BULLETIN DE LA S. M. F.

L. GRUSON

Catégories d'espaces de Banach ultramétriques

Bulletin de la S. M. F., tome 94 (1966), p. 287-299
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1966__94__287_0>

Bull. Soc. math. France,
94, 1966, p. 287 à 299.

CATÉGORIES D'ESPACES DE BANACH ULTRAMÉTRIQUES

PAR

LAURENT GRUSON.

Introduction. — Soit K un corps valué, complet, non discret et non archimédien. On appelle *espace de Banach* sur K, un espace vectoriel normé complet dont la norme vérifie l'inégalité ultramétrique (*cf.* [6], [7], [8]). On se propose d'étudier certaines catégories d'espaces de Banach, munies éventuellement de classes de suites exactes courtes.

Au paragraphe 1, on étudie la catégorie (enc) (pour laquelle les morphismes sont les applications linéaires *diminuant la norme*) munie de sa classe « universelle » de suites exactes courtes. On dispose alors d'un foncteur « gradué associé » qui est exact à gauche; on se propose de calculer ses foncteurs dérivés droits. Pour un espace de Banach E, on trouve que les dérivés d'ordre ≥ 2 sont nuls, et que le dérivé d'ordre 1 est déterminé par l'ensemble des « trous » de E. Un trou de E est un ensemble totalement ordonné de boules de E, maximal pour la relation d'inclusion et non trivial, c'est-à-dire d'intersection vide.

La théorie des enveloppes injectives dans la catégorie (enc), due à HILY [6], se retrouve de façon naturelle dans ce contexte.

Au paragraphe 2, on munit la catégorie (enc) d'une nouvelle classe de suites exactes courtes qui possède cette fois suffisamment de projectifs. Ceux-ci sont les sommes directes de droites (« espaces de Banach décomposables » dans la terminologie de [4]). On montre qu'ils forment une classe stable par sous-objet, à l'aide d'un résultat qui exprime que, si E est un espace de Banach décomposable, tout automorphisme du gradué associé peut être relevé en un automorphisme de E.

Au paragraphe 3, on étudie la catégorie (enct) (dont les morphismes sont les applications linéaires continues). L'idée essentielle consiste à montrer que certaines propriétés des applications linéaires continues sont de « caractère dénombrable » (i. e. se décèlent sur les sous-espaces fermés engendrés par une suite). Comme conséquences, on prolonge certains résultats de [4] sur les rapports entre la théorie de Riesz et le prolongement extérieur.

1. Le foncteur « gradué associé » d'un espace de Banach.

Introduisons d'abord quelques notations.

Soit K un corps valué, complet, non discret, non archimédien. On désigne par A l'anneau de valuation de K, par $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A et par k le corps résiduel $A/\mathfrak{m}$. On désigne par **G** le groupe de valuation de K, c'est-à-dire l'image (par la valeur absolue) du groupe multiplicatif K^* dans le groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$.

Pour tout $r \in \mathbf{R}_+^*$, posons

$$K_r = \left\{ x \in K \,\middle|\, |x| \leq r \right\}.$$

La famille $(K_r)_{r \in \mathbf{R}_+^*}$ est une filtration d'anneau sur K (de type le groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$).

Soit (enc) la catégorie des espaces de Banach sur K (les morphismes étant les applications linéaires diminuant la norme). On la réalise comme sous-catégorie pleine de la catégorie des K-modules filtrés de type $\mathbf{R}_+^*$. En effet, soit E un espace de Banach sur K; pour tout $r \in \mathbf{R}_+^*$, posons

$$E_r = \left\{ x \in E \,\middle|\, |x| \leq r \right\}.$$

La famille $(E_r)_{r \in \mathbf{R}_+^*}$ est une filtration du K-module E; en outre, une application linéaire d'espaces de Banach est un morphisme de (enc) si et seulement si elle est compatible avec les filtrations.

Le passage au gradué associé définit un foncteur, noté gr, de la catégorie (enc) dans la catégorie **A** des $(\mathrm{gr}(K))$-modules gradués de type $\mathbf{R}_+^*$ (les morphismes étant les applications linéaires de degré 0).

La catégorie (enc) est additive et possède des limites inductives et projectives quelconques. Tout morphisme de (enc) possède donc noyau, conoyau, image, coimage. On dit qu'un morphisme u de (enc) est strict si le morphisme canonique de $\mathrm{Coim}\, u$ dans $\mathrm{Im}\, u$ est un isomorphisme. L'ensemble des morphismes stricts vérifie les axiomes de Heller [5]. Décrivons l'ensemble **S** des suites exactes courtes correspondantes :

Une séquence $S = \left(E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G\right)$ de morphismes de (enc), telle que $v \circ u = 0$, est une suite exacte courte lorsque :

- — la séquence d'applications linéaires sous-jacente est une suite exacte courte;
- — la norme de E est induite par celle de F;
- — la norme de G est quotient de celle de F.

La catégorie **A** est abélienne, à générateurs et limites inductives exactes. Les « droites » de **A** [c'est-à-dire les objets qui deviennent isomorphes à $\mathrm{gr}(K)$ après décalage de la graduation] forment une famille de générateurs et sont des objets simples. Il en résulte que tout objet de $\mathbf{A}$ est semi-simple (*cf.* [3], p. 337).

Le foncteur $\mathrm{gr} : (\mathrm{enc}) \to \mathbf{A}$ est additif et exact à gauche. Il possède les propriétés suivantes :

— soit u un morphisme de (enc). Pour que u soit un monomorphisme strict, il faut et il suffit que $\mathrm{gr}(u)$ soit un monomorphisme;

— soit (E_i, u_{ij}) un système inductif filtrant de (enc). Le morphisme canonique de $\varinjlim(\mathrm{gr}\,\mathrm{E}_i))$ dans $\mathrm{gr}\left(\varinjlim(\mathrm{E}_i)\right)$ est un monomorphisme; c'est un isomorphisme si les u_{ij} sont des monomorphismes stricts.

On peut maintenant calculer le premier foncteur dérivé droit $R^1(\mathrm{gr})$ du foncteur gr.

Soit E un espace de Banach; formons la catégorie $\mathbf{S}_E$ des suites exactes courtes

$$S = \left(E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G\right)$$

un morphisme de $\mathbf{S}_E$ étant un morphisme de suites exactes courtes induisant sur E le morphisme identique. Soit $\mathbf{f} : \mathbf{S}_E \to \mathbf{A}$ le foncteur suivant :

si $S = \left(E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G\right)$ est un objet de $\mathbf{S}_E$, on pose $\mathbf{f}(S) = \mathrm{Coker}(\mathrm{gr}(v))$;

si $(1_E, f, g)$ est un morphisme de $S = \left(E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G\right)$ dans $S' = \left(E \xrightarrow{u'} F' \xrightarrow{v'} G'\right)$, son image par $\mathbf{f}$ est le morphisme canonique de $\mathrm{Coker}(\mathrm{gr}(v))$ dans $\mathrm{Coker}(\mathrm{gr}(v'))$.

Comme le foncteur gr est exact à gauche, le foncteur $\mathbf{f}$ transforme morphismes de $\mathbf{S}_E$ en monomorphismes de $\mathbf{A}$.

Par définition, la valeur en E du foncteur $\mathrm{R}^1(\mathrm{gr})$ est la limite inductive (si elle existe) du foncteur $\mathbf{f}$; pour montrer que cette limite inductive existe, il suffit de montrer que les cardinaux de $\mathbf{f}(S)$ restent bornés lorsque S parcourt $\mathbf{S}_E$, en fait, on va formuler un résultat plus précis.

Soit $r \in \mathbf{R}_+^*$; désignons par $\mathbf{f}_r$ le foncteur de (enc) dans $\mathrm{mod}(k)$ (catégorie des k-espaces vectoriels) qui se déduit de $\mathbf{f}$ par passage à la composante de degré r. Pour tout objet S de $\mathbf{S}_E$, désignons par $\mathbf{g}_r(S)$ l'ensemble des points non nuls de $\mathbf{f}_r(S)$; on forme ainsi un foncteur $\mathbf{g}_r : \mathbf{S}_E \to (\mathrm{Ens})$, dont on va calculer la limite inductive.

On a défini dans l'introduction l'ensemble des trous de E. Si T est un trou de E, on appelle diamètre de T la borne inférieure des diamètres des boules appartenant à T; c'est un nombre > 0, puisque E est complet.

On désigne alors par $\mathfrak{T}_r$ l'ensemble des classes de trous de diamètre r pour la relation d'équivalence « T et T' sont homologues par translation dans E ».

Puisque v est un épimorphisme strict, il applique la boule « ouverte » $F_{r+} = \bigcup_{r' < r} F_{r'}$ sur la boule « ouverte » G_{r+}. Ceci permet d'identifier canoniquement les k-espaces vectoriels $\mathbf{f}_r(S)$ et $G_r/v(F_r)$.

Soit x un point de G_r n'appartenant pas à $v(F_r)$. Soit y un point de F relevant x; on désigne par $T(y)$ l'ensemble des traces sur E des boules de centre y et de rayon $> r$. C'est un trou de diamètre r; si y' est un second point de F relevant x, les trous $T(y)$ et $T(y')$ sont homologues par translation. On définit ainsi une application de l'ensemble $G_r \cap \complement(v(F_r))$ dans $\mathfrak{T}_r$.

Proposition 1. — *L'application précédente définit, par passage au quotient, une injection* $\varphi_S : \mathbf{g}_r(S) \to \mathfrak{T}_r$. *Lorsque* S *varie, les injections* φ_S *identifient l'ensemble* $\mathfrak{T}_r$ *à la limite inductive du foncteur* $\mathbf{g}_r$.

Démonstration. — Soient x et x' deux points de G_r n'appartenant pas à $v(F_r)$; soient y et y' deux points de F relevant respectivement x et x' et tels que $T(y) = T(y')$. Alors $|y - y'| \leq r$, donc $x - x' \in v(F_r)$. On en déduit que l'application φ_S est bien définie et injective; elle est évidemment fonctorielle en S.

Il reste à vérifier que $\mathfrak{T}_r$ est la réunion des images des φ_S. Pour cela, on va associer à un trou T de E, une extension F de E par une droite et un point x de F n'appartenant pas à E, tels que $T = T(x)$.

Prenons pour espace vectoriel sous-jacent à F la somme directe $E \oplus K$; prenons pour x le point $(0, 1) \in E \oplus K$; posons enfin, pour tout $y \in E$ et tout $a \in K$:

$$|(y, a)| = |a| . \inf_{(-a^{-1}y) \in B \in T} (\text{diamètre de } B),$$

$$|(y, 0)| = |y|.$$

On définit ainsi une norme sur F satisfaisant aux conditions voulues (ce fait est bien connu; *cf.* par exemple [7]). D'où la proposition.

Corollaire. — *Le foncteur* $\mathbf{f}$ *possède toujours une limite inductive : en particulier, le foncteur* $R^1(\mathrm{gr})$ *est partout défini.*

Appliquons maintenant ces résultats à l'étude des objets injectifs de la catégorie (enc) munie de la classe **S**.

Proposition 2.

1° *Soit E un espace de Banach. Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *E est un objet injectif de* (enc);

(ii) $R^1(\mathrm{gr}(E)) = 0$;

(*iii*) *Toute suite décroissante de boules de E est d'intersection non vide.*

2° *La catégorie* (enc) *munie de la classe* **S** *possède suffisamment d'objets injectifs.*

Démonstration.

1° Il est clair que (i) entraîne (ii); l'équivalence de (ii) et de (iii) résulte de la proposition 1. Vérifions que (ii) entraîne (i). Il suffit de voir que si (ii) est vérifiée, toute extension de E par une droite est triviale (par un raisonnement bien connu utilisant le théorème de Zorn; *cf.* [1], chap. II, § 2, ex. 11). Soit F une extension de E par une droite D; par hypothèse, la suite $(\mathrm{gr}(E) \to \mathrm{gr}(F) \to \mathrm{gr}(D))$ est une suite exacte courte de **A**. Comme D est une droite, ceci n'est possible que lorsque l'extension F est triviale.

2° Il s'agit de plonger un espace de Banach E dans un injectif I. Soit $b_E(\mathbf{N})$ l'espace de Banach des suites bornées de E et soit $c_E(\mathbf{N})$ le sous-espace de $b_E(\mathbf{N})$ formé des suites qui tendent vers zéro; posons $I = b_E(\mathbf{N})/c_E(\mathbf{N})$. Plongeons E dans $b_E(\mathbf{N})$ par l'application diagonale; il en résulte par composition un monomorphisme strict de E dans I.

Montrons que I vérifie la condition (iii) du 1°. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de points de I telle que la suite des nombres $r_n = |x_n - x_{n+1}|$ soit strictement décroissante. Soit $((y_{m,n})_{m\in\mathbf{N}})_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de points de $b_E(\mathbf{N})$ relevant $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et telle que

$$\sup_{m\in\mathbf{N}} (|y_{m,n} - y_{m,n+1}|) \leqq r_{n-1} \qquad (n \geqq 1).$$

On a donc : $|y_{m,m} - y_{m,n}| \leqq r_{n-1}$ pour $1 \leqq n \leqq m$. Il s'ensuit que la suite $(y_{m,m})_{m\in\mathbf{N}}$ appartient à $b_E(\mathbf{N})$ et que son image x dans I vérifie : $|x - x_n| \leqq r_{n-1}$ pour tout $n \leqq 1$, donc aussi : $|x - x_n| \leqq r_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Ceci prouve notre assertion.

Corollaire. — *Les objets de* (enc) *sont de dimension cohomologique* $\leqq 1$.

[En effet, la condition (iii) de la proposition 1 est stable par quotient.]

En particulier, $\mathrm{R}^n(\mathrm{gr})$ est nul pour $n \geqq 2$.

Soit $u : E \to F$ un morphisme de (enc). On dit que u est une extension essentielle lorsque c'est un monomorphisme strict vérifiant la condition suivante : pour tout morphisme v de source F, les conditions « $v \circ u$ est un monomorphisme strict » et « v est un monomorphisme strict » sont équivalentes.

Lemme 1. — *Pour que* u *soit une extension essentielle, il faut et il suffit que* $\mathrm{gr}(u)$ *soit un isomorphisme.*

Démonstration. — La condition est évidemment suffisante. Inversement, supposons que u soit un monomorphisme strict et que $\mathrm{gr}(u)$ ne soit pas un isomorphisme. Il existe alors une droite D de F telle que

$\mathrm{gr}(D) \cap \mathrm{gr}(F) = 0$. Le morphisme canonique de F dans F/D n'est pas un monomorphisme strict, bien que sa restriction à E le soit; donc u n'est pas une extension essentielle.

Soit E un espace de Banach; on appelle enveloppe injective de E une extension essentielle de E qui est un espace de Banach injectif. Deux enveloppes injectives de E sont isomorphes, mais l'isomorphisme n'est pas unique en général.

PROPOSITION 3 (HILY [6]). — *Tout espace de Banach possède une enveloppe injective.*

Démonstration. — Soient E un espace de Banach, I une extension injective de E, J un élément maximal de l'ensemble (ordonné par inclusion) des sous-espaces de I qui sont extension essentielle de E; l'existence de J résulte du théorème de Zorn. Prouvons que J est injectif.

Soit J' une extension de J par une droite; elle est, soit triviale, soit essentielle, d'après le lemme 1. Dans le second cas, on peut prolonger l'inclusion de J dans I en un monomorphisme strict de J' dans I, ce qui est contraire au caractère maximal de J. Donc l'extension J' est triviale, ce qui prouve que J est injectif.

2. Espaces de Banach décomposables.

On va décrire une seconde classe de suites exactes de (enc) qui possèdera cette fois suffisamment de projectifs.

Soit $u : E \to F$ un épimorphisme strict de (enc); on dit que u est propre si, pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ et $|y| = |x|$. On dit qu'une suite exacte courte $\left(E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G\right)$ est propre lorsque v est un épimorphisme propre. Les suites exactes propres forment une classe $\mathbf{T}$ qui vérifie les axiomes de Heller.

Soient E et F deux espaces de Banach. Les résultats ci-dessous permettent de comparer les classes $\mathbf{S}$ et $\mathbf{T}$:

— le morphisme canonique du A-module $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{T}}(E, F)$ dans le A-module $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{S}}(E, F)$ est injectif et son conoyau est un k-espace vectoriel;

[La première assertion est automatique. La seconde signifie que, lorsqu'on tord une suite exacte courte $S = (F \to G \to E)$ par une homothétie de E définie par un scalaire appartenant à l'idéal $\mathfrak{m}$ de A, on obtient une suite exacte propre; ce point est très facile à vérifier.]

— les A-modules $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{T}}(E, F)$ sont nuls pour $n \geqq 2$.

[Ce point sera prouvé plus loin (corollaire du théorème 2).]

Un espace de Banach est dit décomposable lorsqu'il est isomorphe à une somme directe de droites. Les espaces de Banach décomposables sont projectifs pour la classe $\mathbf{T}$. Inversement, soit E un espace de Banach quelconque; il existe un épimorphisme propre $u : F \to E$ tel que F soit décomposable (il suffit de prendre pour F la somme directe des droites de E et pour u le morphisme déduit des inclusions).

La catégorie (enc) munie de $\mathbf{T}$ possède donc suffisamment de projectifs; ceux-ci sont les facteurs directs d'espaces de Banach décomposables.

THÉORÈME 1. — *Soient E et F deux espaces de Banach projectifs pour* $\mathbf{T}$ *et soit* $v : \mathrm{gr}(E) \to \mathrm{gr}(F)$ *un isomorphisme de* $\mathbf{A}$. *Il existe un isomorphisme de* (enc) : $u : E \to F$ *tel que* $v = \mathrm{gr}(u)$.

Démonstration. — Notons d'abord un lemme simple :

LEMME 2. — *Soient E un espace de Banach décomposable et V un sous-espace de rang fini de E; alors V est facteur direct dans E.*

Par récurrence sur le rang de V, on se ramène au cas où V est une droite. Soient $(D_i)_{i\in I}$ une famille de droites de E dont E soit somme directe, x un point non nul de V, $(x_i)_{i\in I}$ la décomposition de x suivant $(D_i)_{i\in I}$; la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable de somme x, et l'on a $|x| = \sup(|x_i|)$. Il existe donc un indice $j \in I$ tel que $|x| = |x_j|$; l'espace E est alors somme directe de V et de la famille $(D_i)_{i\in I-\{j\}}$, d'où le lemme.

Lorsque E et F sont *de type dénombrable* (i. e. admettent une suite totale) le théorème résulte donc du lemme suivant :

LEMME 3. — *Soit E un espace de Banach de type dénombrable tel que toute droite de E soit facteur direct; soit $(M_i)_{i\in I}$ une décomposition de* $\mathrm{gr}(E)$ *en somme directe. Il existe une décomposition $(E_i)_{i\in I}$ de E en somme directe telle que* $M_i = \mathrm{gr}(E_i)$ *pour tout* $i \in I$.

On peut supposer que les M_i sont des droites de $\mathbf{A}$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite totale de E; on va construire, par récurrence sur n, une suite $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de parties finies deux à deux disjointes de I et une famille $(D_i)_{i\in J_n}$ de droites de E, telles que :

(i) pour tout $i \in J_n$, $M_i = \mathrm{gr}(D_i)$;

(ii) $x_n \in \sum_{i\in I_n} D_i$, où I_n désigne l'ensemble $\bigcup_{p\leq n} J_p$.

La possibilité de cette construction entraînera le lemme 3; en effet, posons $J = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} J_n$. Le morphisme canonique de $\bigoplus_{i\in J} D_i$ dans E est un isomorphisme, car son image est dense d'après (ii) et son gradué associé est un monomorphisme; donc $J = I$, ce qui entraîne le lemme.

Supposons la construction faite pour les entiers $< n$ et faisons-la pour n. Posons

$$H = \bigcup_{p<n} J_p \qquad \text{et} \qquad V = \sum_{i\in H} D_i;$$

V est un sous-espace de rang fini de E, donc est facteur direct (puisque toute droite de E est facteur direct). Soit W un supplémentaire de V dans E et soit y la projection de x dans W le long de V.

Si $y = 0$, on pose $J_n = \emptyset$; les conditions (i) et (ii) sont vérifiées.

Si $y \neq 0$, désignons par D la droite Ky; soit J_n l'ensemble des $i \in I - H$ tels que la projection de $\mathrm{gr}(E)$ sur M_i ait une restriction non nulle à $\mathrm{gr}(D)$. C'est un ensemble fini et non vide puisque $\mathrm{gr}(D) \not\subset \mathrm{gr}(V)$. Choisissons un élément i de J_n et, pour tout $j \in J_n - \{i\}$, une droite D_j de E telle que $M_j = \mathrm{gr}(D_j)$. Désignons par V' le sous-espace de E engendré par V, D et les D_j $(j \in J_n - \{i\})$.

Il existe une droite D_i de V' telle que $M_i = \mathrm{gr}(D_i)$; V' est engendré par V et les D_j $(j \in J_n)$; la famille $(D_j)_{j \in J_n}$ vérifie donc les conditions (i) et (ii).

Avant d'aborder le cas général, notons un autre lemme :

LEMME 4. — *Soient E un espace de Banach et F un facteur direct de E. Si E est somme directe d'espaces de Banach de type dénombrable, il en est de même de F.*

Ce lemme se démontre par la méthode de KAPLANSKY (*cf.*, par exemple, [1], chap. II, § 1, ex. 15); rappelons rapidement le principe de cette méthode.

L'idée est de construire un ensemble bien ordonné H et une application croissante $x \mapsto F_x$ de H dans l'ensemble des sous-espaces de F, qui commute à la borne supérieure et vérifie les conditions suivantes :

(i) $F = \sup\limits_{x \in H} F_x$;

(ii) si x et x' sont deux éléments consécutifs de H, F_x possède dans $F_{x'}$ un supplémentaire de type dénombrable G_x.

[En effet, F est alors somme directe de la famille $(G_x)_{x \in H}$.]

Pour faire cette construction, choisissons un projecteur p de E sur F et une décomposition $(E_i)_{i \in I}$ de E en somme directe de sous-espaces de type dénombrable. Pour tout $x \in E$, soit $J(x)$ la plus petite des parties J de I telles que le sous-espace $\bigoplus\limits_{i \in J} E_i$ de E soit stable par p et contienne x; on vérifie que $J(x)$ est dénombrable. Munissons l'ensemble H sous-jacent à E d'une relation de bon ordre; pour tout $x \in H$, posons

$$H(x) = \bigcup_{y < x} J(y), \qquad E_x = \bigoplus_{i \in H(x)} E_i \qquad \text{et} \qquad F_x = E_x \cap F = p(E_x).$$

Si x et x' sont deux éléments consécutifs de H, F_x est facteur direct dans $F_{x'}$ par construction, et tout supplémentaire de F_x dans $F_{x'}$ est de type dénombrable parce que $J(x)$ est dénombrable. L'application $x \mapsto F_x$ vérifie toute les conditions demandées.

On peut maintenant démontrer le théorème 1. D'après le lemme 3, on peut trouver des décompositions $(E_i)_{i \in I}$ et $(F_j)_{j \in J}$ de E et F respectivement en somme directe de sous-espaces de type dénombrable. Pour toute partie L (resp. M) de I (resp. J), on pose

$$E_L = \bigoplus_{i \in L} E_i \quad \text{et} \quad F_M = \bigoplus_{j \in m} F_j.$$

Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des triplets (L, M, t) tels que L soit une partie de I, M soit une partie de J et t soit un isomorphisme de E_L sur F_M tel que $\mathrm{gr}(t)$ coïncide avec v sur $\mathrm{gr}(E_L)$. L'ensemble $\mathfrak{M}$, ordonné par inclusion et prolongement, est inductif; soit (L, M, t) un élément maximal de $\mathfrak{M}$. Pour prouver le théorème 1, il suffit de vérifier que $L = I$.

Supposons le contraire; soit i un élément de $I - L$. Il existe une partie dénombrable L' de I contenant i et une partie dénombrable M' de J telles que v induise un isomorphisme de $\mathrm{gr}(E_{L'})$ sur $\mathrm{gr}(F_{M'})$. Posons

$$P = L \cup L', \qquad P' = L' - L, \qquad Q = M \cup M', \qquad Q' = M' - M.$$

Alors v induit un isomorphisme v_L de $\mathrm{gr}(E_L)$ sur $\mathrm{gr}(F_M)$ et un isomorphisme v_P de $\mathrm{gr}(E_P)$ sur $\mathrm{gr}(F_Q)$; lorsqu'on identifie E_P à $E_L \oplus E_{P'}$ et F_Q à $F_M \oplus F_{Q'}$, la matrice de v_B s'écrit

$$\begin{pmatrix} v_L & s \\ 0 & w \end{pmatrix},$$

où w est un isomorphisme de $\mathrm{gr}(E_{P'})$ sur $\mathrm{gr}(F_{Q'})$. D'après le lemme 1, on peut relever w en un isomorphisme t' de $E_{P'}$ sur $F_{Q'}$. On peut aussi relever s en un morphisme r de $E_{P'}$ dans F_M, puisque $E_{P'}$ est projectif pour la classe $\mathbf{T}$. Soit u le morphisme de E_P dans F_Q admettant pour matrice :

$$\begin{pmatrix} t & r \\ 0 & t' \end{pmatrix}.$$

C'est un isomorphisme de E_P sur F_Q relevant v_P et prolongeant t. Donc (P, Q, u) majore strictement (L, M, t), ce qui est contraire à l'hypothèse.

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Tout facteur direct d'un espace de Banach décomposable est lui-même décomposable.*

En fait, on a mieux :

Théorème 2. — *Tout sous-espace fermé d'un espace de Banach décomposable est lui-même décomposable.*

Démonstration. — Soit $S = (E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G)$ une suite exacte courte de (enc) telle que F soit décomposable; prouvons que E est décomposable. Ramenons-nous au cas où u est une extension essentielle : puisque $\mathrm{gr}(u)$

est un monomorphisme direct, il existe d'après le théorème 1 un sous-espace décomposable F' de F et un projecteur p de F sur F' tel que $\mathrm{gr}(p \circ u)$ soit un isomorphisme; on remplace F par F' et u par $p \circ u$.

Soit alors $s : E_1 \rightarrow E$ un épimorphisme propre tel que E_1 soit décomposable; le morphisme canonique de $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{S}}(G, E_1)$ dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{S}}(G, E)$ est surjectif (corollaire de la proposition 2). Il existe donc un morphisme de suites exactes courtes :

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "s"] & F_1 \arrow[r, "v_1"] \arrow[d, "t"] & G \arrow[d, "1_G"] \\ E \arrow[r, "u"] & F \arrow[r, "v"] & G \end{tikzcd}$$

Comme u est essentiel, $\mathrm{gr}(u)$ est un isomorphisme, donc $\mathrm{gr}(t)$ est un épimorphisme; ceci prouve que t est un épimorphisme *propre*, donc direct. Donc s est un épimorphisme direct et E est décomposable (corollaire du théorème 1).

COROLLAIRE. — *Tout espace de Banach est de dimension homologique* ≤ 1 *par rapport à la classe* $\mathbf{T}$.

3. **Résultats topologiques.**

On se place maintenant sur la catégorie (enct) des espaces de Banach sur K, les morphismes étant les applications linéaires continues. C'est une catégorie additive avec noyaux et conoyaux. On dit qu'un morphisme u de (enct) est *strict* lorsque le morphisme canonique de $\mathrm{Coim}\, u$ dans $\mathrm{Im}\, u$ est un isomorphisme. L'ensemble des morphismes stricts vérifie les axiomes de Heller [5].

PROPOSITION 4. — *Soient E et F deux espaces de Banach,* $u : \mathrm{E} \rightarrow F$ *une application linéaire continue. On a les alternatives suivantes :*

(i) *ou bien u est un morphisme strict de noyau de rang fini, ou bien il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de points de E, topologiquement libre et dont l'image par u tend vers zéro;*

[Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de points de E est dite *topologiquement libre,* lorsqu'elle est bornée et définit un monomorphisme strict de l'espace de Banach libre $c(I)$ défini par I dans l'espace de Banach E.]

(ii) *ou bien u est complètement continue, ou bien il existe un sous-espace fermé G de E, de rang infini et sur lequel u induit un monomorphisme strict.*

Démonstration.

(i) Notons d'abord que u est un morphisme strict de noyau de rang fini, si et seulement si ses restrictions aux sous-espaces fermés de type dénombrable de E possèdent la même propriété. On peut donc se ramener au cas où E est de type dénombrable; quitte à modifier sa norme, on peut aussi le supposer libre (*cf.* [4], § 1, prop. 3 par exemple).

Supposons que u ne soit pas strict ou que son noyau ne soit pas de rang fini; pour tout sous-espace fermé de corang fini G de E et tout nombre $a > 0$, il existe un point non nul x de G tel que $|u(x)| \leqq a.|x|$. On choisit une suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de points de $\mathbf{R}_+^*$ qui tende vers zéro; tenant compte du fait que E est libre, on voit qu'il est possible de construire par récurrence une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de points de E et une suite $(G_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de sous-espaces fermés de corang fini de E, telles que :

— $G_0 = E$;

— x_n est un point de G_n tel que $|x| = 1$ et $|u(x_n)| \leqq a_n$;

— G_{n+1} est un supplémentaire orthogonal de Kx_n dans G_n.

La suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est topologiquement libre et son image par u tend vers zéro, d'où notre assertion.

(ii) Supposons que u ne soit pas complètement continue. Soit B la boule unité de E; d'après [4] (§ 5, prop. 2), l'hypothèse signifie que $u(B)$ n'est pas bornée pour la bornologie $\pi(F)$. D'après [4] (§ 5, prop. 1), il existe un sous-espace fermé F_1 de F, de type dénombrable et tel que $F_1 \cap (u(B))$ ne soit pas non plus borné pour la bornologie $\pi(F)$. Quitte à remplacer F par F_1 et E par $u^{-1}(F_1)$, on peut donc supposer que F est libre de type dénombrable. Soit $a \in]0, 1[$; on construit par récurrence une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de points de la boule unité de E et une suite décroissante $(H_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de sous-espaces fermés de corang fini de F telles que :

— $H_0 = F$;

— x_n est un point de $u^{-1}(H_n)$ tel que $|u(x_n)| \geqq a.d_n$, où d_n est la norme de la restriction de u à $u^{-1}(H_n)$;

— H_{n+1} est un supplémentaire orthogonal de $u(Kx_n)$ dans H_n.

Lorsque u n'est pas complètement continue, la suite $(d_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ne tend pas vers zéro; elle est donc bornée inférieurement. La suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée et son image par u est topologiquement libre, d'où notre assertion.

Indiquons quelques applications de ce résultat.

1. *Soit E un espace de Banach possédant la propriété suivante : tout quotient séparé de type dénombrable de E est de rang fini. Soit $u : E \to F$ une application linéaire continue; si F est de type dénombrable, u est complètement continue.*

En effet, dans le cas contraire, u induit un monomorphisme strict sur un sous-espace fermé de rang infini G de E; posons $H = u(G)$. Il existe un projecteur (continu) p de F sur H; alors $p \circ u$ est un épimorphisme strict, et H est de rang infini et de type dénombrable.

(Les hypothèses précédentes sont vérifiées lorsque K est de valuation dense et E est un espace de Banach injectif (*cf.* [7], prop. 2.4 par exemple); on retrouve alors un résultat de Hily [6]).

2. *Soient E et F deux espaces de Banach, $u : E \to F$ une application linéaire continue. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *u est complètement continue;*

(ii) *la suite des nombres $(|\Lambda^n u|)_{n \in \mathbf{N}}$ décroît plus vite que toute exponentielle.* (On désigne par $\Lambda^n u$ la puissance extérieure $n^{\text{ième}}$ de u.)

On sait que (i) entraîne (ii) (*cf.* [4], § 4, corollaire de la proposition 1). Inversement, si (i) est faux, il existe un sous-espace fermé de rang infini G de E, tel que la restriction v de u à G soit un monomorphisme strict. D'après la platitude des espaces de Banach ([4], § 3, th. 1), l'application v ne vérifie pas (ii); donc (toujours par platitude) l'application u ne vérifie pas non plus (ii).

3. On va maintenant donner un exemple d'une classe assez large d'opérateurs *vérifiant la théorie de Riesz* (cet exemple répond à une question posée dans [4], § 4, remarque suivant le théorème 1).

Soit u un endomorphisme continu d'un espace de Banach E; supposons qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $|\Lambda^n u| < 1$. Posons $v = 1 - u$. Il existe alors une décomposition de E en somme directe topologique de deux sous-espaces fermés stables par u, N et F, telle que la restriction de v à N (resp. F) soit nilpotente (resp. inversible). Cette décomposition est unique et N est de rang fini, majoré par n.

Cet énoncé résulte de deux lemmes :

LEMME 5. — *Soit N la réunion des noyaux des itérés de v; alors N est un espace vectoriel de rang fini majoré par n.*

Démonstration. — Tout d'abord, N est réunion de la famille (filtrante croissante) de ses sous-espaces vectoriels de rang fini qui sont stables par u; soit V un tel sous-espace. Il suffit de montrer que $\Lambda^n V = 0$. Supposons le contraire; soit u_V la restriction de u à V. Alors $|\Lambda^n(u_V)| < 1$ (platitude des espaces de Banach); d'autre part, $\text{dét}(u_V) = 1$ [puisque $(1 - u_V)$ est nilpotent], donc $\text{dét}(\Lambda^n u_V) = 1$; d'où une contradiction.

LEMME 6. — *v est un morphisme strict.*

Démonstration. — Dans le cas contraire, il existerait une suite $(x_p)_{p \in \mathbf{N}}$ de points de E, topologiquement libre et dont l'image par v tendrait vers zéro. Soit I l'ensemble des parties de $\mathbf{N}$ de cardinal n; pour tout élément H de I, soit x_H le produit extérieur de la suite $(x_p)_{p \in H}$. D'après la platitude des espaces de Banach, la famille $(x_H)_{H \in I}$ est topologiquement libre dans l'espace de Banach $\Lambda^n E$.

D'autre part, on a l'égalité suivante :

$$x_H - (\Lambda^n u)(x_H) = \sum_{i \in H} \left(\bigwedge_{j \in H,\, j < i} x_j \right) \wedge (x_i - u(x_i)) \wedge \left(\bigwedge_{j \in H,\, j > i} u(x_j) \right).$$

Comme u est continue et comme la suite $(v(x_p))_{p\in\mathbf{N}}$ tend vers zéro, on voit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J de $\mathbf{N}$ telle que, pour tout élément H de I tel que $H \cap J = \emptyset$, on ait :

$$|(x_H - (\Lambda^n u)(x_H))| \leqq \varepsilon.$$

Comme $|\Lambda^n u| < 1$, cela signifie aussi : $|x_H| \leqq \varepsilon$. Il existe donc un filtre sur I selon lequel la famille $(x_H)_{H\in I}$ tend vers zéro; d'où contradiction.

Ces lemmes démontrés, désignons, pour tout $k\in\mathbf{N}$, par N_k (resp. F_k) le noyau (resp. l'image) de l'application linéaire v^k. Ce sont des sous-espaces fermés de E, d'après le lemme 2. Le lemme 1 montre que la réunion N de la suite $(N_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est de rang fini majoré par n; appliqué à l'endomorphisme de E/F_{n+1} déduit de u, il montre que $F_n = F_{n+1}$, donc que la suite $(F_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est stationnaire. Appliquant ([1], chap. VIII, § 2, lemme 2) on obtient l'énoncé ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BOURBAKI (Nicolas). — Éléments de Mathématique, Livre 2 : *Algèbre*. — Paris, Hermann (*Act. scient. et ind.*).

[2] BOURBAKI (Nicolas). — Éléments de Mathématique, Livre 5 : *Espaces vectoriels topologiques*. — Paris, Hermann (*Act. scient. et ind.*).

[3] GABRIEL (Pierre). — Des catégories abéliennes, *Bull. Soc. math. France*, t. 90, 1962, p. 323-448 (*Thèse Sc. math.*, Paris, 1961).

[4] GRUSON (Laurent). — Théorie de Fredholm p-adique, *Bull. Soc. math. France*, t. 94, 1966, p. 67-96.

[5] HELLER (Alex). — Homological algebra in abelian categories, *Annals of Math.*, Series 2, t. 68, 1958, p. 484-525.

[6] HILY (Jacques). — Espaces de Banach ultramétriques, *Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres*, 6e année, 1964-1965, nº 7 (non multigraphié).

[7] MONNA (A. F.) et SPRINGER (T. A.). — Sur la structure des espaces de Banach non archimédiens, *Koninkl. nederl. Akad. Wetensch., Proc.*, Series A, t. 68, 1965, p. 603-614.

[8] SERRE (Jean-Pierre). — *Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques*. — Paris, Presses Universitaires de France, 1962 (*Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications mathématiques*, 12, p. 69-85).

(Manuscrit reçu le 26 décembre 1966.)

Laurent GRUSON,
Attaché de Recherches
au Centre National
de la Recherche Scientifique,
3, avenue des Châlets, 75-Paris, 16e.