dimension* de A et l'on note $\dim(A)$ le plus grand entier k tel qu'il existe une suite strictement croissante $\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{P}_k$ d'idéaux premiers de A (on aura alors, évidemment, $\mathfrak{P}_k = \mathfrak{M}$, idéal maximal de A , et, dans le cas où A est intègre, $\mathfrak{P}_0 = \{0\}$). On sait qu'on a toujours $\dim(A) < +\infty$ (voir [8], chap. 4 et 8).

Soit, d'autre part, A un anneau analytique (réel, par exemple), et a_1, \dots, a_k des éléments de l'idéal maximal \mathfrak{M} de A . Pour toute série convergente $f \in \mathbf{R}\{x_1, \dots, x_k\}$, on définit de manière évidente l'élément $f(a_1, \dots, a_k)$ de A et de même avec les anneaux formels, f étant cette fois une série formelle (commencer par traiter le cas où A est un anneau de séries convergentes, ou formelles, et ensuite traiter le cas général par passage au quotient, en utilisant le théorème de Krull). On dit que a_1, \dots, a_k sont analytiquement indépendants si l'application $\mathbf{R}\{x_1, \dots, x_k\} \rightarrow A$ ainsi définie est injective, et l'on définit de même les éléments formellement indépendants d'un anneau formel.

Supposons que A soit un anneau analytique (réel, par exemple) *intègre* et que $\dim(A) = k$; on peut alors trouver des éléments a_1, \dots, a_k de \mathfrak{M} , analytiquement indépendants, tels que A soit un $\mathbf{R}\{a_1, \dots, a_k\}$ -module de type fini (voir [8], chap. 8 et 9). Si A est réalisé comme un quotient $\mathbf{R}\{x_1, \dots, x_n\}/\mathfrak{P}$ (\mathfrak{P} , premier), on peut prendre, en faisant au besoin un changement linéaire de coordonnées

$$a_j = x_j \bmod \mathfrak{P} \quad (1 \leq j \leq k)$$

et l'on peut supposer que $a_{k+1} = x_{k+1} \bmod \mathfrak{P}$ engendre le corps des fractions \bar{A} de A sur le corps des fractions \bar{B} de $B = \mathbf{R}\{a_1, \dots, a_k\}$ (voir [3] ou [9]). D'après un lemme élémentaire, tout élément c de \bar{A} , entier sur B (en particulier, tout élément de A) s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme suivante :

$$c = \frac{P(a_{k+1})}{\Delta}$$

P étant un polynôme de degré $< p = [\bar{A}:\bar{B}]$, à coefficients dans B , et Δ étant le discriminant du polynôme minimal de a_{k+1} sur \bar{B} (lequel polynôme a ses coefficients dans B puisque B est isomorphe à $\mathbf{R}\{x_1, \dots, x_k\}$ donc est factoriel, donc intégralement clos; cf. [3] ou [9]).

D'après le n° 4, $\hat{B} \approx \mathbf{R}[[x_1, \dots, x_k]]$ s'identifie à l'adhérence de B dans \hat{A} ; par suite, a_1, \dots, a_k sont *formellement indépendants* dans A . Par contre, nous allons établir le résultat suivant :

PROPOSITION 1. — Soit \mathfrak{S} un idéal $\neq 0$ de \hat{A} . Les $a_j \bmod \mathfrak{S}$ ne sont pas formellement indépendants dans \hat{A}/\mathfrak{S} (autrement dit : $\hat{B} \cap \mathfrak{S} \neq \{0\}$).

La démonstration de cette proposition repose sur le résultat suivant, dont la démonstration nous a été communiquée par J.-P. SERRE :

THÉORÈME 1. — *Si A est un anneau analytique intègre, \hat{A} est intègre.*

On commence par se ramener au cas complexe, en considérant une racine, notée i , de l'équation $X^2 + 1 = 0$ dans une clôture algébrique du corps des fractions \bar{A} de A (i peut appartenir à \bar{A} ou non) et en posant $A' = A[i]$. D'après le n° 1 (ou par un raisonnement direct immédiat), on a, en désignant par \mathfrak{M} l'idéal maximal de A : $\mathfrak{M}A' \neq A'$; comme \mathfrak{M} est maximal, on a donc $\mathfrak{M}A' \cap A = \mathfrak{M}$, d'où $A'/\mathfrak{M}A' = (A/\mathfrak{M})[i] \approx \mathbf{C}$, donc $\mathfrak{M}A'$ est un idéal maximal de A' ; on vérifie alors sans difficulté que c'est l'unique idéal maximal de A' et que A' est un anneau analytique complexe, qui est évidemment intègre. Dans la suite, nous supposons donc A analytique complexe, et nous garderons les notations précédentes, en y remplaçant \mathbf{R} par \mathbf{C} .

On établit alors le théorème 1 par récurrence sur la dimension de A : pour cela, désignons par (T_k) l'énoncé précédent pour les anneaux de dimension $\leq k$, et par (T'_k) le même énoncé pour les anneaux normaux (i. e. intègres et intégralement clos) de dimension $\leq k$.

a. $(T'_k) \Rightarrow (T_k)$. Soit D la fermeture intégrale de A (ou, ce qui revient au même, de B) dans \bar{A} . Il est connu (cf. par exemple [3]) que D est un anneau analytique, et de même dimension que A . Comme D est un A -module de type fini, \hat{A} s'identifie à un sous-anneau de \hat{D} (n° 4). D est normal par construction, donc \hat{D} est intègre, et \hat{A} , qui est un sous-anneau de \hat{D} , est intègre.

b. $(T_{k-1}) \Rightarrow (T'_k)$. On emploie ici une variante d'un raisonnement de ZARISKI [11]. Soit A un anneau analytique intègre de dimension k ; si \mathfrak{P} est un idéal premier de A , différent de $\{0\}$, A/\mathfrak{P} est de dimension $\leq k - 1$, par définition de la dimension. D'après l'hypothèse de récurrence, $\hat{A}/\hat{\mathfrak{P}}$ est intègre, donc $\hat{\mathfrak{P}}$ est premier (en particulier, \mathfrak{P} n'est pas ramifié dans \hat{A} , i. e. $\hat{A}/\hat{\mathfrak{P}}$ n'a pas d'éléments nilpotents).

Supposons alors A normal, et soient a_1, \dots, a_k des éléments de A analytiquement indépendants, tels que A soit un module de type fini sur $B = \mathbf{C}\{a_1, \dots, a_k\}$. Ce qui précède permet d'appliquer au couple (A, B) un lemme de NAGATA ([7], chap. I, § 4, lemme 3), et l'on trouve que \hat{A} est normal, donc intègre. D'où le théorème.

Pour établir la proposition, il suffit maintenant de démontrer le résultat suivant (bien connu) :

Soient B un anneau intègre, et A un sur-anneau intègre de type fini de B ; alors, pour tout idéal $\mathfrak{S} \neq 0$ de A , on a $B \cap \mathfrak{S} \neq \{0\}$.

Pour établir ce résultat, il suffit de traiter le cas où $\mathfrak{I} = Aa$, avec $a \in A$, $a \neq 0$. Or, soit \bar{A} (resp. \bar{B}) le corps des fractions de A (resp. B) comme $\bar{B}[A]$ est un \bar{B} -module de type fini, c'est un corps, donc on a $\bar{A} = \bar{B}[A]$. Par conséquent, on a $\frac{1}{a} = \frac{c}{b}$, avec $c \in A$, $b \in B$, et $b \neq 0$, d'où $b = ac \in Aa \cap B$. D'où le résultat.

REMARQUE. — On notera que le théorème 1 était nécessaire pour établir la proposition : soient, en effet, B un anneau intègre et A un sur-anneau commutatif non intègre de B : il existe toujours un idéal \mathfrak{I} non nul de A vérifiant $\mathfrak{I} \cap B = \{0\}$ [s'il existe un $b \in B$, $b \neq 0$ qui soit diviseur de 0 dans A , il suffit de prendre pour \mathfrak{I} l'annulateur de b dans A . Sinon, soit $a \in A$ un diviseur de zéro; il suffit de prendre $\mathfrak{I} = (a)$].

2. SUR LES GERMES DE FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES.

Désignons par $\mathbf{R}\{\{x_1, \dots, x_n\}\}$ l'anneau des germes de fonctions (indéfiniment) ⁽²⁾ dérivables au voisinage de 0 dans \mathbf{R}^n , à valeurs réelles; si f est un tel germe, nous noterons $\hat{f} \in \mathbf{R}[[x_1, \dots, x_n]]$ sa série de Taylor formelle en 0. Il est bien connu que l'application $f \rightarrow \hat{f}$ est surjective, i. e. que toute série formelle est de la forme \hat{f} pour un germe f .

Si g est une fonction dérivable dans un voisinage ouvert de 0 nous noterons g_0 son germe en 0, et g sera appelé « un représentant de g_0 ».

DÉFINITION 1. — Soient E un sous-ensemble de \mathbf{R}^n adhérent à 0, et g une fonction dérivable au voisinage de 0. Nous dirons que g (ou : que son germe g_0) a un zéro d'ordre infini en 0 sur E (ou : sur le germe E_0 de E en 0) si, $\forall p \in \mathbf{N}$, il existe un voisinage \mathcal{O}_p de 0 et un nombre $C_p > 0$ tels que, dans $E \cap \mathcal{O}_p$, on ait $|g(x)| \leq C_p \|x\|^p$ (ici et, dans la suite, $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne dans \mathbf{R}^n).

La propriété précédente ne dépend en fait que de la série de Taylor de f en 0 (puisque'une fonction, dont la série de Taylor est nulle en 0, a un zéro d'ordre infini en 0 sur \mathbf{R}^n); l'ensemble des séries formelles provenant de fonctions ayant un zéro d'ordre infini en 0 sur E forme un idéal de $\mathbf{R}[[x_1, \dots, x_n]]$ que nous appellerons « idéal formel du germe E_0 » et que nous noterons $\mathfrak{I}(E_0)$.

Supposons maintenant que E soit un ensemble analytique réel au voisinage de 0; pour ne pas avoir à écrire constamment des indices, nous poserons $E_0 = V$. Soit $\mathfrak{I}(V) \subset \mathbf{R}\{x_1, \dots, x_n\}$ l'idéal analytique de V , i. e. l'ensemble des germes de fonctions analytiques en 0 (identifiés

(2) Dans la suite, nous omettrons le mot « indéfiniment ».

à des séries convergentes) nuls sur V . L'objet essentiel de cet article, est le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — $\widehat{\mathfrak{I}}(V) = \mathfrak{I}(V)$.

[Autrement dit : pour que $f \in \mathbf{R} \{ \{ x_1, \dots, x_n \} \}$ ait un zéro d'ordre infini en o sur V , il faut et il suffit qu'on ait : $\hat{f} \in \widehat{\mathfrak{I}}(V)$.]

Il suffit d'établir ce résultat lorsque V est (analytiquement) irréductible : soient, en effet, V_1, \dots, V_p les composantes irréductibles de V ; on a

$$\mathfrak{I}(V) = \mathfrak{I}(V_1) \cap \dots \cap \mathfrak{I}(V_p),$$

d'où (§ 1)

$$\widehat{\mathfrak{I}}(V) = \widehat{\mathfrak{I}}(V_1) \cap \dots \cap \widehat{\mathfrak{I}}(V_p),$$

et aussi, évidemment,

$$\mathfrak{I}(V) = \mathfrak{I}(V_1) \cap \dots \cap \mathfrak{I}(V_p);$$

si le résultat est vrai V_1, \dots, V_p , il sera par conséquent vrai pour V .

Supposons donc V irréductible. Dans ce cas, $\mathfrak{I}(V)$ est premier, et $A = \mathbf{R} \{ x_1, \dots, x_n \} / \mathfrak{I}(V)$ est intègre; soit k la dimension de A (qui, par définition, est égale à la dimension de V); on peut supposer (§ 1) que les $a_j = x_j \bmod \mathfrak{I}(V)$ ($1 \leq j \leq k$) sont analytiquement indépendants, et que A est un $\mathbf{R} \{ a_1, \dots, a_k \}$ -module de type fini (dans la suite, nous poserons $B = \mathbf{R} \{ a_1, \dots, a_k \}$ et nous écrirons x_1, \dots, x_k au lieu de a_1, \dots, a_k , ce qui n'amènera aucune confusion).

On a évidemment : $\mathfrak{I}(V) \supset \widehat{\mathfrak{I}}(V)$; d'après la proposition 1 pour démontrer qu'on a $\mathfrak{I}(V) = \widehat{\mathfrak{I}}(V)$, il suffit de démontrer le résultat suivant :

$$(A_1) \quad \mathfrak{I}(V) \cap \mathbf{R}[[x_1, \dots, x_k]] = \{0\}.$$

[Autrement dit : toute fonction $f(x_1, \dots, x_k)$ dérivable au voisinage de o ayant un zéro d'ordre infini en o sur V a une série de Taylor identiquement nulle.]

Avant de transformer cette condition par une projection sur \mathbf{R}^k , nous allons rappeler quelques propriétés des germes analytiques réels. Conservons les notations précédentes, et posons $a_j = x_j \bmod \mathfrak{I}(V)$ ($k + 1 \leq j \leq n$). Pour $j = k + 1, \dots, n$, il existe un polynome $P_j \in B[X]$ distingué (i. e. unitaire, les coefficients des termes non dominants étant nuls à l'origine) et irréductible, tel qu'on ait $P_j(a_j) = 0$; on peut aussi supposer que a_{k+1} engendre le corps des fractions \bar{A} de A sur le corps des fractions \bar{B} de B , et que les P_j sont les polynomes minimaux des a_j sur \bar{B} . Il existe alors des polynomes uniques $Q_j \in B[X]$ ($k + 2 \leq j \leq n$),

de degrés $< p = [\bar{A}:\bar{B}] = \deg P_{k+1}$, tel qu'on ait : $a_j = \frac{Q_j(a_{k+1})}{\Delta}$, Δ désignant le discriminant de P_{k+1} ; on sait enfin que, en dehors de l'ensemble des zéros de Δ , V est représenté par les équations

$$\begin{aligned} P_{k+1}(x_{k+1}) &= 0, \\ \Delta x_j &= Q_j(x_{k+1}) \quad (k+2 \leq j \leq n) \end{aligned}$$

(cf. [3] ou [9]); plus précisément, soit W un représentant de V défini dans un ouvert Ω , avec $0 \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$; il existe un ouvert Ω' , avec $0 \in \Omega' \subset \Omega$, dans lequel les équations précédentes ont un sens, et tel que $W \cap \Omega'$ coïncide, avec l'ensemble des solutions de ces équations, sauf peut-être sur l'ensemble $\Delta = 0$.

Soit alors \mathcal{U} un voisinage de 0 dans \mathbf{R}^k , qu'on peut supposer assez petit pour que les coefficients des P_j et des Q_j soient des séries convergentes dans \mathcal{U} et pour que les conditions

$$\langle (x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{U}, P_{k+j}(x_{k+1}; x_1, \dots, x_k) = 0 \rangle,$$

entraînent

$$\langle (x_1, \dots, x_n) \in \Omega' \rangle;$$

désignons par pr la projection de \mathbf{R}^n sur \mathbf{R}^k et par D l'ensemble des zéros de Δ dans \mathcal{U} ; on peut supposer, en choisissant convenablement \mathcal{U} , que $\mathcal{U} - D$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, et que chacune d'elles est adhérente à 0 [2]; il est alors clair que $pr(W \cap \Omega')$ contient une telle composante connexe, que nous noterons Γ ; on peut encore supposer que, sur $W \cap \Omega'$, on a $\|x\| \leq C \|prx\|^z$, avec $C > 0$, $z > 0$ (en vertu des équations $P_{k+j}(x_{k+1}; x_1, \dots, x_k) = 0$ et de majorations élémentaires des zéros d'un polynôme que nous laissons au lecteur).

Soit maintenant f un germe de fonction appartenant à $\mathbf{R}\{\{x_1, \dots, x_n\}\}$, et ne dépendant que de x_1, \dots, x_k , l'inégalité précédente nous montre que f , considéré comme élément de $\mathbf{R}\{\{x_1, \dots, x_k\}\}$, a un zéro d'ordre infini en 0 sur Γ . Pour démontrer (A_1) , nous sommes donc ramené, en changeant un peu les notations, à établir le résultat suivant :

(A₂) Soient \mathcal{U} un voisinage de 0 dans \mathbf{R}^k , Φ une fonction analytique réelle dans \mathcal{U} , vérifiant $\Phi(0) = 0$ et non identiquement nulle au voisinage de 0 , D l'ensemble des zéros de Φ , et Γ une composante connexe adhérente à 0 de $\mathcal{U} - D$. On a $\mathfrak{J}(\Gamma_0) = 0$.

[Autrement dit : tout $f \in \mathbf{R}\{\{x_1, \dots, x_k\}\}$ qui a un zéro d'ordre infini en 0 sur Γ vérifie $f = 0$.]

Pour démontrer (A_2) , nous allons procéder ainsi : nous supposons que la fonction $\Phi(0, \dots, 0, x_k)$ n'est pas identiquement nulle au voisinage de 0 , et nous montrerons qu'on a alors

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad \frac{\partial^p f}{\partial x_k^p}(0, \dots, 0) = 0.$$

Cela entraînera bien le résultat; en effet, l'ensemble des droites issues de 0 sur lesquelles Φ n'est pas identiquement nul au voisinage de 0 est un ouvert partout dense dans l'ensemble des droites issues de 0; comme, après un changement linéaire de coordonnées, on peut prendre pour axe Ox_k une quelconque de ces droites, il en résultera bien, par un calcul élémentaire que nous laissons au lecteur, que toutes les dérivées de f sont nulles à l'origine, i. e. que $\hat{f} = 0$.

Dans les hypothèses précédentes, on peut supposer, d'après des propriétés classiques des anneaux de séries convergentes, que le germe Φ_0 est sans facteurs multiples, et que c'est un polynôme distingué en x_k . En restreignant au besoin \mathcal{U} , Φ sera alors de la forme

$$\Phi = x_k^p + \sum_{i=1}^p a_i(x_1, \dots, x_{k-1})x_k^{p-i},$$

les a_i étant des fonctions analytiques dans \mathcal{U} , avec $a_i(0, \dots, 0) = 0$ ($1 \leq i \leq p$), et le discriminant δ de Φ ne sera pas identiquement nul au voisinage de 0.

Posons, pour $x = (x_1, \dots, x_k) : x = (x', x_k)$ et $\text{pr}x = x'$. Soit \mathcal{U}' un voisinage ouvert de 0 dans \mathbf{R}^{k-1} tel que les conditions

$$\ll x' \in \mathcal{U}', \quad \Phi(z; x') = 0 \quad (z \in \mathbf{C}) \gg$$

entraînent $|z| \leq \frac{1}{2}$ et, lorsque z est réel : $(x', z) \in \mathcal{U}$; soient Δ l'ensemble des zéros de Δ dans \mathcal{U}' , et \mathcal{V}' un voisinage de 0 dans \mathbf{R}^{k-1} , relativement compact dans \mathcal{U}' . D'après un théorème de ŁOJASIEWICZ (cf. [5] ou [6]), il existe $C > 0$ et $\alpha > 0$, tels qu'on ait, $\forall x' \in \mathcal{V}' : |\delta(x')| \geq C d(x', \Delta)^\alpha$, d désignant la distance euclidienne dans \mathbf{R}^{k-1} . Si z^1, \dots, z^r sont les racines de l'équation $\Phi(x', z) = 0$, on aura toujours, pour $x' \in \mathcal{V}' : |z^i - z^j| \leq 1$, et par suite $|z^i - z^j| \geq C d(x', \Delta)^\alpha$.

D'autre part, on peut supposer que $\mathcal{V}' - D$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, toutes adhérentes à 0 [2]; il est alors clair que $\text{pr}(\Gamma)$ contient une de ces composantes connexes, γ ; et, $\forall x' \in \gamma$, $\text{pr}^{-1}(x') \cap \Gamma$ contient un intervalle ouvert $I(x')$, de longueur $\geq C d(x', \Delta)^\alpha$.

Appelons $a(x')$ et $b(x')$ les $k^{\text{ièmes}}$ coordonnées des extrémités de $I(x')$; on peut supposer qu'on a $\Phi(x', a(x')) = 0$, et par suite (majoration élémentaire)

$$(1) \quad |a(x')| \leq C_1 \|x'\|^{z_1} \quad (C_1 > 0 \quad \alpha_1 > 0);$$

en diminuant au besoin $I(x')$, et en modifiant convenablement C_1 et α_1 , on peut supposer qu'on a aussi

$$(2) \quad |b(x')| \leq C_1 \|x'\|^{z_1},$$

l'inégalité

$$(3) \quad |a(x') - b(x')| \geq C d(x', \Delta)^2$$

restant toujours vérifiée.

LEMME 1. — *Dans les hypothèses de (A₂), il existe une suite x' de points de Γ tendant vers zéro et des nombres C₂ > 0, α₂ > 0 tels qu'on ait, ∀ l*

$$\|x'\| \leq C_2 d(x', D)^{\alpha_2}.$$

Ce lemme est évident pour $k = 1$; supposons-le donc vrai pour $k - 1$, et démontrons-le pour k . D'après la formule des accroissements finis, il suffit de trouver une suite x' de points de Γ tendant vers zéro, et vérifiant

$$\|x'\| \leq C_2 |\Phi(x')|^{\alpha_2}.$$

Par hypothèse de récurrence, il existe une suite (x'') de points de γ qui vérifient

$$(4) \quad \|x''\| \leq C_3 d(x'', \Delta)^{\alpha_3} \quad (C_3 > 0, \alpha_3 > 0).$$

Montrons que le milieu x' de l'intervalle $I(x'')$ répond à la question; on a en effet, à cause de (1) et (2),

$$(5) \quad \|x'\| \leq C_4 \|x''\|^{\alpha_4} \quad (C_4 > 0, \alpha_4 > 0).$$

D'autre part, $I(x'')$ ne contient aucun zéro réel de Φ , donc la distance de $x'_k \left(= \frac{a(x'') + b(x'')}{2} \right)$ à une racine réelle z de l'équation $\Phi(x'', z) = 0$ est supérieure à $\frac{c}{2} d(x'', \Delta)^2$, d'après (3); comme les racines non réelles de cette équation vérifient

$$2|\Im z| = |z - \bar{z}| \geq C d(x'', \Delta)^2,$$

la distance de x'_k à une telle racine est supérieure à $\frac{C}{2} d(x'', \Delta)^2$; par suite, en désignant par z^j les racines de cette équation

$$|\Phi(x'')| = \prod_j |x'_k - z^j| \geq \left(\frac{C}{2}\right)^p d(x'', \Delta)^{p^2}.$$

Donc, d'après (4) et (5),

$$|\Phi(x')| \geq C_5 \|x''\|^{\alpha_5} \quad (C_5 > 0, \alpha_5 > 0),$$

d'où le lemme.

Pour démontrer (A₂), nous appliquerons ce lemme à δ et γ (au lieu de Φ et Γ , comme dans l'énoncé) : il existe donc une suite (x') de points de γ

tendant vers zéro et vérifiant (4). Divisons l'intervalle $I(x')$ en n intervalles égaux, dont les extrémités ont pour $k^{\text{ième}}$ coordonnée :

$$a_0(x') = a(x'), \quad a_1(x'), \quad \dots, \quad a_n(x') = b(x')$$

et considérons l'expression

$$\frac{1}{(a_0 - a_1)^n} \left[f(x', a_0) - \binom{n}{1} f(x', a_1) + \dots + (-1)^n f(x', a_n) \right]$$

lorsque l tend vers l'infini, cette expression a pour limite $\frac{\partial^n f}{\partial x_k^n}(o)$, d'après (par exemple) la formule des accroissements finis généralisés; d'autre part, les inégalités (1), (2), (3) et (4), jointes au fait que f a un zéro d'ordre infini en o sur Γ , montrent que cette expression a pour limite o : on a donc bien $\forall n : \frac{\partial^n f}{\partial x_k^n}(o) = o$, ce qui démontre (A₂) et le théorème.

Soient maintenant Ω un ouvert $\subset \mathbf{R}^n$ et E un sous-ensemble analytique de Ω . Pour tout point $a \in \Omega$, désignons par \mathcal{O}_a l'anneau des germes de fonctions analytiques au voisinage de a , et par $\mathfrak{I}_a(E)$ l'idéal de \mathcal{O}_a formé des germes nuls sur E au voisinage de a . Rappelons que, par définition, E est dit cohérent si le faisceau analytique $a \rightarrow \mathfrak{I}_a(E)$ est cohérent [4]. On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *Avec les notations précédentes, supposons que E soit cohérent, et soit f une fonction dérivable dans Ω , nulle sur E . Au voisinage de tout point de Ω , on a $f = \sum g_i h_i$, les fonctions g_i étant analytiques au voisinage de a et nulles sur E , et les fonctions h_i dérivables.*

(La théorie des faisceaux analytiques cohérents permettrait d'ailleurs de donner un énoncé global de ce théorème.)

Étant donné un point $a \in \Omega$, on peut, par définition de la cohérence de E , trouver un voisinage ouvert \mathcal{O} de a , $\mathcal{O} \subset \Omega$, et des fonctions g_i analytiques dans \mathcal{O} telles que, $\forall b \in \mathcal{O}$, les germes $(g_i)_b$ engendrent $\mathfrak{I}_b(E)$. Il résulte alors du théorème 2 que, $\forall b \in \mathcal{O}$, la série de Taylor \tilde{f}_b de f en b est combinaison des $(\tilde{g}_i)_b$ à coefficients séries formelles. D'après un théorème connu [6], il en résulte que f dans \mathcal{O} , combinaison des g_i à coefficients fonctions dérivables.

C. Q. F. D.

Pour un sous-ensemble analytique E quelconque, le résultat précédent ne sera pas vrai (il me paraît même probable que l'hypothèse de cohérence est nécessaire) : voici un contre-exemple, qui m'a été communiqué par J.-P. SERRE : prenons $\Omega = \mathbf{R}^3$, et prenons pour E le cône d'équation

$x_3 (x_1^2 + x_2^2) = x_3^3$, qui admet pour génératrice isolée la droite $x_1 = x_2 = 0$. Soit φ une fonction dérivable sur la sphère unité

$$S_2 : \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,$$

nulle sur $S_2 \cap E$, mais ne s'annulant qu'à l'ordre 1 aux points $(0, 0, \pm 1)$. Prenons f défini par

$$f(x) = \varphi\left(\frac{x}{\|x\|^2}\right) \exp\left(-\frac{1}{\|x\|^2}\right);$$

il est clair que f est dérivable dans \mathbf{R}^3 , et nulle sur E ; mais, au voisinage de 0, f n'est pas de la forme $[x, (x_1^2 + x_2^2) - x_3^3]h$, avec h dérivable puisque f ne s'annule qu'à l'ordre 1 aux points $\neq 0$ de la génératrice isolée.

3. APPLICATION AUX ENSEMBLES ANALYTIQUES COMPLEXES.

Soit V un germe d'ensemble analytique complexe en 0 dans \mathbf{C}^n ; identifions \mathbf{C}^n à \mathbf{R}^{2n} en associant à $z = (z_1, \dots, z_n)$ le point $(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$, avec $x_j = \Re z_j$, $y_j = \Im z_j$; V peut alors être considéré comme germe analytique-réel. Si V est irréductible en tant que germe analytique-complexe, il est irréductible en tant que germe analytique-réel puisque, W étant un représentant de V , il existe un système fondamental de voisinages \mathcal{O}_x de 0 tels que la partie régulière de $W \cap \mathcal{O}_x$ soit un ouvert connexe et partout dense dans $W \cap \mathcal{O}_x$ (cf. par exemple, [3]). Il en résulte, dans le cas général, que les décompositions en composantes irréductibles de V coïncident, que V soit considéré comme germe analytique-réel ou analytique-complexe.

Supposons V irréductible, et soit \mathfrak{I} son idéal « complexe » (i. e. dans $\mathbf{C} \{z_1, \dots, z_n\}$), et \mathfrak{I}' son idéal réel (i. e. dans $\mathbf{R} \{x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n\}$), posons $\tilde{\mathfrak{I}} = \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathfrak{I}'$; $\tilde{\mathfrak{I}}$ est un idéal de $\mathbf{C} \{x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n\}$, et c'est l'idéal du complexifié [4] \tilde{V} de V considéré comme germe analytique-réel; évidemment, $\tilde{\mathfrak{I}}$ contient les parties réelles et imaginaires des fonctions de \mathfrak{I} (je ne sais pas s'il est ou non engendré par ces fonctions; il me semble probable que la réponse est positive). En faisant, dans \mathbf{C}^{2n} , le changement de coordonnées : $z = x + iy$, $\zeta = x - iy$, on déduit de là qu'un représentant \tilde{W} de \tilde{V} est contenu au voisinage de 0 dans l'ensemble $W \times \bar{W}$ des points (z, ζ) vérifiant $z \in W$, $\bar{\zeta} \in W$, W étant un représentant de V ; or cet ensemble est visiblement irréductible (même raisonnement que plus haut), donc $\tilde{W} = W \times \bar{W}$ (plus exactement, les germes des deux membres sont égaux).

Soit alors E un sous-ensemble analytique complexe d'un ouvert $\Omega \subset \mathbf{C}^n$. Examinons à quelle condition E , considéré comme ensemble analytique-

réel, est cohérent; pour cela, il faut et il suffit que la condition suivante soit réalisée : pour tout $a \in \Omega$, désignons par \tilde{E}_a le complexifié du germe analytique-réel E_a , et soit F_a un représentant de \tilde{E}_a ; alors, en tout point $b \in \Omega$ assez voisin de a , on a $(F_a)_b = \tilde{E}_b$ (ce fait résulte immédiatement du fait que le faisceau d'un sous-ensemble analytique complexe est cohérent; voir [4]); et la condition précédente est vérifiée en a si elle est vérifiée par les composantes irréductibles de E_a (ou, plus exactement, par des représentants de ces composantes irréductibles) [4]. De là, et des considérations précédentes, résulte facilement que E , considéré comme ensemble analytique réel, est cohérent, si et seulement si la condition suivante est vérifiée : *pour tout point $a \in \Omega$, les composantes irréductibles de E en a (i. e. des représentants des composantes irréductibles de E_a) restent irréductibles en tout point $b \in \Omega$ suffisamment voisin de a .* Par exemple, cette propriété sera vérifiée en a , si E est normal en a , d'après le « théorème d'Oka » [3]; mais en général, elle ne sera pas vérifiée [par exemple, dans \mathbf{C}^2 , l'ensemble défini par l'équation $z_2(z_1^2 + z_2^2) = z_1^2$ n'est pas cohérent en o , lorsqu'on le considère comme ensemble analytique-réel; et une construction analogue à celle qui a été faite au paragraphe 2 montre que pour cet ensemble, la propriété énoncée au théorème 3 est fausse].

Voici maintenant une autre application du théorème 2 (qui répond à une question posée à l'auteur par H. GRAUERT) :

THÉORÈME 4. — *Soit V un germe analytique complexe en o dans \mathbf{C}^n , et soit f un germe de fonction à valeurs complexes sur V , possédant les propriétés suivantes :*

1° *f est restriction d'un germe F de fonction dérivable au voisinage de o dans \mathbf{C}^n ;*

2° *La restriction de f à la partie régulière de V est holomorphe.*

Alors, *f est restriction d'un germe de fonction holomorphe au voisinage de o dans \mathbf{C}^n (i. e. « f est holomorphe sur le germe d'espace analytique V »).*

(La condition 2° doit évidemment être interprétée ainsi : soient W un représentant de V , et g une fonction sur W dont le germe en o soit égal à f ; alors la restriction de g à la variété des points réguliers de W est holomorphe.)

Démontrons d'abord ce théorème lorsque V est irréductible; dans ce cas, nous conserverons les notations du début du paragraphe 3 : \tilde{V} , \mathfrak{S} , ... L'hypothèse 2°, jointe à la continuité de f , entraîne classiquement [3] que f est méromorphe sur V , i. e. qu'il existe g et $h \in \mathbf{C}\{z_1, \dots, z_n\}$, avec $h \notin \mathfrak{S}$, tels qu'on ait, sur V : $hf - g = 0$.

Appliquons le théorème 2 à la fonction $hF - g$; on trouve

$$\hat{h}\hat{F} - \hat{g} \equiv 0 \quad \text{mod}(\hat{\mathfrak{S}}),$$

appelons \hat{F}' la série formelle appartenant à $\mathbf{C}[[z_1, \dots, z_n]]$ obtenue en faisant $\zeta = 0$ dans le développement $\hat{F}(z, \zeta)$ de F en 0 , et remarquons que, si une série formelle $k(z, \zeta)$ appartient à $\hat{\mathfrak{S}}$, on a $k(z, 0) \in \hat{\mathfrak{S}}$ [en effet, il suffit d'établir ce résultat lorsque k est une série convergente; or, dans ce cas, elle s'annule sur $V \times \bar{V}$, donc $k(z, 0)$ s'annule sur V]. Faisant $\zeta = 0$ dans la formule précédente, il vient

$$\hat{h}\hat{F}' - \hat{g} \equiv 0 \pmod{\hat{\mathfrak{S}}}.$$

Soit \mathfrak{J} l'idéal $\subset \mathbf{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ engendré par \mathfrak{S} et h , i. e. $\mathfrak{J} = \mathfrak{S} + (h)$; on a (§ 1) $\hat{\mathfrak{S}} = \hat{\mathfrak{S}} + (\hat{h})$, d'où $\hat{g} \equiv 0 \pmod{\hat{\mathfrak{S}}}$; d'après 1, 3 (a), cela entraîne

$$g \equiv 0 \pmod{\mathfrak{J}}, \text{ i. e. } \exists \Phi \in \mathbf{C}\{z_1, \dots, z_n\}, \quad g - \Phi h \equiv 0 \pmod{\mathfrak{S}};$$

sur l'ensemble des points de V qui vérifient $h \neq 0$, donc partout sur V , on a alors $\Phi = F$ (puisque l'ensemble de ces points est dense dans V , cf. [3]); d'où le résultat.

Passons maintenant au cas général : soient V_1, \dots, V_p les composantes irréductibles de V , et $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_p$ leurs idéaux. Le raisonnement précédent montre qu'il existe $\Phi_1, \dots, \Phi_p \in \mathbf{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ tels qu'on ait

$$\forall j : F - \Phi_j = 0 \text{ sur } V_j.$$

Avec des notations évidentes, on aura $\forall j$, d'après le théorème 2

$$\hat{F} - \hat{\Phi}_j \equiv 0 \pmod{\hat{\mathfrak{S}}_j},$$

d'où en faisant $\zeta = 0$,

$$\hat{F}' - \hat{\Phi}_j \equiv 0 \pmod{\hat{\mathfrak{S}}_j}$$

et, par suite,

$$\forall (i, j) : \hat{\Phi}_i - \hat{\Phi}_j \equiv 0 \pmod{\hat{\mathfrak{S}}_i + \hat{\mathfrak{S}}_j}$$

et, d'après 1, 3, (a), et la formule $(\mathfrak{S}_i + \mathfrak{S}_j)^\wedge = \hat{\mathfrak{S}}_i + \hat{\mathfrak{S}}_j$,

$$\Phi_i - \Phi_j \equiv 0 \pmod{\mathfrak{S}_i + \mathfrak{S}_j}.$$

Il est alors élémentaire de montrer qu'il existe $\Phi \in \mathbf{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ tel qu'on ait

$$\forall j : \Phi - \Phi_j \equiv 0 \pmod{\mathfrak{S}_j};$$

et il est clair que, sur V , on a $\Phi = F$. D'où le théorème.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] BOURBAKI (Nicolas). — *Algèbre commutative*, chap. 1-2, 3-4. Hermann, Paris, 1961 (*Act. scient. et ind.*, 1290-1293; *Éléments de Mathématique*, 27-28).
 [2] BRUHAT (F.) et CARTAN (H.). — Sur la structure des sous-ensembles analytiques réels, *C. R. Acad. Sc.*, t. 244, 1957, p. 988-990.

- [3] CARTAN (Henri). — Fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, *Séminaire Cartan*, t. 4, 1951-1952; Variétés analytiques complexes et fonctions automorphes, *Séminaire Cartan*, t. 6, 1953-1954; Familles d'espaces complexes et fondements de la géométrie analytique, *Séminaire Cartan*, t. 13, 1960-1961.
- [4] CARTAN (Henri). — Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes, *Bull. Soc. math. France*, t. 85, 1957, p. 77-99.
- [5] ŁOJASIEWICZ (Stanislaw). — Sur le problème de la division, *Studia Math.*, t. 18, 1959, p. 87-136.
- [6] MALGRANGE (Bernard). — Division des distributions, I-IV, *Séminaire Schwartz*, t. 4, 1959-1960, nos 21-25.
- [7] NAGATA (Masayoshi). — A general theory of algebraic geometry over Dedekind domains, I, *Amer. J. Math.*, t. 78, 1956, p. 78-116.
- [8] SAMUEL (P.) et ZARISKI (O.). — *Commutative algebra*, I-II. Princeton, Van Nostrand Comp., 1958-1960 (The University Series in higher Mathematics).
- [9] SAMUEL (Pierre). — Algèbre locale et ensembles analytiques, *Séminaire Lelong*, Analyse, t. 1, 1957-1958, n° 2 (multigraphié).
- [10] SERRE (Jean-Pierre). — Géométrie algébrique et géométrie analytique, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 6, 1955-1956, p. 1-42.
- [11] ZARISKI (Oscar). — Sur la normalité analytique des variétés normales, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 2, 1950, p. 161-163.

(Manuscrit reçu le 2 août 1962.)

Bernard MALGRANGE
Prof. Fac. Sc. Paris,
37, parc d'Ardenay
Palaiseau (Seine-et-Oise).