PAOLO. SALMON

Sur les séries formelles restreintes

Bulletin de la S. M. F., tome 92 (1964), p. 385-410

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1964__92__385_0>

Bull. Soc. math. France,
92, 1964, p. 385 à 410.

SUR LES SÉRIES FORMELLES RESTREINTES ;

PAR

PAOLO SALMON

(Pise) (1).

Dans cet article je me borne essentiellement à exposer en détail un certain nombre de résultats que j'ai annoncés dans les Notes [12], [13] et [14]; il y a toutefois quelques résultats inédits, à savoir le théorème 4 (*cf.* § 3, n° 4) et les théorèmes 11 et 12 (*cf.* § 5, n^{os} 9 et 10) ainsi que des améliorations et des compléments qui ont été apportés un peu partout.

Plus précisément, je me propose de donner des propriétés des anneaux des séries formelles restreintes, c'est-à-dire des séries formelles qui « convergent » pour une topologie linéaire sur l'anneau des coefficients. C'est pour cela que je m'abstiens ici de revenir sur les séries à coefficients dans un corps k valué complet non archimédien considérés dans la Note [13], où j'avais établi deux résultats pour l'anneau $k\{X_1, \ldots, X_n\}$ des séries convergentes dans le polydisque unité de k^n. En effet, le premier de ces résultats, le théorème de préparation, est une conséquence d'un théorème de préparation pour les séries formelles restreintes qui est démontré dans le paragraphe 5 de cet article; d'autre part, le deuxième résultat, celui de la factorialité de $k\{X_1, \ldots, X_n\}$ n'a de correspondant pour les séries formelles restreintes que si la valuation de k est discrète, et dans ce cas, le résultat en question résulte du théorème 5 (*cf.* § 3, n° 5).

Bien que le théorème de préparation et d'autres résultats soient valables pour un anneau de base non noethérien, j'ai toujours eu en vue, dans la préparation de cet article, des anneaux de séries restreintes sur un

(1) Pendant la préparation de cet article, l'auteur a bénéficié d'une bourse de l'O. T. A. N. à Paris.

anneau de base $\mathfrak{m}$-adique noethérien. Dans cet esprit je me suis proposé aussi d'insérer certains résultats dans la situation plus générale des complétés des anneaux $\mathfrak{m}$-adiques noethériens (*cf.* § 2).

Le but essentiel de cet article a été l'établissement de critères de factorialité pour les anneaux de séries restreintes. Les propositions préliminaires établies dans le paragraphe 1 sont triviales dans le cas où l'anneau de base est $\mathfrak{m}$-adique noethérien. A partir des résultats sur la régularité et la factorialité des complétés des anneaux noethériens démontrés dans le paragraphe 2, on déduit facilement au cours du paragraphe 3 les premières conséquences pour les séries restreintes sur un anneau de base de Zariski. Dès qu'on s'est délivré de l'hypothèse que l'anneau de base soit de Zariski, on trouve à la fin du paragraphe 3 un critère suffisant de factorialité qui présente, dans le cas d'un anneau de base géométrique, des liens évidents avec des théorèmes classiques et récents de géométrie algébrique. D'autre part, au cours du paragraphe 4, on fait quelques remarques sur un « contre-exemple » bien connu de Samuel concernant les séries formelles, pour en déduire l'existence de vastes catégories d'anneaux de séries restreintes non factoriels sur un anneau de base factoriel (et même régulier). Dans le paragraphe 5, après le théorème de préparation qui est présenté dans deux formes identiques à celles du cas classique, il y a un résultat qui est lié à une conjecture de Samuel pour les séries formelles sur un anneau local complet noethérien.

Le premier problème que j'ai étudié sur les séries restreintes (factorialité de l'anneau des séries restreintes sur un anneau local régulier; *cf.* la Note [12]) m'a été posée par Pierre Samuel. Je le remercie très vivement du sujêt qu'il m'a donné, et surtout de m'avoir toujours encouragé dans mes recherches ultérieures.

§ 1. Généralités.

1. Définitions et exemples.

Tous les anneaux qu'on considère sont commutatifs à élément unité; tous les homomorphismes d'anneaux transforment l'élément unité en l'élément unité.

On emploie la terminologie de Bourbaki (*cf.* [4]), et l'on se borne à rappeler ici quelques définitions essentielles.

Définition 1. — *On dit qu'un anneau topologique A est linéairement topologisé, s'il existe un système fondamental de voisinages de O formé d'idéaux de A.*

Définition 2. — *Si A est un anneau topologique, on dit qu'une série formelle*

$$f = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_r} a_{i_1 \ldots i_r} X_1^{i_1} \ldots X_r^{i_r}$$

de l'anneau $A[[X_1, \ldots, X_r]]$, est restreinte, si pour tout voisinage V de 0 dans A il n'y a qu'un nombre fini de coefficients $a_{i_1 \ldots i_r}$ n'appartenant pas à V.

Si A est un anneau linéairement topologisé, les séries formelles restreintes sur A, forment un sous-anneau de $A[[X_1, \ldots, X_r]]$, noté $A\{X_1, \ldots, X_r\}$.

Définition 3. — *Si A est un anneau topologique, on dit qu'un élément $x \in A$ est topologiquement nilpotent, si 0 est une limite de la suite $(x^n)_{n \geq 0}$.*

Nous considérons seulement des séries restreintes sur des anneaux de base linéairement topologisés.

On donne maintenant quelques exemples d'anneaux de séries formelles restreintes.

Exemple 1. — Soit A un anneau muni de la topologie discrète. Alors l'anneau $A\{X_1, \ldots, X_r\}$ s'identifie à l'anneau de polynômes $A[X_1, \ldots, X_r]$.

Exemple 2. — Soit A l'anneau d'une valuation non archimédienne v de son corps de fractions K à valeurs dans un groupe abélien ordonné Γ. Alors les ensembles $U_\gamma = \{x \in A,\ v(x) > \gamma,\ \gamma \in \Gamma\}$ sont des idéaux de A; les U_γ définissent une topologie linéaire sur A, et l'on peut considérer l'anneau des séries formelles restreintes $A\{X_1, \ldots, X_r\}$.

Exemple 3. — Soient A un anneau, $\mathfrak{m}$ un idéal de A; *on suppose* A muni de la topologie $\mathfrak{m}$-adique. Tout élément de $\mathfrak{m}$ est alors topologiquement nilpotent. L'anneau $A\{X\}$ est formé des séries formelles $a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n + \ldots$ vérifiant cette propriété : pour tout entier $h > 0$, il existe un entier $k > 0$ tel que $a_n \in \mathfrak{m}^h$ pour $n > k$.

Exemple 4. — Soit A un anneau, et munissons les anneaux $A[Y]$, $A[X$ des topologies (Y)-adique et (X)-adique. On a alors les isomorphismes :

$$A[Y]\{X\} \cong A[X]\{Y\} \cong A[X, Y][[T]]/(T - XY).$$

Exemple 5. — Soit A un anneau, et munissons l'anneau $A[[Y_1, \ldots, Y_n]]$ de la topologie $(Y_1, \ldots, Y_n)$-adique. On a alors

$$A[[Y_1, \ldots, Y_n]]\{X_1, \ldots, X_m\} = A[X_1, \ldots, X_m][[Y_1, \ldots, Y_n]].$$

Exemple 6. — Soit A un anneau intègre, et supposons que A ne soit pas un corps. Soit m un élément non nul et non inversible de A. Considérons dans A la topologie pour laquelle les seuls idéaux ouverts de A soient A et mA (cette topologie n'est donc pas séparée).

Alors l'anneau $A\{X\}$ n'est pas noethérien.

Plongeons en effet $A\{X\}$ dans $A[[X]]$, et considérons dans $A[[X]]$ la série $f=\sum_{n=0}^{\infty} X^n$. On a alors pour tout n : $mf^n \in A\{X\}$; comme on a dans $A[[X]]$, $1=(1-X)f$, on en déduit l'existence de la suite strictement croissante d'idéaux de $A\{X\}$: $(m)\subset(mf)\subset(mf^2)\subset\ldots\subset(mf^n)\subset\ldots$, ce qui démontre notre assertion.

Supposons de plus que m soit un élément premier de A. Alors il y a des éléments dans $A\{X\}$ qui ne se décomposent pas en éléments extrémaux; en particulier $A\{X\}$ n'est pas factoriel.

En effet on remarque d'abord que si h est une série inversible de $A[[X]]$, la série restreinte mh n'est pas un élément extrémal de $A\{X\}$, car on a la décomposition $mh=(1-X)(mfh)$.

Soit $\varphi : A\{X\}\to(A/mA)[X]$ l'homomorphisme canonique que, à toute série $a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n+\ldots$, fait correspondre le polynôme $\bar{a}_0+\bar{a}_1X+\ldots+\bar{a}_nX^n+\ldots$ dont les coefficients $\bar{a}_i$ sont les classes des $a_i \bmod (m)$. Soit $m=f_1f_2\ldots f_h$ une décomposition de m.

On a alors $\varphi(f_1)\ldots\varphi(f_h)=0$; comme A/mA est intègre, au moins l'un des facteurs $\varphi(f_i)$ est O. Il y a donc une série f_i, parmi les $f_1, f_2, \ldots, f_h$, qu'on peut écrire dans la forme mh, où h est une série inversible de $A[[X]]$; par conséquent f_i n'est pas extrémal, ce qui achève la démonstration.

2. Anneaux de séries restreintes comme complétés des anneaux de polynômes.

Soit A un anneau linéairement topologisé, et soit $\mathfrak{m}_\iota\,(\iota\in I)$ une famille d'idéaux de A formant un système fondamental de voisinages de O. Soit $B=A\{X_1, \ldots, X_r\}$ l'anneau des séries formelles restreintes sur A; soit M_ι l'idéal de $A\{X_1, \ldots, X_r\}$ formé des séries restreintes dont tous les coefficients appartiennent à $\mathfrak{m}_\iota$. Appelons σ la topologie (linéaire) de $A\{X_1, \ldots, X_r\}$ dont les idéaux $M_\iota(X_1, \ldots, X_r)^n$ $(\iota\in I,\ n\in N^+)$ forment un système fondamental de voisinages de O; soit σ' la topologie induite par σ sur l'anneau de polynômes $B'=[X_1, \ldots, X_r]$.

Proposition 1. — *L'anneau $B=A\{X_1, \ldots, X_r\}$ topologisé par σ est séparé et complet; plus précisément il est le complété de l'anneau $B'=A[X_1, \ldots, X_r]$ topologisé par σ'.*

L'anneau B est séparé pour σ, car $\bigcap_{\iota,n} M_\iota(X_1, \ldots, X_r)^n=0$.

Soit $(f_n)_{n\in N}$, où $f_n\in B$ pour tout $n\geqq 0$, une suite de Cauchy dans B, c'est-à-dire $f_{n+1}-f_n\to 0$ si $n\to\infty$. Considérons la série formelle

$f = f_1 + (f_2 - f_1) + \ldots + (f_{n+1} - f_n) + \ldots$; elle est restreinte car, pour tout ι, il n'y a qu'un nombre fini de coefficients n'appartenant pas à $\mathfrak{m}_\iota$, et l'on a de plus $f - f_n \to 0$ si $n \to \infty$. La suite (f_n) converge alors vers $f \in B$. Il en résulte que B est complet.

Il est aussi clair que B' est dense dans B, car on peut approcher toute série de B par des polynômes de B'. On en conclut que B est le complété de B' pour la topologie σ'-adique.

Corollaire. — *Soient A un anneau, $\mathfrak{m}$ un idéal de A; supposons A muni de la topologie $\mathfrak{m}$-adique. Alors l'anneau $A\{X_1, \ldots, X_r\}$ est le complété de $A\{X_1, \ldots, X_r\}$ pour la topologie $\mathfrak{m}(X_1, \ldots, X_r)$-adique.*

Soit maintenant τ la topologie linéaire de B dont un système fondamental de voisinages de O est formé des idéaux M_ι.

Lemme 1. — *Soient A un anneau linéairement topologisé, $\mathfrak{m}$ un idéal de A dont tous les éléments sont topologiquement nilpotents, et M l'idéal de $B = A\{X_1, \ldots, X_r\}$ formé des séries à coefficients dans $\mathfrak{m}$. Alors tout élément de M est topologiquement nilpotent dans l'anneau B topologisé par τ.*

On démontre la proposition par récurrence sur le nombre r des indéterminées, la proposition étant vraie pour $r = 0$. Soit L l'idéal de $A\{X_1, \ldots, X_{r-1}\}$ formé des séries restreintes dont tous les coefficients appartiennent à $\mathfrak{m}$. Au moyen de la formule

$$A\{X_1, \ldots, X_r\} = A\{X_1, \ldots, X_{r-1}\}\{X_r\}$$

(où $A\{X_1, \ldots, X_{r-1}\}$ est aussi muni de la topologie τ) on voit que toute série $f \in M$ est une série en X_r à coefficients dans L; on est alors ramenés, par l'hypothèse de récurrence, au cas d'une seule variable.

Il s'agit donc de montrer que si M_ι est l'idéal de $A\{X\}$ formé des séries restreintes à coefficients dans $\mathfrak{m}_\iota$, pour toute $f \in M$ et tout $\iota \in I$ il existe un entier t tel que $f^t \in M$. Soit $f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n + \ldots$ une série de M. Comme f est une série restreinte, il existe un entier $h > 0$ tel que

$$(1) \qquad a_n \in \mathfrak{m}_\iota \quad \text{si} \quad n > h;$$

en outre, les a_i étant topologiquement nilpotents, il existe un entier k tel que

$$(2) \qquad a_n^k \in \mathfrak{m}_\iota \quad \text{si} \quad n \leqq h.$$

Soit $t = h(k-1) + 1$; comme tout coefficient de f^t est une combinaison de produits $a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_t}$ il faut montrer que chacun de ces produits est dans $\mathfrak{m}_\iota$. Or cela est une conséquence de (1) dans le cas où un entier au moins parmi les $i_1, i_2, \ldots, i_t$ est plus grand que h, et résulte de (2) dans le cas contraire. Le lemme est donc démontré.

Corollaire. — *Toute série* $f \in M(X_1, \ldots, X_r)$ *est topologiquement nilpotente dans l'anneau* $A\{X_1, \ldots, X_r\}$ *topologisé par* σ.

En effet, d'après le lemme, il esiste un entier t tel que $f^t \in M_t$. Si n est un entier quelconque et $d = \max(t, n)$, on a $f^d \in M_t(X_1, \ldots, X_r)^n$.

Proposition 2. — *Soient* A *un anneau,* $\mathfrak{m}$ *un idéal de* A, M *l'idéal de* $B = A\{X_1, \ldots, X_r\}$ *formé des séries à coefficients dans* $\mathfrak{m}$. *On a alors :*

(i) *si les éléments de* $\mathfrak{m}$ *sont topologiquement nilpotents, toute série de* B *de la forme*

$$\eta + g \quad [\text{où } \eta \text{ est inversible dans } A \text{ et } g \in M(X_1, \ldots, X_r)] \tag{3}$$

est inversible dans B. *Si, de plus,* $\mathfrak{m}$ *est contenu dans* $\operatorname{Rad} A$ *(radical de* A*), on a aussi* $M \subset \operatorname{Rad} B$;

(ii) *si* $\mathfrak{m}$ *est un idéal premier et ouvert, toute série inversible de* B *est de la forme* (3), *et l'on a* $\operatorname{Rad} B \subset M$.

L'hypothèse de (i) entraîne, par le corollaire du Lemme 1, que g est topologiquement nilpotente dans l'anneau σ-topologique séparé et complet B; l'assertion (i) résulte alors d'un lemme bien connu (*cf.* [4], chap. III, § 2, n° 13, lemme 3).

Démontrons (ii). Si $f = a_0 + g(a_0 \in A,\ g \in (X_1, \ldots, X_r)B)$ est une série inversible dans B, la classe $\bar{f}$ de $f \bmod M(X_1, \ldots, X_r)$ est inversible dans $B/(M(X_1, \ldots, X_r))$. Comme $\mathfrak{m}$ est premier et ouvert, ce dernier anneau s'identifie à l'anneau gradué $\sum_{n=0}^{\infty} B_n$, où $B_0 = A$ et $B_n (n > 0)$ est la composante de degré n de l'anneau intègre de polynômes $(A/\mathfrak{m})[X_1, \ldots, X_r]$. Donc $\bar{f}$ est inversible si $\bar{a}_0$ est inversible dans A et si $\bar{g} = 0$; par suite f est de la forme (3). Si $f \in \operatorname{Rad} B$, $1 + X_1 f$ est inversible dans B, donc peut s'écrire dans la forme (3); cela entraîne $f \in M$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire. — *Soit* A *un anneau local linéairement topologisé, tel que son idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *soit ouvert et que tout élément de* $\mathfrak{m}$ *soit topologiquement nilpotent. Alors pour qu'une série* f *de* B *soit inversible il faut et il suffit que* f *soit de la forme* $\eta + g$ *où* $\eta \in A - \mathfrak{m}$, $g \in M$. *En outre on a* $M = \operatorname{Rad} B$.

§ 2. Propriété de permanence des anneaux complétés.

3. Sur l'intégrité, régularité, factorialité des complétés des anneaux $\mathfrak{m}$-adiques noethériens.

Tous les anneaux qu'on considère dans les paragraphes 2, 3, 4 sont supposés noethériens, sauf mention contraire; toutes les topologies sur certains de ces anneaux sont du type $\mathfrak{m}$-adique. Si A est un anneau local et $\mathfrak{m}$ est son idéal maximal, le complété $\hat{A}$ de A pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique sera appelé tout simplement complété de A.

On rappelle quelques définitions courantes (*cf.*, par exemple [11] et [17]). Un anneau A est dit *régulier* si pour tout idéal maximal $\mathfrak{n}$ de A, l'anneau localisé $A_{\mathfrak{n}}$ est local régulier.

Un anneau A est dit *localement de Macaulay* si pour tout idéal maximal $\mathfrak{n}$ de A, l'anneau $A_{\mathfrak{n}}$ est un anneau local de Macaulay.

Un anneau A est dit *de Macaulay* s'il est localement de Macaulay et si tous les idéaux maximaux de A ont la même hauteur.

On désignera par $\dim A$ la dimension au sens de Krull de l'anneau A, c'est-à-dire la borne supérieure des longueurs des chaînes d'idéaux premiers dans A. On a alors $\dim A = \sup \dim A_{\mathfrak{n}}$, où $\mathfrak{n}$ parcourt l'ensemble des idéaux maximaux de A.

PROPOSITION 3. — *Soient A un anneau, $\mathfrak{m}$ un idéal de A, $\hat{A}$ le complété de A pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. On a alors :*

(i) *si A est un anneau localement de Macaulay (respectivement régulier), $\hat{A}$ est un anneau localement de Macaulay (respectivement régulier)*;

(ii) $\dim \hat{A} \leqq \dim A$.

Il est bien connu que $\hat{A}$ est un anneau noethérien. En outre, si j est l'application canonique de A dans $\hat{A}$, les propriétés suivantes sont vérifiées (*cf.* [4], chap. III, § 3, n° 4, prop. 8) :

(*a*) l'application $\mathfrak{n} \to \hat{\mathfrak{n}} = j(\mathfrak{n})\hat{A}$ est une bijection de l'ensemble des idéaux maximaux de A contenant $\mathfrak{m}$ sur l'ensemble des idéaux maximaux de $\hat{A}$, et $\mathfrak{q} \to j^{-1}(\mathfrak{q})$ est la bijection réciproque;

(*b*) si $\mathfrak{n}$ est un idéal maximal de A contenant $\mathfrak{m}$, l'homomorphisme j'; $A_{\mathfrak{n}} \to \hat{A}_{\hat{\mathfrak{n}}}$ déduit de j est injectif; si l'on identifie $A_{\mathfrak{n}}$ au moyen de j' à un sous-anneau de $\hat{A}_{\hat{\mathfrak{n}}}$, la topologie $(\mathfrak{n}A_{\mathfrak{n}})$-adique de $A_{\mathfrak{n}}$ est induite par la topologie $\hat{\mathfrak{n}}$-adique de $\hat{A}_{\hat{\mathfrak{n}}}$, et $A_{\mathfrak{n}}$ est dense dans $\hat{A}_{\hat{\mathfrak{n}}}$ pour la topologie $\hat{\mathfrak{n}}$-adique.

Employons les notations qui précèdent. Comme un anneau local est de Macaulay (respectivement régulier) si et seulement si son complété est de Macaulay (respectivement régulier), il résulte de (*b*) que si A est localement de Macaulay (respectivement régulier) il en est de même pour $\hat{A}$, car $A_{\mathfrak{n}}$ et $\hat{A}_{\hat{\mathfrak{n}}}$ ont le même complété. Cela établit (i).

On sait aussi qu'un anneau local et son complété ont la même dimension; on a alors

$$\dim A \geqq \sup \dim A_{\mathfrak{n}} = \sup \dim \hat{A}_{\hat{\mathfrak{n}}} = \dim \hat{A},$$

ce qui démontre (ii).

PROPOSITION 4. — *Soit B un anneau intègre localement factoriel, et soit $\mathfrak{m}$ un idéal de B contenu dans le radical de B tel que l'anneau $B/\mathfrak{m}$ soit factoriel. Alors B est aussi factoriel.*

Soit $\mathfrak{q} = uB \cap vB$ l'intersection de deux idéaux principaux de B. Comme B est un anneau localement factoriel, les idéaux localisés de $\mathfrak{q}$ sont libres de rang 1, donc $\mathfrak{q}$ est un idéal projectif de B de rang 1. Le module $\mathfrak{q}/\mathfrak{m}\mathfrak{q}$ est aussi un module projectif de rang 1 sur l'anneau $B/\mathfrak{m}$ (*cf.* [4], chap. 2, § 5, nº 4, prop. 4) dont il est isomorphe à un idéal inversible de l'anneau $B/\mathfrak{m}$; alors $\mathfrak{q}/\mathfrak{m}\mathfrak{q}$ est un idéal principal de $B/\mathfrak{m}$ qui est factoriel par hypothèse. On a donc : $\mathfrak{q}$ est un B-module projectif, $\mathfrak{q}/\mathfrak{m}\mathfrak{q}$ est un $B/\mathfrak{m}$-module libre; alors $\mathfrak{q}$ est un B-module libre (*cf.* [4], chap. II, § 3, nº 2, prop. 5), donc aussi un idéal principal de B. Il en résulte que B est ainsi factoriel.

On appliquera souvent la proposition précédente dans le cas où B est un anneau régulier; en effet « régulier » implique « localement factoriel » d'après le théorème d'Auslander-Buchsbaum (*cf.* [2]).

COROLLAIRE. — *Soient A un anneau régulier, $\mathfrak{m}$ un idéal de A tel que $A/\mathfrak{m}$ soit factoriel. Alors si le complété $\hat{A}$ de A pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique est intègre, $\hat{A}$ est régulier et factoriel.*

THÉORÈME 1. — *Soient A un anneau régulier et factoriel, $\mathfrak{m}$ un idéal engendré par une A-suite $m_1, \ldots, m_t$; supposons en outre que $A/\mathfrak{m}$ soit un anneau factoriel. Alors le complété $\hat{A}$ de A pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique est $\mathfrak{m}$-intègre, régulier et factoriel.*

Il suffit de démontrer que $\hat{A}$ est intègre, car alors le théorème 1 est une conséquence du corollaire précédent.

Considérons l'anneau gradué associé $G(\hat{A}, \mathfrak{m}\hat{A})$ à la filtration $\mathfrak{m}$-adique de $\hat{A}$. On a alors, en vertu d'un théorème de Rees :

$$G(\hat{A}, \mathfrak{m}\hat{A}) \simeq G(A, \mathfrak{m}) \simeq (A/\mathfrak{m})[Y_1, \ldots, Y_t],$$

où les Y_i sont des éléments algébriquement indépendants sur $A/\mathfrak{m}$ (*cf.* le théorème 2.1. dans l'article de D. Rees : " The grade of an ideal or module ", *Proc. Cambr. phil. Soc.*, 53, 1957, p. 28-42).

L'anneau $G(\hat{A}, \mathfrak{m}\hat{A})$ est donc intègre et, d'autre part, l'anneau $\hat{A}$ est séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. Il en résulte que $\hat{A}$ est aussi un anneau intégre, en vertu d'un résultat bien connu d'algèbre locale (*cf.* [19], Ch VII, théorème 1).

C. Q. F. D.

§ 3. Dimension, régularité, factorialité de certains anneaux de séries restreintes.

4. Séries restreintes sur un anneau noethérien. Dimension et régularité.

On rappelle le préavis donné au début du n° 3, § 2. On désignera souvent par $(A, \mathfrak{m})$ un anneau A muni d'une topologie $\mathfrak{m}$-adique.

THÉORÈME 2. — *Soient A un anneau, $\mathfrak{m}$ un idéal de A. Alors l'anneau $B = (A, \mathfrak{m})\{X_1, \ldots, X_r\}$ est noethérien. Si $\mathfrak{q}$ est un idéal de A et Q l'idéal de B formé des séries à coefficients dans $\mathfrak{q}$, on a $Q = \mathfrak{q}B$.*

L'anneau B est noethérien en tant que complété de l'anneau noethérien $B' = A[X_1, \ldots, X_r]$ pour la topologie $\mathfrak{m}(X_1, \ldots, X_r)B'$-adique (corollaire à la proposition 1). En outre B est un anneau de Zariski, car il est complet pour cette topologie. Tout idéal de B est donc fermé; comme $\mathfrak{q}B$ est dense dans Q, il en résulte que $Q = \mathfrak{q}B$.

THÉORÈME 3. — *Soient A un anneau, $\mathfrak{m}$ un idéal de A. Soit*

$$B = (A, \mathfrak{m})\{X_1, \ldots, X_r\}.$$

Les propriétés suivantes sont alors vérifiées :

(i) *si A est un anneau localement de Macaulay (respectivement régulier), B est un anneau localement de Macaulay (respectivement régulier);*

(ii) $\dim B = \dim A + r$.

Si l'anneau A est localement de Macaulay (respectivement régulier), l'anneau $B' = A[X_1, \ldots, X_r]$ est localement de Macaulay (respectivement régulier) (*cf.* par exemple, [11], chap. II, théorème 25.10, et [15], théorème 2.1). Comme B est le complété de B' pour la topologie $\mathfrak{m}(X_1, \ldots, X_r)$-adique, l'assertion (i) est alors une conséquence de la proposition 1.

Il est bien connu que $\dim B' = \dim A + r$ (*cf.* [8], § 6, Satz 13, ou bien [11], 9.10). On a donc, d'après la proposition 3, (ii) :

$$\dim B \leqq \dim A + r.$$

D'autre part, si $\dim A = d$, il existe dans A une chaîne $\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{P}_d$ d'idéaux premiers de longueur d, et par suite on a dans B la chaîne

$$\mathfrak{P}_0 B \subset \mathfrak{P}_1 B \subset \ldots \subset \mathfrak{P}_d B \subset (\mathfrak{P}_d, X_1) B \subset \ldots \subset (\mathfrak{P}_d, X_1, \ldots, X_r) B,$$

d'où l'inégalité opposée

$$\dim B \geqq \dim A + r.$$

LEMME 2. — *Soient A un anneau, $\mathfrak{m}$ un idéal de A, $B = (A, \mathfrak{m})\{X_1, \ldots, X_r\}$. On a alors :*

(i) $B/\mathfrak{m}B = (A/\mathfrak{m})[X_1, \ldots, X_r]$;

(ii) *si* $\mathfrak{m} \subset \operatorname{Rad} A$, $\mathfrak{m}B \subset \operatorname{Rad} B$.

Soit M l'idéal de séries de B à coefficients dans $\mathfrak{m}$; on a, par le théorème 1, $M = \mathfrak{m}B$. Soit $\varphi : B \to (A/\mathfrak{m})[X_1, \ldots, X_r]$ l'homomorphisme canonique qui prolonge $A \to A/\mathfrak{m}$. On a alors $\operatorname{Ker} \varphi = M = \mathfrak{m}B$, ce qui établit (i).

La propriété (ii) est une conséquence immédiate de la proposition 2, (i).

Soit maintenant (A, B) un couple formé d'un anneau A et d'un anneau B non nécessairement noethériens tels que A soit un sous-anneau de B. Si $\mathfrak{b}$ est un idéal de B, on identifiera $A/(\mathfrak{b} \cap A)$ à un sous-anneau de $B/\mathfrak{b}$. En particulier, on considérera des couples (A, B) vérifiant la propriété suivante :

(α) l'intersection d'un idéal maximal quelconque $\mathfrak{n}$ de B avec A est un idéal maximal de A.

LEMME 3. — *Soient A et B deux anneaux non nécessairement noethériens tels que A soit un sous-anneau de B, et soit $\mathfrak{b}$ un idéal de B. On a alors :*

(i) *si* $\operatorname{Rad} A \supset (\mathfrak{b} \cap A)$ *et si le couple* (A, B) *vérifie la propriété* (α), *le couple* $(A/(\mathfrak{b} \cap A), B/\mathfrak{b})$ *vérifie aussi* (α);

(ii) *si* $\operatorname{Rad} B \supset \mathfrak{b}$ *et si le couple* $(A/(\mathfrak{b} \cap A), B/\mathfrak{b})$ *vérifie* (α), *le couple* (A, B) *vérifie* (α).

Démontrons (i). Considérons les homomorphismes surjectifs $\varphi : A \to A/(\mathfrak{b} \cap A)$ et $\psi : B \to B/\mathfrak{b}$. Soit $\mathfrak{n}$ un idéal maximal de l'anneau $B/\mathfrak{b}$; l'idéal $\mathfrak{n} = \psi^{-1}(\bar{\mathfrak{n}})$ est alors maximal dans B et, par suite, $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap A$ est maximal dans A. Enfin $\bar{\mathfrak{m}} = \varphi(\mathfrak{m})$ est un idéal maximal de $A/(\mathfrak{b} \cap A)$ et l'on vérifie aussitôt que $\bar{\mathfrak{m}} = \bar{\mathfrak{n}} \cap (A/\mathfrak{b} \cap A)$. On démontre (ii) de façon analogue.

THÉORÈME 4. — *Soient A un anneau, $\mathfrak{m}$ un idéal contenu dans le radical de A, $B = (A, \mathfrak{m})\{X_1, \ldots, X_r\}$. On a alors :*

(i) *pour que le couple (A, B) vérifie (α), il faut et il suffit que $A/\mathfrak{m}$ soit un anneau de Jacobson;*

(ii) *si A est un anneau de Macaulay et $A/\mathfrak{m}$ est un anneau de Jacobson, B est aussi un anneau de Macaulay.*

On a, d'après le lemme 2, $\mathfrak{m}B \subset \operatorname{Rad} B$ et $B/\mathfrak{m}B = (A/\mathfrak{m})[X_1, \ldots, X_r]$; il en résulte, par le lemme 3, que le couple (A, B) vérifie la propriété (α) si et seulement si cette propriété est vérifiée par le couple

$$(A/\mathfrak{m}, B/\mathfrak{m}B) = (A/\mathfrak{m}, (A/\mathfrak{m})[X_1, \ldots, X_r]).$$

Or la propriété (α) est vérifiée pour ce dernier couple, si et seulement si $A/\mathfrak{m}$ est un anneau de Jacobson (*cf.* [5], théorèmes 3 et 5, et aussi [8], Satzen 1 et 14); cela établit (i).

Démontrons (ii). Si A est un anneau de Macaulay, B est un anneau localement de Macaulay par la proposition 3; pour conclure que B est un anneau de Macaulay il suffit alors de montrer que, sous l'hypothèse que $A/\mathfrak{m}$ soit un anneau de Jacobson, tous les idéaux maximaux de A ont la même hauteur.

Par hypothèse, les idéaux maximaux de A ont tous la même hauteur qu'on désignera par d. Soit $\mathfrak{N}$ un idéal maximal de B; on va montrer que la hauteur de $\mathfrak{N}$ est $d+r$. On fait les positions $B' = A[X_1, \ldots, X_r]$, $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N} \cap B'$, $\mathfrak{n} = \mathfrak{N} \cap A$.

Comme (i) est établi, l'idéal $\mathfrak{n}$ est maximal dans A. En outre, il est clair qu'on a $\mathfrak{n} = \mathfrak{N}' \cap A$. On en déduit les relations

$$h(\mathfrak{N}') = h(\mathfrak{n}) + r = d + r,$$

en vertu d'un résultat sur la hauteur des idéaux dans les anneaux de polynômes (*cf.* [19], Appendix 1, prop. 1). D'autre part, on a, par la proposition 2 :

$$h(\mathfrak{N}) = \dim B_{\mathfrak{N}} = \dim B'_{\mathfrak{N}'} = h(\mathfrak{N}');$$

il en résulte que les idéaux maximaux de B ont tous la même hauteur $d+r$, ce qui achève la démonstration du théorème.

5. **Factorialité. Cas où l'anneau de base est de Zariski.**

Le théorème suivant nous donne le premier critère de factorialité pour les anneaux de séries restreintes; en un certain sens ce critère est le plus fort qu'on a réussi à établir.

Théorème 5. — *Soient A un anneau régulier intègre, $\mathfrak{m}$ un idéal contenu dans le radical de A tel que l'anneau $A/\mathfrak{m}$ soit factoriel. L'anneau $B = (A, \mathfrak{m})\{X_1, \ldots, X_r\}$ est alors régulier et factoriel.*

L'anneau B est régulier, d'après le théorème 3. En outre, B est intègre, en tant que sous-anneau de l'anneau intègre $A[[X_1, \ldots, X_r]]$. Enfin l'anneau $B/\mathfrak{m}B$ est factoriel, par le lemme 2 et l'hypothèse sur $A/\mathfrak{m}$. Le théorème est alors une conséquence immédiate de la proposition 4.

Corollaire 1. — *Soient A un anneau local régulier, $\mathfrak{m}$ un idéal de A, engendré par un sous-ensemble d'un système régulier de paramètres de A. L'anneau $(A, \mathfrak{m})\{X_1, \ldots, X_r\}$ est alors factoriel.*

Corollaire 2. — *Soient A un anneau local régulier, et $\mathfrak{m}$ un idéal premier engendré par une A-suite, tel que $(A/\mathfrak{m})_{\mathfrak{p}}$ soit factoriel pour tout* *idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* $A/\mathfrak{m}$ *de hauteur* $\leqq 3$. *L'anneau* $(A, \mathfrak{m})\{X_1, \ldots, X_r\}$ *est alors factoriel.*

En effet, les hypothèses du corollaire 2 entraînent que $A/\mathfrak{m}$ est factoriel, en vertu d'un théorème de Grothendieck (*cf.* [7], exposé 11, cor. 3.14) qui a démontré et généralisé une conjecture de Samuel (*cf.* [16], n° 6).

6. Factorialité. Cas où l'anneau de base n'est pas supposé de Zariski.

Le raisonnement qu'on a fait dans la démonstration du théorème 5 n'est plus valable sans l'hypothèse que l'anneau de base soit de Zariski. Si l'on substitue à cette hypothèse d'autres restrictions pour l'idéal qui engendre la topologie, on parvient toutefois au théorème 7 suivant qui donne un critère de factorialité correspondant au théorème 5. On aura besoin de plusieurs lemmes et d'un résultat intermédiaire (théorème 6) qui a un intérêt en soi-même.

LEMME 4. — *Soient A un anneau intègre,* $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_q$ *un idéal de A qui soit l'intersection d'idéaux premiers* $\mathfrak{m}_j (1 \leqq j \leqq q)$. *Soit*

$$a = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n + \ldots \in (A, \mathfrak{m})\{X\}$$

une série restreinte telle que pour tout j on ait $a_0 \notin \mathfrak{m}_j$, $a_i \in \mathfrak{m}_j$ *si* $i \geqq 1$. *Alors toute série* $b = b_0 + b_1 X + \ldots + b_n X^n + \ldots \in (A, \mathfrak{m})\{X\}$ *qui divise a dans* $(A, \mathfrak{m})\{X\}$ *est telle que* $b_0 \notin \mathfrak{m}_j$, *pour tout j, et* $b_i \in \mathfrak{m}$ *si* $i \geqq 1$.

En effet soit $c = c_0 + c_1 X + \ldots + c_n X^n + \ldots \in (A, \mathfrak{m})\{X\}$ une série telle que $a = b.c$. Soit j un entier, $1 \leqq j \leqq q$; soit $\varphi : (A, \mathfrak{m})\{X\} \to (A/\mathfrak{m}_j)[X]$ l'homomorphisme canonique qui prolonge $A \to A/\mathfrak{m}_j$, et désignons par $\bar{u}$ l'image $\varphi(u)$ d'une série u de $(A, \mathfrak{m})\{X\}$. On a alors $\bar{a} = \bar{b}.\bar{c}$. Comme $\bar{a} = \bar{a}_0 \neq 0$ et $A/\mathfrak{m}_j$ est intègre, on en déduit $\bar{b} = \bar{b}_0 \neq 0$, $\bar{c} = \bar{c}_0 \neq 0$, $0 = \bar{b}_i = \bar{c}_i$ si $i \geqq 1$; on a par conséquent $b_0, c_0 \notin \mathfrak{m}_j$, et $b_i, c_i \in \mathfrak{m}_j$ si $i \geqq 1$, ce qui démontre le lemme.

LEMME 5. — *Soient A un anneau,* $\mathfrak{m}$ *un idéal de A. Soit*

$$a = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n + \ldots$$

une série formelle de $A[[X]]$ *telle que* $1 \in (a_0, \mathfrak{m})A$, $a_i \in \mathfrak{m}$ *si* $i \geqq 1$. *Alors a est associée dans* $A[[X]]$ *à une série restreinte*

$$b = b_0 + b_1 X + \ldots + b_n X^n + \ldots \in (A, \mathfrak{m})\{X\}$$

telle que $a_0 = b_0$, $b_i \in \mathfrak{m}$ *si* $i \geqq 1$.

Nous montrerons la validité de la propriété (α) suivante dont le lemme est un corollaire immédiat.

(α) Soit $j : N^+ \to N^+$ une application de l'ensemble des entiers positifs en lui-même. Il existe une série $u = 1 + u_1 X + \ldots + u_n X^n + \ldots$ de $A[[X]]$ et un élément $m \in \mathfrak{m}$ tels que si

$$au = b = b_0 + b_1 X + \ldots + b_n X^n + \ldots,$$

on a $b_n \in (m)^{j(n)} A$ pour tout $n \geqq 1$.

Déterminons m et u_1 tels que $b_1 = a_0 u_1 + a_1 \in (m)^{j(1)} A$. En effet il existe deux éléments $h \in A$, $m \in \mathfrak{m}$ tels que $1 = a_0 h + m$. Soit

$$u_1 = -a_1 h(1 + m + m^2 + \ldots + m^{j(1)-1}).$$

On a alors

$$\begin{aligned} b_1 &= -a_0 a_1 h(1 + m + \ldots + m^{j(1)-1}) + a_1 \\ &= a_1((m-1)(1 + m + \ldots + m^{j(1)-1}) + 1) = a_1 m^{j(1)}. \end{aligned}$$

Supposons maintenant avoir déterminé les coefficients $u_1, \ldots, u_{n-1}$ de la série u de telle façon que (α) soit vérifiée pour les coefficients $b_1, \ldots, b_{n-1}$; alors si

$$u_n = -(a_1 u_{n-1} + \ldots + a_n) h(1 + m + \ldots + m^{j(n)-1}),$$

on a aussitôt

$$b_n = (a_1 u_{n-1} + \ldots + a_n) m^{j(n)},$$

d'où la possibilité de déterminer les coefficients u_n par récurrence, et la propriété (α) est ainsi démontrée.

Lemme 6. — *Soient A un anneau intègre, $\mathfrak{m}$ un idéal de A. Soit a une série de $(A, \mathfrak{m})\{X\}$. Si l'on a dans $A[[X]]$ une décomposition*

$$a = bf, \tag{4}$$

où $b = b_0 + b_1 X + \ldots + b_n X^n + \ldots$ est une série restreinte de $(A, \mathfrak{m})\{X\}$, telle que $1 \in (b_0, \mathfrak{m})A$, $b_i \in \mathfrak{m}$ si $i \geqq 1$, la série formelle f est aussi une série restreinte de $(A, \mathfrak{m})\{X\}$.

Soit $\hat{A}$ le complété de A pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique; plongeons l'anneau $(A, \mathfrak{m})\{X\}$ dans l'anneau $\hat{A}[[X]]$. Comme il existe un élément h_0 de A tel que $h_0 b_0 \in 1 + \mathfrak{m}$, b_0 est inversible dans $\hat{A}$; par conséquent, en vertu de la proposition 2, la série b est inversible dans l'anneau $(\hat{A}, \mathfrak{m}\hat{A})\{X\}$. La relation (4) montre alors que $f \in (\hat{A}, \mathfrak{m}\hat{A})\{X\}$ Soit h un entier positif. Si $f = f_0 + f_1 X + \ldots$, il existe un entier k tel que $f_n \in \mathfrak{m}^h \hat{A} \cap A = \mathfrak{m}^h$ pour $n > k$; cela montre que la série f est dans $(A, \mathfrak{m})\{X\}$.

Théorème 6. — *Soient A un anneau factoriel, $\mathfrak{m}$ un idéal de A, $\hat{A}$ le complété de A pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. Supposons que les anneaux $A[[X]]$ et $(\hat{A}, \mathfrak{m}\hat{A})\{X\}$ soient factoriels. Alors $(A, \mathfrak{m})\{X\}$ est aussi factoriel.*

Le complété de l'anneau $B = (A, \mathfrak{m})\{X\}$ pour la topologie $\mathfrak{m}B$-adique est l'anneau $(\hat{A}, \mathfrak{m}\hat{A})\{X\}$ qui est factoriel par hypothèse. Si l'on montre que $1 + \mathfrak{m}B$ est engendré par une famille d'éléments premiers de B, B sera factoriel en vertu de la combinaison de deux théorèmes bien connus de Nagata (*cf.* [10], ou bien [15], lemme 1.7) et de Mori (*cf.*, par exemple, [15], lemme 1.2).

Dans la démonstration on peut supposer que $\mathfrak{m}$ soit une intersection d'idéaux premiers; en effet si l'on substitue $\sqrt{\mathfrak{m}}$ (radical de $\mathfrak{m}$) à $\mathfrak{m}$, les anneaux topologiques $(A, \mathfrak{m})$ et $(A, \sqrt{\mathfrak{m}})$ sont identiques.

Tout élément de $1 + \mathfrak{m}B$ étant un produit d'éléments extrémaux de B, il suffit de voir que ces éléments extrémaux sont aussi premiers dans B. Soit $a = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n + \ldots$ un tel élément extrémal; montrons d'abord que a est aussi extrémal dans $A[[X]]$.

Par hypothèse, a divise une série de $1 + \mathfrak{m}B$; on a alors $1 \in (a_0, \mathfrak{m})A$ et, d'après le lemme 4, $a_i \in \mathfrak{m}$ si $i \geqq 1$.

Soit $a = uv$ une décomposition de a dans $A[[X]]$; en vertu du lemme 5, u et v sont associées respectivement dans $A[[X]]$ à deux séries restreintes $b = b_0 + b_1X + \ldots$, $c = c_0 + c_1X + \ldots$ telles que $a_0 = b_0c_0$ et $b_i, c_i \in \mathfrak{m}$ si $i \geqq 1$. Il existe alors une série inversible de $A[[X]]$, $w = 1 + w_1X + \ldots$ telle que $a = bcw$; d'après le lemme 6, on a aussi $w \in B$. Comme a est extrémal dans B, l'une des séries b, c, soit b, est inversible dans B, donc aussi dans $A[[X]]$; alors u est inversible dans $A[[X]]$, ce qui montre que a est extrémal aussi dans $A[[X]]$.

Supposons que a divise, dans B, un produit $d.e$ de deux séries $d, e \in B$. Comme a est extrémal dans $A[[X]]$, qui est factoriel par hypothèse, a divise dans $A[[X]]$ l'une des séries d, e, soit d. Il existe alors une série $f \in A[[X]]$ telle que $d = af$. Or le lemme 6 nous dit que $f \in B$, donc a divise d dans B. Par conséquent a est premier dans B, ce qui achève la démonstration du théorème.

THÉORÈME 7. — *Soient A un anneau régulier et factoriel, $\mathfrak{m}$ un idéal (premier) de A engendré par une A suite $m_1, \ldots, m_t$. Supposons que l'anneau $A/\mathfrak{m}$ soit factoriel. L'anneau $(A, \mathfrak{m})\{X_1, \ldots, X_r\}$ est alors régulier et factoriel.*

Le théorème étant vrai pour $r = 0$, on peut procéder par récurrence sur le nombre r des indéterminées. Soit $B_j = (A, \mathfrak{m})\{X_1, \ldots, X_j\}$ pour $1 \leqq j \leqq r$. Tous les anneaux B_j sont réguliers d'après le théorème 3, d'où en particulier la première assertion du théorème. Supposons que B_{r-1} soit factoriel, et démontrons que B_r est aussi factoriel. Soient $\hat{A}$ et $\hat{B}_j$ les complétés respectifs de A et de B_j pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. On a alors $\hat{B}_r = (\hat{A}, \mathfrak{m}\hat{A})\{X_1, \ldots, X_r\}$. On sait, d'après le théorème 1, que $\hat{A}$ est régulier et factoriel; en outre $\hat{A}/\mathfrak{m}\hat{A} \simeq A/\mathfrak{m}A$ est factoriel par hypothèse. Donc $\hat{B}_r$ est factoriel par le théorème 5. Comme B_{r-1} est régulier et factoriel, $B_{r-1}[[X_r]]$ est aussi factoriel (cf. [15], théorème 2. 1 et aussi [3], théorème 3. 2.). D'après le théorème 6, B_r est alors factoriel.

C. Q. F. D.

Remarque. — Soient k un corps, $A = k[Y_0, \ldots, Y_n]$, $\mathfrak{m}$ un idéal premier homogène de A, c'est-à-dire une variété algébrique V de l'espace projectif P^n. On connaît dans certains cas des conditions, dont la signification géométrique est expressive, pour que l'idéal $\mathfrak{m}$ vérifie les hypothèses du théorème 7 de telle façon que l'anneau $(A, \mathfrak{m})\{X_1, \ldots, X_r\}$ soit factoriel. On rappelle quelques exemples intéressants.

1° Soit $A = C[Y_0, Y_1, Y_2, Y_3]$, où C est le corps complexe; soit $\mathfrak{m}$ l'idéal d'une surface irréductible d'ordre $\geqq 4$ engendré par une forme qui ne soit pas le développement d'un déterminant homogène non trivial. Alors l'anneau $A/\mathfrak{m}$ est factoriel (*cf.* [1], n° 10 : théorème de Noether). Par conséquent $(A, \mathfrak{m})\{X_1, \ldots, X_r\}$ est factoriel.

2° Soit k un corps, $A = k[Y_0, \ldots, Y_n]$, $n \geqq 4$; soit $\mathfrak{m}$ l'idéal homogène d'une variété intersection complète de dimension $\geqq 3$ qui soit non singulière en codimension $\leqq 3$. On peut alors déduire d'une application à l'espace projectif du théorème de Grothendieck déjà cité (*cf.* le corollaire 2 au théorème 3) que $A/\mathfrak{m}$ est un anneau factoriel : c'est une généralisation d'un théorème classique de Lefschetz sur les intersections complètes et d'autres résultats partiels (*cf.* [1], [9], [18]). Comme il existe un système de générateurs de $\mathfrak{m}$ vérifiant les hypothèses du théorème 7, l'anneau $(A, \mathfrak{m})\{X_1, \ldots, X_r\}$ est factoriel.

§ 4. Non-factorialité de certains anneaux de séries restreintes.

7. Remarques sur un théorème de Samuel.

Dans les remarques suivantes nous ferons plusieurs fois référence à la démonstration d'un théorème de Samuel (*cf.* [15]), théorème 4.1), dont nous reproduisons par commodité l'énoncé avec une hypothèse légèrement affaiblie : « Soient A un anneau intègre (noethérien), a, b, c trois éléments de A, et i, j, k trois entiers vérifiant les relations

$$(\alpha) \qquad a^{i-1} \notin bA + cA;$$

$$(\beta) \qquad a^i \in b^k A + c^j A;$$

$$(\gamma) \qquad ijk - ij - jk - ik \geqq 0.$$

Supposons en outre : b est un produit d'éléments premiers de A (²), b et c sont relativement premiers. Alors l'anneau $A[[X]]$ n'est pas factoriel ».

(²) Dans [15], théorème 4.1, il est supposé que b soit premier, mais comme il résulte de la remarque 4 suivante, l'hypothèse moins restrictive ci-dessus entraîne seulement de petites modifications dans la démonstration donnée par SAMUEL.

Dans la suite ce théorème sera appelé brièvement théorème F.

REMARQUE 1. — Soient A un anneau intègre, a, b, c trois éléments de A, et i, j, k trois entiers vérifiant les relations (β), (γ). Soit S le système multiplicativement fermé engendré par c dans A. Considérons la série $v = bc - a^{i-1}$ de $A[[X]]$. Dans la partie (b) de la démonstration du théorème F on établit l'existence d'un entier t, d'une série

$$v' = b^t c^{-1} + \ldots + b_{n-1} c^{-n} X^{n-1} + \ldots \in A_S[[X]] \qquad (b_h A,\ h = 0, 1, 2, \ldots)$$

et d'une série $u \in A[[X]]$ tels que $u = vv'$.

L'analyse de la démonstration de la partie (b) du théorème F montre que si t est un entier $\geqq ij$ et si les entiers satisfont *strictement* la relation (γ), c'est-à-dire si $ijk - ij - jk - ik > 0$, les éléments $b_h \in A$ déterminés par le procédé de SAMUEL vérifient la propriété suivante : pour tout entier $n \geqq 1$, b_{nij} est divisible par b^{t+n}, et b_h est divisible par b^n si $(n-1)\, ij < h < nij$. En outre pour les coefficients u_h du produit $vv' = u = u_0 + u_1 X + \ldots$, on a la propriété : u_{nij} est divisible par b^{t+n-ij} si $n \geqq 1$, $u_h = 0$ si h n'est pas divisible par ij.

Dans les hypothèses ci-dessus, u est alors une série restreinte de l'anneau $(A, bA)\{X\}$; si l'on suppose de plus $bA_S \neq A_S$, v' est aussi une série restreinte de l'anneau $(A_S, bA_S)\{X\}$.

On remarque que l'hypothèse $bA_S \neq A_S$ est vérifiée dans le cas où b est un produit d'éléments premiers de A et b, c sont relativement premiers.

REMARQUE 2. — Soient A un anneau intègre, a, b, c trois éléments de A et i, j, k trois entiers vérifiant les relations (β), (γ); soit S l'ensemble multiplicativement fermé engendré par c dans A. En vertu de (β), on peut écrire $a^i = db^k + ec^j$, où d, $e \in A$. Si $v = bc - a^{i-1}X$, on a vu qu'on peut déterminer une série

$$v' = b^t c^{-1} + \ldots + b_{n-1} c^{-n} X^{n-1} + \ldots$$

de

$$A_S[[X]] \qquad (b_h \in A,\ h = 0, 1, 2, \ldots)$$

telle que $u = vv' \in A[[X]]$.

L'analyse de la démonstration de la partie (b) du théorème F montre encore que les coefficients b_h satisfont les propriétés suivantes :

1° Si $h = nij$ $(n \geqq 1)$, on a $b_h = b^{t(n)} F_n(b^k, c^j, d, e)$, où $t(n)$ est un entier, $F_n(b^k, c^j, d, e)$ est un polynôme en b^k, c^j, d, e à coefficients entiers, qu'on indiquera simplement avec F_n.

2° Si $nij < h < (n+1)\, ij$, on a

$$b_h = a^{(i-1)(h-nij)} b^{t(n)-h+nij} F_n.$$

D'autre part, si $vv' = u = u_0 + u_1 X + \ldots$, les coefficients u_h jouissent de la propriété $u_0 = b^{t+1}$, u_{nij} est un polynôme en les b^k, c^j, d, e à coefficients entiers, $u_h = 0$ si h n'est pas un multiple de ij.

REMARQUE 3. — Soient A un anneau intègre, b, c, d, e quatre éléments de A, et j, k deux entiers vérifiant la relation $kj - k - j > 0$. Soit S l'ensemble multiplicativement fermé engendré par c dans A. Déterminons un i tel que $i(kj - k - j) - kj \geqq 0$.

Soit Z une indéterminée; considérons l'anneau

$$A' = A[Z]/(Z^i - db^k - ec^j);$$

soit φ l'homomorphisme canonique $A[Z] \to A'$, et soit z l'image de Z par φ. L'anneau A', ses éléments z, b, c, et les entiers i, j, k vérifient bien les relations (β), (γ).

Soit $v = bc - z^{i-1} X$. On sait alors qu'on peut déterminer par le procédé de SAMUEL une série

$$v' = b^t c^{-1} + \ldots + b_{n-1} c^{-n} X^{n-1} + \ldots \in A'_S[[X]]$$

et une série

$$u = b^{t+1} + u_1 X + \ldots \in A[[X]],$$

telles que $u = vv'$ et les u_h, b_h satisfont les propriétés (1), (2) indiquées dans la remarque 2.

Considérons l'automorphisme σ de $A'[[X]]$ donné par la relation $X \to zX$. On a alors

$$\sigma(u) = \sigma(v)\,\sigma(v'), \qquad \text{où} \quad \sigma(v) = bc - z^i X = bc - (db^k + ec^j) X \in A[X].$$

Considérons le monôme $v'_{nij} X^{nij}$ de degré nij de v'. D'après la remarque 2, on peut écrire

$$v'_{nij} X^{nij} = b_{nij} c^{-nij-1} X^{nij} = b^{t(nij)} c^{-nij-1} F_n X^{nij}, \qquad \text{où} \quad F_n \in A.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \sigma(v'_{nij} X^{nij}) &= b^{t(nij)} c^{-nij-1} F_n z^{nij} X^{nij} \\ &= b^{t(nij)} c^{-nij-1} F_n (db^k + ed^j)^{nj} X^{nij} \in A[X]. \end{aligned}$$

D'autre part, si $nij < h < (n+1)\,ij$, on a pour le transformé du monôme $v'_h X^h$ de degré h :

$$\begin{aligned} \sigma(v'_h X^h) &= \sigma(b_h c^{-h-1} X^h) = z^{(i-1)(h-nij)} c^{-h-1} b^{t(n)-h+nij} F_n z^h X^h \\ &= (z^i)^{h-nij+nj} c^{-h-1} b^{t(n)-h+nij} F_n X^h \\ &= (db^k + ec^j)^{h-nij+nj} c^{-h-1} b^{t(n)-h+nij} F_n X^h \in A[X]. \end{aligned}$$

Il est en outre immédiat que les coefficients $\sigma(u_h)$ de $\sigma(u)$ ont les propriétés suivantes :

$$\sigma(u_{nij}) = a_n(db^k + ec^j)^{nj}, \qquad \text{où} \quad a_n \in A,$$
$$\sigma(u_h) = 0 \qquad \text{si } ij \text{ ne divise pas } h.$$

On déduit de tout ce qui précède que la série $\sigma(u)$ est une série restreinte de l'anneau $(A, (db^k + ec^j)A)\{X\}$. En outre la série $\sigma(v')$ appartient au sous-anneau $A_S[[X]]$ de $A'_S[[X]]$. Si, de plus, on suppose que $(db^k + ec^j)A_S \neq A_S$, la série $\sigma(v')$ est une série restreinte de l'anneau $(A_S, (db^k + ec^j)A_S)\{X\}$.

Posons $f = \sigma(u)$, $w = \sigma(v)$ $(= bc - (db^k + ec^j)X)$. On peut alors conclure : il y a dans l'anneau $A_S[[X]]$ la décomposition $f = ww'$, où les séries f, w' satisfont aux propriétés indiquées dans l'alinéa précédent.

Remarque 4. — Soient A un anneau intègre et b, c deux éléments de A tels que : b est un produit d'éléments premiers de A ; b, c sont relativement premiers. Soient B un sous-anneau de $A[[X]]$, q, r deux entiers > 0 et g, u, v trois séries de B dont les termes constants g_0, u_0, v_0 sont respectivement $g_0 = c^q$, $u_0 = b^r$, $v_0 = bc$. Supposons qu'on ait dans B une décomposition $gu = vf$, $f \in B$, et qu'aucun facteur de v n'ait b pour terme constant. *Alors B n'est pas factoriel.*

En effet il résulte des hypothèses qu'il existe un facteur extrémal v_1 de v dont le terme constant est un produit b_1c_1, où b_1 et c_1 sont des éléments non inversibles de A qui divisent respectivement b et c. Comme b et c sont relativement premiers, v_1 ne divise ni u ni g ; par conséquent, B n'est pas factoriel.

8. Cas de non factorialité.

On verra dans ce numéro qu'à partir des remarques du numéro précédent, on peut déduire l'existence de plusieurs anneaux de séries restreintes non factoriels sur un anneau de base factoriel.

Théorème 8. — *Soient A un anneau, a, b, c, trois éléments de A, et i, j, k trois entiers vérifiant les hypothèses du théorème* F; *supposons de plus que l'inégalité* (γ) *soit stricte. Alors tout anneau* B *tel que* $(A, bA)\{X\} \subset B \subset A[[X]]$ *n'est pas factoriel.*

Soit S le système multiplicativement fermé engendré par c dans A. Posons $C = (A, bA)\{X\}$, $C^S = (A_S, bA_S)\{X\}$, $v = bc - a^{i-1}X$. D'après la remarque 1 du n° 7 il existe un entier t et une série

$$v' = b^t c^{-1} + \ldots + b_{n-1}c^{-n}X^{n-1} + \ldots \in C^S$$

tels que

$$u = vv' = b^{t+1} + \ldots + u_n X^n + \ldots \in C.$$

Soit T le système multiplicativement fermé des séries

$$b_0 + \ldots + b_n X^n + \ldots \in C$$

telles que $b_0 \in S$, $b_i \in bA$ si $i \geqq 1$. Alors C_T est un anneau de Zariski pour la topologie bXC_T-adique, car tout élément de $1 + bXC_T$ est inversible dans C_T. En outre, à partir de la remarque que tout élément de T est inversible dans C^S, on vérifie facilement que C^S est le complété de C_T pour la topologie bXC_T-adique. Il en résulte

$$u = vv' \in vC^S \cap C_T = vC_T;$$

comme C_T est intègre, cela implique $v' \in C_T$. Soit donc $v' = fg^{-1}$, $f \in C$, $g \in T$; on a alors dans C la décomposition $ug = vf$. Mais cette décomposition est aussi valable dans B, car C est un sous-anneau de B; d'après la remarque 4 du n° 7, pour conclure que B n'est pas factoriel, il suffit alors de montrer que la série $v = bc - a^{i-1}X$ n'a pas de facteurs dont le terme constant soit b.

Or, si l'on a dans B une décomposition

$$bc - a^{i-1}X = (b + b_1 X + \ldots)(c + c_1 X + \ldots),$$

il en résulte en particulier $a^{i-1} = bc_1 + b_1 c$, ce qui contredit la relation (α) du n° 7.

Corollaire. — *Soient k un corps, i, j, k trois entiers vérifiant l'inégalité stricte $ijk - ij - iy - jk > 0$. Soit $A = k[X, Y, Z]/(Z^i - X^j - Y^k)$ l'anneau des coordonnées de la surface algébrique sur k d'équation $Z^i - X^j - Y^k = 0$, ou bien le localisé à l'origine de cet anneau. Alors, si $\mathfrak{m}$ est l'un des idéaux suivants XA, YA, ZA, $(X, Y, Z)A$, l'anneau $(A, \mathfrak{m})\{T\}$ n'est pas factoriel.*

Dans les articles [15] et [16], Samuel donne plusieurs exemples d'anneaux factoriels de surfaces algébriques vérifiant les hypothèses du corollaire précédent. Ce corollaire nous montre alors qu'il y a un nombre correspondant d'anneaux locaux factoriels A, tels que $A\{T\}$ n'est pas factoriel lorsque A est muni de la topologie adique de son idéal maximal.

Théorème 9. — *Soient A un anneau intègre, $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ des idéaux de A, a, b, c, d, e des éléments de A, et k, j des entiers vérifiant les relations $a = db^k + ec^j$, $kj - k - j > 0$, $\mathfrak{m} = (a, \mathfrak{n})A$.*

Nous supposons, de plus : a n'est pas diviseur de O dans $A/\mathfrak{n}$, b est un produit d'éléments premiers de A, b et c sont relativement premiers, $\mathfrak{m}$ est une intersection d'idéaux premiers $\mathfrak{m}_i$, pour tout i on a $bc \notin \mathfrak{m}_i$, $(b, c, \mathfrak{n})A \neq A$. Alors l'anneau $(A, \mathfrak{m})\{X\}$ n'est pas factoriel.

Posons $C = (A, aA)\{X\}$, $C^S = (A_S, aA_S)\{X\}$, $B = (A, \mathfrak{m})\{X\}$, $v = bc - aX$. D'après la conclusion de la remarque 3 du nº 7, il existe un entier t et une série

$$v' = b^t c^{-1} + \ldots + b_{n-1} c^{-n} X^{n-1} + \ldots \in C^S$$

tels que

$$u = vv' = b^{t+1} + \ldots + u_n X^n + \ldots \in B_1.$$

Si l'on fait un raisonnement analogue à celui employé au cours de la démonstration du théorème 8, on s'aperçoit que pour conclure que B n'est pas factoriel, il suffit de montrer que v n'a pas de facteurs dont le terme constant soit b. Supposons qu'il y a dans B une décomposition $bc - aX = (b + b_1 X + \ldots)(c + c_1 X + \ldots)$. On a alors, d'après le lemme 4, $b_i, c_i \in \mathfrak{m}$ si $i \geqq 1$; par conséquent, il existe des éléments $d_1, d_2 \in A$, $n_1, n_2 \in \mathfrak{n}$ tels que $b_1 = ad_1 + n_1$, $b_2 = ad_2 + n_2$. On en déduit les relations

$$a = b_1 c + c_1 b = acd_1 + abd_2 + n,$$

où $n \in \mathfrak{n}$, et finalement $a(1 - cd_1 - bd_2) = 0$. Mais cette relation contredit les hypothèses que a n'est pas diviseur de O dans $A/\mathfrak{n}$ et que $(b, c, \mathfrak{n})A \neq A$; le théorème est donc démontré.

Remarque. — Si l'on se borne à une topologie sur A donnée par un idéal principal, l'énoncé du théorème 9 se simplifie de la manière suivante :

Soient A un anneau intègre, a, b, c, d, e des éléments de A et k, j deux entiers tels que $a = db^k + ec^j$, $kj - k - j > 0$. Supposons de plus : a et b sont produits d'éléments premiers et les facteurs premiers de a sont distincts; a, b, c sont premiers entre eux; $(b, c)A \neq A$. Alors l'anneau $(A, aA)\{X\}$ n'est pas factoriel.

Prenons en particulier pour A l'anneau $k[X, Y]$, où k est un corps. Alors pour tout idéal $\mathfrak{m}$ d'une courbe plane irréductible, d'équation $X^k - Y^j = 0$ $(kj - j - k > 0)$ (par exemple, la cubique cuspidale $X^2 - Y^3 = 0$), l'anneau $(A, \mathfrak{m})\{T\}$ n'est pas factoriel.

§ 5. Séries restreintes sur un anneau complet.

9. Le lemme de préparation.

On sait que pour l'anneau $A[[X]]$ des séries formelles sur un anneau local complet, il y a un lemme de préparation (*cf.* Bourbaki, *Algèbre commutative*, chap. VIII, à paraître). On verra ici qu'un lemme de préparation analogue est valable pour les séries restreintes sur un anneau complet, non nécessairement local.

LEMME 7. — *Soit A un anneau linéairement topologisé séparé, et soient p, q, r des éléments de $A\{X\}$ tels que $p = qr$. Si p et q sont des polynômes unitaires de degré m et n respectivement, r est aussi un polynôme unitaire et son degré est $\geqq m - n$.*

Soient $\mathfrak{m}_\iota$ ($\iota \in I$) des idéaux de A formant un système fondamental de voisinages de O pour la topologie de A. Soit $r = \sum_{i=0}^{\infty} r_i X^i$.

Si l'on désigne par $p^{(\iota)}$, $q^{(\iota)}$, $r^{(\iota)}$ les images de p, q, r par l'homomorphisme canonique $A\{X\} \to (A/\mathfrak{m}_\iota)[X]$, on a dans $(A/\mathfrak{m}_\iota)[X]$ la décomposition $p^{(\iota)} = q^{(\iota)} r^{(\iota)}$, où $p^{(\iota)}$ et $q^{(\iota)}$ sont des polynômes unitaires de degré m et n respectivement. Il en résulte que $m \geqq n$, et $r^{(\iota)}$ est un polynôme unitaire dans $(A/\mathfrak{m}_\iota)[X]$ de degré $m - n$. On a, par conséquent : $1 - r_{m-n} \in \mathfrak{m}_\iota$, $r_i \in \mathfrak{m}_\iota$ si $i \geqq m - n$. Comme ces relations sont valables pour tout indice $\iota \in I$, et que A est séparé, on déduit $r_{m-n} = 1$, $r_i = 0$ si $i \geqq m - n$.

C. Q. F. D.

Dans les considérations suivantes, $\mathfrak{m}$ est toujours un idéal de A bien déterminé; alors l'image $\bar{f}$ de $f \in A\{X\}$ par l'homomorphisme canonique $A\{X\} \to (A/\mathfrak{m})\{X\}$ sera dit la *série réduite* de f.

THÉORÈME 10 (*lemme de préparation : première forme*). — *Soient A un anneau linéairement topologisé, séparé et complet, $\mathfrak{m}$ un idéal fermé de A dont tous les éléments sont topologiquement nilpotents, $f \in A\{X\}$ une série restreinte dont la série réduite est un polynôme unitaire de degré n. Il existe alors un et un seul couple (p, u) formé d'un polynôme unitaire $p \in A\{X\}$ et d'une série restreinte inversible $u \in A\{X\}$ tel que*

$$f = pu,$$

et p est de degré n.

Comme on a dans $(A/\mathfrak{m})\{X\}$ la relation

$$\bar{f} = \bar{f}.\bar{1},$$

il résulte du lemme de Hensel (*cf.* [4], § 4, n° 3, théor. 1) l'existence et l'unicité d'un couple (p, u) formé d'un polynôme unitaire p et d'une série restreinte u tel que

$$f = pu, \qquad \bar{p} = \bar{f}, \qquad \bar{u} = \bar{1}. \tag{5}$$

Puisque $\bar{u} = \bar{1}$, le terme constant de u appartient à $1 + \mathfrak{m}$, donc il est inversible dans A qui est un anneau complet; d'autre part, les autres coefficients de u appartiennent à $\mathfrak{m}$, donc u est une série inversible dans $A\{X\}$, d'après la proposition 2. En outre, p, qui est un polynôme unitaire, a le même degré que $\bar{p} = \bar{f}$; d'où l'existence de p et de u vérifiant les conditions du théorème.

Soit maintenant $f = qv$ une décomposition de f en produit d'un polynôme unitaire q et d'une série restreinte inversible v. On a alors dans $(A/\mathfrak{m})\{X\}$ la relation $\bar{f} = \bar{q}.\bar{v}$, où $\bar{f}$ et $\bar{q}$ sont des polynômes unitaires; comme $A/\mathfrak{m}$ est séparé, v est aussi un polynôme unitaire en vertu du lemme 7. D'autre part, $\bar{v}$ est inversible dans $(A/\mathfrak{m})\{X\}$, car v est inversible dans $A\{X\}$. Il résulte de tout ce qui précède qu'on a nécessairement $\bar{v} = \bar{1}$; cela entraîne aussi $\bar{q} = \bar{f}$, d'où finalement $p = q$, $u = v$ par l'unicité du couple (p, u) vérifiant les conditions (5).

Considérons maintenant dans $A\{X_1, \ldots, X_r\}$ la topologie τ introduite dans le n° 2. Rappelons qu'un système fondamental de voisinage de O par τ est formé des idéaux M_ι des séries restreintes dont les coefficients appartiennent à $\mathfrak{m}_\iota$. Il en résulte aussitôt que si A est séparé et complet, l'anneau $A\{X_1, \ldots, X_r\}$ est aussi séparé et complet pour la topologie τ (*cf.* [4], chap. III, § 4, n° 2, proposition 3 et [6], 7.5.2); par conséquent, au moyen de la formule

$$A\{X_1, \ldots, X_r\} = A\{X_1, \ldots, X_{r-1}\}\{X_r\},$$

on peut regarder $A\{X_1, \ldots, X_r\}$ comme l'anneau des séries en X_r sur l'anneau τ-topologique séparé et complet $A\{X_1, \ldots, X_{r-1}\}$. Remarquons aussi que si $\mathfrak{m}$ est un idéal fermé de A, l'idéal M des séries restreintes à coefficients dans $\mathfrak{m}$ est aussi fermé pour la topologie τ; et rappelons que la condition « tous les éléments sont topologiquement nilpotents » est une propriété de permanence de $\mathfrak{m}$ à M. Comme corollaire du théorème 10, on obtient alors la proposition suivante :

PROPOSITION 5. — *Soient A et $\mathfrak{m}$ vérifiant les hypothèses du théorème 10. Soit $f \in A\{X_1, \ldots, X_r\}$ une série restreinte dont la série réduite est un polynôme unitaire $\bar{p} \in (A/\mathfrak{m})\{X_1, \ldots, X_{r-1}\}[X_r]$ en X_r de degré n. Alors il existe un et un seul couple (p, u) formé d'un polynôme $p \in A\{X_1, \ldots, X_{r-1}\}[X_r]$ unitaire en X_r et d'une série restreinte inversible $u \in A\{X_1, \ldots, X_r\}$ tel que $f = pu$, et p est alors de degré n en X_r.*

Avant d'énoncer et de démontrer le théorème suivant, rappelons que si A est un anneau linéairement topologisé par des idéaux $\mathfrak{m}_\iota (\iota \in I)$, le séparé complété $\hat{A}$ de A s'identifie à la limite projective $\varprojlim_{\iota} (A/\mathfrak{m}_\iota)$, où l'ensemble I est préordonné filtrant pour la relation induite par $\supset$, valable pour les idéaux correspondants : $\alpha \leqq \beta$ si $\mathfrak{m}_\alpha \supset \mathfrak{m}_\beta$ (*cf.* [4], chap. III, § 4, n° 2).

THÉORÈME 11. — *Soit A un anneau linéairement topologisé séparé et complet. Soit $p \in A[X]$ un polynôme unitaire de degré n. Pour toute série f*

de $A\{X\}$, *il existe alors un et un seul couple* (h, r) *formé d'une série restreinte* $h \in A\{X\}$ *et d'un polynôme* $r \in A[X]$ *de degré* $\leqq n-1$ *tel que* $f = hp + r$.

Soit $\{\mathfrak{m}_\iota\}$ $(\iota \in I)$ un système fondamental de voisinages de O pour la topologie de A, et soit M_ι le système correspondant des idéaux des séries restreintes à coefficients dans $\mathfrak{m}_\iota$ qui définit sur $A\{X\}$ la topologie τ. Soit $\varphi_\iota : A\{X\} \to (A/\mathfrak{m}_\iota)[X]$ l'homomorphisme canonique défini par $\varphi_\iota(a_i X^i) = \bar{a}_i X^i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, où $\bar{a}_i$ est la classe de $a_i \bmod \mathfrak{m}_\iota$. Notons f_ι l'image par φ_ι d'une série $f \in A\{X\}$. Alors l'image p_ι du polynôme p est un polynôme unitaire de degré n de $(A/\mathfrak{m}_\iota)[X]$.

Si f est une série de $A\{X\}$, il est bien connu qu'il existe dans $(A/\mathfrak{m}_\iota)[X]$ un et un seul couple formé d'un polynôme $h^{(\iota)}$ et d'un polynôme $r^{(\iota)}$ de degré $\leqq n-1$ tel que

$$f_\iota = p_\iota h^{(\iota)} + r^{(\iota)} \tag{6}$$

(*cf.* par exemple, [19], chap. I, § 17, théo. 9).

Soient $\alpha, \beta \in I$, $\alpha \leqq \beta$; soit $\varphi_{\alpha\beta}$ l'homomorphisme canonique

$$(A/\mathfrak{m}_\beta)[X] \to (A/\mathfrak{m}_\alpha)[X].$$

On a alors

$$\varphi_{\alpha\beta}(f_\beta) = f_\alpha, \qquad \varphi_{\alpha\beta}(p_\beta) = p_\alpha.$$

De l'unicité du couple $h^{(\iota)}$, $r^{(\iota)}$ vérifiant (6) il résulte que

$$\varphi_{\alpha\beta}(h^{(\beta)}) = h^{(\alpha)}, \qquad \varphi_{\alpha\beta}(r^{(\beta)}) = r^{(\alpha)}.$$

Puisque A est séparé et complet, $A\{X\}$ est τ-séparé et τ-complet; d'après la remarque qui précède le théorème, on a alors les isomorphismes topologiques : $A\{X\} = \varprojlim_\iota A/M_\iota = \varprojlim_\iota (A/\mathfrak{m}_\iota)[X]$. Par conséquent, il existe dans $A\{X\}$ une série h et un polynôme r de degré $n-1$ tels que $h = \varprojlim_\iota h^{(\iota)}$, $r = \varprojlim_\iota r^{(\iota)}$. De l'unicité de la décomposition (6) dans $(A/\mathfrak{m}_\iota)[X]$ il résulte aussitôt que $f = ph + r$ et qu'une telle décomposition est unique.

Corollaire 1 (*lemme de préparation : deuxième forme*). — *Soient A et $\mathfrak{m}$ vérifiant les hypothèses du théorème* 10. *Soit $g \in A\{X\}$ une série restreinte dont la série réduite est un polynôme unitaire de degré n. Pour toute série $f \in A\{X\}$ il existe alors un et un seul couple formé d'une série $h \in A\{X\}$ et d'un polynôme r de degré $n-1$ tel que $f = hg + r$.*

En effet, d'après le théorème 10, il existe un polynôme unitaire p de degré n et une série restreinte inversible u tels que $g = pu$. Soit u' la série inverse de u. Alors si h et r sont la série restreinte et le polynôme de degré $n-1$ qui vérifient la relation $f=ph+r$, on a aussi la relation $f=(hu')g+r$, et cette décomposition est manifestement unique.

Le corollaire précédent admet l'extension suivante à « plusieurs variables ».

COROLLAIRE 2. — *Soient A et $\mathfrak{m}$ vérifiant les hypothèses du théorème* 10. *Soit g une série restreinte de $A\{X_1, \ldots, X_r\}$ dont la série réduite est un polynôme $\bar{p}\in(A/\mathfrak{m})\{X_1, \ldots, X_{r-1}\}[X_r]$ unitaire en X_r de degré n. Alors pour toute série $f\in A\{X_1, \ldots, X_r\}$ il existe un et un seul couple formé d'une série $h\in A\{X_1, \ldots, X_r\}$ et d'un polynôme $r\in A\{X_1, \ldots, X_{r-1}\}[X_r]$ de degré $\leqq n-1$ tel que $f=hg+r$.*

Le corollaire suivant est, en un certain sens, une amélioration du lemme 7.

COROLLAIRE 3. — *Soit A un anneau linéairement topologisé séparé et complet. Soient p et f deux polynômes de $A[X]$, et supposons que p soit unitaire. Alors, si p divise f dans $A\{X\}$, p divise f aussi dans $A[X]$.*

En effet, soit h une série de $A\{X\}$ telle que $f=ph$. Si n est le degré de p, il existe, dans $A[X]$, un (et un seul) couple formé d'un polynôme q et d'un polynôme r de degré $\leqq n-1$, tel que $f=pq+r$. D'après le théorème 11, on a nécessairement $h=q$ (et $r=0$), ce qui établit le résultat.

10. Séries restreintes sur un anneau local noethérien complet.

On a le résultat suivant, qui est lié à des recherches de SAMUEL (*cf.* la remarque finale).

THÉORÈME 12. — *Soit A un anneau local noethérien complet et factoriel. Si l'anneau $A[[X]]$ est factoriel, $(A, \mathfrak{m})\{X\}$ est aussi factoriel.*

L'anneau $A[[X]]$ est le complété de l'anneau $B=A\{X\}$ pour la topologie XB-adique. Si l'on démontre que $1+XB$ est engendré par des éléments premiers de B, l'anneau B sera factoriel par les théorèmes de Nagata et de Mori (*cf.* la démonstration du théorème 6).

Or, tout élément de $1+XB$ est associé à une série f de B dont le polynôme réduit (mod $\mathfrak{m}$) est unitaire; d'après le théorème 10, f est associée à un polynôme unitaire de l'anneau $B'=A[X]$ qui se décompose dans B' en facteurs extrémaux. Il suffit alors de démontrer que tout polynôme unitaire extrémal de B' est un élément premier dans B.

Soit p un polynôme extrémal unitaire de degré n de B'; supposons que p divise, dans B, un produit de deux séries $f, g\in B$. D'après le théorème 11, il existe deux séries h, l et deux polynômes r, s de degré $\leqq n-1$ tels que $f=ph+r$; $g=pl+s$. Par conséquent, p divise dans B le produit rs; en vertu du corollaire 3 du théorème 11,

p divise aussi le produit rs dans B'. Or B' est un anneau factoriel; par conséquent, p est premier dans B' et divise l'un des facteurs r, s, soit r. On a nécessairement $r = 0$, car le degré de p est n et celui de r est $n - 1$ au plus. Donc p divise la série f, ce qui montre que p est un élément premier de B; cela conclut la démonstration du théorème.

Remarque. — Samuel a posé la conjecture suivante : « Si A est un anneau local noethérien complet et factoriel, $A[[X]]$ est aussi factoriel » (*cf.* [16], n° 5, Remarque sur les complétés). Si la conjecture de Samuel est vraie, on déduit du théorème précédent un nouveau résultat pour les séries restreintes; dans le cas contraire, la conjecture de Samuel serait en défaut avec un « contre-exemple » pour les séries restreintes.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Andreotti (A.) und Salmon (P.). — Anelli con unica decomponibilità in fattori primi ed un problema di intersezioni complete, *Monatshefte für Math.*, t. 61, 1957, p. 97-142.

[2] Auslander (M.) and Buchsbaum (D. A.). — Unique factorization in regular local rings, *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 45, 1959, p. 733-734.

[3] Buchsbaum (D. A.). — Some remarks on factorization in power series rings, *J. of Math. and Mech.*, t. 10, 1961, p. 749-753.

[4] Bourbaki (N.). — *Algèbre commutative*, Chap. 1-2, 3-4. — Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1290-1293; Bourbaki, 27-28).

[5] Goldman (O.). — Hilbert rings and the Hilbert Nullstellensatz, *Math. Z.*, t. 54, 1951, p. 136-140.

[6] Grothendieck (A.) et Dieudonné (J.). — *Éléments de géométrie algébrique.* — Paris, Presses universitaires de France, 1960 (Institut des Hautes Études scientifiques, Publications mathématiques, 4).

[7] Grothendieck (A.). — *Séminaire de géométrie algébrique.* Notes prises par un groupe d'auditeurs. Exposés 1 à 13. Bures-sur-Yvette, Institut des Hautes Études scientifiques, 1960-1962 (multigraphié).

[8] Krull (W.). — Jacobsonsche Ringe, Hilbertscher Nullstellensatz, Dimensionstheorie, *Math. Z.*, t. 54, 1951, p. 354-387.

[9] Lefschetz (S.). — On certain numerical invariants of algebraic varieties, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 22, 1921, p. 327-363.

[10] Nagata (M.). — A remark on the unique factorization theorem, *J. Math. Soc. Japan*, t. 9, 1957, p. 143-145.

[11] Nagata (M.). — *Local rings.* — New York, London, Interscience Publishers, 1962 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 13).

[12] Salmon (P.). — Sur les séries formelles restreintes, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 255, 1962, p. 227-229.

[13] Salmon (P.). — Sur les séries restreintes et convergentes, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 255, 1962, p. 439-441.

[14] Salmon (P.). — Sur les complétés des anneaux noethériens et les séries formelles restreintes, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 256, 1963, p. 4808-4810.

[15] Samuel (P.). — On unique factorization domains, *Illinois J. Math.*, t. 5, 1961, p. 1-17.

[16] Samuel (P.). — Sur les anneaux factoriels, *Bull. Soc. math. France*, t. 89, 1961, p. 155-173.

[17] Serre (J.-P.). — *Algèbre locale, multiplicités*. Cours au Collège de France, 1957-1958, rédigé par P. Gabriel (multigraphié).
[18] Severi (F.). — Una proprietà delle forme algebriche prive di punti multipli, *Atti della Accad. dei Lincei, Rendic.*, Série 5, t. 15, 1906, 2e sem., p. 691-696.
[19] Zariski (O.) and Samuel (P.). — *Commutative algebra*, Vol. 1 and 2. — Princeton, Van Nostrand, 1958-1960.

(Manuscrit reçu le 4 novembre 1963.)

Paolo Salmon,
Istituto Matematico,
Università di Pisa (Italie).