BULLETIN DE LA S. M. F.

ARISTIDE DELEANU

Théorie des points fixes. Commutativité de l'indice total

Bulletin de la S. M. F., tome 91 (1963), p. 285-288
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1963__91__285_0>

Bull. Soc. math. France,
91, 1963, p. 285 à 288.

THÉORIE DES POINTS FIXES : COMMUTATIVITÉ DE L'INDICE TOTAL ;

PAR

ARISTIDE DELEANU

(Bucarest).

Cette Note fait suite au travail [2], qui contient une théorie des points fixes pour la classe des espaces compacts qui sont des rétractes de voisinage d'espaces convexoïdes; nous en conservons les notations et la terminologie.

THÉORÈME. — *Soient C_1 et C_2 deux espaces compacts qui sont des rétractes de voisinage d'espace convexoïde, et soient f une application continue de C_1 dans C_2 et g une application continue de C_2 dans C_1. Soit O_2 une partie ouverte de C_2 telle que l'indice total $i_{fg}(O_2)$ est défini. Si l'on pose $O_1 = f^{-1}(O_2)$, alors l'indice total $i_{gf}(O_1)$ est défini et*

$$i_{gf}(O_1) = i_{fg}(O_2).$$

PREUVE. — Le fait que $i_{fg}(O_2)$ est défini signifie qu'on a

$$fg(y) \neq y$$

pour tout point y appartenant à la frontière $\dot{O}_2$ de O_2. Pour prouver que $i_{gf}(O_1)$ est aussi défini, il suffit de montrer que

$$gf(x) \neq x \qquad \text{pour tout} \quad x \in \dot{O}_1.$$

Supposons qu'il existe $x_0 \in \dot{O}_1$ tel que $gf(x_0) = x_0$. Si l'on pose $y_0 = f(x_0)$, on déduit que $fg(y_0) = y_0$; d'autre part, les relations

$$x_0 \in \dot{O}_1 = \overline{O}_1 - O_1$$

et

$$f(\bar{O}_1) \subset \overline{f(O_1)} = \overline{ff^{-1}(O_2)} \subset \bar{O}_2$$

entraînent $y_0 \in \bar{O}_2 - O_2 = \dot{O}_2$, ce qui est absurde.

Pour démontrer l'égalité des deux indices, supposons tout d'abord C_1 et C_2 connexes. Alors on sait [2] que C_1 et C_2 sont rétractes d'espaces convexoïdes. Il existe donc deux espaces convexoïdes E_1 et E_2 et deux rétractions

$$r_1 : \; E_1 \to C_1, \qquad r_2 : \; E_2 \to C_2.$$

Notons par j_α l'inclusion de C_α dans E_α ($\alpha = 1, 2$). Considérons les applications continues

$$\xi : \; E_2 \to E_1, \qquad \xi' : \; E_1 \to E_2$$

définies par

$$\xi = j_1 g r_2, \qquad \xi' = j_2 f r_1.$$

Compte tenu de la définition de l'indice total pour les rétractes des espaces convexoïdes ([2], p. 236), et des relations $r_\alpha j_\alpha =$ identité ($\alpha = 1, 2$), on peut écrire

$$i_{gf}(O_1) = i_{j_1 g f r_1}(r_1^{-1}(O_1)) = i_{\xi\xi'}(r_1^{-1}(O_1)),$$
$$i_{fg}(O_2) = i_{j_2 f g r_2}(r_2^{-1}(O_2)) = i_{\xi'\xi}(r_2^{-1}(O_2)).$$

En appliquant le corollaire 26-27 de [3], p. 222, on obtient

$$i_{fg}(O_2) = i_{\xi\xi'}(\xi'^{-1} r_2^{-1}(O_2)) = i_{\xi\xi'}(r_1^{-1} f^{-1} j_2^{-1} r_2^{-1}(O_2))$$
$$= i_{\xi\xi'}(r_1^{-1} f^{-1}(O_2)) = i_{gf}(O_1).$$

Passons maintenant au cas où C_1 et C_2 ne sont pas connexes; on sait [2] que C_1 (resp. C_2) a un nombre fini de composantes connexes $K_1, K_2, \ldots, K_s$ (resp. $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$), dont chacune est un rétracte d'espace convexoïde.

Soit σ l'application de l'ensemble $\{0, 1, \ldots, s\}$ dans l'ensemble $\{0, 1, \ldots, t\}$ et τ l'application de $\{0, 1, \ldots, t\}$ dans $\{0, 1, \ldots, s\}$ définies par les conditions

$$f(K_l) \subset Q_{\sigma(l)} \qquad (1 \leqq l \leqq s),$$
$$g(Q_m) \subset K_{\tau(m)} \qquad (1 \leqq m \leqq t).$$

Soient L l'ensemble des entiers l tels que $1 \leqq l \leqq s$ et $l = \tau\sigma(l)$, et M l'ensemble des entiers m tels que $1 \leqq m \leqq t$ et $m = \sigma\tau(m)$.

Conformément à la définition de l'indice total pour les rétractes de voisinage des espaces convexoïdes ([2], p. 240), on a

$$i_{gf}(O_1) = \sum_{l \in L} i_{gf \mid K_l}(O_1 \cap K_l),$$

$$i_{fg}(O_2) = \sum_{m \in M} i_{fg \mid Q_m}(O_2 \cap Q_m).$$

Remarquons que, si $m \in M$, alors $\tau(m) \in L$, car $\tau\sigma\tau(m) = \tau(m)$. De plus, si $l \in L$, alors il suffit de prendre $m = \sigma(l) \in M$ pour obtenir $\tau(m) = l$. Enfin, si m_1, $m_2 \in M$ sont tels que $\tau(m_1) = \tau(m_2)$, alors

$$m_1 = \sigma\tau(m_1) = \sigma\tau(m_2) = m_2.$$

L'application τ induit donc une correspondance biunivoque entre M et L.

Compte tenu de la dernière remarque et du cas étudié plus haut, où C_1 et C_2 étaient connexes, on déduit

$$\begin{aligned} i_{fg}(O_2) &= \sum_{m \in M} i_{gf \mid K_{\tau(m)}}(f^{-1}(O_2 \cap Q_m) \cap K_{\tau(m)}) \\ &= \sum_{m \in M} i_{gf \mid K_{\tau(m)}}(O_1 \cap K_{\tau(m)}) = i_{gf}(O_1). \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Soit X un espace compact qui est un rétracte de voisinage d'espace convexoïde, G une partie ouverte de X et η une application continue de X en lui-même qui n'a aucun point fixe dans $\dot{G}$. Soit Y un sous-espace fermé de X qui est rétracte de voisinage d'espace convexoïde et tel que $\eta(X) \subset Y$. Alors $i_{\eta \mid Y}(G \cap Y)$ est défini et*

$$i_\eta(G) = i_{\eta \mid Y}(G \cap Y).$$

Preuve. — On applique le théorème ci-dessus pour $C_1 = Y$, $C_2 = X$, $O_2 = G$, $g = \eta$, $f =$ inclusion de Y dans X.

Remarque. — Felix Browder a construit [1] une théorie axiomatique de l'indice total des points fixes et a prouvé que ses quatre axiomes définissent uniquement l'indice total sur la catégorie des rétractes absolus de voisinage au sens de Borsuk. Le théorème 4 de [2] et le théorème ci-dessus montrent que les axiomes mentionnés sont satisfaits par la théorie des points fixes édifiée dans [2]. Par conséquent, pour la classe des rétractes absolus de voisinage l'indice total construit par Browder coïncide avec celui défini dans [2].

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BROWDER (Felix). — On the fixed point index for continuous mappings of locally connected spaces, *Summa Brasiliensis Mathematicæ*, t. 4, 1960, p. 253-293.

[2] DELEANU (Aristide). — Théorie des points fixes : Sur les rétractes de voisinage des espaces convexoïdes, *Bull. Soc. math. France*, t. 87, 1959, p. 235-243.

[3] LERAY (Jean). — Sur les équations et les transformations, *J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. 24, 1945, p. 201-248.

(Manuscrit reçu le 12 mars 1963.)

Aristide DELEANU,
Institutul de Matematica al Academiei R. P. R.,
Str. M. Eminescu 47,
Bucuresti 3 (Roumanie).