BULLETIN DE LA S. M. F.

M.-L. DUBREIL-JACOTIN

Sur les images homomorphes d'un demi-groupe ordonné

Bulletin de la S. M. F., tome 92 (1964), p. 101-115

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1964__92__101_0>

Bull. Soc. math. France,
92, 1964, p. 101 à 115.

SUR LES IMAGES HOMOMORPHES D'UN DEMI-GROUPE ORDONNÉ ;

PAR

MARIE-LOUISE DUBREIL-JACOTIN

(Paris).

Dans tout ce qui suit il s'agira d'un demi-groupe S muni d'un ordre noté $\leqq$ (qui est en général un ordre partiel) supposé isotone par rapport à l'opération ($a < b$ entraîne $ax \leqq bx$ et $xa \leqq xb$). Un homomorphisme de S sur un demi-groupe $\overline{S}$ ordonné est une application η de S sur $\overline{S}$ qui est un homomorphisme pour l'opération $[\eta(ab) = \eta(a)\eta(b)]$ et qui est isotone pour la relation d'ordre $[a < b$ entraîne $\overline{a} = \eta(a) \leqq \overline{b} = \eta(b)]$. Le problème posé est l'étude de telles images homomorphes et isotones et plus spécialement de celles qui sont des groupes.

Si la relation d'ordre dans S est l'égalité ($a \leqq b$ si et seulement si $a = b$), on est ramené à l'étude classique des images homomorphes d'un demi-groupe (*voir* par exemple [2]). Un cas particulier fondamental du problème général est fourni par la théorie d'Artin-Prüfer ([14], § 131) : S est alors le treillis multiplicatif $\mathcal{J}$ des idéaux fractionnaires d'un anneau $\mathfrak{A}$ commutatif intègre et unitaire. $\overline{S}$ est l'ensemble quotient de $\mathcal{J}$ par l'équivalence d'Artin $\mathfrak{A}_e$: $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}'$ $(\mathfrak{A}_e)$ si $e : \mathfrak{a} = e : \mathfrak{a}'$, où e est l'élément unité $\mathfrak{A}$ de $\mathcal{J}$; η est l'application canonique de S sur $\mathcal{J}/\mathfrak{A}_c$; de plus, l'équivalence d'Artin peut aussi être considérée comme l'équivalence d'application de la fermeture considérée dans $\mathcal{J}$ par Prüfer et qui n'est pas autre chose que $\mathfrak{a} \to \overline{\mathfrak{a}} = e : (e : \mathfrak{a})$, et l'ensemble $\overline{\mathcal{J}}$ des fermés est isomorphe à $\overline{S}$, chaque classe correspondant bijectivement au fermé qu'il contient, à savoir son élément maximum. Enfin $\overline{\mathcal{J}}$ est un groupe si et seulement si $\mathfrak{A}$ est « intégralement fermé ». Toutes les généralisations successives de ces résultats à des demi-groupes ordonnés plus ou moins généraux (M.-L. DUBREIL-JACOTIN [3], [4]; I. MOLINARO [8]; G. MAURY [7]; J. QUERRÉ [9], [10], [11], [12], [13]; T. S. BLYTH [1]) ont trait à des demi-groupes supposés *résidués* (pour tout couple d'éléments a et b de S les ensembles $\langle a \cdot\!. b \rangle$ et $\langle a .\!\cdot b \rangle$ des x tels que $xb \leqq a$ et des y tels que $by \leqq a$ ne sont pas vides — ce que nous exprimerons en disant que les complexes $\langle a \cdot\!. b \rangle$ et $\langle a .\!\cdot b \rangle$ existent — et ont chacun un élément maximum respectivement les résiduels à gauche $a \cdot\!. b$ et à droite $a .\!\cdot b$), et la solution est donnée indifféremment par des équivalences généralisant l'équivalence d'Artin ou par des fermetures.

Bien que nous ayons déjà remarqué qu'une équivalence d'Artin généralisée pouvait être considérée dans un gerbier non résidué ([4], p. 242), c'est seulement maintenant que le problème posé est abordé dans toute sa généralité. Il vient d'être résolu par L. Fuchs dans un travail intitulé *On group homomorphic images of partially ordered semigroups* présenté en décembre 1962 aux *Acta Sc. Math. Szeged*, dans les hypothèses suivantes : S est supposé avoir un élément neutre e et être seulement *quasi résidué* c'est-à-dire les quasi-résiduels $\langle a \cdot\!. b \rangle$ et $\langle a .\!\cdot b \rangle$ existent pour tous les couples d'éléments a et b de S. De plus L. Fuchs impose que tout élément a dont l'image $\bar{a}$ est inférieure à $\bar{e}$ est inférieur à e.

Dans ce travail, nous ne supposons plus S quasi résidué; nous supposons seulement qu'existent les quasi-résiduels dont l'existence est nécessaire et suffisante pour obtenir des résultats tout à fait analogues à ceux de L. Fuchs; de plus, nous ne supposons plus que S admet un élément neutre e, mais seulement que l'image réciproque de $\bar{e}$ admet un élément maximum ξ qui majore tout élément ayant son image plus petite que $\bar{e}$. Dans la dernière partie, nous donnons des applications de ces résultats; nous indiquons aussi un exemple simple de demi-groupe ordonné pour lequel on obtient un groupe homomorphe $\bar{S}$ par une équivalence d'Artin généralisée, alors qu'aucune fermeture ne peut donner ce résultat.

§ 1.

Rappelons d'abord qu'on appelle application de fermeture dans un demi-groupe ordonné S une application φ de S dans S vérifiant l'un ou l'autre des systèmes équivalents d'axiomes ([6], p. 195) :

$$\text{(I)} \left\{ \begin{array}{ll} (1^\circ)\quad a \leqq \bar{a} = \varphi(a), & (2^\circ)\quad a \leqq b \text{ entraîne } \bar{a} \leqq \bar{b}, \\ & (3^\circ)\quad \bar{\bar{a}} = \varphi(\varphi(a)) = \bar{a}; \end{array} \right.$$

$$\text{(I')}\quad (1^\circ)\quad a \leqq \bar{a} = \varphi(a), \qquad (2'^\circ)\quad a \leqq \bar{b} \text{ entraîne } \bar{a} \leqq \bar{b}.$$

Soit alors $\mathcal{E}_\varphi$ l'équivalence d'application associée : $a \equiv a' \ (\mathcal{E}_\varphi)$ si $\bar{a} = \bar{a}'$. En vertu de (3°) les éléments a et $\bar{a}$ appartiennent à la même classe A et, à cause de (1°), $\bar{a}$ est élément maximum de sa classe. L'application φ de S sur $\bar{S} = \varphi(S)$ est isotone à cause de (2°) et si l'on définit dans $\bar{S}$, qui n'est pas stable en général pour l'opération de S, l'opération « T » par le procédé classique $\bar a T \bar b = \overline{\bar a \, \bar b}$, l'application est un homomorphisme si et seulement si $\varphi(ab) = \varphi(\bar a \, \bar b)$, c'est-à-dire si et seulement si

$$(4^{\circ}) \qquad \overline{ab} = \overline{\bar a \, \bar b}.$$

Et *cette condition est* évidemment *nécessaire et suffisante pour que l'équivalence d'application $\mathcal{E}_\varphi$ soit compatible avec l'opération.*

Remarquons qu'à cause de (3°) cette condition est équivalente aux deux conditions $\overline{a\bar b} = \overline{ab}$ et $\overline{\bar a b} = \overline{ab}$; mais la dernière exprime que $\bar a b$ et ab appartiennent à la même classe mod $\mathcal{E}_\varphi$ donc $\bar a b \leqq \overline{ab}$; inversement cette inégalité entraîne à cause de (2'°) $\overline{\bar a b} \leqq \overline{ab}$ c'est-à-dire l'égalité puisque l'inclusion inverse est toujours vraie. La condition (4°) est donc équivalente à $\bar a b \leqq \overline{ab}$ et $a\bar b \leqq \overline{ab}$; J. Querré a montré l'intérêt de ces inégalités dont chacune caractérise la régularité d'un côté de $\mathcal{E}_\varphi$ pour l'opération ([9]).

En résumé pour toute fermeture satisfaisant à (4°) la bijection qui associe à toute classe mod $\mathcal{E}_\varphi$ son élément maximum est un isomorphisme de $\bar S$ sur $S/\mathcal{E}_\varphi$. $\bar S$ étant ordonné par la restriction à $\bar S$ de l'ordre de S et les classes mod $\mathcal{E}_\varphi$ comme leurs représentants; cet isomorphisme est aussi un isomorphisme d'ensemble ordonné. On a en particulier, si $\bar S$ admet pour T un élément neutre $\bar e$: la classe $E = \eta^{(-1)}(\bar e)$ admet un élément maximum ξ $(= \bar e)$ et (puisque $a \leqq \bar a$),

$\otimes$ tout élément a dont l'image $\bar a$ est plus petite que $\bar e$ est plus petit que ξ.

Soient alors S un demi-groupe ordonné et $\bar S$ une image homomorphe de S, le demi-groupe $\bar S$ étant ordonné et l'application η de S sur $\bar S$ étant un homomorphisme isotone. Nous supposerons que $\bar S$ possède un élément neutre $\bar e$, que le noyau $E = \eta^{(-1)}(\bar e)$ admet un élément maximum ξ et que la condition $\otimes$ est satisfaite (¹), condition que nous écrirons encore :

$$\otimes \qquad \bar a \leqq \bar e \text{ entraîne } \eta^{(-1)}(\bar a) \subseteq \overset{\leqq}{\xi}$$

(où $\overset{\leqq}{\xi} = \{ x \in S ; x \leqq \xi \}$ est la section commençante de ξ).

Nous allons déduire quelques conséquences des hypothèses ci-dessus et de l'hypothèse supplémentaire éventuelle : $\bar S$ est un groupe.

Lemme 1 : *$\langle \xi \cdot . a \rangle$ existe pour tout a dont l'image $\bar a$ est inversible à gauche dans $\bar S$.*

(¹) Cette condition — équivalente à ξ est élément maximum de sa classe dans le cas d'un gerbier et d'une application compatible avec $\vee$ (sup) ([4], p. 180) — est en général plus forte que cette propriété, comme on le vérifie facilement sur des exemples.

Soit en effet $a' \in \eta^{(-1)}(\bar{a}^{-1})$, on a

$$\eta(a'a) = \eta(a')\,\eta(a) = \bar{a}^{-1}\,\bar{a} = \bar{e}$$

et $\otimes$ entraîne : $a'a \leqq \xi$, donc $a' \in \langle \xi \,\dot{.}\, a \rangle$, qui existe bien.

On montre naturellement de même que tout a' tel que $aa' \equiv \xi$ appartient à $\langle \xi \,.\dot{}\, a \rangle$ dont l'existence est ainsi assurée.

Soit encore a' tel que $a'a \equiv \xi$ et v tel que va' soit élément de $\langle \xi \,\dot{.}\, a \rangle$; on a $va'a \leqq \xi$ donc $\eta(va'a) \leqq \eta(\xi) = \bar{e}$, d'où, puisque $\eta(a'a) = \bar{e}$, $\eta(v) \leqq \bar{e}$ et comme conséquence de $\otimes$: $v \leqq \xi$.

Nous dirons que $u \in U$ est « l. m. m. » dans U si : $vu \in U$ entraîne $v \leqq \xi$ [notion introduite par L. Fuchs ([5]) dans le cas où ξ est élément neutre sous le nom de « left multiplicatively maximal »; et de même u sera « r. m. m. » dans U si $uv \in U$ entraîne $v \leqq \xi$] (1).

Nous pouvons donc compléter le lemme 1 par :

Lemme 1'. — *Si $\bar{a}$ est inversible à gauche dans $\bar{S}$ tout a', tel que $a'a \equiv \xi$, est* l. m. m. *dans $\langle \xi \,\dot{.}\, a \rangle$.*

La réciproque se présente sous la forme suivante :

Lemme 2. — *Si a' est* l. m. m. *dans $\langle \xi \,\dot{.}\, a \rangle$ et si $\bar{a}'$ et $\bar{a}$ sont inversibles à gauche dans $\bar{S}$ alors $a'a \equiv \xi$.*

En effet, l'élément $\overline{a'a}$ est inversible à gauche (condition qu'il suffirait de supposer); soit alors $b \in \eta^{(-1)}(\overline{a'a})^{-1}$, la relation $\eta(ba'a) = \bar{e}$ entraîne $ba' \in \langle \xi \,\dot{.}\, a \rangle$ et, puisque a' est l. m. m. dans $\langle \xi \,\dot{.}\, a \rangle$, $b \leqq \xi$, d'où $\bar{b} \leqq \bar{e}$. On a, d'autre part, $\overline{a'a} \leqq \bar{e}$, d'où $ba'\bar{a} = \bar{e} \leqq \bar{b}$, ce qui entraîne $\bar{b} = \bar{e}$, et par suite $\overline{a'a} = \bar{e}$, c'est-à-dire $a'a \equiv \xi$.

Du lemme 1' résulte en particulier que tout élément congru à ξ, c'est-à-dire tout élément de E, est l. m. m. dans $\langle \xi \,\dot{.}\, \xi \rangle$; donc, en particulier, ξ a cette propriété, et par suite on a $\xi^2 \leqq \xi$ et $u\xi^2 \leqq \xi$ entraîne $u \leqq \xi$, d'où résulte immédiatement que $\langle \xi \,\dot{.}\, \xi \rangle = \overset{\leqq}{\xi}$. Comme $\bar{e}$ est à la fois son inverse à gauche et à droite, on a aussi $\langle \xi \,.\dot{}\, \xi \rangle = \overset{\leqq}{\xi}$. Donc :

Théorème 1. — *L'élément ξ a la propriété que, dans S, les résiduels de ξ par lui-même à gauche et à droite existent et sont égaux à ξ.*

Appelons Ω l'ensemble des éléments l. m. m. de $\langle \xi \,\dot{.}\, \xi \rangle$. On a les deux propriétés immédiates suivantes :

1° Si x est l. m. m. dans $\langle \xi \,\dot{.}\, a \rangle$, on a $xa \in \Omega$.

On a en effet $xa \leqq \xi$, donc $xa \in \langle \xi \,\dot{.}\, \xi \rangle$ et, si $uxa \in \langle \xi \,\dot{.}\, \xi \rangle$ c'est-à-dire $uxa \leqq \xi$, on a $ux \in \langle \xi \,\dot{.}\, a \rangle$, d'où $u \leqq \xi$, puisque x est l. m. m. dans $\langle \xi \,\dot{.}\, a \rangle$.

2° Si $\omega \in \Omega$ est divisible à droite par a, $\omega = a'a$, $\langle \xi \cdot . a \rangle$ existe et a' est l. m. m. dans $\langle \xi \cdot . a \rangle$.

De $a'a \leqq \xi$ résulte déjà $a' \in \langle \xi \cdot . a \rangle$. Soit alors u tel que $ua' \in \langle \xi \cdot . a \rangle$, il vient $ua'a = u\omega \leqq \xi$, c'est-à-dire $u\omega \in \langle \xi . \cdot \xi \rangle$, d'où $u \leqq \xi$ puisque $\omega \in \Omega$.

Appelons A l'ensemble des éléments a de S pour lesquels $\langle \xi \cdot . a \rangle$ existe. Les résultats ci-dessus se résument par :

THÉORÈME 2. — *$\langle \xi \cdot . a \rangle$ contient des éléments* l. m. m. *pour tout $a \in A$ si et seulement si quel que soit $a \in A$ il existe a', élément de S, tel que $a'a \in \Omega$.*

Si $\overline{S}$ est un groupe, on a $A = S$, $\Omega = E$ et le théorème 2 exprime que *E est net à gauche* ce qui est une propriété bien connue ([2]), et l'on peut énoncer aussi :

THÉORÈME 3. — *Si $\overline{S}$ est un groupe, quel que soit a, $\langle \xi \cdot . a \rangle$ existe et les a' tels que $a'a \equiv \xi$ sont les éléments* l. m. m. *de $\langle \xi \cdot . a \rangle$.*

Comme l'a signalé L. FUCHS, si a' est l. m. m. dans $\langle \xi \cdot . a \rangle$, tout $a'' > a'$, $a'' \in \langle \xi \cdot . a \rangle$ est aussi l. m. m. dans $\langle \xi \cdot . a \rangle$. Donc, si $\langle \xi \cdot . a \rangle$ admet un élément maximum, $(\xi \cdot . a)$, les éléments l. m. m. de $\langle \xi \cdot . a \rangle$ — s'il y en a — ont un élément maximum $\xi \cdot . a$. Mais la réciproque est inexacte, le fait que les l. m. m. de $\langle \xi \cdot . a \rangle$ auraient un élément maximum entraîne seulement que cet élément est maximal dans $\langle \xi \cdot . a \rangle$.

Revenons au cas général, nous avons :

LEMME 3. — *Si $\eta(a) = \eta(b)$, $\langle \xi \cdot . a \rangle$ et $\langle \xi \cdot . b \rangle$ existent en même temps et sont égaux.*

En effet, si $\langle \xi \cdot . a \rangle$ existe, pour tout $x \in \langle \xi \cdot . a \rangle$ on a $xa \leqq \xi$, d'où $\eta(xa) \leqq \bar{e}$; mais $\eta(xb) = \eta(x)\eta(b) = \eta(x)\eta(a) = \eta(xa) \leqq \bar{e}$. On a donc $xb \leqq \xi$, c'est-à-dire $x \in \langle \xi \cdot . b \rangle$, et l'existence de $\langle \xi \cdot . a \rangle$ entraîne celle de $\langle \xi \cdot . b \rangle$, et l'on a $\langle \xi \cdot . a \rangle \subseteq \langle \xi \cdot . b \rangle$, d'où, en répétant le raisonnement en sens inverse, l'égalité. Naturellement on a aussi $\langle \xi . \cdot a \rangle$ et $\langle \xi . \cdot b \rangle$ existent en même temps et sont égaux.

LEMME 4. — *Si $\langle a . \cdot a \rangle = \{x;\, ax \leqq a\}$, existe et si $\bar{a}$ est inversible à gauche alors $\langle a . \cdot a \rangle \subseteq \overset{\leqq}{\xi}$.*

Soit $x \in \langle a . \cdot a \rangle$, on a $ax \leqq a$; soit a' tel que $a'a \equiv \xi$. On a donc $a'ax \leqq a'a \leqq \xi$, et $x \in \langle \xi . \cdot a'a \rangle$; le lemme 3 entraîne que $\langle \xi . \cdot a'a \rangle = \langle \xi . \cdot \xi \rangle$ et par suite $x \leqq \xi$. Naturellement on a encore, si $\langle a \cdot . a \rangle$ existe et si $\bar{a}$ est inversible à droite, $\langle a \cdot . a \rangle \subseteq \overset{\leqq}{\xi}$.

Remarquons qu'on a en particulier : $\langle a\xi . \cdot a\xi \rangle$ et $\langle \xi a \cdot . \xi a \rangle$ existent quel que soit a, car $\xi^2 \leqq \xi$ entraîne $\xi . \xi a \leqq \xi a$ et $a\xi . \xi \leqq a\xi$. Donc

$\overset{\leqq}{\xi} \subseteq \langle \xi a \cdot . \xi a \rangle$ et $\overset{\leqq}{\xi} \subseteq \langle a\xi . \cdot a\xi \rangle$. Mais si $\bar{a}$ est inversible à gauche, il en est de même de $\overline{a\xi}$, et le lemme 4 joint à ce résultat donne :

LEMME 5. — *Si $\bar{a}$ est inversible à gauche, on a* $\langle a\xi . \cdot a\xi \rangle = \overset{\leqq}{\xi}$, c'est-à-dire le résiduel de $a\xi$ par lui-même à droite existe et est ξ.

Considérons encore le cas particulier important où le résiduel $\xi \cdot . a$ existe. Soit alors $x \in \langle \xi \cdot . a \rangle$; $xa \leqq \xi$ entraîne $\xi xa \leqq \xi^2 \leqq \xi$, et ξx est un élément de $\langle \xi \cdot . a \rangle$, en particulier il en est ainsi de $\xi (\xi \cdot . a)$, et l'on a donc $\xi (\xi \cdot . a) \leqq (\xi \cdot . a)$, d'où $\overset{\leqq}{\xi} \subseteq \langle (\xi \cdot . a) \cdot . (\xi \cdot . a) \rangle$. On a donc :

LEMME 6. — *Si le résiduel $\xi \cdot . a$ existe, le quasi-résiduel à gauche de $\xi \cdot . a$. par lui-même existe et* $\overset{\leqq}{\xi} \subseteq \langle (\xi \cdot . a) \cdot . (\xi \cdot . a) \rangle$.

Si alors $\bar{a}$ est inversible à gauche, il existe a' tel que $a'a \equiv \xi$, et l'on sait que a' est l. m. m. dans $\langle \xi \cdot . a \rangle$; on a donc $a' \leqq \xi \cdot . a$, d'où $a'a \leqq (\xi \cdot . a)\, a \leqq \xi$, et en vertu de la convexité des classes due à l'isotonie de η, $(\xi \cdot . a)\, a \equiv \xi$, c'est-à-dire $\eta\, ((\xi \cdot . a)a) = \eta\, (\xi)$ et (lemme 3) $\langle \xi \cdot . (\xi \cdot . a)a \rangle = \langle \xi \cdot . \xi \rangle$.

LEMME 7. — *Si $\xi \cdot . b$ existe, on a* $\langle \xi \cdot . ab \rangle = \langle (\xi \cdot . b) \cdot . a \rangle$.

Ceci résulte de ce qu'il est équivalent d'écrire $xab \leqq \xi$ ou $xa \leqq \xi \cdot . b$.

La condition précédente s'écrit donc $\langle (\varepsilon \cdot . a) \cdot . (\xi \cdot . a) \rangle = \overset{\leqq}{\xi}$ et nous avons :

THÉORÈME 4. — *Si le résiduel à gauche $\xi \cdot . a$ existe et si $\bar{a}$ est inversible à gauche, on a* $(\xi \cdot . a) \cdot . (\xi \cdot . a) = \xi$.

Enfin si $\bar{S}$ est un groupe, les lemmes 4 et 5 donnent :

THÉORÈME 5. — *$\bar{S}$ étant un groupe, l'élément ξ est élément maximum de chacun des deux ensembles* $\bigcup \langle a \cdot . a \rangle$, $\bigcup \langle a . \cdot a \rangle$ *où la réunion est étendue à tous les a de S tels que* $\langle a \cdot . a \rangle$ *et* $\langle a . \cdot a \rangle$ *existent.*

Si S est résidué, cet élément n'est pas autre chose que l'élément « bi-maximum » mis en évidence dans le cas abélien par I. MOLINARO ([8]), et ainsi nommé dans le cas général par J. QUERRÉ ([11]).

L'égalité $\langle \xi \cdot . a \rangle = \langle \xi \cdot . b \rangle$ entraîne que les éléments l. m. m. de chacun de ces deux ensembles sont les mêmes. S'il en existe un dont l'image $\bar{c}$ soit inversible à gauche, on a, en vertu du lemme 2, si $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont inversibles à gauche : $ca \equiv cb \equiv \xi$ et si dans $\bar{S}$ l'inverse à droite de $\bar{c}$ est unique, il en résulte $\bar{a} = \bar{b}$. On a donc en particulier :

THÉORÈME 6. — *Si $\bar{S}$ est un groupe,* $\langle \xi \cdot . a \rangle = \langle \xi \cdot . b \rangle$ *entraîne* $\eta\, (a) = \eta\, (b)$ et l'on a vu, lemme 3, que ceci entraîne aussi $\langle \xi . \cdot a \rangle = \langle \xi . \cdot b \rangle$.

De plus :

THÉORÈME 7. — *Si $\bar{S}$ est un groupe, pour tout élément a, on a* $\langle \xi \cdot. a \rangle = \langle \xi .\cdot a \rangle$.

La propriété est en effet vraie pour tout a tel que $\bar{a}$ soit inversible à gauche et à droite dans $\bar{S}$. Soit en effet x tel que $xa \leqq \xi$: on a $\eta(x)\,\eta(a) \leqq \bar{e}$, d'où $\eta(a)\,\eta(x)\eta(a) \leqq \eta(a)$; $\eta(a)$ étant inversible à droite, il en résulte $\eta(ax) \leqq \bar{e}$, donc $ax \leqq \xi$ et $\langle \xi \cdot. a \rangle \subseteq \langle \xi .\cdot a \rangle$, et l'inclusion inverse se démontre de même.

Rappelons qu'on dit qu'un sous-ensemble X d'un demi-groupe D est *réflectif* si $ab \in X$ entraîne $ba \in X$. Dans le demi-groupe ordonné S, nous dirons que l'élément ω est réflectif si $\overset{\leqq}{\omega}$ est réflectif au sens ci-dessus (c'est-à-dire si $ab \leqq \omega$ entraîne $ba \leqq \omega$). Le théorème 7 exprime donc que ξ est *réflectif.*

En résumé, s'il existe une application homomorphe et isotone d'un demi-groupe S sur un groupe $\bar{S}$ vérifiant $\otimes$, la solution est nécessairement unique : l'élément maximum ξ du noyau est l'élément bimaximum de S et l'équivalence d'application est donnée par l'une ou l'autre des définitions équivalentes :

$$a \equiv a' \quad (\mathcal{C}_\xi) \qquad \text{si} \quad \langle \xi \cdot. a \rangle = \langle \xi \cdot. a' \rangle,$$
$$a \equiv a' \quad ({}_\xi\mathcal{C}) \qquad \text{si} \quad \langle \xi .\cdot a \rangle = \langle \xi .\cdot a' \rangle.$$

De plus, s'il existe une application de fermeture dans S, compatible avec l'opération et donnant un groupe $\bar{S}$ comme image, elle est nécessairement unique puisque l'équivalence d'application de cette fermeture est nécessairement l'équivalence ci-dessus.

§ 2.

Étudions maintenant le problème inverse, celui des conditions suffisantes pour obtenir une image homomorphe et isotone $\bar{S}$ de S vérifiant $\otimes$ et qui soit éventuellement un groupe.

Soit dans le demi-groupe ordonné S un élément ξ réflectif et tel que son résiduel par lui-même à gauche et à droite existe et soit ξ.

LEMME 8. — *Si $\langle \xi \cdot. a \rangle$ existe, $\langle \xi .\cdot a \rangle$ existe et lui est égal.*

Soit en effet $x \in \langle \xi \cdot. a \rangle$, c'est-à-dire $xa \leqq \xi$; ξ étant réflectif, il en résulte $ax \leqq \xi$ et $\langle \xi \cdot. a \rangle$ est contenu dans $\langle \xi .\cdot a \rangle$; $\langle \xi .\cdot a \rangle$ existant alors, on a l'inclusion inverse, d'où l'égalité.

LEMME 9. — *L'ensemble $\mathcal{E}_\xi$ des éléments x de S tels que $\langle \xi \cdot. x \rangle$ existe est un sous-demi-groupe de S.*

Soient en effet x et y deux éléments de $\mathcal{L}_\xi$; il existe donc u et v tels que $ux \leqq \xi$, $vy \leqq \xi$, d'où puisque ξ est réflectif $yv \leqq \xi$, et par suite on a $uxyv \leqq \xi^2 \leqq \xi$, d'où, toujours à cause de ce que ξ est réflectif, $vu.xy \leqq \xi$, c'est-à-dire : $\langle \xi \cdot\!. xy \rangle$ existe et xy est élément de $\mathcal{L}_\xi$. De plus si $x \in \mathcal{L}_\xi$, tout élément u de $\langle \xi \cdot\!. x \rangle$ appartient aussi à $\mathcal{L}_\xi$, puisque $ux \leqq \xi$ entraîne que $\langle \xi .\!\cdot u \rangle$ et par suite aussi $\langle \xi \cdot\!. u \rangle$ existent.

Naturellement si $\overset{\leqq}{\xi}$ *est net* (et ξ étant réflectif, net d'un côté est suffisant) $S = \mathcal{L}_\xi$. *Dans* $\mathcal{L}_\xi$ *on a encore :* ξ *est réflectif et* $\xi \cdot\!. \xi = \xi .\!\cdot \xi = \xi$.

LEMME 10. — *Si* $\langle \xi \cdot\!. a \rangle$ *existe, on a* $\langle \xi \cdot\!. a\xi \rangle = \langle \xi .\!\cdot \xi a \rangle = \langle \xi \cdot\!. a \rangle$.

En effet $x \in \langle \xi \cdot\!. a \rangle$ entraîne $xa \leqq \xi$, $xa\xi \leqq \xi^2 \leqq \xi$, donc $x \in \langle \xi \cdot\!. a\xi \rangle$ et $\langle \xi \cdot\!. a \rangle \subset \langle \xi \cdot\!. a\xi \rangle$; et inversement, $y \in \langle \xi \cdot\!. a\xi \rangle$ donne $ya\xi \leqq \xi$, d'où $ya \in \langle \xi \cdot\!. \xi \rangle$, $ya \leqq \xi$ et $y \in \langle \xi \cdot\!. a \rangle$. On a de même $\langle \xi .\!\cdot \xi a \rangle = \langle \xi .\!\cdot a \rangle$ et la propriété résulte du lemme 8 (elle résulte aussi immédiatement du lemme 7).

Définissons alors dans S — ou à défaut dans $\mathcal{L}_\xi$ — *l'équivalence d'Artin généralisée à gauche :*

$$a \equiv a' \quad (\mathcal{A}_\xi) \qquad \text{si} \quad \langle \xi \cdot\!. a \rangle = \langle \xi \cdot\!. a' \rangle.$$

Cette équivalence est régulière à gauche pour la multiplication par un élément quelconque x de $\mathcal{L}_\xi$. En effet, $u \in \langle \xi \cdot\!. xa \rangle$ entraîne $ux \in \langle \xi \cdot\!. a' \rangle = \langle \xi \cdot\!. a \rangle$, donc $uxa' \leqq \xi$ et $\langle \xi \cdot\!. xa \rangle \subset \langle \xi \cdot\!. xa' \rangle$, et l'on montre de même l'inclusion inverse. Utilisant alors le lemme 8, on a :

THÉORÈME 8. — *L'équivalence* $\mathcal{A}_\xi$ *peut aussi être définie par*

$$a \equiv a' \qquad \text{si} \quad \langle \xi .\!\cdot a \rangle = \langle \xi .\!\cdot a' \rangle$$

et elle est compatible avec la multiplication.

Nous l'appellerons l'*équivalence d'Artin généralisée* relative à ξ.

Appelons $\overline{S}$ l'ensemble quotient de S (ou $\mathcal{L}_\xi$ si $\overset{\leqq}{\xi}$ n'est pas net) par cette équivalence et η l'application canonique qui, à tout élément a, associe sa classe $\bar{a} = \eta(a)$.

Nous allons voir qu'on peut ordonner $\overline{S}$ de manière que l'homomorphisme η soit isotone et que $\otimes$ soit vérifiée. On a d'abord en vertu du lemme 10 :

THÉORÈME 9. — *L'image homomorphe* $\overline{S}$ *admet un élément neutre bilatère* $\bar{e}$ *qui est la classe de* ξ.

Dans S (ou $\mathcal{L}_\xi$), $E = \eta^{(-1)}(\bar{e})$ est l'ensemble des éléments e_ν congrus à ξ c'est-à-dire tels que $\langle \xi \cdot\!. e_\nu \rangle = \langle \xi \cdot\!. \xi \rangle$. On a donc en particulier $\xi \in \langle \xi \cdot\!. e_\nu \rangle$, d'où $\xi e_\nu \leqq \xi$, $e_\nu \in \langle \xi .\!\cdot \xi \rangle$ et $e_\nu \leqq \xi$.

ξ *est donc élément maximum de sa classe E*. De plus $ue_\nu \in \langle \xi^{\cdot}.\xi \rangle$ entraîne $u \in \langle \xi^{\cdot}.e_\nu \rangle$ donc $u \leqq \xi$ et les éléments de E sont les éléments l. m. m. de $\langle \xi^{\cdot}.\xi \rangle$.

Plus généralement on a :

LEMME 11. — *Si l'élément c est plus petit que ξ, tout élément c' congru à c mod $\mathfrak{A}_\xi$ est aussi plus petit que ξ.*

$c < \xi$ entraîne en effet $\langle \xi^{\cdot}.\xi \rangle \subseteq \langle \xi^{\cdot}.c \rangle = \langle \xi^{\cdot}.c' \rangle$; on a donc, en particulier, $\xi \in \langle \xi^{\cdot}.c' \rangle$, d'où résulte $c' \in \langle \xi.^{\cdot}\xi \rangle$.

LEMME 12. — *On ne peut pas trouver dans S un nombre fini d'éléments $a, a_1, a'_1, \ldots, a_n, a'_n$ vérifiant $a < a_1$, $a'_1 < a_2, \ldots, a'_n < a$, $a_i \equiv a'_i$, $a \not\equiv a_1$, $a'_i \not\equiv a_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ en posant $a_{n+1} = a$.*

De $a'_i < a_{i+1}$ résulte $\langle \xi^{\cdot}.a_{i+1} \rangle \subseteq \langle \xi^{\cdot}.a'_i \rangle = \langle \xi^{\cdot}.a_i \rangle$, d'où, de proche en proche jusqu'à $i = 1$, l'inclusion $\langle \xi^{\cdot}.a \rangle \subseteq \langle \xi^{\cdot}.a_1 \rangle$ qui, avec $\langle \xi^{\cdot}.a_1 \rangle \subseteq \langle \xi^{\cdot}.a \rangle$, entraîné par $a < a_1$, donne $\langle \xi^{\cdot}.a \rangle = \langle \xi^{\cdot}.a_1 \rangle$ en contradiction avec $a \not\equiv a_1$.

Et ce lemme permet d'ordonner $\overline{S}$ par le procédé classique ([4], p. 177); on pose $\bar{a} < \bar{b}$, s'il existe $a_1, \ldots, a_n; a'_1, \ldots, a'_n$ tels que

$$a < a_1, \quad a'_1 < a_2, \quad \ldots, \quad a'_n < b, \quad a \not\equiv a_1, \quad a'_i \equiv a_i,$$
$$a'_i \not\equiv a_{i+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad \text{en posant } a_{n+1} = b.$$

On a bien : $a < b$ entraîne $\bar{a} \leqq \bar{b}$; et la relation considérée est la fermeture transitive de celle-ci. Dans ces conditions $\bar{a} < \bar{e}$ veut dire qu'il existe $a, a_1, a'_1, \ldots, a'_n, e_\nu$ tels que

$$a \in \eta^{(-1)}(\bar{a}), \qquad e_\nu \in \eta^{(-1)}(\bar{e}), \qquad a_i \equiv a'_i \qquad (i = 1, \ldots, n);$$
$$a < a_1, \qquad a'_i < a_{i+1}, \qquad \ldots, \qquad a'_n < e_\nu \qquad (i = 1, \ldots, n-1).$$

Mais ξ étant maximum dans sa classe, on a $a'_n < \xi$; le lemme 11 et la transitivité de la relation d'ordre dans S entraînent alors $\eta^{(-1)}(\bar{a}) \subseteq \overset{\leqq}{\xi}$ c'est-à-dire la condition $\otimes$. On a donc :

THÉORÈME 10. — *Soit un demi-groupe ordonné S à tout élément ξ de S tel que, quel que soit $a \in S$, $\langle \xi^{\cdot}.a \rangle$ et $\langle \xi.^{\cdot}a \rangle$ existent et sont égaux et $\langle \xi^{\cdot}.\xi \rangle = \overset{\leqq}{\xi}$, correspond un homomorphisme isotone et un seul* (²) *appliquant S sur un demi-groupe ordonné $\overline{S}$ possédant un élément unité bilatère $\bar{e}$, dont l'image réciproque admet ξ comme élément maximum et*

(²) L'unicité veut dire que le demi-groupe S est déterminé à un isomorphisme près et qu'on peut ordonner S pour que l'application soit isotone et que la condition $\otimes$ soit satisfaite.

tel que $\bar{a} \leqq \bar{e}$ *entraîne* $\eta^{-1}(\bar{a}) \subset \overset{\leqq}{\xi}$; *l'équivalence d'application est alors donnée par* $\mathfrak{A}_{\xi}$.

Nous sommes alors dans les conditions de l'étude du paragraphe précédent. On a :

THÉORÈME 11. — *L'image homomorphe* $\overline{S}$ *est un groupe si et seulement si E est net*, c'est-à-dire encore *si et seulement si tout* $\langle \xi \,^{\cdot}.\, a \rangle$ *contient des éléments l. m. m.* De plus : ξ majore alors tous les $\langle a \,^{\cdot}.\, a \rangle$ et $\langle a \,.^{\cdot}\, a \rangle$ qui existent et même *est élément maximum de* $\bigcup \langle a \,^{\cdot}.\, a \rangle$ *et de* $\bigcup \langle a \,.^{\cdot}\, a \rangle$.

Enfin, on peut encore énoncer la généralisation suivante d'un résultat bien connu. Considérons les équivalences $\mathcal{E}_{\nu}$ définies dans le demi-groupe ordonné S, compatibles avec l'opération et la relation d'ordre (c'est-à-dire telles que $\overline{S} = S/\mathcal{E}_{\nu}$ puisse être ordonné de manière que l'application canonique soit isotone) telles que $\overline{S}$ soit un demi-groupe unitaire dont la classe $E = \bar{e}$ admet l'élément maximum ξ et qui vérifient $\otimes$. Soit $a \equiv a'\ (\mathcal{E}_{\nu})$; si $\overset{\leqq}{\xi}$ est net la même démonstration que celle du lemme 3 donne $a \equiv a'\ (\mathfrak{A}_{\xi})$; si de plus ξ est tel que $\mathfrak{A}_{\xi} = {}_{\xi}\mathfrak{A}$, ce qui est entraîné par ξ réflectif, on a : *l'équivalence d'Artin généralisée est la moins fine des équivalences de la famille* $\mathcal{E}_{\nu}$.

Considérons encore le cas particulier où, quel que soit $a \in S$, le résiduel $\xi \,^{\cdot}.\, a$ existe (et où par conséquent $\xi \,.^{\cdot}\, a$ existe aussi et lui est égal). Le théorème 11 joint au lemme 6 donne :

THÉORÈME 12. — $\overline{S}$ *est un groupe si et seulement si* $\xi = (\xi \,^{\cdot}.\, a) \,^{\cdot}.\, (\xi \,^{\cdot}.\, a)$ *pour tout élément a de S.*

Cette égalité est entraînée par la propriété nécessaire : ξ est majorant de tous les $\langle a \,^{\cdot}.\, a \rangle$ et $\langle a \,.^{\cdot}\, a \rangle$ qui existent; on a donc aussi :

THÉORÈME 13. — *Si les résiduels de* ξ *par a, à gauche par exemple, existent quel que soit a,* $\overline{S}$ *est un groupe si, et seulement si,* ξ *est élément « bi-maximum ».*

Puisque $\overline{S}$ est l'ensemble quotient de S par l'équivalence d'Artin généralisée les propriétés des résiduels donnent encore que cette équivalence est l'équivalence d'application de la fermeture $a \to \xi \,^{\cdot}.\, (\xi \,.^{\cdot}\, a)$.

Dans ce cas, il est donc équivalent de considérer les équivalences d'Artin généralisée ou les fermetures compatibles avec l'opération dans la recherche des groupes images homomorphes et isotones d'un demi-groupe ordonné S; nous allons voir par un exemple qu'il n'en est pas de même dans le cas général.

Prenons pour S l'ensemble des éléments 0 et $p - \frac{1}{n}$ où n est un entier supérieur ou égal à 2 et p un entier de signe quelconque ou zéro.

La relation

$$a = p_a - \frac{1}{n_a} \leqq b = p_b - \frac{1}{n_b} \quad \text{si} \quad p_a = p_b \quad \text{et} \quad n_a \leqq n_b;$$
$$a < 0 \quad \text{si} \quad p_a = 0$$

est une relation d'ordre dans S.

Définissons dans S l'opération T par

$$aTb = (p_a + p_b) - \frac{1}{\nu}, \qquad \nu = \inf(n_a, n_b),$$
$$aT0 = a = 0Ta, \qquad 0T0 = 0.$$

Cette opération est visiblement associative et commutative, 0 est élément neutre.

Évidemment si a et b sont différents de 0 et si $a \leqq b$, quel que soit $x \in S$, on a $aTx \leqq bTx$; si $a \leqq 0$, on a $aTx = p_x - \frac{1}{\inf(n_a n_x)} \leqq 0Tx = x$ et l'opération ainsi définie est bien isotone pour la relation d'ordre. On a $0:0 = 0$, $\langle 0 : a \rangle = \left\{ -p_a - \frac{1}{n} \right\}$ ensembles non vides pour tout $a \in S$ et qui n'ont d'élément maximum que pour $a = 0$; de plus, pour tout a, $a : a = 0$.

L'équivalence d'Artin généralisée relative à $\xi = 0$:

$$a \equiv a' \quad \text{si} \quad \langle 0 \cdot\!. \, a \rangle = \langle 0 \cdot\!. \, a' \rangle$$

donne comme ensemble quotient un groupe isomorphe au groupe additif des entiers, groupe non ordonné, image isotone vérifiant la condition $\otimes$; et nous avons ainsi *un exemple de demi-groupe ordonné S ayant une image homomorphe et isotone $\bar{S}$ qui est un groupe et qui vérifie la condition $\otimes$, mais qui est tel que l'équivalence d'application n'est pas l'équivalence d'application d'une fermeture.*

Considérons maintenant le cas particulier où S admet un élément neutre e bilatère; dans ce cas tous les $\langle a \cdot\!. \, a \rangle$ et $\langle a \,.\!\cdot a \rangle$ existent, car e en est élément. e est naturellement congru à ξ, et si nous voulons que e soit maximum dans sa classe nous devons avoir $e = \xi$. Mais alors e devant aussi majorer tous les $\langle a \cdot\!. \, a \rangle$ et $\langle a \,.\!\cdot a \rangle$, *il est nécessaire que, pour tout a, les résiduels $a \cdot\!. \, a$ existent et soient égaux à e,* ce que nous exprimerons encore par : *S est intégralement fermé.*

Inversement si S est intégralement fermé, e est élément bimaximum; *et si l'on suppose que les résiduels à gauche et à droite de e par tout élément a de S existent et sont égaux, l'équivalence d'Artin généralisée $\mathfrak{A}_c$ et elle seule donne,* d'après ce qui précède *comme ensemble quotient un groupe ordonné $\bar{S}$, image homomorphe et isotone de S* vérifiant $\otimes$ ce qui généralise le résultat analogue obtenu dans les gerbiers résidués (*voir* par exemple [6]).

§ 3.

Appliquons ces résultats au demi-groupe $\mathfrak{T}^*$ associé à un demi-groupe D, où $\mathfrak{T}^*$ est l'ensemble des complexes (ou parties non vides de D) avec $AB = \{ ab;\ a \in A\ b \in B \}$ et la relation d'ordre l'inclusion des ensembles.

Ce demi-groupe n'est pas résidué et admet l'élément bi-maximum $\xi = D$. Le résultat est trivial et donne comme image homomorphe le groupe à un seul élément.

Remarquons que, dans $\mathfrak{T}^*$, si $\langle A \cdot\!. B \rangle$ existe, alors $A \cdot\!. B$ existe, car $A \cdot\!. B = \bigcup X,\ X \in \langle A \cdot\!. B \rangle$.

Soit alors $\xi = H$ un élément de $\mathfrak{T}^*$ réflectif et tel que

$$H \cdot\!. H = H .\!\cdot H = H;$$

et soit S le sous demi-groupe $\mathfrak{L}_H$ des parties X de D telles que $H \cdot\!. X$ existe. H étant supposé réflectif, $H .\!\cdot X$ existe aussi et lui est égal. Nous savons que l'ensemble quotient $\overline{S}$ de S par l'équivalence $\mathfrak{A}_H$:

$$X \equiv Y \qquad \text{si} \quad H \cdot\!. X = H \cdot\!. Y,$$

est un demi-groupe qui peut être ordonné de manière que l'application η qui associe à toute partie X de D appartenant à S sa classe $\overline{X}$ mod $\mathfrak{A}_H$ soit un homomorphisme isotone; $\overline{S}$ admet un élément neutre qui est la classe $\overline{H}$ de H et $\overline{X} \leqq \overline{H}$ entraîne $X \subseteq H$ pour tout X de $\overline{X}$ (condition $\otimes$). De plus $\overline{S}$ est un groupe si, et seulement si, H est élément bimaximum, propriété équivalente à $H = (H \cdot\!. A) \cdot\!. (H \cdot\!. A)$, pour tout A tel que $H \cdot\!. A$ existe.

Remarquons que S *contient le sous demi-groupe* $\mathcal{D} = \{\{ a \};\ a \in D \}$ *isomorphe à D si, et seulement si, H est net.* Nous nous placerons toujours dans ce cas; dans $\mathcal{D}$ l'équivalence principale $\rho_{\mathcal{H}}$ (3) relative à $\mathcal{H}$ ([2]) n'est pas autre chose que la restriction à $\mathcal{D}$ de $\mathfrak{A}_H$ et $\mathcal{D}/\mathfrak{A}_H \simeq \mathcal{D}/\rho_{\mathcal{H}}$.

La restriction de η à $\mathcal{D}$ donne donc une image homomorphe $\overline{D}$ de D immergée dans le demi-groupe unitaire $\overline{S}$. Le plus souvent nous identifierons $\mathcal{D}$ et D, $\mathcal{H}$ et H et écrirons a au lieu de $\{ a \}$.

LEMME 13. — *$\overline{D}$ contient l'élément neutre si, et seulement si, il existe $h \in H$ tel que $H \cdot\!. h = H$.*

En effet $\overline{E}$ est la classe de toutes les parties X de S dont le résiduel $H \cdot\!. X$ est H, donc $\overline{E}$ appartient à $\overline{D}$ si et seulement si un élément a de D est tel que $H \cdot\!. \{ a \} = H$, et comme $H .\!\cdot H = H$, on a nécessairement $\{ a \} \in H$.

(3) $\mathcal{H}$ étant le sous-ensemble de $\mathcal{D}$ image de H dans l'isomorphisme considéré.

D'autre part, il résulte de ce qu'on a vu que :

THÉORÈME 17. — *Un demi-groupe D qui contient un complexe H net, réflectif, vérifiant $H^{\cdot}.H = H$ et majorant les $A^{\cdot}.A$ qui existent lorsque $H^{\cdot}.A$ existe, admet une image homomorphe et isotone $\overline{D}$ immersible dans un groupe ordonné. L'équivalence ρ_H est, dans ce cas,* a fortiori *simplifiable.*

Rappelons que le complexe H est dit *fort* ([2]) si $H^{\cdot}.a \cap H^{\cdot}.b \neq \emptyset$ entraîne $H^{\cdot}.a = H^{\cdot}.b$, quels que soient les éléments a et b de D. Si H est fort et si A_ν est une classe de D modulo l'équivalence principale ρ_H relative à H, c'est-à-dire si A_ν est l'ensemble des éléments a_ν^i tels que $H^{\cdot}.a_\nu = H^{\cdot}.a_\nu^i$, on a, dans S, $H^{\cdot}.A_\nu = H^{\cdot}.a_\nu = H^{\cdot}.X_\nu$ quelle que soit la partie X_ν non vide de A_ν $(X_\nu \in \mathfrak{T}^*(A_\nu))$. Si Y est une partie de D coupant plusieurs classes A_ν, $H^{\cdot}.Y$ est l'intersection des $H^{\cdot}.A_\nu$ relatifs aux classes coupées, c'est $\emptyset$ s'il y en a plus d'une et Y n'appartient pas à S. On a donc, si H est fort, $S = \{\mathfrak{T}^*(A_\nu);\ A_\nu \in D/\rho_H\}$; et ceci n'a lieu que dans ce cas puisque, si H n'est pas fort, il existe a et b différents tels que $H^{\cdot}.a \cap H^{\cdot}.b \neq \emptyset$ avec $H^{\cdot}.a \neq H^{\cdot}.b$ et $Y = \{a, b\}$ appartient à S puisque

$$H^{\cdot}.Y = H^{\cdot}.a \cap H^{\cdot}.b$$

et $Y \notin \{\mathfrak{T}^*(A_\nu)\}$ puisque a et b n'étant pas congrus appartiennent à des A_ν différents. Si H est fort les classes de S mod $\mathfrak{A}_H$ sont donc les ensembles $\mathfrak{T}^*(A_\nu)$ et leur ensemble est isomorphe à l'ensemble des fermés dans la fermeture correspondante, c'est-à-dire aux éléments maximaux A_ν. On a donc :

THÉORÈME 18. — *H étant supposé net, réflectif et vérifiant $H^{\cdot}.H = H$,* on a

$$S/\mathfrak{A}_H \simeq D/\rho_H$$

si et seulement si H est fort; et dans ce cas $\overline{S} = S/\mathfrak{A}_H$ est un groupe, image homomorphe et isotone de D.

Le fait que $S/\mathfrak{A}_H$ est un groupe provient de ce que, dans ce cas, tout élément h de H étant congru à H, on a $\overline{E} = \mathfrak{T}^*(H)$, qui est alors net puisque, quel que soit $X \in S$, $Y = H^{\cdot}.X$ appartient à S, puisque $X \subseteq H.^{\cdot} Y = H^{\cdot}.Y$ montre que $H^{\cdot}.Y$ existe, et $XY \subseteq H$, donne $XY \in \overline{E}$.

Ceci justifie le théorème 11.2 de ([9]) et permet, pour la recherche classique des groupes homomorphes à un demi-groupe D, d'interpréter l'équivalence principale ρ_H sans avoir besoin de considérer un sous-demi-groupe *résidué* $\mathfrak{G}^*(H)$ de S ([12] et [13]).

Remarque. — La démonstration précédente a montré que H étant net, réflectif et vérifiant $H^{\cdot}.H = H$, la propriété H fort entraîne

$H^{\cdot}.h = H$, $\forall h \in H$; montrons que cette dernière propriété est équivalente à « H est fort », sous les mêmes hypothèses.

Soit en effet $x \in H^{\cdot}.a \cap H^{\cdot}.b$; montrons par exemple l'inclusion $H^{\cdot}.a \subseteq H^{\cdot}.b$; soit $u \in \langle H^{\cdot}.a \rangle$, donc $ua \in H$, mais $xb \in H$ entraîne alors $xbua \in H$, d'où, H étant réflectif, $axbu \in H$ et comme $ax \in H$, il en résulte $bu \in H$, $u \in \langle H^{\cdot}.b \rangle$.

Nous supposerons maintenant que H net, réflectif et vérifiant $H^{\cdot}.H = H$ n'est pas fort.

D'après la remarque ci-dessus, il en est sûrement ainsi si H, ayant plus d'un élément, vérifie $H^{\cdot}.a \neq H^{\cdot}.b$ quels que soient les éléments a et b distincts de D. Dans ce cas l'équivalence principale relative à H est l'égalité et le demi-groupe $\overline{S}$ contient un sous-demi-groupe $\overline{D}$ image isomorphe de D.

Cette dernière condition et le théorème 17 donnent alors une condition pour que D lui-même soit immersible dans un groupe. On peut la mettre sous la forme équivalente suivante :

THÉORÈME 19. — *Si un demi-groupe D contient un complexe H tel que :*

1° *Quels que soient les éléments a et b distincts de D, il existe $x \in D$ tel que $ax \in H$, $bx \notin H$;*

2° *$ab \in H$ entraîne $ba \in H$;*

3° *$H^{\cdot}.H = H$ et, pour tout $A \subseteq D$ tel que $H^{\cdot}.A \neq \emptyset$, on a $H = (H^{\cdot}.A)^{\cdot}.(H^{\cdot}.A)$;*

D est immersible dans un groupe.

Des théorèmes 18 et 19 il résulte alors que, si H est fort, D est un groupe G; or dans un groupe G, $H = \{e\}$ vérifie les conditions 1°, 2°, 3°, et est fort. On a donc :

THÉORÈME 20. — *L'existence, dans un demi-groupe D, d'un sous-demi-groupe H, fort et vérifiant* 1°, 2°, 3°, *est nécessaire et suffisante pour que D soit un groupe.*

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BLYTH (T. S.). — *Contribution à la théorie de la résiduation dans les structures algébriques ordonnées* (Thèse Sc. math., Paris, 1963).

[2] DUBREIL (P.). — *Contribution à la théorie des demi-groupes.* — Paris, Gauthier-Villars, 1941 (Mémoires de l'Académie des Sciences, Institut de France, t. 63, 52 pages); et *Algèbre,* 2e édition. — Paris, Gauthier-Villars, 1954 (Cahiers scientifiques, 20).

[3] DUBREIL-JACOTIN (M.-L.). — Quelques propriétés des équivalences régulières par rapport à la multiplication et à l'union dans un treillis à multiplication commutative, *C. R. Acad. Sc. Paris,* t. 232, 1951, p. 287.

[4] DUBREIL-JACOTIN (M.-L.), LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). — *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques.* — Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Cahiers scientifiques, 21).

[5] FUCHS (L.). — On group homomorphic images of partially ordered semigroups, *Acta scient. Math. Szeged* (à paraître).

[6] FUCHS (L.). — *Partially ordered algebraic systems.* — New York, Pergamon Press, 1963.

[7] MAURY (G.). — La condition « intégralement clos » dans quelques structures algébriques, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, t. 78, 1961, p. 31-100 (Thèse Sc. math., Paris, 1960).

[8] MOLINARO (I.). — Demi-groupes résidutifs, *J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. 33, 1960, p. 319-356 (Thèse Sc. math., Paris, 1956).

[9] QUERRÉ (J.). — Équivalences de fermeture dans un demi-groupe résidutif, *Séminaire Dubreil-Pisot*, t. 15, 1961-1962, n° 3, 31 pages.

[10] QUERRÉ (J.). — Équivalences de fermeture dans un demi-groupe, *C. R. Acad. Sc, Paris*, t. 252, 1961, p. 49.

[11] QUERRÉ (J.). — Demi-groupe A-nomal, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 254, 1962. p. 203.

[12] QUERRÉ (J.). — Systèmes d'idéaux d'un demi-groupe, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 256, 1963, p. 5265.

[13] QUERRÉ (J.). — *Contribution à la théorie des structures ordonnées et des systèmes d'idéaux* (Thèse Sc. math., Paris, 1963).

[14] VAN DER WAERDEN (B. L.). — *Algebra*, II, 4te Auflage. — Berlin, Springer-Verlag, 1959 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 34).

(Manuscrit reçu le 15 juillet 1963.)

Mme M.-L. DUBREIL-JACOTIN,
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris,
26, rue Dufrenoy,
Paris (16e).