F. BRIOSCHI

Sur les équations différentielles linéaires

Bulletin de la S. M. F., tome 7 (1879), p. 105-108
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1879__7__105_0>

Sur les équations différentielles linéaires. (Extrait d'une Lettre de M. Brioschi à M. Laguerre.)

(Séance du 11 avril 1879.)

.... Les Communications que vous avez faites récemment à l'Académie des Sciences, *Sur quelques invariants des équations différentielles linéaires*, ont eu pour moi un grand intérêt, ayant dû autrefois m'occuper de questions analogues. Malheureusement je ne peux pas en ce moment revenir sur ce sujet; mais je désire vous faire connaître la méthode que j'avais suivie, laquelle me paraît conduire facilement à vos résultats et peut-être les compléter.

Soient les deux équations différentielles linéaires du troisième ordre

$$y''' + 3ly' + my = 0, \quad \frac{d^3 u}{dz^3} + 3\lambda \frac{du}{dz} + \mu u = 0,$$

où

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \dots.$$

Je pose

$$y = \nu u,$$

ν étant fonction de x.

On a

$$y' = \nu \frac{du}{dz} z' + \nu' u,$$

$$y'' = \nu \left(\frac{d^2 u}{dz^2} z'^2 + \frac{du}{dz} z'' \right) + 2\nu' \frac{du}{dz} z' + \nu'' u, \quad \dots.$$

En substituant les y', y'', y''' dans la première équation différentielle, on doit obtenir la seconde, et, par conséquent, on arrive aux trois relations

$$(1) \qquad \begin{cases} \nu z'' + \nu' z' = 0, \\ \nu z''' + 3\nu' z'' + 3\nu'' z' + 3l\nu z' = 3\lambda\nu z'^3, \\ \nu''' + 3l\nu' + m\nu = \mu\nu z'^3. \end{cases}$$

Or, en posant $\frac{z''}{z'} = Z$, la première donne

$$\nu' = -Z\nu,$$

et, par suite,

$$\nu'' = -(Z' - Z^2)\nu, \quad \nu''' = -(Z'' - 3ZZ' + Z^3).$$

D'autre part,

$$\frac{z'''}{z'} = Z' + Z^2;$$

la seconde des équations (1) se transforme donc ainsi qu'il suit :

(2) $$2Z' = Z^2 + 3(l - \lambda z'^2),$$

et la troisième devient

$$Z'' - 3ZZ' + Z^3 + 3lZ - (m - \mu z'^3) = 0.$$

Enfin, en remplaçant dans celles-ci Z' et Z'' par leurs valeurs déduites de l'équation (2), on trouve votre relation

$$\left(3\frac{d\lambda}{dz} - 2\mu\right)z'^3 = 3l' - 2m.$$

Je pose

(3) $$3\frac{d\lambda}{dz} - 2\mu = \alpha \quad \text{et} \quad 3l' - 2m = a,$$

d'où l'on déduit

$$\alpha z'^3 = a.$$

On a

$$3Z = \frac{d\log a}{dx} - \frac{d\log \alpha}{dz}z'.$$

Cette valeur de Z, substituée dans l'équation (2), conduit très-facilement à la relation suivante :

$$\beta z'^2 = b,$$

où j'ai posé, pour abréger,

$$6\frac{d^2\log\alpha}{dz^2} - \left(\frac{d\log\alpha}{dz}\right)^2 - 27\lambda = \beta$$

et

$$6\frac{d^2\log a}{dx^2} - \left(\frac{d\log a}{dx}\right)^2 - 27l = b.$$

On aura enfin, par conséquent,

$$\frac{\beta^3}{\alpha^2} = \frac{b^3}{a^2},$$

relation *invariantive* entre les seuls coefficients des deux équations différentielles et leurs dérivées.

Il est très-important de noter que ces formes invariantives restent les mêmes pour les équations différentielles d'ordre supérieur.

Par exemple, pour les équations différentielles du quatrième ordre

$$y^{\text{IV}} + 6ly'' + 4my' + ny = 0$$

et

$$\frac{d^4u}{dz^4} + 6\lambda\frac{d^2u}{dz^2} + 4\mu\frac{du}{dz} + \nu u = 0,$$

on trouve

$$\nu' = -\frac{3}{2}Z\nu, \quad 2Z' = Z^2 + \frac{12}{5}(l - \lambda z'^2),$$

$$Z'' - 3ZZ' + Z^2 + \frac{12}{5}lZ - \frac{4}{5}(m - \mu z'^3) = 0,$$

et, par suite,

$$\alpha z'^3 = a,$$

α et a étant définis par les équations (3).

En posant

$$6\frac{d^2\log\alpha}{dz^2} - \left(\frac{d\log\alpha}{dz}\right)^2 - \frac{108}{5}\lambda = \beta,$$

$$6\frac{d^2\log a}{dz^2} - \left(\frac{d\log a}{dz}\right)^2 - \frac{108}{5}l = b,$$

on en déduit

$$\beta z'^2 = b \quad \text{et} \quad \frac{\beta^3}{\alpha^2} = \frac{b^3}{a^2}.$$

Enfin la dernière équation donne

$$\gamma z'^4 = c,$$

ou

$$\gamma = 30\frac{d^2\lambda}{dz^2} - 50\frac{d\mu}{dz} - 81\lambda^2 + 25\nu$$

et

$$c = 30l'' - 50\mu' - 81l^2 + 25n.$$

J'ajoute une dernière remarque. Si, pour les équations différentielles du troisième ordre, l'invariant a est nul, l'équation se réduit à la suivante, du second ordre,

$$\xi'' + \frac{3}{4}l\xi = 0,$$

où

$$y = \xi^2.$$

Si, pour l'équation du quatrième ordre, les invariants a et c sont nuls, on a

$$\xi'' + \frac{3}{5} l \xi = 0,$$

équation où j'ai posé

$$y = \xi^3.$$

Si vous croyez que ces résultats peuvent avoir quelque intérêt pour nos collègues de la Société mathématique, vous pouvez les leur communiquer....