Bulletin de la S. M. F.

Pierre Saphar

Contribution à l'étude des applications linéaires dans un espace de Banach

Bulletin de la S. M. F., tome 92 (1964), p. 363-384
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1964__92__363_0>

Bull. Soc. math. France,
92, 1964, p. 363 à 384.

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES APPLICATIONS LINÉAIRES DANS UN ESPACE DE BANACH ;

PAR

PIERRE SAPHAR.

Introduction.

Soient E un espace de Banach complexe et T une application linéaire continue de E dans E. A partir de la notion classique d'indice de T :

$$\chi(T) = \dim \ker(T) - \operatorname{codim} T(E),$$

étudiée par divers auteurs, on peut obtenir la plupart des résultats connus sur les perturbations de T (*voir*, par exemple, [9], où se trouvent exposés ces résultats et une importante bibliographie). On peut aussi, à partir de l'indice, introduire un ouvert plus grand que l'ensemble résolvant de T : l'ensemble de Noether de T formé des z complexes tels que $\chi(T-z)$ ait une valeur finie. Dans cet article on essaie d'aller plus loin. Il est nécessaire pour cela d'élaborer deux outils étudiés dans les paragraphes 1 et 2 : la notion de cœur d'une application et celle d'inverse relatif (F. V. ATKINSON avait introduit la notion d'inverse relatif d'une application linéaire dans [1]). Ces outils mènent à la notion d'application régulière et parfaite. Les applications parfaites d'un ensemble dans lui-même admettent comme cas particuliers les applications injectives et les applications surjectives. Dans le paragraphe 3, on étudie certaines perturbations de T. On en déduit l'existence d'ouverts du spectre, qui n'avaient pas été mis en évidence à notre connaissance et qui contiennent (à un ensemble discret près) l'ensemble de Noether de T. La méthode employée permet de déceler des propriétés utiles dans les applications, celle de variation holomorphe du noyau de $T-z$, par exemple.

Je profite de cette introduction pour exprimer toute ma reconnaissance à M. J. Dixmier. Son aide constante m'a aidé considérablement dans l'élaboration de ce travail.

Les principaux résultats de cet article ont été présentés dans deux Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* ([12], [13]).

Enfin, je tiens à mentionner que c'est la thèse de mon camarade, Maurice Audin, qui a inspiré mes premières recherches.

Terminologie et Notations.

D'une manière générale, le vocabulaire utilisé est celui de Bourbaki.

Les principales notations sont groupées dans ce préliminaire :

— La dimension d'un espace vectoriel sera un entier positif ou $+\infty$.

— Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques (sur le corps R des réels ou le corps C des complexes). On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires et continues de E dans F. Si $E = F$, on pose $\mathcal{L}(E, E) = \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un élément T de $\mathcal{L}(E, F)$ est :

— inversible à droite s'il existe $A \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $TA = 1_F$;

— inversible à gauche s'il existe $B \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $BT = 1_E$;

— un isomorphisme si T est inversible à droite et à gauche;

— un morphisme strict, si l'application de $E/\ker(T)$ sur $T(E)$ déduite de T est un isomorphisme.

Enfin, nous dirons qu'un sous-espace de E est un facteur direct de E s'il admet un supplémentaire topologique dans E.

§ 1. Cœur d'une application.

Dans ce paragraphe, E désignera un ensemble et T une application de E dans E.

1. Rappelons qu'un sous-ensemble M de E est dit invariant par T si $T(M) = M$. L'ensemble des sous-ensembles invariants par T, ordonné par inclusion, possède un plus grand élément, formé de la réunion des éléments de cet ensemble.

2. Pour tout ordinal α, on définit par induction transfinie, le sous-ensemble de E, $T^\alpha(E)$, vérifiant les conditions

$$T^{\alpha+1}(E) = T(T^\alpha(E)),$$

$$T^\alpha(E) = \bigcap_{\beta<\alpha} T^\beta(E) \quad \text{si } \alpha \text{ est un ordinal limite}$$

(c'est-à-dire un ordinal qui n'a pas de précédent).

Remarquons que la deuxième propriété donne $T^0(E) = E$.

Les $T^\alpha(E)$ sont décroissants. Par ailleurs, si pour un ordinal α_0, $T^{\alpha_0+1}(E) = T^{\alpha_0}(E)$, on démontre facilement, par récurrence transfinie, que $T^\beta(E) = T^{\alpha_0}(E)$, pour tout $\beta \geqq \alpha_0$. Il existe donc un ordinal, que nous noterons $\xi(T)$ ou ξ lorsqu'il n'y a pas ambiguïté, tel que

$$T^{\alpha_1}(E) \neq T^{\alpha_2}(E) \quad \text{si} \quad \alpha_1 \leqq \xi, \quad \alpha_2 \leqq \xi, \quad \alpha_1 \neq \alpha_2;$$
$$T^\alpha(E) = T^\xi(E) \quad \text{si} \quad \alpha \geqq \xi.$$

3. T-chaînes.

Soit e_0 un élément de E. Une T-chaîne $\mathcal{C}$ d'origine e_0 est une suite $(e_0, e_1, e_2, \ldots)$ d'éléments de E, finie ou non, telle que :

a. $T(e_{i+1}) = e_i$ pour $i \geqq 0$.

b. Aucune autre suite vérifiant la propriété (*a*) n'a plus d'éléments que $\mathcal{C}$.

Si $\mathcal{C}$ a une infinité d'éléments on dit que c'est une T-chaîne infinie.

Pour que $x \in E$ soit élément d'une T-chaîne infinie il faut et suffit que x soit origine d'une T-chaîne infinie.

PROPOSITION 1. — *Les trois sous-ensembles suivants sont identiques :*

— *L'ensemble* $\mathcal{A}_1 = T^\xi(E)$;

— *L'ensemble* $\mathcal{A}_2$ *formé des origines des T-chaînes infinies;*

— *Le plus grand sous-ensemble,* $\mathcal{A}_3$, *invariant par T.*

Démonstration. — Soit $x \in \mathcal{A}_1$. Il existe $y \in \mathcal{A}_1$ avec $x = Ty$. On peut construire une T-chaîne infinie d'origine x. Donc $x \in \mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$. Soient $x \in \mathcal{A}_2$, $\mathcal{C}$ une T-chaîne infinie d'origine x et $\mathcal{C}_1 = \{x, Tx, T^2x, \ldots\}$. Alors $T(\mathcal{C} \cup \mathcal{C}_1) = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_1$. On déduit que $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{A}_3$. Donc $x \in \mathcal{A}_3$ et $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_3$.

Soit α un ordinal. Supposons que, pour tout ordinal β strictement inférieur à α, $\mathcal{A}_3 \subset T^\beta(E)$, et montrons que $\mathcal{A}_3 \subset T^\alpha(E)$.

Si α est non limite, $T^\alpha(E) = T(T^{\alpha-1}(E))$. Puisque $\mathcal{A}_3 \subset T^{\alpha-1}(E)$ et $T(\mathcal{A}_3) = \mathcal{A}_3$, le résultat est immédiat. Si α est limite, $T^\alpha(E) = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} T^\beta(E)$. L'hypothèse de récurrence entraîne le résultat. Puisque $T^0(E) = E$, nous avons montré, par récurrence transfinie, que pour tout ordinal α, $\mathcal{A}_3 \subset T^\alpha(E)$; en particulier $\mathcal{A}_3 \subset \mathcal{A}_1$. On a ainsi :

$$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_3 \subset \mathcal{A}_1.$$

La proposition est démontrée.

REMARQUE 1. — Désignons par ω le premier ordinal non fini.

Pour que $x \in E$ soit origine d'une T-chaîne finie (resp. infinie), il faut et suffit que $x \in E - T^{\omega}(E)$ (resp. $x \in T^{\xi}(E)$).

Remarque 2. — Il est facile de donner des exemples où $\xi > \omega$.

Définition 1. — *On dit que* $T^{\xi}(E)$ *est le cœur de* T. *Le cœur de* T *sera noté* $T^{\xi}(E)$ *ou* $\mathrm{co}(T)$.

Proposition 2. — *Supposons que* T *soit injective. Alors* $\xi(T)$ *vaut* 0 *ou* ω.

Démonstration. — Soit $x \in T^{\omega}(E)$. Pour tout entier n, il existe $y_n \in T^n(E)$ tel que $Ty_n = x$. Comme T est injective, tous les y_n sont égaux à un même élément y, d'où $y \in T^{\omega}(E)$. Donc $\xi \leqq \omega$. D'autre part, si l'on avait $0 < \xi < \omega$, il est clair que T ne serait pas injective. La proposition est démontrée.

Définition 2. — T *est dite parfaite si* $T^{-1}(\mathrm{co}(T)) = \mathrm{co}(T)$.

Proposition 3. — *Soit* R_T *la relation d'équivalence,* $Tx = Ty$, *définie par* T *dans* E. *Pour que* T *soit parfaite, il faut et suffit que* $\mathrm{co}(T)$ *soit saturé pour* R_T.

Démonstration. — C'est évident puisque $T(\mathrm{co}(T)) = \mathrm{co}(T)$.

Corollaire. — *Si* T *est injective ou surjective,* T *est parfaite.*

Proposition 4. — *Si* T *est parfaite,* $\xi(T)$ *est nul ou limite.*

Démonstration. — Supposons T parfaite et $\xi(T)$ non nul et non limite. On a

$$T^{-1}(T^{\xi}(E)) \supset T^{\xi-1}(E)$$

et

$$T^{\xi-1}(E) \neq T^{\xi}(E).$$

C'est contradictoire d'après la proposition 3. Donc $\xi(T)$ est nul ou limite.

4. Dans ce numéro on précise les propriétés de $\mathrm{co}(T)$ et $\xi(T)$ lorsque E est muni de structures algébriques ou topologiques.

Proposition 5. — *Supposons que* E *soit un* A*-module et* T *une application linéaire de* E *dans* E. *Alors pour que* T *soit parfaite, il faut et suffit que* $\ker(T) \subset \mathrm{co}(T)$.

Démonstration. — Cela résulte immédiatement de la proposition 3.

Proposition 6. — *Supposons que* E *soit un espace vectoriel sur un corps* K *et* T *une application linéaire de* E *dans* E. *Alors si* $\ker(T)$ *est de dimension finie,* $\xi(T) \leqq \omega$.

Démonstration. — Supposons $\dim(\ker(T)) < +\infty$. Soit $y \in T^{\omega}(E)$. La suite $(T^k(E) \cap T^{-1}(y))_{k \in \mathbf{N}}$ est une suite décroissante de variétés linéaires non vides, de dimension finie. Donc elle stationne pour un entier k_0. On peut écrire :

$$\begin{aligned} T^{\omega}(E) \cap T^{-1}(y) &= \Big(\bigcap_{k \in \mathbf{N}} T^k(E)\Big) \cap T^{-1}(y) \\ &= \bigcap_{k \in \mathbf{N}} (T^k(E) \supset T^{-1}(y)) \\ &= T^{k_0}(E) \cap T^{-1}(y). \end{aligned}$$

Donc $T^{\omega}(E) \cap T^{-1}(y)$ n'est pas vide. On en déduit que $T^{\omega}(E)$ est invariant par T. Donc, $\xi(T) \leq \omega$.

PROPOSITION 7. — *Soient E un espace de Fréchet réel ou complexe et T un morphisme strict de E dans E. Alors, si* $\ker(T) \cap \mathrm{co}(T)$ *est de codimension finie dans* $\ker(T)$, *$T^{\alpha}(E)$ est fermé dans E pour tout ordinal α.*

Démonstration. — Soit α un ordinal. Supposons que, pour tout $\beta < \alpha$, $T^{\alpha}(E)$ soit fermé et montrons que $T^{\alpha}(E)$ est fermé. Si α est limite, on en déduit que

$$T^{\alpha}(E) = \bigcap_{\beta < \alpha} T^{\beta}(E)$$

est fermé. Si α est non limite,

$$\begin{aligned} T^{\alpha}(E) &= T(T^{\alpha-1}(E)) \\ &= T(T^{\alpha-1}(E) + \ker(T)). \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de la proposition, $T^{\alpha-1}(E) + \ker(T)$ est la somme de $T^{\alpha-1}(E)$ et d'un sous-espace vectoriel de dimension finie.

On déduit d'après BOURBAKI [4], que $T^{\alpha-1}(E) + \ker(T)$ est fermé. Par ailleurs, le morphisme strict T donne la décomposition canonique

$$E \xrightarrow{\psi} E/\ker(T) \xrightarrow{\varphi} T(E),$$

dans laquelle ψ est un morphisme strict et φ un isomorphisme.

$$\begin{aligned} T^{\alpha}(E) &= T(T^{\alpha-1}(E) + \ker(T)) \\ &= \varphi(\psi(T^{\alpha-1}(E) + \ker(T))). \end{aligned}$$

Puisque $T^{\alpha-1}(E) + \ker(T)$ est fermé, il en est de même de

$$\psi(T^{\alpha-1}(E) + \ker(T));$$

$T^{\alpha}(E)$ est alors fermé puisque φ est un isomorphisme. On en déduit la conclusion par récurrence transfinie.

Corollaire. — *Pour que* $\operatorname{co}(T)$ *soit fermé dans* E, *il suffit que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :*

a. $\ker(T)$ *est de dimension finie;*

b. T *est parfaite.*

§ 2. Notion d'inverse relatif.

1. Dans ce paragraphe E et F désignent deux ensembles, T une application de E dans F, R_T la relation d'équivalence associée à T. Si M est une partie de E, la restriction de T à M sera notée $T \mid M$.

Nous poserons une définition voisine de celle d'Atkinson [1].

Définition 3. — *On dit qu'une application* X *de* F *dans* E *est un inverse relatif de* T *si*

$$TXT = T$$

et

$$XTX = X.$$

Remarque (Atkinson [1]). — Si X_1 est une application de F dans E telle que $TX_1T = T$, on vérifie immédiatement que $X = X_1TX_1$ est un inverse relatif de T.

Proposition 8. — *Soit* X *un inverse relatif de* T. *On a alors les propriétés suivantes :*

$$[XT](E) = X(F) \quad \text{et} \quad R_{XT} = R_T,$$
$$[TX](F) = T(E) \quad \text{et} \quad R_{TX} = R_X.$$

$T \mid X(F)$ *est une bijection de* $X(F)$ *sur* $T(E)$ *qui admet* $X \mid T(E)$ *pour bijection inverse.*

Démonstration. — On a

$$[XT](E) \subset X(F) \subset [XTX](F) \subset [XT](E).$$

Donc

$$[XT](E) = X(F).$$

Par ailleurs, pour tout couple (x, y) de $(E \times E)$:

$$Tx = Ty \Rightarrow XTx = XTy$$

et

$$[XT]x = [XT]y \Rightarrow TXTx = TXTy \Rightarrow Tx = Ty.$$

Donc

$$R^{XT} = R_T.$$

On démontre de même les propriétés relatives à TX.

On en déduit immédiatement les résultats énoncés sur $T \mid X(F)$ et $X \mid T(E)$.

La proposition suivante donne une relation entre cœur d'une application et inverse relatif.

PROPOSITION 9. — *Soit T une application parfaite de E dans E. Alors pour tout inverse relatif X de T,* $\mathrm{co}(T)$ *est stable par X.*

Démonstration. — Puisque $[TX] \mid T(E) = 1_{T(E)}$, on a

$$[TX](\mathrm{co}(T)) = \mathrm{co}(T).$$

Donc

$$X(\mathrm{co}(T)) \subset T^{-1}(\mathrm{co}(T)).$$

Puisque

$$T^{-1}(\mathrm{co}(T)) = \mathrm{co}(T),$$

on a bien

$$X(\mathrm{co}(T)) \subset \mathrm{co}(T).$$

2. Cas où E et F sont des espaces vectoriels topologiques.

Dans ce numéro E et F sont des espaces vectoriels topologiques sur le corps R des réels ou le corps C des complexes et T un élément de $\mathcal{L}(E, F)$.

PROPOSITION 10. — *Si T admet un inverse relatif linéaire et continu X, TX est un projecteur continu de F sur $T(E)$ parallèlement à* $\ker(X)$, *XT est un projecteur continu de E sur $X(F)$ parallèlement à* $\ker(T)$.

Démonstration. — On vérifie immédiatement que TX et XT sont des projecteurs continus; on obtient alors les résultats voulus à partir de la proposition 8.

PROPOSITION 11. — *Pour que T admette un inverse relatif linéaire et continu X, il faut et suffit que T soit un morphisme strict de E dans F pour lequel* $\ker(T)$ (*resp.* $T(E)$), *soit facteur direct de E* (*resp. de F*).

Démonstration. — Supposons que T admette un inverse relatif linéaire et continu X. D'après la proposition 10, $\ker(T)$ (resp. $T(E)$) est facteur direct de E (resp. de F). Par ailleurs, $E/\ker(T)$ et $X(F)$ sont isomorphes, puisque $\ker(T)$ et $X(F)$ sont supplémentaires topologiques dans E. De plus, on déduit de la proposition 8 que $T \mid X(F)$ est un isomorphisme de $X(F)$ sur $T(E)$. Alors, $E/\ker(T)$ et $T(E)$ sont isomorphes et T est un morphisme strict. La condition de l'énoncé est donc bien nécessaire. Sa suffisance résulte de la proposition plus précise que voici.

PROPOSITION 12. — *Soit T un morphisme strict de E dans F pour lequel* $\ker(T)$ (*resp.* $T(E)$), *admette un supplémentaire topologique H_1*

dans E (resp. H_2 dans F). Alors, il existe un inverse relatif linéaire et continu, unique, X tel que $X(F) = H_1$ et $\ker(X) = H_2$.

Démonstration. — L'unicité découle aussitôt de la proposition 8. Prouvons l'existence. $E/\ker(T)$ est isomorphe à H_1 et aussi à $T(E)$. Donc $S = T \mid H_1$ est un isomorphisme de H_1 sur $T(E)$. Désignant par P le projecteur continu de F sur $T(E)$ parallèlement à H_2, on vérifie que l'application $X = S^{-1}P$ a les propriétés désirées.

COROLLAIRE 1. — *Supposons que T soit un morphisme strict injectif de E dans F, et que $T(E)$ soit facteur direct de F. Alors T est inversible à gauche. Tout inverse relatif linéaire et continu X est un inverse à gauche de T.*

COROLLAIRE 2. — *Supposons que T soit un morphisme strict de E sur F et que $\ker(T)$ soit facteur direct de E. Alors T est inversible à droite. Tout inverse relatif linéaire et continu de T est un inverse à droite de T.*

Les résultats de ces corollaires sont indiqués dans BOURBAKI [4].

COROLLAIRE 3. — *Soient E et F deux espaces de Fréchet et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors si $\dim \ker(T) < +\infty$ et $\operatorname{codim} T(E) < +\infty$, T admet un inverse relatif linéaire et continu.*

En effet, d'après GROTHENDIECK ([11], exerc. 4, p. 74), $T(E)$ est alors fermé dans F. T est donc un morphisme strict. Par ailleurs, on sait (BOURBAKI [4]) que $\ker(T)$ (resp. $T(E)$) est facteur direct de E (resp. de F).

Remarque. — Les propriétés du paragraphe 2, n° 2, peuvent se généraliser au cas où E et F sont des A-modules et T une application linéaire de E dans F.

§ 3. Perturbations de certaines applications dans les espaces de Banach.

Dans ce paragraphe, E et F sont deux espaces de Banach réels ou complexes. Selon le cas, T désignera un élément de $\mathcal{L}(E, F)$ ou $\mathcal{L}(E)$. La norme de T sera notée $|T|$. Les ensembles $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$ seront munis de la topologie de la norme (topologie de la convergence bornée). Supposons T parfaite ou possédant un inverse relatif, on étudie certaines perturbations de T.

Dans le cas où T possède un inverse relatif, des résultats ont déjà été obtenus par GOKHBERG ([7], [8]), GOKHBERG et KREIN [9], ATKINSON [1], AUDIN [3] et DIEUDONNÉ [6]. Dans tous ces résultats, des hypothèses du type $\dim \ker(T) < +\infty$ ou $\operatorname{codim} T(E) < +\infty$ sont essentielles. Nous avons obtenu, d'une part des résultats qui ne font pas intervenir ces hypothèses, d'autre part des résultats qui complètent ceux obtenus par ces auteurs et peuvent jouer un rôle important dans les applications.

1. Étude de certaines perturbations.

Dans ce numéro T est un élément de $\mathcal{L}(E)$, et 1 désignera l'application identique de E.

DÉFINITION 4. — *Un élément $T \in \mathcal{L}(E)$ est dit régulier s'il admet un inverse relatif linéaire et continu X.*

DÉFINITION 5. — *Soit M un sous-espace de E. Nous désignerons par $\sum(M)$ l'ensemble des éléments $U \in \mathcal{L}(E)$ tels que $U(M) \subset M$. Si M est fermé dans E, $\sum(M)$ est une sous-algèbre de Banach de $\mathcal{L}(E)$.*

THÉORÈME 1. — *Soit T un élément de $\mathcal{L}(E)$ régulier et parfait [de sorte que* $\mathrm{co}(T)$ *est fermé dans E d'après le corollaire de la proposition 7] et X un inverse relatif linéaire et continu de T. Désignons par $\mathcal{V}$ la boule ouverte de $\sum(\mathrm{co}\,(T))$ centrée à l'origine et de rayon $|X|^{-1}$. Alors pour tout $U \in \mathcal{V}$, $T - U$ est régulier et parfait et*

$$\ker(T - U) \subset \mathrm{co}(T) \subset \mathrm{co}(T - U).$$

De plus :

$$R(U) = [1 - XU]^{-1}X = X[1 - UX]^{-1}$$

est un inverse relatif linéaire et continu de $T - U$.

Démonstration. — Soit $U \in \mathcal{V}$, $1 - UX$ et $1 - XU$ sont des isomorphismes de E sur E. Par ailleurs on vérifie immédiatement, par multiplication à gauche par $1 - XU$ et à droite par $1 - UX$ que

$$[1 - XU]^{-1}X = X[1 - UX]^{-1} = R(U).$$

Nous allons montrer que $R(U)$ est un inverse relatif de $T - U$.

Désignons par $G(U)$ la quantité

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} G(U) &= [T - U] - [T - U]\,R(U)\,[T - U] \\ &= [T - U]\,[1 - R(U)\,[T - U]], \\ 1 - R(U)\,[T - U] &= 1 - [1 - XU]^{-1}X\,[T - U] \\ &= [1 - XU]^{-1}[1 - XU] - [1 - XU]^{-1}X\,[T - U] \\ &= [1 - XU]^{-1}[1 - XT], \\ G(U) &= [T - U]\,[1 - XU]^{-1}[1 - XT] \\ &= [T + TXU - TXU - U][1 - XU]^{-1}[1 - XT] \\ &= [T[1 - XU] + [TX - 1]\,U][1 - XU]^{-1}[1 - XT] \\ &= [TX - 1]\,U\,[1 - XU]^{-1}[1 - XT]. \end{aligned}\right.$$

Puisque T est parfait, on a $X \in \sum(\mathrm{co}(T))$ (proposition 9), donc $XU \in \sum(\mathrm{co}(T))$; puisque $\mathrm{co}(T)$ est fermé,

$$[1 - XU]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (XU)^k$$

appartient aussi à $\sum(\mathrm{co}(T))$. Par ailleurs,

$$[1 - XT](E) = \ker(T).$$

Donc

$$[G(U)](E) = [[TX - 1]\, U\, [1 - XU]^{-1}](\ker(T)).$$

Puisque T est parfait, on déduit (proposition 5) :

$$[G(U)](E) \subset [[TX - 1]\, U [1 - XU]^{-1}](\mathrm{co}(T)) \subset [TX - 1](\mathrm{co}(T)) = (0),$$

puisque TX projette E sur $T(E)$.

Donc $G(U) = 0$. Par ailleurs

$$\begin{aligned} R(U)[T - U]R(U) &= [1 - XU]^{-1} X [T - U] X [1 - UX]^{-1} \\ &= [1 - XU]^{-1}[XTX - XUX][1 - UX]^{-1} \\ &= [1 - XU]^{-1} X [1 - UX][1 - UX]^{-1} \\ &= R(U). \end{aligned}$$

Donc $R(U)$ est un inverse relatif linéaire et continu de $T - U$.

De plus

$$[T - U](\mathrm{co}(T)) = [T(1 - XU)](\mathrm{co}(T)).$$

Puisque $1 - XU$ et $[1 - XU]^{-1}$ sont des éléments de $\sum(\mathrm{co}(T))$, on a

$$[1 - XU](\mathrm{co}(T)) = \mathrm{co}(T)$$

et

$$\begin{aligned} [T - U](\mathrm{co}(T)) &= T(\mathrm{co}(T)) \\ &= \mathrm{co}(T). \end{aligned}$$

On déduit

$$\mathrm{co}(T) \subset \mathrm{co}(T - U).$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \ker(T - U) &= [1 - R(U)[T - U]](E) \\ &= [1 - XU]^{-1}[1 - XT](E), \end{aligned}$$

d'après l'égalité (1).

$$\ker(T - U) = [1 - XU]^{-1}(\ker(T)).$$

On déduit que $\ker(T - U) \subset \mathrm{co}(T)$, puisque T est parfait et que $[1 - XU]^{-1} \in \sum(\mathrm{co}(T))$.

On a finalement

$$\ker(T - U) \subset \mathrm{co}(T) \subset \mathrm{co}(T - U).$$

$T - U$ est bien un élément régulier et parfait de $\mathcal{L}(E)$.

Gardant les notations du théorème 1, on a aussi le :

THÉORÈME 2. — *Pour tout* $U \in \mathcal{V}$,

— $\ker(T - U)$ *admet* $X(E)$ *pour supplémentaire topologique et est isomorphe en tant qu'espace vectoriel topologique à* $\ker(T)$;

— $[T - U](E)$ *admet* $\ker(X)$ *pour supplémentaire topologique et est isomorphe en tant qu'espace vectoriel topologique à* $T(E)$.

Démonstration. — $\ker(T - U)$ admet $[R(U)](E)$ pour supplémentaire topologique (proposition 10). Or

$$[R(U)](E) = [X[1 - UX]^{-1}](E) = X(E).$$

$\ker(T - U)$ et $\ker(T)$ ayant le même supplémentaire topologique $X(E)$ sont isomorphes entre eux en tant qu'espaces vectoriels topologiques.

$[T - U](E)$ admet $\ker R(U)$ pour supplémentaire topologique. Or,

$$R(U) = [1 - XU]^{-1}X.$$

Donc

$$\ker R(U) = \ker X.$$

$[T - U](E)$ et $T(E)$ ayant même supplémentaire topologique, $\ker(X)$, sont isomorphes entre eux en tant qu'espaces vectoriels topologiques.

COROLLAIRE. — *Pour tout* $U \in \mathcal{V}$,

$$\dim \ker(T - U) = \dim \ker(T), \qquad \operatorname{codim} \ker(T - U) = \operatorname{codim} \ker(T),$$
$$\dim [T - U](E) = \dim T(E), \qquad \operatorname{codim} [T - U](E) = \operatorname{codim} T(E).$$

Remarque. — Si T est inversible à droite, $\mathrm{co}(T) = E$ et $\sum(\mathrm{co}(T)) = \mathcal{L}(E)$. Les théorèmes 1 et 2 nous redonnent des résultats de DIEUDONNÉ [6] : Soit X un inverse à droite de T, linéaire et continu. Alors, pour tout $U \in \mathcal{L}(E)$ tel que $|U| < |X|^{-1}$, $T - U$ est inversible à droite et $\ker(T - U)$ isomorphe à $\ker(T)$.

2. Propriété du bicommutant de T.

Pour appliquer les théorèmes 1 et 2 il est nécessaire de vérifier la propriété $U \in \sum(\mathrm{co}(T))$. Nous allons donner une condition suffisante pour que cette propriété soit vérifiée. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Notons $\{T\}'$ le commutant de T, $\{T\}''$ le bicommutant de T. On sait que $\{T\}'$ et $\{T\}''$ sont des sous-algèbres de Banach de $\mathcal{L}(E)$ et que $\{T\}'' \subset \{T\}'$.

PROPOSITION 13. — *Pour tout $T \in \mathcal{L}(E)$, $\{T\}'$ est contenu dans* $\sum(\mathrm{co}(T))$.

Démonstration. — Soit $U \in \{T\}'$.

$$T(U(\mathrm{co}(T)) = U(T(\mathrm{co}(T))) = U(\mathrm{co}(T)).$$

Donc $U(\mathrm{co}(T))$ est invariant par T. On en déduit que $U \in \sum(\mathrm{co}(T))$.

Des théorèmes 1 et 2 de la proposition 13 on déduit le :

THÉORÈME 3. — *Soit T un élément de $\mathcal{L}(E)$ régulier et parfait. Alors l'ensemble* $\mathrm{Reg}(T)$ *des éléments U de $\{T\}''$ tels que $T - U$ soit régulier et parfait est ouvert dans $\{T\}''$. De plus, les applications $U \to$ classe d'isomorphie de* $\ker(T - U)$, *$U \to$ classe d'isomorphie de* $[T - U](E)$, $U \to \mathrm{co}(T - U)$ *sont localement constantes sur* $\mathrm{Reg}(T)$.

Démonstration. — Soit $U_0 \in \mathrm{Reg}(T)$. Alors, pour tout $U \in \{T\}''$ on vérifie que $U - U_0 \in \{T - U_0\}'$. Donc, d'après la proposition 13, $U - U_0 \in \sum(\mathrm{co}(T - U_0))$. Puisque $T - U = T - U_0 - (U - U_0)$, on déduit du théorème 1 que $\mathrm{Reg}(T)$ est ouvert. Il résulte alors directement du théorème 2 que les applications $U \to$ classe d'isomorphie de $\ker(T - U)$ et $U \to$ classe d'isomorphie de $[T - U](E)$ sont localement constantes sur $\mathrm{Reg}(T)$.

Soit alors X un inverse relatif linéaire et continu de $T - U_0$.

D'après le théorème 1, il existe un voisinage de U_0 dans $\mathrm{Reg}(T)$ dans lequel $R(U) = [1 - X(U - U_0)]^{-1}X$ est un inverse relatif linéaire et continu de $T - U$. L'application $U \to |R(U)|^{-1}$ étant continue, il existe un voisinage W de U_0 dans $\mathrm{Reg}(T)$ et une constante m positive telle que $|R(U)|^{-1} > m$ si $U \in W$. Désignons par W' le voisinage de U_0 dans $\mathrm{Reg}(T)$ formé des $U \in W$ tels que $|U - U_0| < \frac{m}{2}\cdot$ Si $U_1 \in W'$, on a

$$|U_1 - U_0| < \frac{m}{2} \qquad \text{et} \qquad |R(U)|^{-1} > m.$$

Donc

$$|U_1 - U_0| < |R(U_1)|^{-1} \qquad \text{et} \qquad |U_1 - U_0| < |R(U_0)|^{-1}.$$

D'après le théorème 1, on a alors

$$\mathrm{co}(T - U_0) \subset \mathrm{co}(T - U_1) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{co}(T - U_1) \subset \mathrm{co}(T - U)_0.$$

On en déduit immédiatement que l'application $U \to \mathrm{co}(T - U)$ est localement constante sur $\mathrm{Reg}(T)$.

3. Familles d'applications dépendant analytiquement d'un paramètre.

Dans ce paragraphe E est un espace de Banach complexe.

Soit D un ouvert de C et n un entier positif. Supposons qu'à tout z de D soit associé un sous-espace vectoriel M_z de E, de dimension n. Posons la

DÉFINITION 6. — *On dit que M_z a une base holomorphe dans D, s'il existe une famille de fonctions $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, définies dans D, à valeurs dans E, holomorphes, telles que la famille $(f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z))$ soit pour chaque z de D une base de M_z.*

On a alors la

PROPOSITION 14. — *Pour que M_z ait une base holomorphe dans D, il suffit qu'on ait la propriété locale :*

Pour tout z_α de D, il existe un voisinage V_α de z_α dans D et une famille de fonctions $(f_1^\alpha, f_2^\alpha, \ldots, f_n^\alpha)$ définies dans V_α, à valeurs dans E, holomorphes, telles que la famille $(f_1^\alpha(z), f_2^\alpha(z), \ldots, f_n^\alpha(z))$ soit pour chaque z de V_α une base de M_z.

Démonstration. — Il suffit de prouver le résultat pour une composante connexe D_1 de D. Soient z_α et z_β deux points de D_1 tels que $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$. Pour tout z de $V_\alpha \cap V_\beta$, il existe un isomorphisme de M_z sur lui-même, $A_{\alpha,\beta}(z)$, tel que

$$f_i^\beta(z) = [A_{\alpha,\beta}(z)](f_i^\alpha(z)).$$

Soient $M_{\alpha,\beta}(z)$ la matrice qui représente $A_{\alpha,\beta}(z)$ dans la base $(f_i^\alpha(z))$ et G le groupe de Lie des matrices complexes inversibles à n lignes et n colonnes. L'application $z \to M_{\alpha,\beta}(z)$, de $V_\alpha \cap V_\beta$ dans G, est holomorphe et l'on vérifie que, si $V_\alpha \cap V_\beta \cap V_\gamma \neq \emptyset$, $M_{\alpha,\beta}(z).M_{\beta,\gamma}(z).M_{\alpha,\beta}(z)$ est la matrice qui représente l'application identique. Le système des $M_{\alpha,\beta}(z)$ (z_α et z_β dans D_1), définit donc, [5], un espace fibré analytique de base D_1 et groupe G. Puisque D_1 est non compact et de dimension 1 et G connexe, on déduit, d'après GRAUERT [10], que ce fibré est analytiquement trivial. Il est donc analytiquement isomorphe à $D_1 \times C^n$. On en déduit immédiatement que M_z a une base holomorphe dans D. Le résultat est démontré.

Cette proposition peut s'appliquer à des situations variées :

APPLICATION 1. — Soient n un entier positif, Δ un ouvert de C, $z \to T_z$ une application holomorphe de Δ dans $\mathcal{L}(E)$. On sait (théorème 2, Remarque) que l'ensemble D des z de C tels que T_z soit inversible à droite et $\dim \ker(T_z) = n$ est ouvert dans Δ. On pose, pour tout z de D, $\dim \ker(T_z) = M_z$.

Application 2. — Soient Δ un ouvert de C, $z \to T_z$ une application holomorphe de Δ dans $\mathcal{L}(E)$ telle que $T_z = T + A(z)$ avec $A(z) \in \{T\}''$ pour tout z de Δ. Il résulte du théorème 3 que l'ensemble des z tels que T_z soit régulier et parfait est ouvert dans Δ. On prend pour D une composante connexe de cet ouvert sur laquelle $\ker(T_z)$ a une dimension finie. Elle est alors constante. On pose, pour tout z de D, $\ker(T_z) = M_z$.

On montre de la même manière dans les deux cas que la proposition 14 s'applique :

Soit $v \in D$ et X un inverse relatif linéaire et continu de T_v. Soit V le voisinage de v dans D formé des z tels que $|T_z - T_v| < |X|^{-1}$. On pose $R(z) = [1 - X(T_z - T_v)]^{-1} X$ pour tout z de V. D'après le théorème 1, on sait que $1_E - R(z) T_z$ projette E sur $\ker(T_z)$. L'application $z \to 1_E - R(z) T_z$, de V dans $\mathcal{L}(E)$, est holomorphe.

Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une base de $\ker(T_v)$.

Posons

$$f_i(z) = [1_E - R(z) T_z] x_i \qquad (1 \leq i \leq n).$$

Alors la famille $(f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z))$ est une base de $\ker(T_z)$ dans un voisinage V' de v. On peut donc appliquer la proposition 14 : $\ker(T_z)$ a une base holomorphe dans D.

4. **Propriétés particulières de la famille** $z \to T - z$ $(z \in C)$.

Dans ce numéro E est un espace de Banach complexe et T un élément de $\mathcal{L}(E)$. Notant $\overline{N}$, l'ensemble des entiers positifs N augmenté de $+\infty$, on peut poser la :

Définition 7. — *Pour tout* $n \in \overline{N}$ *et* $p \in \overline{N}$, *l'ensemble des* $z \in C$ *tels que* $T - z$ *soit régulier et parfait avec* $\dim \ker(T - z) = n$ et $\operatorname{codim} [T - z](E) = p$ *sera noté* $RP(n, p; T)$.

Remarque 1. — D'après le corollaire 3 de la proposition 12, pour tout $n \in N$ et $p \in N$, $RP(n, p; T)$ est l'ensemble des z de C tels que $T - z$ soit parfait avec $\dim \ker(T - z) = n$ et $\operatorname{codim} [T - z](E) = p$.

Remarque 2. — L'ensemble $\bigcup_{n \in \overline{N}} RP(n, 0; T)$ $\left[\text{resp. } \bigcup_{p \in \overline{N}} RP(0, p; T)\right]$, est formé des z de C tels que $T - z$ soit inversible à droite (resp. à gauche). L'ensemble $RP(0, 0; T)$ est l'ensemble résolvant de T, $\rho(T)$. Le complémentaire de $RP(0, 0; T)$ dans C est donc le spectre de T, $\sigma(T)$.

En appliquant les résultats des nos 2 et 3, on obtient le

Théorème 4 :

1° *Pour* $n \in \overline{N}$ *et* $p \in \overline{N}$, $RP(n, p; T)$ *est ouvert dans* C.

2° *Pour* $n \in \overline{N}$ *et* $p \in \overline{N}$, *l'application* $z \to \mathrm{co}(T - z)$ *est localement constante sur* $RP(n, p; T)$.

3° *Pour* $n \in N$ *et* $p \in \overline{N}$, $\ker(T - z)$ *a une base holomorphe dans* $RP(n, p; T)$.

Le type de variation de $\ker(T - z)$ décrit dans la propriété 3 du théorème 4 est lié de façon essentielle à la notion d'application parfaite comme le montrent les propositions 15, 16, 17 et 18.

PROPOSITION 15. — *Soient* $x_0 \in E$ *et* V *un ouvert de* C. *Supposons qu'il existe une fonction holomorphe* f *définie dans* V, *à valeurs dans* E, *telle que* $[T - z]f(z) = x_0$. *Alors, pour tout* z *de* V, $\left(x_0, f(z), \frac{f'(z)}{1!}, \frac{f''(z)}{2!}, \ldots\right)$ *est une* $[T - z]$*-chaîne infinie issue de* x_0.

Démonstration. — Soit $z_1 \in V$. Au voisinage de z_1, on peut écrire

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_1)^n.$$

On a la relation

$$[T - z_1] f(z) = [z - z_1] f(z) + x_0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [T - z_1] a_n (z - z_1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_1)^{n+1} + x_0.$$

On obtient entre les a_n les relations

$$[T - z_1] a_0 = x_0,$$
$$[T - z_1] a_n = a_{n-1} \qquad (n \geqq 1).$$

Donc $(x_0, a_0, a_1, \ldots)$ est une $[T - z_1]$-chaîne infinie issue de x_0. C'est le résultat désiré.

COROLLAIRE. — *Pour tout* z *de* V, $f(z) \in \mathrm{co}(T - z)$.

Ce résultat découle de la proposition 1.

PROPOSITION 16. — *Soient* $n \in N$, V *un ouvert de* C. *S'il existe* n *fonctions* $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ *holomorphes dans* V, *à valeurs dans* E, *telles que la famille* $(f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z))$ *soit une base holomorphe dans* V *de* $\ker(T - z)$, $T - z$ *est parfait pour tout* z *de* V.

Démonstration. — En effet, on a $[T - z] f_i(z) = 0$, pour tout z de V et tout i. D'après le corollaire de la proposition 15, $\ker(T - z) \subset \mathrm{co}(T - z)$. pour tout z de V. Le résultat découle alors de la proposition 5.

Proposition 17. — *Soit* $T \in \mathcal{L}(E)$, *tel que* $\mathrm{co}(T)$ *soit fermé dans* E. *Alors, il existe un voisinage* V *de l'origine dans* C *tel que*

$$\ker(T - z) \subset \mathrm{co}(T) \subset \mathrm{co}(T - z) \qquad \text{pour tout } z \text{ de } V - \{0\}.$$

Démonstration. — Puisque $\mathrm{co}(T)$ est fermé, $T \mid \mathrm{co}(T)$ est un morphisme strict. Donc il existe une constante $k > 0$ telle que tout x de $\mathrm{co}(T)$ puisse se mettre sous la forme $x = Ty$ avec $y \in \mathrm{co}(T)$ et $|x| < k|y|$. Soit $x_0 \in \mathrm{co}(T)$. On peut trouver une T-chaîne infinie $(x_0, a_0. a_1, \ldots)$ telle que, pour tout n, $|a_n| < k^n |a_0|$. Désignons par V l'ensemble des z de C tel que $|z| < k^{-1}$. La série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge pour tout z de V. On a

$$[T - z]\, f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} [T a_n - a_{n-1}]\, z^n + x_0 = x_0.$$

D'après le corollaire de la proposition 15, pour tout z de V, $x_0 \in \mathrm{co}(T - z)$. Donc, pour tout z de V, $\mathrm{co}(T) \subset \mathrm{co}(T - z)$.

Par ailleurs $\ker(T - z)$ est invariant par T pour tout z de $C - \{0\}$. On a bien

$$\ker(T - z) \subset \mathrm{co}(T) \subset \mathrm{co}(T - z) \qquad \text{pour tout } z \text{ de } V - \{0\}.$$

Corollaire 1. — *Soit* $T \in \mathcal{L}(E)$. *Si le cœur de* T *est fermé,* $T - z$ *est parfait, pour tout* z *appartenant à un voisinage de l'origine privé de* 0.

Corollaire 2. — *Soit* $T \in \mathcal{L}(E)$. *Supposons que le cœur de* T *soit fermé et que* $\ker(T) \cap \mathrm{co}(T)$ *ait une dimension finie* n. *Alors, il existe un voisinage de l'origine dans* C *pour tout* z *duquel* $\dim \ker(T - z) \cap \mathrm{co}(T - z) = n$.

Démonstration. — D'après la proposition 17,

$$\ker(T - z) = \ker((T - z) \mid \mathrm{co}(T)).$$

Par ailleurs, $0 \in RP(n, 0;\, T \mid \mathrm{co}(T))$. La propriété découle alors immédiatement puisque $RP(n, 0;\, T \mid \mathrm{co}(T))$ est ouvert dans C.

Proposition 18. — *Supposons qu'il existe une fonction* R *holomorphe définie dans un ouvert* V *de* C, *à valeurs dans* $\mathcal{L}(E)$, *telle que, pour tout* z *de* V,

$$[T - z]\, R(z)\, [T - z] = T - z.$$

Alors, pour tout z *de* V, $T - z$ *est régulier et parfait.*

Démonstration. — Pour tout z de V, $R_1(z) = R(z)[T - z]R(z)$ est (d'après la définition 3, Remarque) un inverse relatif linéaire et continu de $T - z$. Donc, $1 - R_1(z)[T - z]$ projette E sur $\ker(T - z)$. Zoient $z_0 \in V$

et $x_0 \in \ker(T - z_0)$. Pour tout z de V, $[1 - R_1(z)[T - z]]x_0$ appartient à $\ker(T - z)$. On déduit du corollaire de la proposition 15 que

$$[1 - R_1(z)(T - z)]x_0 \in \operatorname{co}(T - z)$$

et en particulier que $x_0 \in \operatorname{co}(T - z_0)$. Donc, d'après la proposition 5, $T - z$ est parfait pour tout z de V. L'existence de $R_1(z)$ entraîne par ailleurs que $T - z$ est régulier. Soient E' le dual topologique de E muni de la topologie forte, ou topologie de la norme, et ${}^tT$ l'application transposée de T. Alors :

THÉORÈME 5. — *Si T est un élément de $\mathcal{L}(E)$ régulier (resp. régulier et parfait), il en est de même de ${}^tT$. De plus, pour $n \in \overline{N}$ et $p \in \overline{N}$, on a :*

$$RP(n, p; T) \subset RP(p, n; {}^tT).$$

Démonstration. — Soient T un élément régulier de $\mathcal{L}(E)$ et X un inverse relatif linéaire et continu de T. On vérifie immédiatement que ${}^tX$ est un inverse relatif linéaire et continu de ${}^tT$.

Supposons que T soit régulier et parfait. D'après le théorème 1, $R(z) = [1 - zX)^{-1}X$ est, pour tout z tel que $|z| < |X|^{-1}$, un inverse relatif linéaire et continu de $T - z$. Donc ${}^t[R(z)]$ est un inverse relatif linéaire et continu de ${}^t[T - z]$. Puisque l'application $z \to {}^t[R(z)]$ est holomorphe, on déduit de la proposition 18 que ${}^t[T - z]$ est régulier et parfait.

Soient alors $n \in \overline{N}$, $p \in \overline{N}$ et $z \in RP(n, p; T)$. On sait déjà que ${}^t[T - z]$ est régulier et parfait. Par ailleurs, puisque $\ker {}^t[T - z]$ est l'orthogonal de $[T - z](E)$ dans E', on déduit que la dimension de $\ker {}^t[T - z]$ est p. Enfin, $\ker(T - z)$ est l'orthogonal dans E de ${}^t[T - z](E')$. On en déduit que la codimension dans E' de l'adhérence faible de ${}^t(T - z)(E')$ est n. Puisque $T - z$ est un morphisme strict, ${}^t(T - z)(E')$ est faiblement fermé. Le résultat est démontré.

Soient n et k deux éléments de N et p un élément de $\overline{N}$. Il est possible d'obtenir un résultat sur la variation de $\ker(T - z)^k$ dans $RP(n, p; T)$:

PROPOSITION 19. — *Soit $(f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z))$ une base holomorphe dans $RP(n, p; T)$ de $\ker(T - z)$. Alors la famille des $(f_i^{(j)}(z))$ $(1 \leqq i \leqq n, 0 \leqq j \leqq k - 1)$ est une base holomorphe de $\ker(T - z)^k$.*

Démonstration. — La famille des $\left(\dfrac{f_i^{(j)}(z)}{j!}\right)$ $(1 \leqq i \leqq n, 0 \leqq j \leqq k - 1)$, forme, d'après la proposition 15, l'ensemble des k premiers éléments de $[T - z]$-chaînes issues d'une base de $\ker(T - z)$. D'après AUDIN [3], puisque les origines représentent une base de $\ker(T - z)$, cette famille est une base de $\ker(T - z)^k$, pour tout z de D. Il en est alors de même de la famille des $(f_i^{(j)}(z))$.

Soit $p \in N$. Utilisant la proposition 19, il est possible de préciser la valeur constante de $\operatorname{co}(T - z)$ sur chaque composante connexe de $RP(n, p; T)$:

PROPOSITION 20. — *Soient* $n \in \overline{N}$, $p \in \overline{N}$, D *une composante connexe de* $RP(n, p; T)$. *Alors la valeur constante dans* D *de* $\operatorname{co}(T - z)$ *est* $\bigcap_{\lambda \in D} [T - \lambda](E)$. *De plus, pour tout* z *de* D, $\xi(T - z)$ *vaut* 0 *ou* ω *selon que* p *est nul ou non.*

Démonstration. — Puisque $RP(n, p; T) \subset RP(p, n; {}^tT)$, il existe une base holomorphe dans D, $(g_1(z), g_2(z), \ldots, g_p(z))$, de $\ker{}^t(T - z)$. Si $y \in \bigcap_{\lambda \in D} (T - \lambda)(E)$, alors $\langle y, g_i(z) \rangle = 0$, pour tout z de D et tout i. Soit $z_0 \in D$. Les relations sur y sont équivalentes à $\langle y, g_i^{(k)}(z_0) \rangle = 0$, pour tout k de N et tout i. D'après la proposition 19, ces dernières sont vérifiées si et seulement si y est orthogonal à $\ker({}^t(T - z_0)^k)$ pour tout k de N. Cette dernière propriété est équivalente à $y \in [T - z_0]^{\omega}(E)$. Donc $[T - z_0]^{\omega}(E) = \bigcap_{\lambda = D} [T - \lambda](E)$. Soit $y \in [T - z_0]^{\omega}(E)$ et x une solution de l'équation $[T - z_0]\, x = y$.

On a, pour tout z de D :

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle y, g_i(z) \rangle \\
&= \langle (T - z_0)x, g_i(z) \rangle \\
&= \langle x, {}^t[T - z_0]\, g_i(z) \rangle \\
&= (z - z_0) \langle x, g_i(z) \rangle.
\end{aligned}
$$

Donc $x \in [T - z_0)^{\omega}(E)$. On déduit que $\xi(T - z^0) \leq \omega$. Il en est de même de $\xi(T - z)$ pour tout z de D. On a alors les deux possibilités suivantes :

— $p = 0$: alors pour tout z de D, $\xi(T - z_0) = 0$ et $\operatorname{co}(T - z) = E$;

— $p \neq 0$: puisque $\xi(T - z)$ est limite (proposition 4), $\xi(T - z)$ vaut ω pour tout z de D, et $\operatorname{co}(T - z) = \bigcap_{\lambda \in D} [T - \lambda](E)$.

5. Applications à l'ensemble de Noether.

Soient E et F deux espaces de Banach réels ou complexes et T un élément de $\mathcal{L}(E, F)$. Rappelons qu'on appelle indice de T la quantité $\chi(T) = \dim \ker(T) - \operatorname{codim} T(E)$. Cette quantité est définie sauf si $\dim \ker(T)$ et $\operatorname{codim} T(E)$ sont simultanément infinis. En outre,

$\chi(T)$ jouit d'une propriété logarithmique : si A et B sont deux éléments de $\mathcal{L}(E)$, on a

$$\chi(AB) = \chi(A) + \chi(B)$$

pourvu que deux des termes de cette égalité soient définis (ATKINSON [1], AUDIN [3]).

On connaît par ailleurs les propriétés suivantes :

1° $\chi({}^tT) = -\chi(T)$, pourvu que l'un des deux termes soient finis (AUDIN [3]).

2° L'ensemble des T de $\mathcal{L}(E, F)$, tels que $\chi(T)$ ait une valeur finie, est ouvert dans $\mathcal{L}(E, F)$ (ATKINSON [2]).

3° Si E est un espace de Banach complexe et T un élément de $\mathcal{L}(E)$, l'ensemble des z de C, tels que $\chi(T - z)$ soit fini, est un ouvert $\mathfrak{N}$ de C. On dit que $\mathfrak{N}$ est l'ensemble de Noether de T. Sur chaque composante connexe Δ de $\mathfrak{N}$, $\chi(T - z)$ a une valeur constante. De plus, dim ker$(T - z)$ et codim$[T - z](E)$ sont constants sur une partie Δ_1 de Δ; $\Delta - \Delta_1$ est un ensemble discret sur lequel dim ker$(T - z)$ et codim$[T - z](E)$ ont une valeur plus grande que sur Δ (GOKHBERG [7], [8], AUDIN [3]). Nous allons retrouver les propriétés 3 et 4 par des méthodes nouvelles et en donner d'autres en application des résultats précédents.

PROPOSITION 21. — *Soit T un élément de $\mathcal{L}(E, F)$ tel que $\chi(T)$ ait une valeur finie. Alors T est régulier.*

Si X est un inverse relatif linéaire et continu de T, on a $\chi(X) = -\chi(T)$. De plus, pour tout élément U de $\mathcal{L}(E, F)$ tel que $1_F - UX$ soit un isomorphisme de F sur F, on a $\chi(T - U) = \chi(T)$.

Démonstration. — Il résulte directement du corollaire 3 de la proposition 11 que T est régulier.

Soit alors X un inverse relatif de T, linéaire et continu. $TXT = T$. $\chi(T) = \chi(TXT) = \chi(T) + \chi(XT)$, puisque $\chi(T)$ existe. On en déduit $0 = \chi(XT) = \chi(X) + \chi(T)$. Donc $\chi(X) = -\chi(T)$. Soit enfin U un élément de $\mathcal{L}(E, F)$ tel que $1_F - UX$ soit un isomorphisme de F sur F. On a $\chi(1_F - UX) = 0$. Puisque $\chi(1_F - UX)$ et $\chi(X)$ existent, il en est de même de $\chi(X(1_F - UX))$ et aussi de $\chi(X(T - U)X)$, donc aussi de $\chi(T - U)$.

On peut alors écrire

$$\chi(X) = \chi(X(1_F - UX)) = \chi(X(T - U)X) = 2\,\chi(X) + \chi(T - U).$$

On en déduit

$$\chi(X) + \chi(T - U) = 0,$$

ou

$$\chi(T - U) = \chi(T).$$

Remarque. — La proposition 21 reste valable si E et F sont des espaces de Fréchet.

COROLLAIRE 1. — *Pour tout* $U \in \mathcal{L}(E, F)$ *tel que* $|U| < |X|^{-1}$, $\chi(T - U) = \chi(T)$.

COROLLAIRE 2. — *Soient E un espace de Banach complexe et T un élément de $\mathcal{L}(E)$. Alors, l'ensemble de Noether $\mathfrak{N}$ de T est ouvert. Sur chaque composante connexe de $\mathfrak{N}$, l'indice de $T - z$ est constant.*

PROPOSITION 22. — *Soit Δ une composante connexe de $\mathfrak{N}$. Alors, il existe deux éléments de N, n et p, et une composante connexe Δ_1, unique, de $RP(n, p; T)$ tels que Δ_1 soit contenue dans Δ, $\Delta - \Delta_1$ étant un ensemble discret. Par ailleurs pour tout z de $\Delta - \Delta_1$,* $\dim \ker (T - z) > n$ et $\operatorname{codim} (T - z)(E) > p$.

Démonstration. — Soit $z_0 \in \Delta$. Alors $\operatorname{co}(T - z_0)$ est fermé (corollaire de la proposition 7). On peut donc appliquer la proposition 17 : il existe un voisinage V de z_0 dans C, tel que l'application $T - z$ soit parfaite pour tout z de $V - \{z_0\}$. On conclut que l'application $T - z$ est parfaite pour tout z de Δ sauf sur un ensemble discret Δ_2. Donc il existe $n \in N$ et $p \in N$ tels que $\Delta - \Delta_2 \in RP(n, p; T)$ Soit Δ_1 la composante connexe de $RP(n, p; T)$ qui contient $\Delta - \Delta_2$. On a

$$\Delta - \Delta_2 \subset \Delta_1 \subset \Delta.$$

Puisque $\Delta_1 \cap \Delta_2$ est vide, on conclut que

$$\Delta_1 = \Delta - \Delta_2.$$

Par ailleurs, d'après le corollaire 2 de la proposition 17,

$$\dim \ker (T - z) \cap \operatorname{co} (T - z) = n$$

pour tout z de Δ. Donc, en tout point z_1 de $\Delta - \Delta_1 = \Delta_2$,

$$\dim \ker (T - z_1) > n.$$

On conclut, puisque $\chi(T - z_1) = n - p$, que

$$\operatorname{codim} (T - z)(E) > p.$$

COROLLAIRE. — *L'ensemble de Noether, $\mathfrak{N}$, de T est la réunion de*

$$\bigcup_{n \in N,\ p \in N} RP(n, p; T)$$

et d'un ensemble discret.

On peut de plus compléter le théorème 5 :

THÉORÈME 6. — *Pour tout* $n \in N$ *et tout* $p \in N$,

$$RP(n, p; T) = RP(p, n; {}^tT).$$

Démonstration. — Soient Δ_1 une composante connexe de $RP(n, p; T)$, Δ'_1 la composante connexe de $RP(p, n; {}^tT)$ qui contient Δ_1 (théorème 5) et Δ la composante connexe de l'ensemble de Noether de T qui contient Δ_1. Puisque $\chi(T-z) = -\chi({}^t(T-z))$ pour tout z de C tel que l'un des deux termes soit fini (AUDIN [3]), Δ est une composante connexe de l'ensemble de Noether de ${}^tT$. On a donc d'après la proposition 22 :

$$\Delta_1 \subset \Delta'_1 \subset \Delta \qquad \text{ou} \qquad \Delta - \Delta'_1 \subset \Delta - \Delta_1.$$

Soit $z_0 \in \Delta - \Delta_1$. On a $\operatorname{codim}(T - z_0)(E) > p$ ou $\dim \ker'(T - z_0) > p$. On conclut que $z_0 \in \Delta - \Delta'_1$. Donc $\Delta - \Delta_1 = \Delta - \Delta'_1$, qui entraîne $\Delta_1 = \Delta'_1$. La proposition est démontrée.

COROLLAIRE. — *Soit* Δ *une composante de l'ensemble de Noether de* T: *on sait qu'il existe deux entiers* n *et* p *et une composante connexe* Δ_1 *de* $RP(n, p; T)$ *telle que* $\Delta_1 \subset \Delta$, $\Delta - \Delta_1$ *étant discret. Dans ces conditions, le nombre maximal de* $[T-z]$*-chaînes (resp.* ${}^t([T-z)$*-chaînes), issues de* $\ker(T-z)$ *(resp.* $\ker'(T-z)$*), infinies et linéairement indépendantes est constant et égal à* n *(resp.* p*). Les seuls points de* Δ *où l'on ait des* $[T-z]$*-chaînes finies issues de* $\ker(T-z)$ *(resp. des* ${}^t[T-z]$*-chaînes finies issues de* $\ker'[T-z]$*) sont les points de* $\Delta - \Delta_1$.

Démonstration. — On sait (AUDIN [3]) que, pour que des $[T-z]$-chaînes issues de $\ker(T-z)$ soient linéairement indépendantes, il faut et suffit que les premiers éléments de ces $[T-z]$-chaînes soient linéairement indépendants. Par ailleurs, d'après la proposition 17, corollaire 2, pour tout z de Δ, $\dim(\ker(T-z) \cap \operatorname{co}(T-z)) = n$. Enfin, d'après la proposition 6, pour tout z de Δ, $\xi(T-z) \leqq \omega$.

Soit alors $z_0 \in \Delta$; d'après la proposition 1, remarque 1, tout vecteur issu de $\ker(T-z_0) \cap \operatorname{co}(T-z_0)$ est origine d'une $[T-z_0]$-chaîne infinie et tout vecteur issu de $\ker(T-z_0) - \ker(T-z_0) \cap \operatorname{co}(T-z_0)$, origine d'une $[T-z_0]$ chaîne finie. Les résultats sur les $[T-z]$-chaînes sont en évidence. Les résultats sur les ${}^t[T-z]$-chaînes s'obtiennent immédiatement puisque Δ est une composante connexe de l'ensemble de Noether de ${}^tT$ et $RP(n, p; T) = RP(p, n; {}^tT)$.

AUDIN ([3] et erratum de M. L. SCHWARTZ) avait essayé d'obtenir des résultats analogues dans des conditions plus générales.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ATKINSON (F. V.). — On relativity regular operators, *Acta scient. Math.*, Szeged, t. 15, 1953, p. 38-56.

[2] ATKINSON (F. V.). — Normal'naja razrešimost' linejnykh uravnenij v normirovannykh prostranstvakh, *Mat. Sbornik*, N. S., t. 28, 1951, p. 3-14.

[3] AUDIN (M.). — *Sur les équations linéaires dans un espace vectoriel* (Thèse Sc. math., Paris, 1957).

[4] BOURBAKI (N.). — *Espaces vectoriels topologiques*. Chap. 1 et 2. — Paris, Hermann, 1953 (Act. scient. et ind., 1189; Bourbaki, 15).

[5] CARTAN (H.). — Espaces fibrés analytiques complexes, *Séminaire Bourbaki*, t. 3, 1950-1951, n° 34.

[6] DIEUDONNÉ (J.). — Sur les homomorphismes d'espaces normés, *Bull. Sc. math.*, Série 2, t. 67, 1943, 1re partie, p. 72-84.

[7] GOKHBERG (I. C.). — O linejnykh uravnenijkh v normirovannykh prostranstvakh, *Doklady Akad. Nauk S. S. S. R.*, N. S., t. 76, 1951, p. 477-480.

[8] GOKHBERG (I. C.). — O linejnykh operatorakh, analiticeski zavisjaščikh ot parametra, *Doklady Akad. Nauk S. S. S. R.*, N. S., t. 78, 1951, p. 629-632.

[9] GOKHBERG (I. C.) et KREIN (M. G.). — Osnovnye položenij defektnykh čislakh, kornevykh čislakh i indeksakh linejnykh operatorov, *Uspekhi Mat. Nauk*, N. S., t. 12, 1957, n° 2, p. 43-118; Traduction américaine : The basic propositions on defect numbers, roots numbers and indices of linear operators, *Amer. math. Soc.*, *Transl.*, Series 2, t. 13, 1960, p. 185-264.

[10] GRAUERT (H.). — Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Raumen, *Math. Annalen*, t. 135, 1958, p. 263-273.

[11] GROTHENDIECK (A.). — *Espaces vectoriels topologiques*. 2e éd. — Sao Paulo, Sociedade de Matematica, 1958 (multigr.).

[12] SAPHAR (P.). — Sur le spectre d'un opérateur linéaire continu dans un espace de Banach, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 252, 1961, p. 374-376.

[13] SAPHAR (P.). — Sur quelques propriétés d'un opérateur linéaire continu dans un espace vectoriel topologique, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 254, 1962, p. 3946-3948.

(Manuscrit reçu le 20 novembre 1963.)

Pierre SAPHAR,
Faculté des Sciences d'Orsay,
Orsay (Seine-et-Oise).