BULLETIN DE LA S. M. F.

M.-P. MALLIAVIN-BRAMERET

Modules sur les anneaux locaux réguliers

Bulletin de la S. M. F., tome 94 (1966), p. 261-268

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1966__94__261_0>

Bull. Soc. math. France,
94, 1966, p. 261 à 268.

MODULES SUR LES ANNEAUX LOCAUX RÉGULIERS

PAR

MARIE-PAULE MALLIAVIN-BRAMERET.

Tous les anneaux considérés sont supposés commutatifs noethériens et possèdent un élément unité. Tous les modules sur de tels anneaux sont unitaires et de type fini. Par *dimension* d'un anneau R, nous entendrons toujours la dimension de Krull de R et nous la noterons $\dim R$. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de R, la dimension de l'anneau $R_{\mathfrak{p}}$ est appelée la *hauteur* de $\mathfrak{p}$ [notation $ht(\mathfrak{p})$]. Étant donné un R-module M, nous notons dhM ou $dh_R M$ la *dimension homologique de M.* Une suite x_1, x_2, ..., x_k d'éléments de R est appelée une *M-suite* si x_i n'est pas diviseur de zéro pour le module $M/(x_1M + \ldots + x_{i-1}M)$, et si $M/(x_1M + \ldots + x_{i-1}M) \neq (0)$. La borne supérieure des longueurs d'une M-suite (finie ou $+\infty$) est appelée la *codimension de M* (en notation : $\operatorname{codim}_R M$ ou $\operatorname{codim} M$).

Définition. — Si R est un anneau local régulier de dimension $\geqq 1$, M un R-module et q un entier, $1 \leqq q \leqq \dim R$, on dit que M vérifie la *condition* (a_q) si toute R-suite de longueur $\leqq q$ est une M-suite.

Pour une définition, dans un cadre plus général, de la condition (a_q), on se rapportera à [7] et [8]. En particulier, on démontre (proposition 1 de [7]) que, l'anneau R étant local régulier, la condition (a_q) est équivalente à la condition (b_q) suivante :

(b_q) Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R, on a $dh_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \leqq \sup[ht(\mathfrak{p}) - q, 0]$.

La condition (a_1) signifie simplement que M est un R-module sans torsion. Si n est la dimension de R, la condition (a_n) signifie que le module M est libre. D'après la proposition 1 de [8], la condition (a_2) signifie que M est réflexif, c'est-à-dire que l'homomorphisme canonique de M dans son bidual M^{**} est un isomorphisme.

Dans les théorèmes 2 et 4, nous encadrons la condition (a_q), vérifiée par un module M sur un anneau local régulier R, par des conditions d'annulation de $\mathrm{Tor}_1^R(M, R/\mathfrak{p})$, où les $\mathfrak{p}$ sont certains idéaux premiers de R. En particulier, la condition (a_q) peut être ainsi complètement caractérisée. On peut aussi traduire la condition (a_{n-1}) en considérant le module produit tensoriel de $(n-1)$ copies de M (*voir* théorèmes 5 et 6), et en s'inspirant de la caractérisation suivante donnée par M. AUSLANDER (*cf.* [2], théorème 4) : un module M sur un anneau local régulier R de dimension n est libre si et seulement si le produit tensoriel de n copies de M est sans torsion.

On a de façon immédiate le lemme suivant :

LEMME 1. — *Soient R un anneau local régulier de dimension $n > 1$, q un entier, $1 \leqq q \leqq n-1$, et $0 \to N \to L \to M \to 0$ une suite exacte de R-modules où L est libre et $N \neq (0)$. Alors si M vérifie la condition (a_q), le module N vérifie la condition (a_{q+1}).*

Nous aurons à utiliser le corollaire du lemme suivant, dont on trouvera une démonstration dans un cadre plus général dans [4] (théorème 1.3) (*voir* aussi lemme 1 de [5]).

LEMME 2. — *Soient A un anneau local d'idéal maximal $m(A)$, a un élément de $m(A)$ non diviseur de zéro dans A, M un A-module non nul tel que $aM = (0)$. Alors, si $dh_{A/aA}(M) = n < \infty$, on a $dh_A(M) = n+1$.*

COROLLAIRE. — *Soient A un anneau local, $a_1, a_2, \ldots, a_q$ une A-suite de longueur q, $\mathfrak{a}$ l'idéal de A qu'elle engendre, M un $A/\mathfrak{a}$-module non nul. Alors si $dh_{A/\mathfrak{a}}(M) = n < \infty$, on a $dh_A(M) = n + q$.*

Démonstration. — A partir du lemme 2, on procède par récurrence sur q. Supposons $q > 1$ et le corollaire démontré pour $q-1$. Posons $\overline{A} = A/\mathfrak{b}$, où $\mathfrak{b} = Aa_1 + \ldots + Aa_{q-1}$. La classe $\overline{a}_q$ de a_q modulo $\mathfrak{b}$ appartient à l'idéal maximal de $\overline{A}$ et n'est pas diviseur de zéro dans $\overline{A}$. Les anneaux $A/\mathfrak{a}$ et $\overline{A}/\overline{a}_q\overline{A}$ sont isomorphes. D'après le lemme 2, l'égalité $dh_{\overline{A}/\overline{a}_q\overline{A}}(M) = n < \infty$ entraîne que $dh_{\overline{A}}(M) = n+1$. D'où, d'après l'hypothèse de récurrence, on a $dh_A(M) = n + q$.

Rappelons le résultat suivant, dont on pourra trouver la démonstration dans [3] (proposition 1.4) :

LEMME 3. — *Soient R un anneau local et M un R-module. Si $x_1, \ldots, x_q$ est une M-suite, alors $dh_R M/(x_1 M + \ldots + x_q M) = q + dh_R M$.* (On pose $q + \infty = \infty$.)

Enfin, il vient d'être prouvé le résultat suivant (*cf.* corollaire 2 du théorème 3 de [6]) :

THÉORÈME 1. — *Soient R un anneau local régulier, M et N deux R-modules. Si $\mathrm{Tor}_i^R(M, N) = (0)$, alors $\mathrm{Tor}_j^R(M, N) = (0)$, pour $j \geqq i$.*

THÉORÈME 2. — *Soient R un anneau local régulier de dimension $n \geqq 1$, et M un R-module. Si* $\mathrm{Tor}_1^R(M, R/\mathfrak{p}) = (0)$ *pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de R de hauteur inférieure ou égale à $n - s$, où s est un entier compris entre* 0 *et n, alors M vérifie la condition* (a_{n-s}).

Démonstration. — Si $s = 0$, alors $\mathrm{Tor}_1^R(M, R/\mathfrak{m}) = (0)$, où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de R et, par suite, M est libre. Supposons que $s > 0$ et que le théorème soit démontré pour $s - 1$. Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de R de hauteur $n - 1$. Alors, le $R_\mathfrak{q}$-module $M_\mathfrak{q}$ est tel que $\mathrm{Tor}_1^{R_\mathfrak{q}}(M_\mathfrak{q}, R_\mathfrak{q}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{q}) = (0)$, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}R_\mathfrak{q}$ de $R_\mathfrak{q}$ de hauteur $\leqq n - s = \dim(R_\mathfrak{q}) - (s - 1)$. D'après l'hypothèse de récurrence, $M_\mathfrak{q}$ vérifie la condition $(a_{ht(\mathfrak{q})-(s-1)})$. On a donc, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R de hauteur $\leqq n - 1$, l'inégalité

$$dh_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \leqq \sup[ht(\mathfrak{p}) - (n - s), 0].$$

Il suffit donc de prouver que $dh_R(M)$ est au plus égal à s. Supposons M non libre; alors, pour toute suite exacte de R-modules : $0 \to N \to F \to M \to 0$ dans laquelle F est libre, on a $dh_R(N) = dh_R(M) - 1$. De plus, puisque, d'après le théorème 1, on a $\mathrm{Tor}_2^R(M, R/\mathfrak{p}) = (0)$, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de hauteur $\leqq n - s$, on a aussi, $\mathrm{Tor}_1^R(N, R/\mathfrak{p}) = (0)$, pour tout tel idéal $\mathfrak{p}$. Il suffit donc de prouver que l'égalité $dh_R(M) = s + 1$ est impossible. Supposons donc que $dh_R(M) = s + 1$, alors $dh_R(N) = s$, et comme, d'après le début de la démonstration, on a

$$dh_{R_\mathfrak{p}}(N_\mathfrak{p}) \leqq \sup[ht(\mathfrak{p}) - (n - s), 0]$$

pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur $\leqq n - 1$, il s'ensuit que N vérifie la condition (a_{n-s}). Soit $\mathfrak{p}$ un idéal de R engendré par un sous-système de longueur $n - s$ d'un système régulier de paramètres. De la suite exacte

$$0 \to N \to F \to M \to 0,$$

résulte la suite exacte

$$0 \to N/\mathfrak{p}N \to F/\mathfrak{p}F \to M/\mathfrak{p}M \to 0.$$

Puisque $\mathfrak{p}$ est engendré par une R-suite, on a, d'après le lemme 2,

$$dh_R(F/\mathfrak{p}F) = n - s + dh_{R/\mathfrak{p}}(F/\mathfrak{p}F).$$

Puisque toute R-suite est une F-suite, on a, d'après le lemme 3,

$$dh_R(F/\mathfrak{p}F) = n - s.$$

Par conséquent, $dh_{R/\mathfrak{p}}(F/\mathfrak{p}F) = 0$ et $F/\mathfrak{p}F$ est un $R/\mathfrak{p}$-module libre. Puisque $N/\mathfrak{p}N$ est un sous-module d'un module libre, on a

$$dh_{R/\mathfrak{p}}(N/\mathfrak{p}N) \leqq \dim(R/\mathfrak{p}) - 1.$$

D'où, d'après le corollaire du lemme 2,

$$dh_R(N/\mathfrak{p}N) \leqq \dim(R/\mathfrak{p}) - 1 + n - s.$$

Enfin, puisque toute R-suite de longueur au plus $n - s$ est une N-suite, on a, d'après le lemme 3,

$$dh_R(N) = dh_R(N/\mathfrak{p}N) - (n - s) \leqq \dim(R/\mathfrak{p}) - 1 = s - 1,$$

ce qui contredit le fait que $dh_R(N) = s$. Par conséquent, M vérifie la condition (a_{n-s}).

Pour démontrer une réciproque affaiblie du résultat précédent, nous aurons besoin du théorème suivant (*cf.* théorème 1.2 de [1]) :

THÉORÈME 3. — *Soient R un anneau local, M et N deux R-modules $\neq (0)$ tels que $dh_R(M) < \infty$. Soit q le plus grand entier $\geqq 0$ tel que* $\mathrm{Tor}_q^R(M, N) \neq (0)$. *Alors, si ou bien* $\mathrm{codim}_R \mathrm{Tor}_q^R(M, N) \leqq 1$ *ou bien $q = 0$, on a*

$$\mathrm{codim}_R(N) = \mathrm{codim}_R \mathrm{Tor}_q^R(M, N) + dh_R(M) - q.$$

THÉORÈME 4. — *Soient R un anneau local régulier de dimension $n \geqq 1$ et M un R-module. Si M vérifie la condition (a_q), où q est un entier compris entre 1 et n, on a* $\mathrm{Tor}_1^R(M, R/\mathfrak{p}) = (0)$ *pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R de hauteur $\leqq q$ et tel que $dh_R(R/\mathfrak{p}) = ht(\mathfrak{p})$.*

Démonstration. — Posons $s = n - q$. Si $s = 0$, le module M est libre et l'on a $\mathrm{Tor}_1^R(M, N) = (0)$ pour tout R-module N. Supposons $s > 0$ et le théorème démontré jusqu'à $s - 1$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de R de hauteur $\leqq q$. Si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de R tel que $\mathfrak{p} \nsubseteq \mathfrak{q}$, alors $\mathrm{Tor}_1^{R_\mathfrak{q}}(M_\mathfrak{q}, R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{q})$ est nul. Si $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ et si $dh_R(R/\mathfrak{p}) = ht(\mathfrak{p})$, alors on a aussi

$$dh_{R_\mathfrak{q}}(R_\mathfrak{q}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{q}) = ht(\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}) = ht(\mathfrak{p});$$

en effet, on a, d'après la proposition 1.6 de [3], l'inégalité

$$dh_{R_\mathfrak{q}}(R_\mathfrak{q}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{q}) \leqq dh_R(R/\mathfrak{p});$$

d'autre part, puisque l'anneau $R_\mathfrak{q}$ est local régulier, on a, d'après la proposition 2.5 de [3], l'inégalité $ht(\mathfrak{p}R_\mathfrak{q}) \leqq dh_{R_\mathfrak{q}}(R_\mathfrak{q}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{q})$. Supposons l'idéal $\mathfrak{q}$ différent de l'idéal maximal de R. Alors le $R_\mathfrak{q}$-module $M_\mathfrak{q}$ vérifie la condition $(a_{ht(\mathfrak{q})-t}) = (a_q)$ avec $t \lneqq s$. Puisque

$$ht(\mathfrak{p}R_\mathfrak{q}) \leqq q = ht(\mathfrak{q}) - t,$$

on a, d'après l'hypothèse de récurrence, l'égalité

$$\mathrm{Tor}_1^{R_\mathfrak{q}}(M_\mathfrak{q}, R_\mathfrak{q}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{q}) = (0).$$

Par suite, s'il n'est pas nul, le module $\mathrm{Tor}_1^R(M, R/\mathfrak{p})$ est de codimension o. Soit $0 \to N \to F \to M \to 0$ une suite exacte de R-modules dans laquelle F est libre. Alors, d'après le lemme 1, le module N vérifie la condition $(a_{q+1}) = (a_{n-(s-1)})$; donc, d'après l'hypothèse de récurrence on a

$$\mathrm{Tor}_1^R(N, R/\mathfrak{p}) = (0)$$

et, par suite,

$$\mathrm{Tor}_i^R(M, R/\mathfrak{p}) = (0) \text{ pour } i \geqq 2.$$

Il résulte alors du théorème 3 que $\mathrm{codim}(R/\mathfrak{p}) = dh(M) - 1$; ou encore d'après l'hypothèse faite sur $\mathfrak{p}$, $dh(M) = n + 1 - ht(\mathfrak{p})$; comme on a aussi $dh(M) \leqq n - q$, il en résulte que $ht(\mathfrak{p}) \geqq q + 1$, ce qui contredit le choix de $\mathfrak{p}$. Par suite, on a

$$\mathrm{Tor}_1^R(M, R/\mathfrak{p}) = (0).$$

COROLLAIRE. — *Soient R un anneau local régulier de dimension $n > 1$ et M un R-module. Alors M vérifie la condition (a_{n-1}) si et seulement si l'on a* $\mathrm{Tor}_1^R(M, R/\mathfrak{p}) = (0)$ *pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R de hauteur égale à $n - 1$.*

Démonstration. — Si $\mathrm{Tor}_1^R(M, R/\mathfrak{p}) = (0)$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur $n - 1$, alors $M_\mathfrak{p}$ est un $R_\mathfrak{p}$-module libre pour tout tel idéal et, par suite, $M_\mathfrak{q}$ est un $R_\mathfrak{q}$-module libre pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ de hauteur inférieure ou égale à $n - 1$. On termine la démonstration comme dans le théorème 2. Si M vérifie la condition (a_{n-1}) on démontre que $\mathrm{Tor}_1^R(M, R/\mathfrak{p}) = (0)$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur $n - 1$ comme dans le théorème 4 en utilisant le fait que, pour un tel idéal $\mathfrak{p}$, on a $\mathrm{codim}_R(R/\mathfrak{p}) = 1$.

Soient R un anneau, M un R-module et i un entier $\geqq 1$; nous noterons $\overset{i}{\bigotimes}_R M$ le module produit tensoriel de i copies de M.

Nous utilisons, pour la démonstration du théorème 5, le résultat suivant : (*cf.* [1], lemme 3.1) :

LEMME 4. — *Soient R un anneau local régulier, M et N deux R-modules tels $M \otimes_R N$ soit sans torsion. Alors :*

(i) *Les modules M et N sont sans torsion*;

(ii) *On a* $\mathrm{Tor}_R^1(M, N) = (0)$;

(iii) *On a* $dh_R(M) + dh_R(N) = dh_R(M \otimes_R N) \underset{\neq}{<} \dim R$, *en supposant que* $\dim R \geqq 1$.

THÉORÈME 5. — *Soient R un anneau local régulier de dimension $\geqq 1$ et M un R-module. Si, pour un entier $q \geqq 1$, le module $\overset{q}{\bigotimes}_R M$ est sans torsion, alors M vérifie la condition (a_q).*

Démonstration.— Puisque $\overset{q}{\bigotimes}_R M$ est sans torsion, les $R_\mathfrak{p}$-modules $\overset{q}{\bigotimes}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$ sont sans torsion, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R. Alors, d'après le lemme 4, on a, pour $i = 1, \ldots, q-1$,

$$\operatorname{Tor}_1^{R_\mathfrak{p}}\Big(M_\mathfrak{p}, \overset{i}{\bigotimes}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}\Big) = (0)$$

et le module $\overset{i}{\bigotimes}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$ est sans torsion; de plus $dh_{R_\mathfrak{p}}\Big(\overset{q}{\bigotimes}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}\Big) = q\,dh_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ est inférieure à $ht(\mathfrak{p}) - 1$ [ou à 0 si $ht(\mathfrak{p}) < 1$]. Par conséquent, si $ht(\mathfrak{p}) \leqq q$, alors

$$dh_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = 0 \leqq \sup[ht(\mathfrak{p}) - q, 0].$$

Si $ht(\mathfrak{p}) = q + s$, avec $s > 0$ et si $s \lneqq dh_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$, on a $qs < (q+s) - 1$; d'où $s(q-1) < q-1$, ce qui est impossible. Par conséquent, on a

$$dh_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \leqq \sup[ht(\mathfrak{p}) - q, 0]$$

pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R; par suite, M vérifie la condition (a_q).

LEMME 5. — *Soient R un anneau local régulier de dimension $n \geqq 1$ et M un R-module. Si M vérifie la condition (a_{n-1}) et si $\operatorname{Tor}_1^R\Big(M, \overset{i}{\bigotimes}_R M\Big) = (0)$, pour $i = 1, 2, \ldots, s$, où $s \leqq n - 2$, alors le module $\overset{s+1}{\bigotimes}_R M$ vérifie la condition (a_{n-1-s}).*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de l'anneau R. Alors, l'anneau R est local régulier et l'on a

$$\operatorname{Tor}_1^{R_\mathfrak{p}}\Big(M_\mathfrak{p}, \overset{i}{\bigotimes}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}\Big) = (0), \qquad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, s.$$

D'après le théorème 1, on a aussi

$$\operatorname{Tor}_j^{R_\mathfrak{p}}\Big(M_\mathfrak{p}, \overset{i}{\bigotimes}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}\Big) = (0), \qquad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, s \text{ et tout } j \geqq 1.$$

Il résulte du théorème 3 que

$$\begin{aligned} & dh_{R_\mathfrak{p}}\Big(M_\mathfrak{p} \otimes_{R_\mathfrak{p}} \Big(\overset{i}{\bigotimes}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}\Big)\Big) \\ & \quad = dh_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} + dh_{R_\mathfrak{p}}\Big(\overset{i}{\bigotimes}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}\Big) \qquad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, s. \end{aligned}$$

Par suite, $dh_{R_\mathfrak{p}}\Big(\overset{s+1}{\bigotimes}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}\Big) = (s+1)\, dh_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$. Puisque M vérifie la condition (a_{n-1}), on a $dh_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} = 0$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ différent de l'idéal maximal de R et $dh_R(M) \leqq 1$. Par conséquent,

$$dh_{R_\mathfrak{p}}\Big(\overset{s+1}{\bigotimes}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}\Big) = 0,$$

pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R différent de l'idéal maximal et

$$dh_R\left(\overset{s+1}{\bigotimes}_R M\right) \leqq s + 1.$$

Comme $s + 1 = n - (n - s - 1)$, on a

$$dh_R\left(\overset{s+1}{\bigotimes}_R M\right) \leqq \sup[\dim R - (n - s - 1), 0].$$

Par conséquent $\overset{s+1}{\bigotimes}_R M$ vérifie (a_{n-1-s}).

THÉORÈME 6. — *Soient R un anneau local régulier de dimension $n \geqq 2$ et M un R-module. Alors, si M vérifie la condition (a_{n-1}), le module $\overset{n-1}{\bigotimes}_R M$ est sans torsion.*

Démonstration. — On a une suite exacte $0 \to N \to L \to M \to 0$, dans laquelle N et L sont libres. Il suffit, d'après le lemme 5, de prouver que $\operatorname{Tor}_1^R\left(M, \overset{i}{\bigotimes}_R M\right) = (0)$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-2$. On peut supposer que $n > 2$. Si pour un entier k compris entre 1 et $n-2$, $\operatorname{Tor}_1^R\left(M, \overset{k}{\bigotimes}_R M\right)$ n'est pas nul, alors M n'est pas libre et l'on a $dh_R M = 1$. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de R différent de l'idéal maximal, alors $M_\mathfrak{p}$ est un $R_\mathfrak{p}$-module libre et l'on a $\left(\operatorname{Tor}_1^R\left(M, \overset{k}{\bigotimes}_R M\right)\right)_\mathfrak{p} = (0)$. Par suite, la codimension du module $\operatorname{Tor}_1^R\left(M, \overset{k}{\bigotimes}_R M\right)$ est 0. D'autre part, il résulte de la suite exacte $0 \to N \to L \to M \to 0$, où N et L sont libres, que $\operatorname{Tor}_i^R\left(M, \overset{k}{\bigotimes}_R M\right) = (0)$, pour $i \geqq 2$. Donc, d'après le théorème 3, on a

$$\operatorname{codim}_R\left(\overset{k}{\bigotimes}_R M\right) = dh_R(M) - 1.$$

Il en résulte, puisque R est régulier de dimension n et que $dh(M) = 1$, que $dh_R\left(\overset{k}{\bigotimes}_R M\right) = n$. Comme $n > 1$, on a nécessairement $k > 1$. Choisissons pour k le plus petit entier pour lequel $\operatorname{Tor}_1^R\left(M, \overset{k}{\bigotimes}_R M\right)$ n'est pas nul, alors

$$\operatorname{Tor}_1^R\left(M, \overset{k-1}{\bigotimes}_R M\right) = (0).$$

D'où d'après le lemme 5, le module $\overset{k}{\bigotimes}_R M$ vérifie la condition (a_{n-k}). Par suite $dh_R\left(\overset{k}{\bigotimes}_R M\right) \leqq k$ et $n \leqq k$, ce qui contredit le fait que $k \leqq n - 2$.

Il résulte alors du corollaire du théorème 4 et des théorèmes 5 et 6 le corollaire suivant :

COROLLAIRE. — *Soient R un anneau local régulier de dimension $n \geqq 2$ et M un R-module. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le module M vérifie la condition (a_{n-1});*

(ii) *Le module $\overset{n-1}{\bigotimes}_R M$ est sans torsion;*

(iii) *On a* $\mathrm{Tor}_1^R(M, R/\mathfrak{p}) = (0)$ *pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R de hauteur $n - 1$.*

En particulier, sur un anneau local régulier R de dimension 3, un module M est réflexif si et seulement si le module $M \otimes_R M$ est sans torsion et, aussi si et seulement si $\mathrm{Tor}_1^R(M, R/\mathfrak{p}) = (0)$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R de hauteur 2.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] AUSLANDER (M.). — Modules over unramified regular rings, *Illinois J. Math.*, t. 5, 1961, p. 631-647.

[2] AUSLANDER (M.). — Modules over unramified regular local rings, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* [1962, Stockholm]; p. 230-233. — Uppsala, Almqvist and Viksells, 1963.

[3] AUSLANDER (M.) et BAUCHSBAUM (D. A.). — Homological dimension in local rings, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 85, 1957, p. 390-405.

[4] KAPLANSKY (I.). — *Homological dimension of rings and modules.* Mathematics, Lecture Notes, University of Chicago.

[5] KAPLANSKY (I.). — R-sequences and homological dimension, *Nagoya math. J.*, t. 20, 1962, p. 195-199.

[6] LICHTENBAUM (S.). — On the vanishimg of Tor in regular local rings, *Illinois J. Math.* (à paraître).

[7] SAMUEL (P.). — Modules réflexifs et anneaux factoriels, *Séminaire Dubreil-Pisot Algèbre et Théorie des Nombres*, 17e année, 1963-1964, n° 8, 4 pages.

[8] SAMUEL (P.). — Anneaux gradués factoriels et modules réflexifs, *Bull. Soc. math. France*, t. 92, 1964, p. 237-249.

(Manuscrit reçu le 17 mai 1966.)

Mme Marie-Paule MALLIAVIN-BRAMERET,
Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Caen,
252, rue de Rivoli, Paris, 1er.