BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

Sur quelques propriétés de l'hypocycloïde à 3 points de rebroussement

Bulletin de la S. M. F., tome 7 (1879), p. 108-123
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1879__7__108_1>

Sur quelques propriétés de l'hypocycloïde à trois points de rebroussement; par M. LAGUERRE.

(Séance du 11 avril 1879.)

I.

1. Soient OX et OY deux axes rectangulaires, et X, Y les coordonnées d'un point quelconque M du plan relativement à ce système d'axes; posons

$$X + Yi = x \quad \text{et} \quad X - Yi = y;$$

nous pouvons considérer x et y comme de nouvelles coordonnées du point M. On voit que les équations $x = \alpha$ et $y = \beta$, où α et β désignent des quantités constantes arbitraires, représentent les diverses droites isotropes du plan; je désignerai donc, pour abréger, le système de coordonnées que je viens de définir sous le nom de *coordonnées isotropes*.

Dans un pareil système, le coefficient angulaire d'une droite faisant avec l'axe OX un angle donné V est égal à e^{-2Vi}; l'équation de l'axe OX est

$$x = y,$$

et l'équation d'un cercle de rayon R et ayant pour centre le point

(α, β) est

$$(x-\alpha)(y-\beta)=\mathrm{R}^2.$$

2. Étant donnée une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe, les coefficients angulaires des tangentes que d'un point (x, y) on peut mener à cette courbe sont donnés par une équation homogène du degré n,

$$\mathrm{U}(\lambda, \mu)=0;$$

dans cette équation, $\frac{\mu}{\lambda}$ désigne le coefficient angulaire de la tangente issue du point (x, y), et les coefficients du polynôme U sont des fonctions entières de x et de y.

L'équation précédente est, en me servant d'une dénomination que j'ai déjà employée dans plusieurs travaux antérieurs (¹), l'*équation mixte de la courbe*.

3. L'hypocycloïde à trois points de rebroussement étant définie comme une courbe de troisième classe qui touche aux deux ombilics la droite de l'infini, on voit immédiatement que son équation mixte est de la forme

$$a\lambda^3+b\lambda^2\mu+c\lambda\mu^2+d\mu^3+\lambda\mu(\lambda y-\mu x)=0.$$

Cherchons le lieu des points du plan d'où l'on voit l'hypocycloïde sous un angle droit; il faut, pour cela, exprimer que l'équation précédente a deux racines égales et de signes contraires.

Le lieu cherché a donc pour équation

$$(c-x)(b+y)=ad;$$

elle représente, comme on le sait, un cercle. En mettant en évidence le rayon R de ce cercle et les coordonnées α et β de son centre, je poserai

$$c=\alpha, \quad b=-\beta, \quad a=\mathrm{R}e^{-\varphi i} \quad \text{et} \quad d=-\mathrm{R}e^{\varphi i}.$$

L'équation mixte de la courbe deviendra donc

$$(1) \qquad \mathrm{R}e^{-\varphi i}\lambda^3-\beta\lambda^2\mu+\alpha\lambda\mu^2-\mathrm{R}e^{\varphi i}\mu^3+\lambda\mu(\lambda y-\mu x)=0.$$

4. Je vais chercher maintenant l'équation mixte des diverses

(¹) *Mémoire de Géométrie analytique*, 2ᵉ série, t. XVII.

hypocycloïdes qui touchent l'axe OX et rencontrent cet axe en deux autres points équidistants de l'origine O.

L'axe OX étant tangent à la courbe, une des tangentes issues de l'origine a pour coefficient angulaire l'unité; l'équation (1) est donc satisfaite quand on y fait

$$x = 0, \quad y = 0 \quad \text{et} \quad \lambda = \mu,$$

d'où l'équation de condition

$$\alpha - \beta = \mathrm{R}e^{\varphi i} - \mathrm{R}e^{-\varphi i}.$$

Considérons un point de l'axe OX situé à une distance de l'origine égale à z, en sorte que les coordonnées de ce point soient

$$x = y = z;$$

les coefficients angulaires des tangentes issues de ce point sont donnés par l'équation (1), dans laquelle on a remplacé x et y par z. Si l'on divise cette équation par $\lambda - \mu$ (ce qui revient à faire abstraction de la tangente OX), on trouve aisément que, en posant

$$u = \mathrm{R}e^{-\varphi i} - \beta = \mathrm{R}e^{\varphi i} - \alpha,$$

les coefficients angulaires des deux autres tangentes sont déterminés par l'équation

$$\mathrm{R}e^{-\varphi i}\lambda^2 + (u + z)\lambda\mu + \mathrm{R}e^{\varphi i}\mu^2 = 0.$$

En laissant de côté le point où la courbe est tangente à OX, on obtiendra les deux autres points où elle rencontre cette droite en exprimant que l'équation précédente a deux racines égales, ce qui donne la relation

$$(u + z)^2 = 4\mathrm{R}^2.$$

Si maintenant on remarque que, les deux points d'intersection dont je viens de parler étant à égale distance de l'origine O, les deux valeurs obtenues pour z doivent être égales et de signes contraires, on en conclut

$$u = \mathrm{R}e^{-i\varphi} - \beta = \mathrm{R}e^{i\varphi} - \alpha = 0,$$

d'où

$$\alpha = \mathrm{R}e^{i\varphi} \quad \text{et} \quad \beta = \mathrm{R}e^{-i\varphi}.$$

Ainsi le centre ω du cercle K, lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'hypocycloïde, est situé sur la droite qui fait avec l'axe OX un angle égal à φ et à une distance égale à R, c'est-à-dire au rayon de ce cercle. En désignant par A et A' les deux points de rencontre de OX avec la courbe, on voit ainsi que ce cercle passe par le milieu O du segment AA' et que ce segment a une longueur constante égale à 4R, propositions bien connues.

5. En remplaçant dans l'équation (1) α et β par leurs valeurs, l'équation mixte de l'hypocycloïde prend la forme suivante :

$$(2) \qquad R(\lambda - \mu)(e^{-i\varphi}\lambda^2 + e^{i\varphi}\mu^2) + \lambda\mu(\lambda y - \mu x) = 0,$$

et l'équation qui donne les coefficients angulaires des tangentes issues d'un point de l'axe OX ($x = y = z$) devient

$$(3) \qquad Re^{-i\varphi}\lambda^2 + z\lambda\mu + Re^{i\varphi}\mu^2 = 0.$$

En particulier, les tangentes issues du point A', pour lequel on a $z = -2R$, sont déterminées par l'équation

$$\left(e^{-\frac{i\varphi}{2}}\lambda - e^{\frac{i\varphi}{2}}\mu\right)^2 = 0,$$

d'où l'on voit que la tangente menée au point A' fait avec l'axe OX un angle égal à $\frac{\varphi}{2}$.

Si donc on prend sur le cercle K le point O' diamétralement opposé au point O, cette tangente est précisément la droite A'O'; la droite O'A est également tangente à l'hypocycloïde au point A, et ces deux droites, conformément à une proposition bien connue, sont rectangulaires entre elles.

6. On voit que l'on peut, par les points A et A', mener une infinité d'hypocycloïdes tangentes à l'axe OX; toutes ces courbes sont d'ailleurs égales entre elles, puisque la longueur du segment AA' détermine le rayon du cercle K et par suite la grandeur de la courbe elle-même. On les obtiendra toutes en donnant à φ toutes les valeurs possibles dans l'équation (2).

Soient deux de ces courbes H_φ et $H_{\varphi+\theta}$ caractérisées par deux valeurs de l'angle φ différant entre elles de l'angle θ; si l'on désigne par ω et ω_1 les centres des cercles des points desquels on voit respectivement ces courbes sous un angle droit, on voit que l'angle $\omega O \omega_1$ est précisément égal à θ.

D'un point M situé sur l'axe OX et à une distance du point O égale à z, menons aux deux courbes K_φ et $K_{\varphi+\theta}$ les tangentes distinctes de l'axe.

Les coefficients angulaires de ces tangentes sont respectivement déterminés par les deux équations

$$Re^{-i\varphi}\lambda^2 + z\lambda\mu + Re^{i\varphi}\mu^2 = 0$$

et

$$Re^{-i(\varphi+\theta)}\lambda^2 + z\lambda\mu + Re^{i(\varphi+\theta)}\mu^2 = 0;$$

ceux des tangentes menées à $H_{\varphi+\theta}$ se déduisent évidemment de ceux des tangentes menées à H_φ, en les multipliant par le facteur constant $e^{-\theta i}$; en d'autres termes, les tangentes à $H_{\varphi+\theta}$ s'obtiennent en faisant tourner de l'angle $\frac{\theta}{2}$ les tangentes à H_φ.

D'où la proposition suivante :

Si l'on considère une droite quelconque D *tangente à une hypocycloïde à trois points de rebroussement, et si l'on imagine un angle de grandeur constante dont le sommet décrit cette droite tandis qu'un de ses côtés demeure tangent à la courbe, le second côté de cet angle enveloppe une autre hypocycloïde égale à la première, tangente à la droite* D *et passant par les deux points où cette droite coupe la première hypocycloïde.*

Ce que l'on peut encore énoncer ainsi :

Soit une hypocycloïde à trois points de rebroussement qui se déplace sans changer de forme, en restant tangente à une droite fixe D *et en passant par un point fixe de cette droite* (auquel cas elle passe nécessairement par un autre point fixe situé sur la même droite); *par différents points de* D *menons des tangentes à la courbe, et imaginons que, pendant le déplacement de cette courbe, ces droites lui demeurent tangentes; pour deux positions quelconques de l'hypocycloïde mobile, les angles décrits par les tangentes autour des points fixes de* D *sont tous égaux entre eux.*

7. J'ajouterai que dans le mouvement les points de contact décrivent des cercles, ce que, du reste, des considérations géomé-

triques très-simples rendent évident. Considérons, en effet, un point M situé sur l'axe OX, à une distance de l'origine égale à z. En désignant simplement par μ le coefficient angulaire d'une des tangentes menées de ce point à la courbe (ce qui revient à faire $\lambda = 1$), l'équation de cette tangente est

$$\frac{y-z}{x-z} = \mu, \tag{4}$$

et l'on a la relation

$$\mathrm{R}e^{i\varphi}\mu^2 + z\mu + \mathrm{R}e^{-i\varphi} = 0. \tag{5}$$

Les coordonnées du point de contact s'obtiendront en résolvant par rapport à x et y l'équation (4) et l'équation suivante, que l'on en déduit en la dérivant par rapport à z :

$$\frac{y-x}{(x-z)^2} = \frac{d\mu}{dz}.$$

De l'équation (5) on déduit d'ailleurs

$$(2\mathrm{R}e^{i\varphi}\mu + z)\frac{d\mu}{dz} + \mu = 0,$$

d'où

$$\frac{d\mu}{dz} = -\frac{\mu}{\sqrt{z^2 - 4\mathrm{R}^2}}$$

et

$$\frac{y-x}{(x-z)^2} + \frac{\mu}{\sqrt{z^2-4\mathrm{R}^2}} = 0. \tag{6}$$

Pour obtenir le lieu des points de contact, il faut éliminer φ et μ entre les équations (4), (5) et (6), ou simplement μ entre les équations (4) et (6), qui ne renferment pas φ.

On obtient ainsi l'équation

$$(x-z)(y-z) + (y-x)\sqrt{z^2 - 4\mathrm{R}^2} = 0,$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$\left(y - z - \sqrt{z^2 - 4\mathrm{R}^2}\right)\left(x - z + \sqrt{z^2 - 4\mathrm{R}^2}\right) = 4\mathrm{R}^2 - z^2.$$

Elle représente deux cercles tangents au point M à l'axe OX ; leurs centres sont situés à l'intersection de la perpendiculaire élevée à l'axe en ce point avec le cercle décrit sur AA′ comme diamètre.

8. Si l'on considère, comme précédemment, les deux hypocycloïdes H_φ et $H_{\varphi+\theta}$, on voit que le sommet d'un angle circonscrit à ces deux courbes et ayant pour valeur $\frac{\theta}{2}$ décrit un lieu dont fait partie la tangente commune OX; on peut rechercher si cette droite constitue à elle seule le lieu complet.

Je remarque, à cet effet, que les coefficients angulaires des tangentes menées du point (x, y) à la courbe H_φ sont déterminés par l'équation

$$(2) \qquad R(\lambda-\mu)(e^{-i\varphi}\lambda^2+e^{i\varphi}\mu^2)+\lambda\mu(\lambda y-\mu x)=0,$$

et ceux des tangentes menées du même point à la courbe $H_{\varphi+\theta}$ par l'équation

$$R(\lambda'-\mu')(e^{-i(\varphi+\theta)}\lambda'^2+e^{i(\varphi+\theta)}\mu'^2)+\lambda'\mu'(\lambda' y-\mu' x)=0.$$

Si les deux tangentes font l'angle donné $\frac{\theta}{2}$, on a

$$\frac{\lambda'}{\mu'}=\frac{\lambda e^{\frac{\theta i}{2}}}{\mu e^{-\frac{\theta i}{2}}},$$

et l'équation précédente devient

$$(7) \quad R\left(e^{\frac{\theta i}{2}}\lambda-e^{-\frac{\theta i}{2}}\mu\right)(e^{-i\varphi}\lambda^2+e^{i\varphi}\mu^2)+\lambda\mu\left(e^{\frac{\theta i}{2}}y\lambda-e^{-\frac{\theta i}{2}}x\mu\right)=0.$$

Reste à éliminer λ et μ entre les relations (2) et (7); en éliminant entre elles l'expression $e^{-i\varphi}\lambda^2+e^{i\varphi}\mu^2$, il vient

$$\frac{e^{\frac{\theta i}{2}}\lambda-e^{-\frac{\theta i}{2}}\mu}{\lambda-\mu}=\frac{e^{\frac{\theta i}{2}}\lambda y-e^{-\frac{\theta i}{2}}\mu x}{\lambda y-\mu x},$$

et, en effectuant les calculs,

$$(y-x)\left(e^{\frac{\theta i}{2}}-e^{-\frac{\theta i}{2}}\right)=0.$$

La tangente OX constitue donc bien à elle seule le lieu du sommet de l'angle constant circonscrit aux deux courbes.

9. Les hypocycloïdes H_φ et $H_{\varphi+\theta}$, qui touchent toutes les deux l'axe OX, ont, en outre, deux autres tangentes communes; pour avoir leur équation, il suffit d'éliminer λ et μ entre l'équation (2) et l'équation

$$(8) \qquad R(\lambda-\mu)\left(e^{-i(\varphi+\theta)}\lambda^2+e^{i(\varphi+\theta)}\mu^2\right)+\lambda\mu(\lambda y-\mu x)=0.$$

Éliminant d'abord $\lambda y-\mu x$ entre ces égalités, il vient

$$\lambda^2 e^{-i\varphi}(1-e^{-i\theta})+\mu^2 e^{i\varphi}(1-e^{i\theta})=0,$$

d'où, par une transformation facile,

$$\frac{\lambda}{\mu}=\pm e^{\varphi+\frac{\theta}{2}}.$$

Les angles que font ces deux tangentes avec l'axe OX sont donc égaux à $\frac{\varphi}{2}+\frac{\theta}{4}$ et à $\frac{\varphi}{2}+\frac{\theta}{4}+\frac{\pi}{4}$; ces deux droites sont à angle droit. De là une construction qui permet de les obtenir aisément. Soient, en effet, K et K_1 les cercles des points desquels on voit respectivement sous un angle droit les courbes H_φ et $H_{\varphi+\theta}$; ces cercles, indépendamment du point O, se coupent encore en un second point M. Ce point est nécessairement le point de rencontre des tangentes cherchées, puisqu'elles sont rectangulaires entre elles. Si maintenant nous prolongeons le rayon OM jusqu'en son point de rencontre N avec le cercle décrit sur AA′ comme diamètre, il résulte des considérations précédentes que les deux tangentes communes qui se croisent au point M sont parallèles aux droites NA et NA′.

D'où encore la proposition suivante :

Soit une hypocycloïde à trois points de rebroussement qui passe par deux points donnés A *et* A′ *et est tangente à la corde* AA′; *sur cette corde comme diamètre décrivons un cercle* B *et considérons le cercle* K, *lieu des points d'où l'on voit l'hypocycloïde sous un angle droit. Ce cercle passe, comme on le sait, par le point* O, *milieu de la corde* AA′, *et, en outre, est tangent au cercle* C.

Étant pris un point quelconque M *sur le cercle* K, *si l'on prolonge le rayon* OM *jusqu'en son point de rencontre* N *avec le* *cercle* C, *les droites menées par le point* M *parallèlement aux droites* NA *et* NA′ *sont les deux tangentes rectangulaires entre elles que de ce point on peut mener à la courbe.*

10. Les diverses hypocycloïdes qui, passant par les deux points A et A′, sont tangentes à la corde AA′, étant identiques entre elles, on peut les obtenir toutes par le déplacement d'une de ces courbes dans le plan.

Pour avoir une idée nette de ce déplacement, il faut chercher le lieu des centres instantanés de rotation dans le plan et le lieu décrit par ces centres relativement à la courbe mobile.

La courbe roulant sur les deux points A et A′, les normales menées en ces points sont respectivement perpendiculaires aux droites AO′ et A′O′, et par conséquent se coupent sur le cercle C décrit sur AA′ comme diamètre au point diamétralement opposé à O′; le lieu des centres instantanés de rotation dans le plan est donc le cercle C, dont le rayon est égal à 2R. On sait d'ailleurs que les normales aux extrémités de la corde AA′ se coupent sur le cercle passant par les trois points de rebroussement de l'hypocycloïde, cercle dont le rayon est égal à 3R.

D'où la conclusion qui suit :

Étant pris sur un cercle C *de rayon égal à* 2R *deux points diamétralement opposés* A *et* A′, *si l'on fait rouler ce cercle dans l'intérieur d'un cercle* C′ *de rayon égal à* 3R, *on sait que les deux points* A *et* A′ *décrivent une même hypocycloïde à trois points de rebroussement inscrite dans le cercle* C′. *A un instant quelconque du mouvement, les points* A *et* A′ *sont situés sur l'hypocycloïde, tandis que la droite* AA′ *lui est tangente; si à cet instant on fixe le cercle* C, *et si l'on fait rouler sur ce cercle le cercle* C′ *en entraînant avec lui la courbe, cette courbe, dans son déplacement, passe constamment par les points fixes* A *et* A′ *et demeure tangente à la droite* AA′.

II.

11. Les résultats qui précèdent peuvent se déduire aisément de quelques propositions très-simples et purement géométriques.

Considérons, à cet effet, une ellipse E située dans l'espace et dont la projection orthogonale sur un plan donné P soit un cercle C; prenons arbitrairement sur cette courbe un point fixe A et un point mobile M. Si par le milieu I de la corde AM nous menons un plan perpendiculaire à cette corde, il coupe le plan P suivant une droite dont l'enveloppe est une courbe H que l'on peut aussi évidemment définir comme le lieu des centres des sphères symétriques par rapport au plan P et tangentes à l'ellipse E.

Je dis d'abord que la courbe H est une hypocycloïde à trois points de rebroussement.

Soit D une droite située dans le plan P; si d'un point quelconque N de cette droite comme centre on décrit une sphère passant par le point A, cette sphère coupe le plan Q de l'ellipse suivant un cercle passant par le point A et par le point A' qui lui est symétrique par rapport à la projection orthogonale de D sur le plan Q.

Il est clair que le point N est sur la courbe H si ce cercle est tangent à l'ellipse, et, comme par les points A et A' on peut mener quatre cercles tangents à E, il en résulte que la courbe K est du quatrième ordre.

Soit N un point quelconque du plan P; de ce point comme centre décrivons une sphère passant par le point A; cette sphère coupe le plan Q suivant un cercle rencontrant l'ellipse au point A et en trois autres points B, C et D. Les plans menés respectivement par les milieux des cordes AB, AC et AD coupent le plan P suivant des droites tangentes à H et se croisant au point donné N.

La courbe H est donc de la troisième classe.

Si le point N est rejeté à l'infini dans une direction quelconque, la sphère dont je viens de parler se réduit au plan mené par A perpendiculairement à cette direction, et, comme ce plan ne coupe E qu'en un point, il est clair qu'on ne peut mener à la courbe H qu'une tangente parallèle à une direction donnée. Cette courbe est donc doublement tangente à la droite de l'infini, et les points de contact sont situés sur les perpendiculaires menées aux asymptotes de la projection de l'ellipse sur le plan P. Cette projection étant un cercle, ces asymptotes, ainsi que leurs perpendiculaires, sont des droites isotropes. La courbe H est donc de troisième classe et doublement tangente, aux ombilics, à la droite de l'infini; par suite, c'est une hypocycloïde à trois points de rebroussement.

12. Cette hypocycloïde a, comme on le sait, trois points de rebroussement α, β, γ qui sont les sommets d'un triangle équilatéral, et le centre du cercle circonscrit à ce triangle est le point de concours des tangentes de rebroussement.

Considérons l'un quelconque α de ces points de rebroussement; les tangentes que l'on peut de ce point mener à la courbe étant toutes les trois confondues en une seule droite, la sphère passant par A et décrite du point α comme centre coupe le plan Q suivant un cercle passant par A et osculateur de l'ellipse E en un point α'; la projection sur le plan Q de la tangente de rebroussement au point α est d'ailleurs la droite menée par le milieu de la corde $A\alpha$ et perpendiculairement à cette corde.

Si maintenant on remarque que les trois tangentes de rebroussement sont concourantes, on obtiendra la proposition suivante, due à Steiner :

Étant donné sur une ellipse un point quelconque A, *on peut déterminer trois cercles osculateurs de cette courbe qui passent par le point* A; *les trois points de contact et le point* A *sont sur un même cercle.*

D'après ce que je viens d'exposer, on peut ajouter que :

Si l'ellipse se projette orthogonalement sur un plan donné P *suivant une circonférence de cercle, les droites menées perpendiculairement au plan de l'ellipse par les trois points de contact rencontrent le plan* P *en trois points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral, et la droite menée par le centre du cercle circonscrit aux trois points de contact et perpendiculairement à son plan rencontre le plan* P *au centre du cercle circonscrit à ce triangle équilatéral.*

13. Prenons sur l'ellipse E un autre point fixe B; à ce point correspond une seconde hypocycloïde H'. Cherchons les tangentes communes aux courbes H et H'.

Je désigne par F et G les deux axes de l'ellipse, par f et g les droites suivant lesquelles le plan P est coupé par les plans menés respectivement par F et G et normalement au plan Q. Les droites f et g sont évidemment perpendiculaires entre elles, puisque F est parallèle au plan P.

Cela posé, si des points A et B on mène dans le plan Q des perpendiculaires à F, cet axe les divise en deux parties égales; il en résulte que f est une tangente commune à H et H′, et les mêmes considérations s'appliquent à la droite g. Les deux courbes ont donc déjà en commun deux tangentes rectangulaires entre elles.

Considérons maintenant la corde AB et le plan mené par son point milieu perpendiculairement à sa direction; il coupe le plan P suivant une droite D qui est aussi tangente aux deux hypocycloïdes.

14. Les points de contact de cette droite s'obtiendront évidemment en prenant son intersection avec les plans menés en A et en B normalement à l'ellipse.

Pour obtenir les autres points où elle rencontre les deux courbes, je mène par les points A et B un cercle tangent à l'ellipse; on peut mener deux de ces cercles, et leurs points de contact m et m' sont diamétralement opposés. Si l'on construit les axes [1] de ces deux cercles, il est clair qu'ils rencontrent D en deux points appartenant à la fois à H et H′. Soient n et n' ces deux points; on voit que les hypocycloïdes ont une corde commune à laquelle elles sont toutes les deux tangentes : *elles sont donc égales entre elles.*

On peut remarquer que les droites menées aux points n et n' tangentiellement à la courbe H sont les traces de deux plans perpendiculaires aux cordes Am et Am'; elles sont donc perpendiculaires à leurs projections sur le plan P, et, comme la projection du diamètre mm' passe par le centre du cercle C, on voit que ces projections sont rectangulaires; il en est donc de même des deux tangentes aux points n et n', proposition bien connue.

15. Lorsque le point A se déplace sur l'ellipse, l'hypocycloïde qui lui correspond demeure, comme je viens de le montrer, inva-

---

[1] J'appelle, pour abréger, *axe d'un cercle* la droite passant par le centre de ce cercle et perpendiculaire à son plan.

riable de forme en restant tangente aux deux droites fixes f et g. Je dis que la droite qui joint les deux points de contact est la trace sur le plan P du plan normal à l'ellipse au point A.

Menons, en effet, par le point A les cordes Aa et Ab, respectivement perpendiculaires aux axes F et G. Le point où la droite f touche l'hypocycloïde H est le point de rencontre du plan P avec l'axe du cercle bitangent à l'ellipse aux points A et a. Si donc au point A on mène le plan normal à cette courbe, il contient ce point de contact; par une raison semblable, il contient l'autre point de contact. La proposition que je voulais démontrer est donc établie.

16. Si le point A se déplace infiniment peu sur l'ellipse, l'hypocycloïde H roule sur les deux droites f et g; la droite qui joint les deux points de contact est une corde commune aux deux courbes et, de plus, leur est tangente; par suite, elle a une longueur constante.

Donc :

Les traces, sur le plan P, *des plans normaux à l'ellipse* E *enveloppent une hypocycloïde à quatre points de rebroussement. Le lieu des centres des sphères doublement tangentes à l'ellipse se compose des deux tangentes doubles de rebroussement de cette hypocycloïde.*

17. Au lieu de considérer une ellipse, j'aurais pu considérer une biquadratique quelconque, ayant pour plan de symétrie le plan P et située sur un cylindre dont la base est un cercle situé dans ce plan.

Sans rien changer aux démonstrations qui précèdent, on obtiendrait facilement les propositions qui suivent :

Étant donnée une biquadratique résultant de l'intersection d'un cylindre droit, ayant pour base un cercle situé dans un plan P, *avec une surface quelconque du second ordre ayant ce plan pour plan de symétrie, le lieu des centres des sphères qui, passant par les extrémités d'une corde de la courbe perpendiculaire au plan* P, *sont doublement tangentes à cette courbe, est une hypocycloïde* H *à trois points de rebroussement située dans le plan de symétrie.*

Si l'on considère les diverses cordes de la courbe perpendiculaires au plan P, *les diverses hypocycloïdes qui leur correspondent sont identiques et ne diffèrent que par leur position dans le plan.*

Les traces sur le plan de symétrie des plans normaux à la biquadratique enveloppent une hypocycloïde à quatre points de rebroussement.

Les centres des sphères quadruplement tangentes à la biquadratique décrivent les deux droites rectangulaires qui constituent les tangentes doubles de rebroussement de cette dernière hypocycloïde.

18. La considération des trois points de rebroussement de l'hypocycloïde H conduit, relativement aux biquadratiques douées d'un plan de symétrie, à un théorème analogue à celui qui a été donné par Steiner relativement aux coniques, et que j'ai rappelé plus haut.

Comme il est facile de le voir, il n'est pas besoin de supposer que la projection de la biquadratique sur le plan de symétrie soit un cercle, et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Étant donnée une biquadratique quelconque ayant pour plan de symétrie un plan donné P, *par les extrémités d'une corde quelconque de cette courbe perpendiculaire au plan* P, *on peut mener trois sphères qui ont avec la courbe un double contact du second ordre; les six points de contact et les extrémités de la corde sont sur une même sphère dont le centre est dans le plan de symétrie.*

Si la biquadratique se projette suivant un cercle sur le plan de symétrie, on peut ajouter que :

Les centres des trois sphères qui ont un double contact sont les sommets d'un triangle équilatéral, et le centre de la sphère qui contient les points de contact est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

19. Je reviens maintenant au cas précédemment étudié de l'ellipse E, quoique les considérations suivantes s'appliquent encore sans modification au cas plus général où l'on considère une biquadratique.

J'ai montré que, quand le point A se déplaçait sur l'ellipse, l'hypocycloïde H se déplaçait, sans changer de forme, dans le plan P.

Pour étudier la loi de ce déplacement, je remarque que, en désignant respectivement par φ et γ les points où H touche les droites f et g, la droite $\varphi\gamma$ a une longueur constante, que j'appellerai 4R. Les normales à la courbe menées aux points φ et γ se rencontrent en un point dont la distance au point d'intersection de f et de g est constante et égale à 4R. Le centre instantané de rotation décrit donc dans le plan un cercle de rayon égal à 4R. On sait d'ailleurs que, relativement à la courbe, il décrit le cercle qui lui est circonscrit et dont le rayon est égal à 3R.

On peut, par suite, se représenter ainsi qu'il suit le déplacement de l'hypocycloïde dans son plan :

Imaginons un cercle K *de rayon égal à* 4R, *puis deux autres cercles* K′ *et* K″ *de rayons respectivement égaux à* 3R *et à* 2R *et qui touchent tous les deux* K *au même point* M. *Si l'on considère le diamètre* Δ *du cercle* K″ *qui passe par le point* M, *et si l'on fait rouler ce cercle dans le cercle* K′, *supposé fixe, en entraînant avec lui ce diamètre, on sait que cette droite enveloppe une hypocycloïde* H *à trois points de rebroussement inscrite dans le cercle* R′.

Si maintenant on suppose que, cette courbe restant invariablement liée au cercle K′, *on fasse rouler ce cercle dans le cercle* R, *l'hypocycloïde prendra successivement les diverses positions qui correspondent aux diverses positions du point* A *sur l'ellipse.*

Si, de plus, on imagine que le cercle K″ *roule, en même temps que le cercle* K′, *dans l'intérieur du cercle* K, *et de façon qu'ils le touchent tous les deux toujours au même point, la droite* Δ, *dans ce mouvement, enveloppera l'hypocycloïde à quatre points de rebroussement qui est l'enveloppe des traces des plans normaux à l'ellipse, tandis que ses extrémités décriront les axes de cette hypocycloïde.*

20. Considérons les deux hypocycloïdes H et H′ qui correspondent à deux points donnés A et B de l'ellipse E.

Soit R un point quelconque de cette ellipse ; les plans menés respectivement par les milieux des deux cordes AB et BR et normalement à ces cordes coupent le plan P suivant deux droites β et γ respectivement tangentes aux courbes H et H'.

Si, comme précédemment, nous appelons D la droite suivant laquelle le plan P est coupé par le plan mené par le milieu de AB et perpendiculairement à cette corde, nous savons que D est à la fois une tangente commune et une corde commune à H et à H'. D'ailleurs, les perpendiculaires élevées aux points milieux des côtés d'un triangle se coupant en un même point, il en résulte que les tangentes β et γ se rencontrent en un point de D. Elles sont, du reste, perpendiculaires aux projections sur le plan P des cordes AR et BR, et, comme ces cordes font un angle constant (leur point de rencontre décrit, en effet, le cercle C, tandis qu'elles tournent autour de points fixes de ce cercle), il en est de même de ces tangentes.

D'où le théorème suivant, que j'ai déjà démontré plus haut :

Si l'on considère une droite quelconque tangente à une hypocycloïde à trois points de rebroussement, et si l'on imagine un angle de grandeur constante dont le sommet décrit cette droite, tandis qu'un de ses côtés demeure tangent à la courbe, le second côté de cet angle enveloppe une hypocycloïde égale à la première.

21. Les considérations géométriques très-simples dont je me suis servi trouvent d'ailleurs, dans d'autres questions, des applications intéressantes. Je me bornerai ici à énoncer la proposition suivante :

Supposons que le sommet d'un angle de grandeur constante décrive une droite D, *tandis que ses côtés enveloppent deux courbes* K *et* K'; *pour une position donnée de l'angle, soient respectivement a et a' les points de contact des deux côtés.*

Cela posé, si l'on construit l'hypocycloïde à trois points de rebroussement qui oscule la courbe K *au point a et touche la droite* D, *puis l'hypocycloïde qui oscule la courbe* K' *au point a' et touche également la droite* D, *ces deux hypocycloïdes sont égales et rencontrent* D *aux deux mêmes points.*