BULLETIN DE LA S. M. F.

HERVÉ JACQUET

Fonctions de Whittaker associées aux groupes de Chevalley

Bulletin de la S. M. F., tome 95 (1967), p. 243-309
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1967__95__243_0>

Bull. Soc. math. France,
95, 1967, p. 243 à 309.

FONCTIONS DE WHITTAKER ASSOCIÉES AUX GROUPES DE CHEVALLEY

PAR

Hervé JACQUET (*).

Introduction.

Soient k un corps de nombres et G un groupe algébrique semi-simple défini et déployé sur k. Soient A un tore maximal de G décomposé sur k et P un k-sous-groupe parabolique minimal contenant A. Soit N le radical unipotent de P. On désigne par W le groupe de Weyl de G par rapport à A et par $\mathbf{A}$ l'anneau des adèles du corps k. Le groupe adélifié $G(\mathbf{A})$ est donc un groupe localement compact. On choisit un sous-groupe compact maximal M de $G(\mathbf{A})$ « adapté » à A (*cf.* § 7). En particulier, on a $G(\mathbf{A}) = MP(\mathbf{A})$.

Soit X^* l'espace des caractères généralisés du groupe $P(\mathbf{A})$, c'est-à-dire des homomorphismes continus de $P(\mathbf{A})$ dans $\mathbf{C}^*$, qui sont triviaux sur $P(k)$ et $N(\mathbf{A})$. Un $\lambda \in X^*$ est déterminé par sa restriction à $A(\mathbf{A})$, et en particulier W opère sur X^*. De plus, X^* est muni d'une structure complexe naturelle. Soit $\mathfrak{D}$ une représentation unitaire de dimension finie du groupe compact M. On désigne par $P(\mathfrak{D}, \lambda)$ le projecteur orthogonal sur le sous-espace des vecteurs v de l'espace de $\mathfrak{D}$ tels que

$$\mathfrak{D}(m)\, v = \lambda^{-1}(m)\, v \qquad \text{pour} \quad m \in P(\mathbf{A}) \cap M,$$

et l'on pose

$$L(g, \lambda) = \mathfrak{D}(m)\, \lambda^{-1}(p)\, P(\mathfrak{D}, \lambda) \qquad \text{pour} \quad g = mp.$$

On définit ainsi une fonction holomorphe de λ, et la série d'Eisenstein

$$E(g, \lambda) = \sum_{G(k)/P(k)} L(g\gamma, \lambda)$$

(*) *Thèse Sc. math.*, Paris, 1967.

converge absolument pour λ dans un domaine convenable et se prolonge en une fonction méromorphe de λ. De plus, elle vérifie une équation fonctionnelle de la forme

$$E(g, \lambda + \rho) = E(g, w\lambda) + \rho) A(w, \lambda),$$

où, pour chaque $w \in W$, $A(w, \lambda)$ est un opérateur fonction méromorphe de λ, et où ρ désigne le module du groupe $P(\mathbf{A})$.

Soit ζ un caractère de module 1 du groupe localement compact $N(\mathbf{A})$ qui soit trivial sur le sous-groupe discret $N(k)$. Comme le quotient $N(\mathbf{A})/N(k)$ est compact, l'intégrale

$$\Phi(g, \lambda) = \int_{N(\mathbf{A})/N(k)} E(gn, \lambda)\, \zeta(n)\, dn$$

est absolument convergente et définit une fonction méromorphe de λ. Pour tout $w \in W$, on désigne par N_w le groupe $(wNw^{-1}) \cap N$. Avec cette notation, le théorème de Bruhat permet d'écrire

$$E(g, \lambda) = \sum_{w \in W} \sum_{N(k)/N_w(k)} L(g\gamma w, \lambda),$$

et l'on a donc, dans le domaine de convergence de la série d'Eisenstein,

$$\begin{aligned}
\Phi(g, \lambda) &= \sum_{w \in W} \int_{N(\mathbf{A})/N(k)} \zeta(n)\, dn \sum_{N(k)/N_w(k)} L(gn\gamma w, \lambda) \\
&= \sum_{w \in W} \int_{N(\mathbf{A})/N_w(k)} L(gnw, \lambda)\, \zeta(n)\, dn \\
&= \sum_{w \in W} \int_{N(\mathbf{A})/N_w(\mathbf{A})} L(gnw, \lambda)\, \zeta(n)\, dn \int_{N_w(\mathbf{A})/N_w(k)} \zeta(u)\, du
\end{aligned}$$

puisque $L(gw, \lambda)$ est invariante à droite par $N_w(\mathbf{A})$. Si ζ est « générique », i. e. n'est trivial sur aucun des groupes $N_w(\mathbf{A}) \neq \{ e \}$, on voit que

$$\int_{N_w(\mathbf{A})/N_w(k)} \zeta(u)\, du = 0,$$

sauf pour l'unique élément $w_0 \in W$ tel que $N_{w_0} = \{ e \}$. On a $w_0^{-1} N w_0 = N^-$, où N^- est le sous-groupe unipotent « opposé » à N. On désigne par ξ le caractère $n \mapsto \zeta(w_0 n w_0^{-1})$ de $N^-(\mathbf{A})$. On voit que

$$\Phi(g w_0^{-1}, \lambda) = \int_{N^-(\mathbf{A})} L(gn^-, \lambda)\, \xi(n^-)\, dn^-.$$

Cette intégrale converge donc absolument dans le domaine de convergence des séries d'Eisenstein et se prolonge en une fonction méromorphe de λ vérifiant la même équation fonctionnelle que les séries d'Eisenstein.

On donnera une démonstration directe de ce résultat ne faisant pas intervenir la théorie des séries d'Eisenstein. D'autre part, il est naturel de chercher à remplacer ξ par un coefficient d'une représentation unitaire irréductible de $N^-(A)$ contenue dans $L^2[N^-(\mathbf{A})/N^-(k)]$. Une telle représentation est induite par un caractère de module 1 d'un sous-groupe de la forme $V(\mathbf{A})$, où V désigne un sous-groupe algébrique de N^-, ce caractère étant trivial sur $V(k)$. Il revient donc au même d'étudier l'intégrale :

$$\Phi(g, \lambda) = \int_{V(\mathbf{A})} L(gv, \lambda)\, \xi(v)\, dv$$

pour tout caractère ξ de module 1 du groupe $V(\mathbf{A})$. On étudiera effectivement de telles intégrales pour une classe assez étendue de sous-groupes de N^-, les sous-groupes « hémicycles ».

D'autre part, on peut se poser des problèmes tout à fait analogues dans le cadre local. Si G désigne maintenant un groupe semi-simple de Chevalley, i. e. déployé, sur un corps localement compact K, on peut étudier sur le groupe $G(K)$ des intégrales analogues. C'est ce problème qu'on abordera d'abord. Le paragraphe 1 est consacré au cas crucial du groupe $G = \mathbf{SL}(2, K)$. Au paragraphe 2, on étudie la convergence des intégrales précédentes, et au paragraphe 5, on en fait le prolongement analytique. On a renvoyé dans les paragraphes 4, 5, 6 des calculs et des vérifications explicites. Enfin, au dernier paragraphe, on indique comment il convient de modifier les résultats et démonstrations du cas local pour les adapter au cas global.

Pour terminer cette introduction, il me reste à remercier R. Godement pour l'aide, les encouragements et les critiques qu'il n'a cessé de me prodiguer. Je remercie également G. Schiffmann qui a aidé à éliminer du texte nombre d'erreurs matérielles ou autres. Enfin, je dois beaucoup de reconnaissance à R. P. Langlands pour les commentaires qu'il a faits sur ce travail et qui permettront sans doute d'avancer dans une voie non encore défrichée.

1. Cas du groupe SL (2, K).

Dans le présent paragraphe, on désigne par K un corps localement compact commutatif, non discret, de caractéristique quelconque.

Si K est le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels, on désigne par $|x|$ la valeur absolue usuelle d'un élément $x \in \mathbf{R}$ et par dx la mesure de Lebesgue du groupe additif.

Si K est le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes, on désigne par dx la mesure de Haar du groupe additif qui est deux fois la mesure de Haar usuelle. Pour $x \in \mathbf{C}$, on désigne par $|x| = x\bar{x}$ le carré de la valeur absolue usuelle.

Si K est un corps non archimédien, on appelle $\mathfrak{O}$ l'anneau des entiers, $\mathfrak{p}$ l'idéal maximal de $\mathfrak{O}$, $v_{\mathfrak{p}}$ ou simplement v la valuation normalisée, $N(\mathfrak{p})$ ou simplement N le nombre d'éléments du corps résiduel fini $\mathfrak{O}/\mathfrak{p}$. On désigne par $|x| = N^{-v(x)}$ la valeur absolue normalisée et par dx la mesure de Haar du groupe additif K pour laquelle l'anneau $\mathfrak{O}$ est de mesure 1.

Dans tous les cas, on a $d(yx) = |y|\,dx$, et la mesure $d^*x = \dfrac{dx}{|x|}$ est une mesure de Haar du groupe multiplicatif K^*.

Pour tout entier n, soit $\mathcal{S}(K^n)$ l'espace des fonctions de Schwartz-Bruhat à valeurs complexes sur K^n.

Si $K = \mathbf{R}$, un élément de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ est donc une fonction indéfiniment dérivable à décroissance rapide.

Si $K = \mathbf{C}$, on a $K^n = \mathbf{R}^{2n}$, et les éléments de $\mathcal{S}(K^n)$ sont de même nature que dans le cas précédent.

Si est K un corps non archimédien, $\mathcal{S}(K^n)$ est l'espace des fonctions complexes localement constantes à support compact.

Dans tous les cas, on définit sur $\mathcal{S}(K^n)$ une topologie d'espace localement convexe. Dans la suite, par ensemble borné dans $\mathcal{S}(K^n)$, on entend toujours un ensemble borné pour cette topologie.

Soit τ un caractère de module 1, non trivial, du groupe additif K. Le groupe K est mis en dualité de Pontrjagin avec lui-même par $(x, y) \mapsto \tau(xy)$. La transformée de Fourier d'une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(K)$ est définie par la formule

$$\hat{\varphi}(u) = \int_K \varphi(x)\,\tau(ux)\,dx.$$

L'application $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ est un homéomorphisme de l'espace $\mathcal{S}(K)$ sur lui-même. Dans la suite, on supposera τ choisi de façon que la formule de réciprocité de Fourier s'écrive

$$\int \hat{\varphi}(u)\,\tau(-uv)\,du = \varphi(v).$$

On considère le groupe $G = \mathbf{SL}(2, K)$ comme groupe algébrique défini sur K, et l'on note B, N, N^-, A les sous-groupes algébriques de G formés respectivement des matrices triangulaires supérieures, triangulaires strictes supérieures, triangulaires strictes inférieures, diagonales. On voit que A est un tore maximal de G décomposé sur K et B un sous-groupe de Borel de G contenant A. On définit un caractère rationnel Λ de A ou de B par la formule

$$\Lambda\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = a.$$

L'unique racine positive correspondant au choix de ce groupe de Borel est le carré de ce caractère. La symétrie par rapport à cette racine change Λ en son inverse.

On choisit de la façon suivante un sous-groupe compact maximal M de $G(K)$: si $K = \mathbf{R}$, on prend $M = \mathbf{SO}(2, \mathbf{R})$; si $K = \mathbf{C}$, on prend $M = \mathbf{SU}(2, \mathbf{C})$; si K est un corps non archimédien, on prend $M = \mathbf{SL}(2, \mathfrak{O})$. Dans tous les cas, on a la décomposition d'Ivasawa :

$$G(K) = MA(K)N(K) = MB(K).$$

Soit $\mathfrak{D}$ une représentation unitaire de M dans un espace hilbertien $\mathcal{H}(\mathfrak{D})$ de dimension finie et soit χ un caractère de module 1 du groupe K^*. Soit, d'autre part, $s \in \mathbf{C}$. On définit des caractères des groupes $A(K)$ et $B(K)$ au moyen des formules suivantes :

$$\text{(1.1.1)} \quad \text{si } b = \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \chi(b) = \chi(a) = \chi(\Lambda(b)), \qquad \langle s, b \rangle = |a|^s.$$

On désignera par $P(\mathfrak{D}, \chi)$ le projecteur de l'espace $\mathcal{H}(\mathfrak{D})$ de la représentation sur le sous-espace $\mathcal{H}(\mathfrak{D}, \chi)$ des vecteurs v tels que

$$\text{(1.1.2)} \quad \mathfrak{D}(an)v = \chi(a)v \qquad \text{pour} \quad a \in A(K) \cap M, \quad n \in N(K) \cap M.$$

Si $g = man$ avec $m \in M$, $a \in A(K)$, $n \in N(K)$, on peut poser

$$\text{(1.1.3)} \qquad L(g, \mathfrak{D}, \chi, s) = \mathfrak{D}(m)\chi(a)\langle -s, a \rangle P(\mathfrak{D}, \chi),$$

car le second membre ne dépend que de g et non de la façon dont on décompose g. Si K est un corps non archimédien, le sous-groupe M est ouvert dans $G(K)$, et la représentation $\mathfrak{D}$ triviale sur un sous-groupe ouvert de M. En particulier, la fonction précédente, comme fonction de g, est localement constante. Si $K = \mathbf{R}$, on a, en désignant par A_+ la composante neutre de $A(\mathbf{R})$ pour la topologie ordinaire, $G(\mathbf{R}) = MA_+N(\mathbf{R})$. De façon plus précise, l'application $(m, a, n) \mapsto man$ définit un isomorphisme de variétés analytiques réelles de $M \times A_+ \times N(\mathbf{R})$ sur $G(\mathbf{R})$. La fonction $L(g, \mathfrak{D}, \chi, s)$ est donc fonction analytique de g. Enfin si $K = \mathbf{C}$, on a $G(\mathbf{C}) = MA_+N(\mathbf{C})$, où A_+ désigne l'ensemble des points de $A(\mathbf{C})$ sur lesquels les caractères rationnels de A prennent des valeurs réelles > 0. La fonction $L(g, \mathfrak{D}, \chi, s)$ est donc fonction analytique de g pour la structure réelle sous-jacente de $G(\mathbf{C})$. Dans tous les cas la formule (1.1.3) définit une fonction continue du couple (g, s)

et holomorphe en s. Si $\mathfrak{D}$ et χ sont triviaux, la fonction précédente est scalaire, et l'on écrira simplement

$$(1.1.4) \qquad L(g, s) = L(g, 1, 1, s).$$

On a toujours

$$(1.1.5) \qquad |L(g, \mathfrak{D}, \chi, s)| \leqq L(g, \mathcal{R}s).$$

(On désigne par $\mathcal{R}s$ la partie réelle d'un nombre complexe s.)

Lemme (1.2). — *Soit V un sous-espace de l'image $\mathcal{H}(\mathfrak{D}, \chi)$ du projecteur $P(\mathfrak{D}, \chi)$. Si $\mathfrak{D}(M)\, V$ engendre $\mathcal{H}(\mathfrak{D})$, on a $V = \mathcal{H}(\mathfrak{D}, \chi)$. En particulier, si $\mathfrak{D}$ est irréductible, on a* $\dim \mathcal{H}(\mathfrak{D}, \chi) \leqq 1$.

La deuxième assertion est bien connue et du reste prouvée aux paragraphes 4, 5, 6, cas par cas. La première s'en déduit. En effet, écrivons $\mathcal{H}(\mathfrak{D})$ comme somme directe de sous-espaces orthogonaux invariants $\mathcal{H}_i$ sur chacun desquels $\mathfrak{D}$ induit une représentation irréductible. Il est clair que $\mathcal{H}(\mathfrak{D}, \chi)$ est la somme de ses projections $\mathcal{H}_i(\chi)$ sur les divers sous-espaces $\mathcal{H}_i$. Soit V_i la projection de V sur $\mathcal{H}_i$. Alors $\mathcal{H}_i$ est encore engendré par $\mathfrak{D}(m)\, V_i$. En particulier, $V_i \neq 0$ et comme V_i est contenu dans $\mathcal{H}_i(\chi)$ qui est au plus de dimension 1, on a $V_i = \mathcal{H}_i(\chi)$. D'où notre assertion.

Soit $\mu \in K$. On se propose d'étudier l'intégrale suivante :

$$(1.2.1) \qquad E(g, \mathfrak{D}, \chi, s; \mu) = \int_{N^-(K)} L(gn^-, \mathfrak{D}, \chi, s+1)\, \zeta(n^-)\, dn^-,$$

où l'on pose $\zeta(n^-) = \tau(x\mu)$ et $dn^- = dx$ si $n^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$. On posera

$$(1.2.2) \qquad E(e, \mathfrak{D}, \chi, s; \mu) = E(\mathfrak{D}, \chi, s; \mu).$$

Si $\mathfrak{D} = 1$ et $\chi = 1$, on écrira simplement

$$(1.2.3) \qquad E(g, s) = \int L(gn^-, s+1)\, dn^-.$$

Lemme (1.3). — *Soient Ω_G un compact de $G(K)$ et $\Omega_{\mathbf{R}}$ un compact de $\mathbf{R}_+^*$; il existe deux constantes A et $B > 0$ telles que*

$$(1.3.1) \qquad A\,|L(g, s)| \leqq |L(\omega g, s)| \leqq B\,|L(g, s)|$$

pour $\omega \in \Omega_G$, $g \in G(K)$, $\mathcal{R}s \in \Omega_R$.

Cela résulte aussitôt de ce que le rapport $|L(\omega g, s)|/|L(g, s)|$ ne dépend que de la classe de g dans l'espace homogène compact $G(K)/A(K)\,N(K)$. En particulier, comme $|L(g, \mathfrak{D}, \chi, s)| \leqq L(g, \mathcal{R}s)$, on voit que si $E(e, s)$ converge normalement pour $\mathcal{R}s \in \Omega_R$, il en est de même de l'intégrale $E(g, \mathfrak{D}, \chi, s; \mu)$ pour $g \in \Omega_G$, $\mathcal{R}s \in \Omega_R$ et $\mu \in K$. Pour étudier la convergence de l'intégrale $E(e, s)$, introduisons les notations suivantes : soit e_1, e_2 la base canonique de K^2; pour tout vecteur $v = xe_1 + ye_2$, on pose

$$(1.3.2) \qquad |v| = (|x|^2 + |y|^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{si } K = \mathbf{R};$$

$$(1.3.3) \qquad |v| = |x| + |y| \qquad \text{si } K = \mathbf{C};$$

$$(1.3.4) \qquad |v| = \sup(|x|, |y|) \qquad \text{si } K \text{ est non archimédien.}$$

(On rappelle que si $K = \mathbf{C}$, on a posé $|x| = x\bar{x}$.)

On en tire aussitôt pour $v \in K^2$, $m \in M$, $a \in A(K)$, $n \in N(K)$:

$$(1.3.5) \qquad |m(v)| = |v|, \qquad |a(e_1)| = \langle 1, a \rangle, \qquad |n(e_1)| = 1.$$

En particulier :

Lemme (1.4) :

(i) *On a*

$$L(g, s) = |g(e_1)|^{-s};$$

(ii) *Si*

$$n^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix},$$

on a

$$L(n^-, s) = (1 + |x|^2)^{-\frac{1}{2}s} \qquad si\ K = \mathbf{R};$$

$$L(n^-, s) = (1 + |x|)^{-s} \qquad si\ K = \mathbf{C},$$

$$L(n^-, s) = \sup(1, |x|)^{-s} \qquad si\ K\ est\ un\ corps\ non\ archimédien.$$

On en déduit aussitôt la convergence de l'intégrale (1.2.3), puis de l'intégrale (1.2.1). D'où la proposition suivante :

Proposition (1.5). — *L'intégrale $E(g, \mathfrak{D}, \chi, s; \rho)$ converge absolument pour $\mathcal{R}s > 0$. La convergence est normale pour g dans un compact de $G(K)$, $\mathcal{R}s$ dans un compact de $\mathbf{R}_+^*$ et $\mu \in K$. En particulier pour $\mathcal{R}s > 0$, l'intégrale est une fonction continue du couple (g, s), holomorphe en s.*

Le résultat essentiel de ce paragraphe est que, si $\mu \neq 0$, l'intégrale $E(g, \mathfrak{D}, \chi, s; \mu)$ se prolonge en une fonction entière de s se transformant simplement par la substitution $s \mapsto -s$, $\chi \mapsto \bar{\chi}$. Au contraire, si $\mu = 0$, l'intégrale se prolonge seulement en une fonction méromorphe de s et il n'y a plus d'équation fonctionnelle simple. Pour établir ce résultat, nous allons adopter un point de vue quelque peu différent.

Considérons la forme bilinéaire antisymétrique

(1.5.1) $$(ue_1+ve_2,\ xe_1+ye_2)\mapsto(xv-yu)$$

sur l'espace K^2. Elle est invariante par $G(K)$. En particulier :

LEMME (1.6). — *Pour $\varphi\in\mathcal{S}(K^2)$, la transformée de Fourier*

(1.6.1) $$\hat{\varphi}(xe_1+ye_2)=\int_{K^2}\varphi(ue_1+ve_2)\,\tau(xv-yu)\,du\,dv$$

est dans $\mathcal{S}(K^2)$. On a $(\hat{\varphi})\hat{}=\varphi$. Si $g\in G(K)$ et $\varphi_g(v)=\varphi(g(v))$, on a

$$\hat{\varphi}_g(v)=\hat{\varphi}(g(v)).$$

PROPOSITION (1.7). — *Soient $\varphi\in\mathcal{S}(K^2)$, $s\in\mathbf{C}$, et χ un caractère de module 1 de K^*. L'intégrale*

(1.7.1) $$L_\varphi(g,\chi,s)=\int_{K^*}\varphi(tg(e_1))\,\overline{\chi}(t)\,|t|^s\,d^*t$$

converge absolument pour $\mathbf{R}s>0$. La convergence est normale pour g dans un compact de $G(K)$, $\mathbf{R}s$ dans un compact de $\mathbf{R}_+^*$, φ dans un borné de $\mathcal{S}(K^2)$. En particulier, l'intégrale est une fonction continue de (g, s), holomorphe en s.

Les assertions précédentes se ramènent aussitôt à la convergence de l'intégrale

$$\int_{|a|\leq 1}|t|^s\,d^*t\quad\text{pour }\mathbf{R}s>0.$$

Comme, il est bien connu (*cf.* par exemple [17]), l'intégrale précédente se prolonge en une fonction méromorphe de s. Il est clair qu'on a [*a priori* dans le domaine de convergence de (1.7.1) et par prolongement analytique pour toutes les valeurs de s] la formule

(1.7.2) $$L_\varphi(gan,\chi,s)=\chi(a)\langle -s,a\rangle L_\varphi(g,\chi,s)$$

pour $a\in A(K)$, $n\in N(K)$.

Bien entendu, les résultats précédents s'étendent aussitôt à des fonctions φ à valeurs dans des espaces vectoriels de dimension finie. En particulier, si $\mathfrak{D}$ désigne une représentation unitaire de dimension finie du groupe compact M, nous dirons qu'une fonction de Schwartz-Bruhat φ définie sur K^2, à valeurs dans l'espace des opérateurs de $\mathcal{H}(\mathfrak{D})$, est de type $\mathfrak{D}$ si l'on a

(1.7.3) $$\varphi(m(v))=\mathfrak{D}(m)\,\varphi(v)\qquad\text{pour}\quad m\in M,\quad v\in K^2.$$

Pour une telle fonction, il vient donc

(1.7.4) $$L_\varphi(man,\chi,s)=\mathfrak{D}(m)\,\chi(a)\langle -s,a\rangle L_\varphi(\chi,s),$$

en désignant par $L_\varphi(\chi, s)$ la valeur de l'intégrale à l'origine. En particulier, on a donc

$$(1.7.5)\qquad L_\varphi(\chi, s) = P(\mathfrak{D}, \chi)\, L_\varphi(\chi, s)$$

et

$$(1.7.6)\qquad L_\varphi(g, \chi, s) = L(g, \mathfrak{D}, \chi, s)\, L_\varphi(\chi, s).$$

On peut donc remplacer les fonctions $L(g, \mathfrak{D}, \chi, s)$ par les fonctions $L_\varphi(g, \chi, s)$, et cela d'autant plus qu'on a la proposition suivante qui est démontrée, cas par cas, dans les paragraphes 4, 5, 6 :

PROPOSITION (1.8). — *Supposons $P(\mathfrak{D}, \chi) = 0$ et la représentation $\mathfrak{D}$ irréductible. Il existe une fonction de Schwartz-Bruhat φ, à valeurs dans l'espace des opérateurs de $\mathcal{H}(\mathfrak{D})$, qui est de type $\mathfrak{D}$ et telle que*

$$(1.8.1)\qquad L_\varphi(\chi, s) = \varepsilon(\mathfrak{D}, \chi, s)\, P(\mathfrak{D}, \chi),$$

où $\varepsilon(\mathfrak{D}, \chi, s)^{-1}$ est une fonction entière de s, à valeurs complexes.

Dans la suite, on supposera choisie, pour toute classe de représentations irréductibles $\mathfrak{D}$ et pour tout χ tel que $P(\mathfrak{D}, \chi) \neq 0$, une telle fonction « privilégiée ».

THÉORÈME (1.9). — *Soient $\mu \in K$ et ζ le caractère de $N^-(K)$ qu'il détermine.*

(i) *Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(K^2)$, l'intégrale*

$$(1.9.1)\qquad E_\varphi(g, \chi, s; \mu) = \int_{N^-(K)} L_\varphi(gn^-, \chi, s+1)\, \zeta(n^-)\, dn^-$$

converge absolument pour $\mathcal{R}s > 0$. La convergence est normale pour g dans un compact de $G(K)$, $\mathcal{R}s$ dans un compact de $\mathbf{R}_+^*$, φ dans un borné de $\mathcal{S}(K^2)$. En particulier, l'intégrale (1.9.1) *définit, pour ces valeurs de s, une fonction continue du couple (g, s), holomorphe en s.*

(ii) *Pour $\mu \in K^*$, l'intégrale $E_\varphi(g, \chi, s; \mu)$ se prolonge en une fonction entière de s, continue en (g, s).*

(iii) *On a, pour $\mu \in K^*$,*

$$(1.9.2)\qquad E_\varphi(g, \chi, s; \mu) = \bar{\chi}(\mu)\, |\mu|^s\, E_{\hat{\varphi}}(g, \bar{\chi}, -s; \mu).$$

Prouvons d'abord (i); en fait, nous allons montrer que l'intégrale double

$$(1.9.3)\qquad E_\varphi(g, \chi, s; \mu) = \int_{N^-(K)} \int_{K^*} \varphi(gn^- te_1)\, \zeta(n^-)\, \chi(t)\, |t|^{s+1}\, dn^-\, d^*t$$

converge normalement pour $\mathcal{R}s$ dans un compact de $\mathbf{R}_+^*$, g dans un compact de $G(K)$ et φ dans un borné de $\mathcal{S}(K^2)$. Pour cela, quitte à remplacer la fonction φ par $\varphi(g(v))$, on peut se borner à étudier (1.9.3) pour $g = e$. Nous écrirons simplement

$$(1.9.4) \qquad E_\varphi(\chi, s; \mu) = E_\varphi(e, \chi, s; \mu).$$

L'intégrale (1.9.4) se met encore sous la forme

$$(1.9.5) \quad E_\varphi(\chi, s; \mu) = \iint_{K\times K^*} \varphi(te_1 + txe_2)\,\overline{\chi}(t)\,|t|^{s+1}\,\tau(x\mu)\,dx\,d^*t.$$

La convergence de cette intégrale est évidemment équivalente à celle de l'intégrale obtenue en changeant x en xt^{-1}, c'est-à-dire de l'intégrale

$$(1.9.6) \quad E_\varphi(\chi, s; \mu) = \iint_{K\times K^*} \varphi(te_1 + xe_2)\,\overline{\chi}(t)\,|t|^{s}\,\tau(x\mu t^{-1})\,dx\,d^*t,$$

et notre assertion est alors immédiate.

Prouvons maintenant l'assertion (ii). Pour cela, introduisons la transformée de Fourier partielle de φ :

$$(1.9.7) \qquad \tilde{\varphi}(xe_1 + ye_2) = \int_K \varphi(xe_1 + ve_2)\,\tau(yv\mu)\,dv.$$

Il est clair que $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ est un homéomorphisme de $\mathcal{S}(K^2)$ sur lui-même, si $\mu \neq 0$, comme on le suppose. Avec cette notation, l'intégrale (1.9.6) s'écrit encore

$$(1.9.8) \qquad E_\varphi(\chi, s; \mu) = \int_{K^*} \tilde{\varphi}(te_1 + t^{-1}e_2)\,\overline{\chi}(t)\,|t|^s\,d^*t.$$

Nous allons voir que cette dernière intégrale est normalement convergente pour φ dans un borné $B \subset \mathcal{S}(K^2)$ et $\mathcal{R}s$ dans un compact de $\mathbf{R}$. Notons que si φ décrit B, la fonction $\tilde{\varphi}$ décrit un borné $\tilde{B}$.

Si K est archimédien, on voit que, pour tout entier $N > 0$, il existe une constante C telle que

$$|\tilde{\varphi}(te_1 + t^{-1}e_2)| \leq C(1 + |t|^N + |t|^{-N}) \quad \text{pour tout } \varphi \in B$$

et notre assertion en résulte aussitôt.

Si K est non archimédien, pour $\varphi \in B$, le support de $\tilde{\varphi}$ reste dans un compact fixe et le module de $\tilde{\varphi}$ reste borné par un nombre fixe. Alors la fonction $t \mapsto \tilde{\varphi}(te_1 + t^{-1}e_2)$ reste bornée par un nombre fixe et à support dans un compact fixe de K^*. A nouveau, notre assertion s'en suit immédiatement.

Nous avons donc déjà obtenu le fait que $E_\varphi(\chi, s; \mu)$ se prolonge en une fonction entière de s. Comme toute forme linéaire bornée sur $\mathcal{S}(K^2)$ est continue, l'application $(\varphi, s) \mapsto E_\varphi(\chi, s; \mu)$ est continue. Enfin si

$\varphi_g(v) = \varphi(g(v))$, l'application $g \mapsto \varphi_g$ est continue, et il en est de même de l'application

$$(g, s) \mapsto E_\varphi(g, \chi, s; \mu) = E_{\varphi_g}(\chi, s; \mu).$$

Prouvons maintenant la dernière assertion. Là encore il suffit de l'établir pour $g = e$. Changeons t en t^{-1} dans l'intégrale (1.9.8). Il vient

$$(1.9.9) \qquad E_\varphi(\chi, s; \mu) = \int_{K^*} f(te_1 + t^{-1} e_2)\, \chi^{-1}(t)\, |t|^{-s}\, d^*t,$$

où l'on a désigné par f l'élément de $\mathcal{S}(K^2)$ défini par

$$(1.9.10) \qquad f(xe_1 + ye_2) = \tilde{\varphi}(ye_1 + xe_2).$$

Il est clair que f est de la forme $\tilde{\psi}$ pour un $\psi \in \mathcal{S}(K^2)$ convenable. On a donc

$$(1.9.11) \qquad E_\varphi(\chi, s; \mu) = E_\psi(\overline{\chi}, -s; \mu).$$

Il suffit maintenant de calculer ψ à partir de la formule

$$(1.9.12) \qquad \tilde{\psi}(xe_1 + ye_2) = \tilde{\varphi}(ye_1 + xe_2)$$

qui s'écrit encore (on remplace y par u)

$$\int_K \psi(xe_1 + ve_2)\, \tau(uv\mu)\, dv = \int_K \varphi(ue_1 + ve_2)\, \tau(xv\mu)\, dv.$$

La formule de réciprocité de Fourier donne

$$|\mu|^{-1}\, \psi(xe_1 + ye_2) = \int \tau(-yu\mu)\, du \int \psi(xe_1 + ve_2)\, \tau(uv\mu)\, dv$$

ou encore

$$\psi(xe_1 + ye_2) = |\mu| \iint \varphi(ue_1 + ve_2)\, \tau(xv\mu - yu\mu)\, du\, dv,$$

c'est-à-dire

$$(1.9.13) \qquad \psi(v) = |\mu|\, \hat{\varphi}(\mu v).$$

On en tire immédiatement, pour $\mathcal{R}s < 0$,

$$(1.9.14) \qquad L_\psi(g, \overline{\chi}, -s + 1) = |\mu|^s\, \overline{\chi}(\mu)\, L_{\hat{\varphi}}(g, \overline{\chi}, -s + 1),$$

puis

$$(1.9.15) \qquad E_\psi(g, \overline{\chi}, -s) = |\mu|^s\, \overline{\chi}(\mu)\, E_{\hat{\varphi}}(g, \overline{\chi}, -s),$$

d'où enfin, en rapprochant de la formule (1.9.11), la relation (1.9.2).

Du théorème précédent, on déduit aussitôt le résultat suivant :

COROLLAIRE (1.10). — *Soit $\mathfrak{D}$ une représentation irréductible de M et χ un caractère de module* 1 *de K tel que* $P(\mathfrak{D}, \chi) = 0$. *Soit φ la fonction privilégiée relative à $\mathfrak{D}$ et χ. Soit enfin $\mu \in K^{*}$.*

(i) *La fonction $E(g, \mathfrak{D}, \chi, s; \mu)$ se prolonge en une fonction entière de s continue en (g, s).*

(ii) *On pose*

$$(1.10.1)\quad \Psi(\mathfrak{D}, \chi, s) = L_{\hat{\varphi}}(\bar{\chi}, -s+1)\,[\varepsilon(\mathfrak{D}, \chi, s+1)]^{-1} P(\mathfrak{D}, \chi).$$

Cet opérateur de l'espace $\mathcal{H}(\mathfrak{D})$ est une fonction méromorphe de s et holomorphe dans le demi-plan $\mathcal{R}s < 1$.

(iii) *Pour tout s, on a*

$$(1.10.2)\quad E(g, \mathfrak{D}, \chi, s; \mu) = \bar{\chi}(\mu)\,|\mu|^{s} E(g, \mathfrak{D}, \chi, -s; \mu)\,\Psi(\mathfrak{D}, \chi, s).$$

En effet, si φ désigne provisoirement une fonction quelconque de type $\mathfrak{D}$, on a toujours, pour $\mathcal{R}s > 0$,

$$(1.10.3)\qquad L_{\varphi}(g, \chi, s) = L(g, \mathfrak{D}, \chi, s)\,L_{\varphi}(\chi, s).$$

D'où, toujours pour $\mathcal{R}s > 0$,

$$(1.10.4)\qquad E(g, \mathfrak{D}, \chi, s; \mu)\,L_{\varphi}(\chi, s+1) = E_{\varphi}(g, \chi, s; \mu).$$

Supposons maintenant que φ soit la fonction « privilégiée ». Comme $L(g, \mathfrak{D}, \chi, s)\,P(\mathfrak{D}, \chi) = L(g, \mathfrak{D}, \chi, s)$, on a aussi

$$E(g, \mathfrak{D}, \chi, s; \mu)\,P(\mathfrak{D}, \chi) = E(g, \mathfrak{D}, \chi, s; \mu),$$

et la relation (1.10.4) peut encore s'écrire

$$(1.10.5)\qquad E(g, \mathfrak{D}, \chi, s; \mu) = [\varepsilon(\mathfrak{D}, \chi, s+1)]^{-1} E_{\varphi}(g, \chi, s; \mu),$$

et comme $[\varepsilon(\mathfrak{D}, \chi, s+1)]^{-1}$ est une fonction entière de s, la première assertion est démontrée.

D'autre part, dans la formule qui définit $\Psi(\mathfrak{D}, \chi, s)$, le facteur $L_{\hat{\varphi}}(\bar{\chi}, -s+1)$ est donné par une intégrale qui converge pour $\mathcal{R}(-s+1) > 0$, c'est-à-dire pour $\mathcal{R}s < 1$. D'où la deuxième assertion.

Enfin, appliquant la relation (1.10.4) en remplaçant φ par $\hat{\varphi}$, χ par $\bar{\chi}$ et s par $-s$, on voit que l'équation fonctionnelle (1.9.2) peut encore se mettre sous la forme

$$(1.10.6)\qquad \begin{aligned} &E(g, \mathfrak{D}, \chi, s; \mu)\,\varepsilon(\mathfrak{D}, \chi, s+1) \\ &\quad = \bar{\chi}(\mu)\,|\mu|^{s} E(g, \mathfrak{D}, \chi, -s; \mu)\,L_{\hat{\varphi}}(\bar{\chi}, -s+1), \end{aligned}$$

d'où la relation (1.10.2).

REMARQUE (1.10.7). — D'après la formule (1.7.5) appliquée à $\hat{\varphi}$ et $\bar{\chi}$, on voit que

$$P(\mathfrak{D}, \bar{\chi})\, \Psi(\mathfrak{D}, \chi, s)\, P(\mathfrak{D}, \chi) = \Psi(\mathfrak{D}, \chi, s).$$

Comme $E(g, \mathfrak{D}, \chi, +s; \mu)$ n'est pas nulle comme transformée de Fourier, on voit d'abord que $P(\mathfrak{D}, \bar{\chi}) \neq 0$, et que $\Psi(\mathfrak{D}, \chi, s)$ est l'unique homomorphisme et même isomorphisme de $\mathcal{H}(\mathfrak{D}, \chi)$ sur $\mathcal{H}(\mathfrak{D}, \bar{\chi})$ satisfaisant l'équation (1.10.2). D'autre part, si ψ est une fonction de type $\mathfrak{D}$ quelconque, d'après (1.10.4), l'équation fonctionnelle (1.9.2) peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} &E(g, \mathfrak{D}, \chi, s; \mu)\, L_\psi(\chi, s+1) \\ &\quad = |\mu|^s \bar{\chi}(\mu)\, E(g, \mathfrak{D}, \chi, -s; \mu)\, L_{\hat{\psi}}(\bar{\chi}, -s+1). \end{aligned}$$

En rapprochant de (1.10.2), il vient donc

$$(1.10.8) \qquad L_{\hat{\psi}}(\bar{\chi}, -s+1) = \Psi(\mathfrak{D}, \chi, s)\, L_\psi(\chi, s+1).$$

En raisonnant de la même façon, et en appliquant deux fois la relation (1.10.2), il vient

$$(1.10.9) \qquad \Psi(\mathfrak{D}, \bar{\chi}, -s)\, \Psi(\mathfrak{D}, \chi, s) = P(\mathfrak{D}, \chi).$$

Il est clair que les résultats précédents s'étendent au cas d'une représentation unitaire $\mathfrak{D}$ de M qui n'est plus nécessairement irréductible. De façon précise, soient $\mathfrak{D}$ une telle représentation, χ un caractère de module 1 de K^* tel que $P(\mathfrak{D}, \chi) \neq 0$. Alors il existe une fonction méromorphe $\Psi(\mathfrak{D}, \chi, s)$ à valeurs dans l'espace des opérateurs de $\mathcal{H}(\mathfrak{D})$ telle que, pour toute fonction, φ de type $\mathfrak{D}$, on ait

$$L_{\hat{\varphi}}(\bar{\chi}, -s+1) = \Psi(\mathfrak{D}, \chi, s)\, L_\varphi(\chi, s+1);$$

cette fonction est holomorphe pour $\mathcal{R}s < 1$, et l'intégrale $E(g, \mathfrak{D}, \chi, s; \mu)$ se prolonge en une fonction entière de s vérifiant

$$E(g, \mathfrak{D}, \chi, s; \mu) = \bar{\chi}(\mu)\, |\mu|^s E(g, \mathfrak{D}, \bar{\chi}, -s; \mu)\, \Psi(\mathfrak{D}, \chi, s).$$

Dans la suite, nous aurons besoin de majorations de l'intégrale (1.2.1).

LEMME (1.11). — *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(K^2)$. Dans toute bande $|\mathcal{R}s| \leq m$, la fonction $E_\varphi(g, \chi, s)$ est bornée, et l'on a*

$$(1.11.1) \qquad \sup_{|\mathcal{R}s| \leq m} |E_\varphi(g, \chi, s)| = \sup_{|\mathcal{R}s| = m} |E_\varphi(g, \chi, s)|.$$

Si K est un corps non archimédien, $E_\varphi(g, \chi, s)$ ne dépend, comme fonction de s, que de $N(\mathfrak{p})^s$. En particulier, elle admet un groupe de périodes imaginaires, et notre assertion est donc une conséquence du principe du maximum.

Si K est archimédien, nous allons voir que, pour $s = \alpha + i\beta$, et $\alpha \in [-m, m]$, la fonction $E_\varphi(g, \chi, s)$ tend vers zéro lorsque β tend vers l'infini et cela uniformément en α. Notre assertion sera à nouveau une conséquence du principe du maximum. On peut supposer $g = e$. Alors, en utilisant la notation introduite en (1.9.7), il vient

$$E_\varphi(\chi, s) = \int_{K^*} \tilde{\varphi}(te_1 + t^{-1} e_2)\, \overline{\chi}(t)\, |t|^{\alpha+i\beta}\, d^*t.$$

Soit T le sous-groupe de K formé des u tels que $|u| = 1$. Alors, on a $K^* = \mathbf{R}_+^* T$, et l'on peut supposer χ trivial sur $\mathbf{R}_+^*$. Posons

$$(1.11.2) \quad \Phi(y_1, y_2) = \int_T \tilde{\varphi}(y_1 u e_1 + y_2 u^{-1} e_2)\, \overline{\chi}(u)\, du \qquad \text{pour} \quad y_i \in \mathbf{R}.$$

Ceci définit une fonction de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$ et $E_\varphi(\chi, s)$ s'interprète comme la transformée de Fourier de la fonction

$$(1.11.3) \qquad f_\alpha(x) = e^{\alpha x}\, \Phi(e^x, e^{-x}).$$

En effet, on a (avec $s = \alpha + i\beta$ si K $= \mathbf{R}$ et $2s = \alpha + i\beta$ si K $= \mathbf{C}$)

$$(1.11.4) \qquad E_\varphi(\chi, s) = \int_{\mathbf{R}} f_\alpha(x)\, e^{i\beta x}\, dx.$$

Il suffira donc de prouver que f est une fonction indéfiniment dérivable à décroissance rapide de x et que cette fonction décrit un borné de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ lorsque α décrit l'intervalle $[-m, m]$. Or $\Phi(e^x, e^{-x})$ est $o(e^{N|x|})$ pour $x \mapsto \pm\infty$ et tout $N > 0$. La fonction $f_\alpha(x)$ est donc rapidement décroissante uniformément par rapport à α. On raisonne de même pour la dérivée de $f_\alpha(x)$:

$$f'_\alpha(x) = e^{(\alpha+1)x} \frac{\partial\Phi}{\partial y_1}(e^x, e^{-x}) + e^{(\alpha-1)x} \frac{\partial\Phi}{\partial y_2}(e^x, e^{-x}) + \alpha f_\alpha(x),$$

et de proche en proche pour les dérivées successives.

Corollaire (1.12). — *Soient $\mathfrak{D}$ une représentation de dimension finie de M et χ un caractère de module 1 de K^*. Il existe une fonction continue positive $C(s)$ possédant la propriété suivante : Pour tout compact Ω de K^*, tout $m > 0$, il existe $B > 0$ tel que, pour $\mu \in \Omega$, $|\mathcal{R}s| \leq m$, on ait*

$$(1.12.1) \qquad |E(g, \mathfrak{D}, \chi, s; \mu)| \leq B\, C(s)\, E(g, m).$$

Il suffit de prouver notre assertion pour une représentation irréductible telle que $P(\mathfrak{D}, \chi) \neq 0$. Soit φ la fonction « privilégiée » de la proposition (1.8). En vertu de la relation (1.10.5), le lemme (1.11) permet d'écrire qu'on a, pour $|\mathcal{R}s| \leqq m$,

$$(1.12.2) \qquad |E(g, \mathfrak{D}, \chi, s; \mu)| \leqq C(s) \sup_{|\mathcal{R}s'|=m} E_\varphi(g, \chi, s; \mu),$$

où l'on a posé $C(s) = |\varepsilon(\mathfrak{D}, \chi, s+1)|^{-1}$.

Il suffira donc de prouver l'existence de $B > 0$ telle que

$$(1.12.3) \qquad |E_\varphi(g, \chi, s; \mu)| \leqq B\, E(g, m) \qquad \text{pour } |\mathcal{R}s| = m \text{ et } \mu \in \Omega.$$

Or, vu la relation (1.10.4) et l'équation fonctionnelle (1.9.2), on a, pour $\mathcal{R}s = m > 0$,

$$(1.12.4) \qquad E_\varphi(g, \chi, +s; \mu) = E(g, \mathfrak{D}, \chi, s; \mu)\, L_\varphi(\chi, s+1);$$

$$(1.12.5) \qquad E_\varphi(g, \chi, -s; \mu) = \bar{\chi}(\mu)\, |\mu|^{-s} E(g, \mathfrak{D}, \bar{\chi}, s; \mu)\, L_{\hat{\varphi}}(\bar{\chi}, s+1).$$

Pour ces valeurs de s, l'intégrale $E(g, \mathfrak{D}, \chi, s; \mu)$ converge et l'on a donc, en tenant compte de (1.1.5),

$$|E(g, \mathfrak{D}, \chi, s; \mu)| \leqq \int_{N^-(K)} L(gn^-, m)\, dn^- = E(g, m).$$

De même,

$$|E(g, \mathfrak{D}, \bar{\chi}, s; \mu)| \leqq E(g, m) \quad \text{pour } \mathcal{R}s = m.$$

Compte tenu des relations (1.12.4) et (1.12.5), il nous suffira de prouver que, pour toute fonction de Schwartz-Bruhat ψ et tout $m > 0$, la fonction $L_\psi(\chi, s+1)$ est bornée sur la droite $\mathcal{R}s = m$. Mais si $f \geqq 0$ est une fonction de Schwartz-Bruhat telle que $|\psi| \leqq f$, on a, pour $\mathcal{R}s = m$,

$$|L_\psi(\chi, s+1)| \leqq \int_{K^*} f(te_1)\, |t|^{m+1}\, d^*t = L_f(1, m+1).$$

D'où notre assertion et le lemme (1.12).

2. Convergence des intégrales pour G de rang quelconque.

Dans ce paragraphe, on désigne encore par K un corps commutatif localement compact non discret, et par G un groupe algébrique semi-simple, simplement connexe, défini et déployé sur K. Il existe donc un tore maximal A de G déployé sur K. On désigne par $X^*(A)$ l'ensemble des caractères rationnels de A, i. e. l'ensemble des morphismes de groupes algébriques $A \to K^*$. Si $\hat{K}^*$ désigne le dual de Pontrjagin du groupe localement compact K^*, le dual du groupe localement compact $A(K)$ s'identifie au produit tensoriel

$$\widehat{A(K)}^* = \hat{K}^* \otimes_{\mathbf{Z}} X^*(A)$$

l'élément $\chi \otimes \lambda$ de $\hat{K}^* \otimes X^*(A)$ définissant l'homomorphisme $a \mapsto \chi(\lambda(a))$ de $A(K)$ dans le groupe $\mathbf{T}$ des nombres complexes de module 1. De la même façon, on désigne par $F_{\mathbf{R}}$ et F les espaces vectoriels

(2.1.1) $$F_{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} X^*(A), \qquad F = \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Z}} X^*(A).$$

Tout élément $\lambda \in F$ (ou $F_{\mathbf{R}}$) définit un caractère généralisé $a \mapsto \langle \lambda, a \rangle$ c'est-à-dire un homomorphisme de $A(K)$ dans $\mathbf{C}^*$. Si $\lambda = \sum s_i \Lambda_i$, on a

$$\langle \lambda, a \rangle = \sum_i | \Lambda_i(a) |^{s_i}.$$

On désigne par W le groupe de Weyl de G par rapport à A, par $R \subset X^*(A)$ l'ensemble des racines de G par rapport à A. A toute $\alpha \in R$ est donc associé un sous-groupe radiciel N_α défini par la condition suivante : Il existe un K-isomorphisme $\mathfrak{X}_\alpha$ de K sur N_α tel que

$$a . \mathfrak{X}_\alpha(t) . a^{-1} = \mathfrak{X}_\alpha[\alpha(a) t], \qquad a \in A, \qquad t \in K.$$

Pour toute partie close ψ de R (i. e. telle que les relations $\alpha \in \psi$, $\beta \in \psi$, $\alpha + \beta \in R$ entraînent $\alpha + \beta \in \psi$), on note G_ψ le groupe algébrique engendré par les N_α, $\alpha \in \psi$. On choisit un sous-groupe de Borel B de G contenant A. Le radical unipotent N de B est donc de la forme $N = G_{R_+}$, où R_+ désigne un système de racines positives de R. On notera Δ l'ensemble des racines simples correspondantes. Si ψ est une partie de R contenue dans R_+ ou plus généralement dans un conjugué de R_+ par W, le groupe G_ψ est unipotent, et on le note alors N_ψ. La relation $N_\alpha \subset N_\psi$ (qui est équivalente à $\alpha \in \psi$) est souvent notée $\alpha \in N_\psi$ par abus de langage. Le groupe $N_{-\psi}$ est souvent noté N_ψ^-.

Soit θ une partie de Δ; on note $[\theta]$ l'ensemble des racines combinaisons des $\alpha \in \theta$. Tout transformé ψ de $[\theta]$ par W est clos et symétrique (i. e. égal à son opposé). Il est *faux* qu'une partie close et symétrique soit toujours de cette forme. Si ψ est de cette forme, le groupe G_ψ est semi-simple, et la composante neutre A_ψ de $A \cap G_\psi$ en est un tore maximal décomposé sur K, et $B_\psi = A_\psi N_{(\psi \cap R_+)}$ un sous-groupe de Borel. En particulier, si ψ est de la forme $\psi = \{\alpha, -\alpha\}$, on écrira simplement G^α, A^α, B^α. Comme G est simplement connexe, le groupe G_α est *isomorphe* à $\mathbf{SL}(2, K)$. D'ailleurs, en général, le groupe G_ψ est simplement connexe.

Un K-sous-groupe parabolique P de G contenant A est un sous-groupe défini sur K contenant le groupe de Borel $B = AN$ ou l'un de ses conjugués par W. Un tel sous-groupe est donc engendré par A et un groupe G_ψ, où ψ est une partie parabolique de R, c'est-à-dire une partie vérifiant les conditions équivalentes suivantes :

(2.1.2) ψ est close et $R = \psi \cup (-\psi)$;

(2.1.3) Il existe une partie θ de Δ telle que ψ soit conjuguée de $R_+ \cup [\theta]$ par un élément de W;

(2.1.4) Il existe un demi-espace *fermé* L de F_R tel que $\psi = R \cap L$.

(L'équivalence des deux premières conditions est connue, et il est clair que la troisième entraîne la première et la seconde entraîne la troisième.)

Si ψ est une partie parabolique de R, on pose

(2.1.5) $$\psi_s = \psi \cap (-\psi), \qquad \psi_u = \psi - \psi_s.$$

On voit que ψ_s et ψ_u sont closes et ψ_s symétrique. Le groupe G_{ψ_s} est donc semi-simple. Nous dirons souvent que c'est la partie semi-simple du sous-groupe parabolique P engendré par A et G_ψ. Le groupe unipotent $V = N_{\psi_u}$ est le radical unipotent de P. Soit T la composante neutre de l'intersection des noyaux des $\alpha \in \psi_s$. Le groupe P s'écrit comme produit semi-direct $P = Z(T).V$ de V par le centralisateur $Z(T)$ du tore T. On appellera *horicycle* de G relatif à A un sous-groupe de la forme N_{ψ_u}, et partie *horicyclique* de R une partie de la forme ψ_u, où ψ est une partie parabolique de R. D'ailleurs, si ψ est une partie parabolique, il en est de même de $\psi' = -\psi$, et l'on peut donc encore caractériser les parties horicycliques comme les complémentaires des parties paraboliques. Vu (2.1.4), on peut encore caractériser les parties horicycliques σ par la condition suivante :

(2.1.6) Il existe un demi-espace *ouvert* L dans F_R tel que $\sigma = L \cap R$.

Gardons les mêmes notations, et soit toujours $V = N_{\psi_u}$ un horicycle où ψ est une partie parabolique. Nous dirons que le groupe $V \cap N^-$ est un *hémicycle* de N^- (relatif à A) et que $\eta = R_- \cap \psi_u$ est une partie *hémicyclique* de R_-. On peut donc encore caractériser une partie hémicyclique par la condition suivante :

(2.1.7) Il existe un demi-espace *ouvert* L dans F_R tel que $\eta = L \cap R$.

Par exemple N^-, et plus généralement tout horicycle de G contenu dans N^-, est un hémicycle. Il en est de même de tout groupe de la forme $N^- \cap (wNw^{-1})$, où w est une représentante du groupe de Weyl. De même, soit $\theta \subset \Delta$ et soit η l'ensemble des racines négatives combinaisons des $\alpha \in \theta$. En utilisant par exemple la dernière condition (2.1.7), on voit facilement que η est un hémicycle. Il est évident que tout hémicycle contient au moins une opposée d'une racine simple.

On choisit maintenant un produit scalaire symétrique positif et invariant par W sur l'espace vectoriel $F_{\mathbf{R}}$. A tout $\alpha \in \Delta$ est associé un élément $\Lambda_\alpha \in X^*(A)$ caractérisé par les relations

(2.1.8) $$(\Lambda_\alpha, \beta) = 0 \quad \text{pour } \beta \in \Delta, \quad \beta \neq \alpha; \qquad 2(\Lambda_\alpha, \alpha) = (\alpha, \alpha).$$

D'ailleurs soit $X_*(A)$ l'ensemble des morphismes de K^* dans A. Les groupes $X^*(A)$ et $X_*(A)$ sont en dualité, ainsi que les espaces vectoriels $F_{\mathbf{R}} = X^*(A) \otimes \mathbf{R}$ et $F^*_{\mathbf{R}} = X_*(A) \otimes \mathbf{R}$. Pour chaque $\alpha \in R$, il existe un unique $\check{\alpha} \in F^*_{\mathbf{R}}$ tel que

$$(2.1.9) \qquad w_\alpha \lambda = \lambda - \langle \lambda, \check{\alpha} \rangle \alpha \qquad \text{et} \qquad \langle \lambda, \check{\alpha} \rangle = 2\frac{(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)},$$

où w_α est la symétrie par rapport à α. Les $\check{\alpha}$ sont les coracines, et pour $\alpha \in \Delta$, les Λ_α sont les poids dominants fondamentaux. Pour α et β simples, on a donc

$$(2.1.9.1) \qquad \langle \Lambda_\alpha, \check{\beta} \rangle = \delta_{\alpha\beta} \qquad \text{et} \qquad w_\alpha \Lambda_\beta = \Lambda_\beta - \delta_{\alpha\beta}\alpha.$$

Les Λ_α forment une base du $\mathbf{Z}$-module $X^*(A)$ et des espaces F et $F_{\mathbf{R}}$.

Soit φ une partie close et symétrique de R. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(2.1.10.1) Soit V l'espace vectoriel engendré par φ, on a $R \cap V = \varphi$;

(2.1.10.2) Il existe un hyperplan H de $F_{\mathbf{R}}$ tel que $H \cap R = \varphi$;

(2.1.10.3) Il existe $\theta \subset \Delta$ et $w \in W$ tel que $\varphi = w[\theta]$;

(2.1.10.4) Il existe une partie parabolique ψ telle que $\varphi = \psi_s$.

(L'équivalence de la première et de la deuxième condition et de la troisième et de la quatrième condition est immédiate. Il est clair que la troisième entraîne la première. Si la deuxième est vérifiée, et L est un demi-espace fermé limité par H, on a la quatrième avec $\psi = L \cap R$.)

Supposons ces conditions vérifiées ou, comme nous dirons aussi, supposons que φ soit une *bonne partie close symétrique*. Soit $G' = G_\varphi$ et $A' = (G' \cap A)^0$. Alors la restriction d'un caractère du tore A au tore A' définit des homomorphismes de restriction

$$(2.1.11) \qquad X^*(A) \to X^*(A'), \qquad F_{\mathbf{R}} \to X^*(A') \otimes \mathbf{R}.$$

De même, l'injection de A' dans A définit des homomorphismes d'injection

$$X^*(A') \to X^*(A) \qquad \text{et} \qquad X^*(A') \otimes \mathbf{R} \to F^*_{\mathbf{R}}.$$

En particulier, l'ensemble $\overline{\varphi}$ des restrictions des $\alpha \in \varphi$ au tore A' est le système des racines de G' par rapport à A'. De plus, pour chaque $\alpha \in \varphi$, la coracine $\check{\alpha}$ est en fait dans l'espace $X^*(A') \otimes \mathbf{R}$ et s'identifie à la coracine du système $\overline{\varphi}$ associée à la restriction de α au tore A'.

En particulier, si $\lambda \in F_{\mathbf{R}}$ et $\alpha \in \varphi$, on a donc

$$(2.1.12) \qquad \langle \lambda, \check{\alpha} \rangle = \langle \bar{\lambda}, \check{\alpha} \rangle$$

en désignant par $\bar{\lambda}$ la restriction de λ, c'est-à-dire son image dans $F_{\mathbf{R}} \otimes X^*(A')$ par l'homomorphisme (2.1.11).

La référence générale pour tous ces résultats est [2] et [4].

On choisit maintenant un sous-groupe compact maximal M de $G(K)$ adapté au tore A :

Si $K = \mathbf{R}$, on choisit d'abord un $\mathbf{R}$-automorphisme involutif de G tel que $\sigma(a) = a^{-1}$ pour $a \in A(\mathbf{R})$, et l'on prend pour M l'ensemble des $x \in G(\mathbf{R})$ tels que $\sigma(x) = x$;

Si $K = \mathbf{C}$, on désigne par $A(\mathbf{R})$ l'ensemble des $a \in A$ tels que $\lambda(a) \in \mathbf{R}^*$ pour tout $\lambda \in X^*(A)$, et l'on choisit un automorphisme involutif σ du groupe algébrique réel sous-jacent tel que $\sigma(a) = a^{-1}$ pour tout $a \in A(\mathbf{R})$, et l'on prend pour M l'ensemble des $x \in G(\mathbf{C})$ tels que $\sigma(x) = x$;

Si K est non archimédien, on choisit une base de Chevalley de l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ de G, relative à la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{v}$, algèbre de Lie du tore A, et l'on prend pour M l'ensemble des points qui conservent le réseau engendré par cette base dans la représentation adjointe (*cf.* [5] et [11]).

On a la décomposition d'Ivasawa

(2.1.13) $$G(K) = MA(K)N(K).$$

Pour chaque bonne partie close et symétrique ψ de R, l'intersection

(2.1.14) $$M_\psi = M \cap G_\psi(K)$$

est encore un sous-groupe compact maximal de $G_\psi(K)$ « adapté » au tore A_ψ. En particulier, pour chaque $\alpha \in R$, il existe un isomorphisme

(2.1.15) $$\mathfrak{X}_\alpha : \quad SL(2, K) \to G^\alpha$$

qui transforme le groupe des matrices triangulaires en le sous-groupe de Borel B^α, et le sous-groupe compact maximal de $\mathbf{SL}(2, K)$ du § 1 [$\mathbf{SO}(2, \mathbf{R})$, $\mathbf{SU}(2, \mathbf{C})$, $\mathbf{SL}(2, \mathfrak{O})$] selon le cas en le groupe

(2.1.16) $$M^\alpha = M \cap G^\alpha(K).$$

Les éléments du groupe de Weyl admettent des représentants dans le groupe M.

Notons le lemme suivant :

LEMME (2.2). — *Soient ψ, η, σ des parties closes de R contenues dans un même système de racines positives et telles que*

$$\psi = \eta \cup \sigma, \qquad \eta \cap \sigma = \emptyset.$$

Alors, tout point de $N_\psi(K)$ peut s'écrire d'une façon unique sous la forme

(2.2.1) $$n = uv, \qquad \text{avec} \quad u \in N_\eta(K) \quad \text{et} \quad v \in N_\sigma(K).$$

De plus, on peut choisir les mesures de Haar, dn, du, dv des groupes localement compacts $N_\psi(K)$, $N_\eta(K)$, $N_\sigma(K)$ *de façon que* $dn = du\, dv$.

La première assertion est un cas particulier de 3.11 dans [2] et la seconde une application de la proposition 13, chap. VII, § 2 dans [3].

On se donne maintenant une représentation unitaire $\mathfrak{D}$ de M dans un espace hilbertien de dimension finie $\mathcal{H}(\mathfrak{D})$ et un caractère χ (de module 1) de $A(K)$. On désigne par $P(\mathfrak{D}, \chi)$ le projecteur orthogonal de $\mathcal{H}(\mathfrak{D})$ sur le sous-groupe des vecteurs $v \in \mathcal{H}(\mathfrak{D})$ tels que

$$(2.2.2) \quad \mathfrak{D}(an)\, v = \chi(a)\, v \qquad \text{pour} \quad a \in A(K) \cap M \quad \text{et} \quad n \in N(K) \cap M.$$

Soit λ un élément de F; on définit une fonction sur $G(K)$ à valeurs dans l'espace des opérateurs de $\mathcal{H}(\mathfrak{D})$ par la formule

$$(2.2.3) \qquad L(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda) = \mathfrak{D}(m)\, \chi(a) \langle -\lambda, a \rangle P(\mathfrak{D}, \chi),$$

où $g = man$ désigne une décomposition d'Ivasawa de g. (Comme au § 1, le second membre ne dépend en fait que de g.) On définit ainsi une fonction continue du couple (g, s) qui est holomorphe en s. D'ailleurs, si K est archimédien, cette fonction dépend analytiquement de g. Si, au contraire, le corps K n'est pas archimédien la fonction précédente est localement constante.

Soit V un sous-groupe hémicycle de N^-. On se propose d'étudier l'intégrale

$$(2.3) \qquad E_V(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta) = \int_{V(K)} L(gv, \mathfrak{D}, \chi, \lambda + \rho)\, \zeta(v)\, dv,$$

où ζ désigne un caractère de module 1 de $V(K)$ et ρ la demi-somme des racines positives. On a désigné par dv une mesure de Haar du groupe $V(K)$ choisie une fois pour toutes. Lorsque le caractère ζ est trivial, nous écrirons simplement

$$(2.3.1) \qquad E_V(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda) = \int_{V(K)} L(gv, \mathfrak{D}, \chi, \lambda + \rho)\, dv.$$

Dans ce cas, il sera utile d'observer qu'on peut écrire l'intégrale (2.3.1) sous la forme

$$(2.3.2) \quad E_V(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda) = \int_{U(K)/U(K) \cap N(K)} L(gu, \mathfrak{D}, \chi, \lambda + \rho)\, d\dot{u},$$

où U est un horicycle de G relatif à A qui rencontre N^- suivant V, et $d\dot{u}$ une mesure invariante sur le quotient $U(K)/U(K) \cap N(K)$. En effet, d'une façon générale, si f est une fonction sur $U(K)$, invariante à droite par $U(K) \cap N(K)$, on a

$$U(K) = V(K) . (U(K) \cap N(K))$$

et

$$\int_{V(K)} f(v)\,dv = \int_{U(K)/U(K)\cap N(K)} f(u)\,du, \tag{2.3.3}$$

et il suffit donc d'appliquer cette formule à la fonction

$$u \mapsto L(gu, \mathfrak{D}, \chi, \lambda + \rho)$$

qui est définie sur $U(K)$ [*cf.* lemme (2.2)]. Du reste, si ζ est un caractère non trivial de $V(K)$ qui se prolonge en un caractère de $U(K)$, trivial sur $U(K)\cap N(K)$, on a encore une formule analogue à (2.3.2).

D'autre part, nous écrirons simplement :

$$\left\{\begin{aligned} E_V(\mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta) &= E_V(e, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta), \\ E_V(\mathfrak{D}, \chi, \lambda) &= E_V(e, \mathfrak{D}, \chi, \lambda). \end{aligned}\right. \tag{2.3.4}$$

Plus particulièrement, si $\mathfrak{D}$, χ, ζ sont triviaux, on écrira simplement

$$E_V(g, \lambda) = \int_{V(K)} L(gv, \lambda + \rho)\,dv. \tag{2.3.5}$$

Comme au § 1, on a la majoration suivante :

$$|L(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda)| \leqq L(g, \mathcal{R}\lambda), \tag{2.3.6}$$

où l'on désigne par $\mathcal{R}\lambda$ la partie réelle d'un $\lambda \in F$ par rapport à la forme réelle $F_{\mathbf{R}}$ de F. (On a $F = F_{\mathbf{R}} + iF_{\mathbf{R}}$ et tout $\lambda \in F$ est de la forme $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, où λ_1 et $\lambda_2 \in F_{\mathbf{R}}$; on pose $\mathcal{R}\lambda = \lambda_1$.) De plus, on a également le lemme suivant :

Lemme (2.4). — *Soient Ω_F un compact de $F_{\mathbf{R}}$ et Ω_G un compact de $G(K)$. Il existe deux constantes A et $B > 0$ telles que*

$$A\,|L(g, \lambda)| \leqq |L(\omega g, \mathcal{R}\lambda)| \leqq B\,L(g, \lambda) \tag{2.4.1}$$

pour $\mathcal{R}\lambda \in \Omega_F$, $\omega \in \Omega_G$, $g \in G(K)$.

Comme au § 1, le lemme (2.4) permet de ramener la convergence de l'intégrale (2.3) à celle de l'intégrale $E(e, \lambda)$ pour $\lambda \in F_{\mathbf{R}}$, qui est l'intégrale d'une fonction positive. De façon plus précise, avec les notations du lemme (2.4), si $E(e, \lambda)$ converge normalement pour $\lambda \in \Omega_F$, il en est de même de l'intégrale $E(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta)$ pour $g \in \Omega_G$, $\mathcal{R}\lambda \in \Omega_F$, ζ quelconque.

D'autre part, le calcul de l'intégrale $E_V(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda)$ se ramène à celui de l'intégrale $E_V(\mathfrak{D}, \chi, \lambda)$. En effet, il est clair que $E_V(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda)$ se transforme à gauche par la représentation $\mathfrak{D}$ du groupe compact M. Choisissons, d'autre part, un K-sous-groupe parabolique P contenant A

dont le radical unipotent U coupe N^- suivant V. Alors, en écrivant $E_{\Gamma}(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda)$ comme intégrale sur $U(K)/U \cap N(K)$, on voit aussitôt que $E_{\Gamma}(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda)$ est invariante par $U(K)$ à droite. D'autre part, il est facile de voir que $E_{\Gamma}(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda)$ se transforme à droite par un caractère (généralisé) de $A(K)$. On a, en effet,

$$(2.4.2) \quad E_{\Gamma}(ga, \mathfrak{D}, \chi, \lambda) = \left\langle -\lambda - \rho - \sum_{\alpha \in \Gamma} \alpha, a \right\rangle \chi(a) E_{\Gamma}(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda).$$

Comme on a $P(K) = MG'(K)\,A(K)\,U(K)$, où G' désigne la partie semi-simple de P, on voit que l'intégrale est déterminée par sa restriction à $G'(K)$. Cette dernière est encore une fonction qui se transforme à gauche par une représentation d'un sous-groupe compact maximal de $G'(K)$ et à droite par un caractère généralisé d'un sous-groupe de Borel de $G'(K)$. De façon précise, on a dans $G'(K)$ une décomposition d'Ivasawa « induite » par celle de $G(K)$

$$(2.4.3) \qquad G'(K) = M'A'(K)\,N'(K),$$

où l'on a posé

$$(2.4.4) \qquad M' = G'(K) \cap M, \qquad A' = (G' \cap A)^0, \qquad N' = G' \cap N.$$

Soient ρ' la demi-somme des racines positives de G' (i. e. appartenant à N') et $P'(\mathfrak{D}, \chi)$ le projecteur de $\mathcal{H}(\mathfrak{D})$ sur le sous-espace des vecteurs v tels que

$$(2.4.5) \qquad \mathfrak{D}(an)\,v = \chi(a)\,v, \qquad a \in A'(K) \cap M', \qquad n \in N'(K) \cap M'.$$

Considérons la fonction définie sur $G'(K)$ par la formule

$$(2.4.6) \qquad L'(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda) = \mathfrak{D}(m)\,\chi(a) \langle -\lambda, a \rangle P'(\mathfrak{D}, \chi),$$

où $g = man$ est une décomposition d'Ivasawa de g dans $G'(K)$. Avec ces notations, on a la proposition suivante (qui est en fait bien connue) :

Proposition (2.5). — *Pour tout* $g \in G'(K)$, *on a*

$$(2.5.1) \qquad E_{\Gamma}(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda) = L'(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda + \rho')\,E_{\Gamma}(\mathfrak{D}, \chi, \lambda).$$

On a seulement à prouver, pour $g \in G'(K)$, $a \in A'(K)$, $n \in N'(K)$, les relations suivantes :

$$(2.5.2) \qquad E_{\Gamma}(ga, \mathfrak{D}, \chi, \lambda) = \langle -\lambda - \rho', a \rangle \chi(a)\,E_{\Gamma}(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda);$$

$$(2.5.3) \qquad E_{\Gamma}(gn, \mathfrak{D}, \chi, \lambda) = E_{\Gamma}(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda).$$

Prouvons (2.5.2). Comme P est un sous-groupe parabolique de G, toute racine α de G par rapport à A est, soit dans G', soit dans U, soit dans le sous-groupe unipotent opposé U^-. En particulier, on a, pour la demi-somme ρ des racines positives, la relation

$$(2.5.4) \qquad \rho = \rho' + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in U \cap N} \alpha - \frac{1}{2} \sum_{\beta \in U \cap N^-} \beta,$$

ce qui s'écrit encore, puisque $V = U \cap N^-$,

$$(2.5.5) \qquad \rho + \sum_{\alpha \in V} \alpha = \rho' + \frac{1}{2}\lambda, \qquad \text{où } \lambda = \sum_{\alpha \in U} \alpha.$$

Or la restriction de λ à A' est égale à la restriction du module algébrique de groupe P. Comme A' est dans la partie semi-simple de P, cette restriction est triviale, et la formule (2.5.2) apparaît comme un cas particulier de la formule (2.4.2).

Prouvons la formule (2.5.3). Comme n est dans $P(K) \cap N(K)$, il normalise U, N et $U \cap N$. Il définit donc un automorphisme du quotient $U(K)/U(K) \cap N(K)$ qui laisse évidemment stable la mesure invariante. En écrivant E_V comme intégrale sur ce quotient, on a aussitôt

$$(2.5.6) \quad E_V(gn, \mathfrak{D}, \chi, \lambda) = \int_{U(K)/U \cap N(K)} L(gnun^{-1}, \mathfrak{D}, \chi, \lambda + \rho)\, d\dot{u} = E_V(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda).$$

D'où la relation (2.5.3) et la proposition (2.5).

Si ζ est un caractère de module 1 du groupe $V(K)$, on a seulement la proposition moins précise suivante, dont nous laisserons la démonstration au lecteur :

Proposition (2.5.7). — *On utilise les notations précédentes. Soient $m \in M$, $g \in G(K)$, $v \in V(K)$, $a \in A(K)$. On a, dans le domaine de convergence de l'intégrale,*

$$(2.5.7.1) \quad E_V(mg, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta) = \mathfrak{D}(m)\, E_V(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta);$$

$$(2.5.7.2) \quad E_V(gv, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta) = E_V(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta)\, \bar{\zeta}(v);$$

$$(2.5.7.3) \quad E_V(ga, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta) = E_V(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta^a) \times \left\langle -\lambda - \rho - \sum_{\alpha \in V} \alpha, a \right\rangle \chi(a),$$

où l'on désigne par ζ^a le caractère de $V(K)$ défini par

$$\zeta^a(v) = \zeta(a^{-1} v a).$$

Dans un autre ordre d'idées, supposons que P soit un sous-groupe parabolique standard, c'est-à-dire contenant le sous-groupe de Borel B

choisi. La partie semi-simple G' de ce parabolique est donc de la forme $G'=G[\theta]$, où $\theta\subset\Delta$. Gardons les notations de (2.4.3) à (2.4.6). Le radical unipotent U de P est donc engendré par les N_α pour $\alpha>0$, $\alpha\notin[\theta]$, et le groupe N' par les N_α pour $\alpha>0$, $\alpha\in[\theta]$. Soit N'^- le groupe unipotent opposé à N'. Comme on l'a déjà remarqué, c'est un groupe hémicycle de G. Alors, on a la proposition suivante :

Proposition (2.6). — *Pour $g\in G'(K)$, on a*

$$L(g,\mathfrak{D},\chi,\lambda+\rho)=L'(g,\mathfrak{D},\chi,\lambda+\rho')\,P(\mathfrak{D},\chi). \tag{2.6.1}$$

Pour $g\in G(K)$ et $u\in U(K)$, on a, dans le domaine de convergence de l'intégrale,

$$E_{N'^-}(gu,\mathfrak{D},\chi,\lambda;\zeta)=E_{N'^-}(g,\mathfrak{D},\chi,\lambda;\zeta). \tag{2.6.2}$$

L'assertion (2.6.1) est immédiate si l'on remarque que

$$\rho=\rho'+\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in U}\alpha \tag{2.6.3}$$

et que le caractère rationnel $\sum\limits_{\alpha\in U}\alpha$ a une restriction triviale à A'. L'assertion (2.6.2) se prouve ainsi; on écrit

$$E_{N'^-}(gu,\mathfrak{D},\chi,\lambda;\zeta)=\int_{N'^-(K)}L(gvu',\mathfrak{D},\chi,\lambda+\rho)\,\zeta(v)\,dv, \tag{2.6.4}$$

où $u'=v^{-1}uv$ est un élément de $U(K)$. Comme $U\subset N$ et que la fonction à intégrer est invariante par N, la relation cherchée est immédiate.

Pour étudier la convergence des intégrales (2.3), nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme (2.7). — *Soit V un hémicycle contenant au moins deux racines (on rappelle que R est un système de racines réduit). Alors il existe un sous-groupe parabolique P de G contenant A et V dont le radical unipotent U coupe N^- suivant un sous-groupe propre de V.*

Raisonnons en termes de racines. Soit η une partie hémicyclique de R_- contenant au moins deux racines. Il suffit de prouver l'existence d'un hyperplan H de $F_{\mathbf{R}}$ délimitant un demi-espace ouvert L tel que :

$$\eta\subset\overline{L},\qquad R_-\cap L\subset\eta,\qquad \emptyset\neq L\cap R_-\neq\eta. \tag{2.7.1}$$

Pour cela choisissons des hyperplans H_0 et H_1 limitant des demi-espaces ouverts L_0 et L_1 tels que

$$R_-=R\cap L_1\qquad\text{et}\qquad \eta=R_-\cap L_0.$$

Quitte à modifier H_1, on peut supposer que η n'est pas contenu dans un hyperplan du faisceau linéaire engendré par H_0 et H_1. Soit alors e_0 et e_1 des vecteurs issus de l'origine, orthogonaux respectivement à H_0 et H_1 : On suppose e_0 dans L_0 et $-e_1$ dans L_1. Pour $0 \leq t \leq 1$, on pose $e_t = te_1 + (1-t)e_0$. Vu le choix de e_0 et e_1, on a

$$(e_0, \alpha) > 0 \qquad \text{et} \qquad (e_1, \alpha) < 0 \quad \text{pour tout } \alpha \in \eta.$$

Il existe donc un t tel qu'on ait

$$(e_t, \alpha) \geq 0 \quad \text{pour tout } \alpha \in \eta \qquad \text{et} \qquad (e_t, \beta) = 0 \quad \text{pour un } \beta \in \eta \text{ au moins.}$$

Soient alors H l'hyperplan issu de l'origine et orthogonal à e_t et L le demi-espace ouvert délimité par H et contenant e_t. Il est clair que L convient. En effet, on a $\eta \subset \overline{L}$; si une racine négative α est dans L, on a $(e_1, \alpha) < 0$ et $(e_t, \alpha) > 0$, d'où *a fortiori* $(e_0, \alpha) > 0$ et $\alpha \in \eta$. On a, d'autre part, $L \cap R_- \neq \eta$ puisqu'une racine au moins de η est dans H. Enfin, si $L \cap R_-$ était vide, l'ensemble η serait contenu dans H qui appartient au faisceau linéaire engendré par H_0 et H_1. On voit que η satisfait (2.7.1). D'où le lemme.

Théorème (2.8) (Gindikin et Karpelevič, *cf.* [6]). — *Soient $V = N_\eta$ un hémicycle de N^- et ζ un caractère de module 1 du groupe $V(K)$. L'intégrale*

$$(2.3) \qquad E_V(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta) = \int_{V(K)} L(gv, \mathfrak{D}, \chi, \lambda + \rho)\, \zeta(v)\, dv$$

converge absolument pour λ dans le tube $B(V)$ défini par les inégalités

$$(2.8.1) \qquad \begin{cases} \langle \mathcal{R}\lambda, \check{\alpha} \rangle > 0 \quad \text{pour } -\alpha \in \eta \\ (\text{Soit encore } (\mathcal{R}\lambda, \alpha) > 0 \quad \text{pour } -\alpha \in \eta). \end{cases}$$

Soient Ω_G un compact de $G(K)$, Ω_F un compact de $F_{\mathbf{R}}$ contenu dans $B(V)$; la convergence est normale pour $g \in \Omega_G$, $\mathcal{R}\lambda \in \Omega_F$. En particulier, l'intégrale précédente définit une fonction continue du couple (g, λ) holomorphe en λ sur $G(K) \times B(V)$.

Comme on l'a déjà dit, on peut se borner à démontrer le théorème pour $\mathfrak{D} = 1$, $\chi = 1$, $\zeta = id$, $\lambda \in F_{\mathbf{R}}$ et $g = e$. Par récurrence sur le nombre d'éléments de η, nous allons prouver que, pour tout $\lambda \in B(V) \cap F_{\mathbf{R}}$, on a

$$(2.8.2) \quad L(v, \lambda) \leq 1 \quad \text{pour } v \in V(K) \qquad \text{et} \qquad \int_{V(K)} L(v, \lambda + \rho)\, dv < +\infty.$$

Si η contient une seule racine, c'est l'opposée d'une racine simple α. En vertu de la proposition (2.6), pour tout $v \in V(K)$, on a

$$(2.8.3) \qquad \begin{cases} L(v, \lambda) = L(v, s_\alpha \Lambda_\alpha), \qquad L(v, \lambda + \rho) = L(v, \Lambda_\alpha + s_\alpha \Lambda_\alpha) \\ \qquad\qquad \text{si} \quad \lambda = \sum_{\beta \in \Delta} s_\beta \Lambda_\beta. \end{cases}$$

En d'autres termes, à condition d'identifier le groupe $\mathbf{SL}(2, K)$ au groupe G^α au moyen de l'isomorphisme $\mathfrak{X}_\alpha$, la fonction $L(v, \lambda)$ n'est autre que la fonction notée $L(v, s_\alpha)$ au § 1. Il suffit donc d'appliquer les formules de la proposition (1.4) (ii) pour voir que si $\lambda \in B(V) \cap F_{\mathbf{R}}$, c'est-à-dire si $s_\alpha > 0$, on a $L(v, \lambda) \leqq 1$. De même, la proposition (1.5) montre que

$$\int L(v, \lambda + \rho)\, dv < +\infty.$$

Nous pouvons donc supposer que η contient $p \geqq 2$ éléments et que nos assertions sont établies pour $p' < p$. Il existe alors, en vertu du lemme (2.7), un sous-groupe parabolique P de G contenant A et V dont le radical unipotent U coupe N^- suivant un groupe $V'' = U \cap N^-$ qui est un sous-groupe propre de V. Désignons par G' la partie semi-simple de P et par $B' = A'N'$ le sous-groupe de Borel $B' = (B \cap G')^0$ de G'. Notons que, si $G' = G_\psi$, la trace d'une partie parabolique (resp. horicyclique, hémicyclique) de R sur ψ est une partie parabolique (resp. horicyclique, hémicyclique) de ψ. En particulier, le groupe $V' = V \cap N'^-$ est un hémicycle du groupe G' contenu dans N'^-. D'autre part, en vertu du lemme (2.2), on a

$$V(K) = V'(K)\, V''(K).$$

En effet, si une racine $\alpha \in V$ n'est pas dans U, elle est dans la partie semi-simple de P, donc dans N' ou N'^-. Mais comme V est contenu dans N^-, on a nécessairement $\alpha \in N'^-$.

Écrivons donc tout point $v \in V(K)$ sous la forme

$$(2.8.4) \qquad v = v'v'', \qquad \text{avec} \quad v' \in V(K), \quad v'' \in V''(K).$$

Écrivons une décomposition d'Ivasawa de v' dans le groupe G'

$$(2.8.5) \quad v' = man, \qquad m \in M' = M \cap G'(K), \qquad a \in A'(K), \qquad n \in N'(K).$$

On peut écrire

$$(2.8.6) \qquad \begin{aligned} L(v, \lambda) &= L(anv''n^{-1}, \lambda) = L(anv''n^{-1}a^{-1}, \lambda).L(a, \lambda) \\ &= L(anv''n^{-1}a^{-1}, \lambda).L(v', \lambda). \end{aligned}$$

D'autre part, en vertu du lemme (2.2), on a $U(K) = V''(K).U \cap N(K)$. En particulier, $anv''n^{-1}a^{-1}$ est dans $U(K)$ et égal modulo $N(K)$ à un élément v_1 de V''. D'où

$$(2.8.7) \qquad L(v, \lambda) = L(v', \lambda)\, L(v_1, \lambda).$$

Si $\lambda \in B(V)$, λ est *a fortiori* dans $B(V'')$, et la restriction de λ au tore A' est dans le tube $B(V')$ de l'espace $X^*(A') \otimes \mathbf{C}$ associé à l'hémicycle V'

de G'. Nous pouvons donc appliquer l'hypothèse de récurrence aux groupes V' et V''. Nous avons donc

$$(2.8.8) \qquad L(v', \lambda) \leqq 1 \quad \text{et} \quad L(v_1, \lambda) \leqq 1.$$

D'où, en vertu de (2.8.7), l'inégalité cherchée $L(v, \lambda) \leqq 1$.

Utilisons toujours le lemme (2.2). Nous pouvons écrire

$$(2.8.9) \qquad \int_{V(K)} L(v, \lambda + \rho)\, dv = \int_{V'(K)} dv' \int_{V''(K)} L(v'v'', \lambda + \rho)\, dv'',$$

ce qui peut encore s'écrire en vertu de la proposition (2.5),

$$(2.8.10) \qquad \int_{V(K)} L(v, \lambda + \rho)\, dv = \int_{V'(K)} L(v', \lambda + \rho')\, dv' \times \int_{V''(K)} L(v'', \lambda + \rho)\, dv'',$$

où ρ' désigne la demi-somme des racines $\alpha \in N'$.

Comme plus haut, si λ est dans $B(V)$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux groupes V' et V'' et les intégrales

$$(2.8.11) \qquad \int_{V'(K)} L(v', \lambda + \rho')\, dv' \quad \text{et} \quad \int_{V''(K)} L(v'', \lambda + \rho)\, dv''$$

sont finies. Il en est donc de même de l'intégrale (2.8.10).

Notons que si λ est de la forme $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$, où $\lambda_i \in B(V) \cap F_{\mathbf{R}}$, on a

$$(2.8.12) \qquad L(v, \lambda + \rho') = L(v, \lambda_0 + \rho)\, L(v, \lambda_1)$$

et donc, en vertu de (2.8.2),

$$(2.8.13) \qquad \int L(v, \lambda + \rho)\, dv \leqq \int L(v, \lambda_0 + \rho)\, dv < +\infty.$$

A fortiori, l'intégrale $\int L(v, \lambda + \rho)\, dv$ converge normalement pour λ dans un compact de $B(V) \cap F_{\mathbf{R}}$.

La démonstration précédente fournit en fait un moyen de calculer les intégrales $E_V(\mathfrak{D}, \chi, \lambda)$ par récurrence sur le nombre de racines contenues dans V. De façon précise, soient toujours V un sous-groupe hémicycle de N^- et P un sous-groupe parabolique de G contenant A et V dont le radical unipotent U coupe N^- suivant un hémicycle V'' contenu dans V. Soit G' la partie semi-simple de P et soit $V' = V \cap G'$. Le groupe V' est un hémicycle de G'. Utilisons encore les notations (2.4.3) à (2.4.6).

PROPOSITION (2.9). — *Soit ζ un caractère de module* 1 *du groupe $V(K)$, trivial sur $V''(K)$.*

(2.9.1) *Pour $g \in G(K)$, $u \in U(K)$, $\lambda \in B(V)$, on a*

$$E_V(gu, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta) = E_V(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta).$$

(2.9.2) *Pour $g \in G'(K)$, on a*

$$E_V(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta) = \int_{V'(K)} L'(gv', \mathfrak{D}, \chi, \lambda + \rho')\,\zeta(v')\,dv'\,E_{V''}(\mathfrak{D}, \chi, \lambda).$$

En utilisant à nouveau le lemme (2.2), on peut écrire

$$(2.9.3)\quad E_V(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta) = \int_{V'(K)} \zeta(v')\,dv' \int_{V''(K)} L(gv'v'', \mathfrak{D}, \chi, \lambda + \rho)\,dv'',$$

c'est-à-dire

$$(2.9.4)\qquad E_V(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta) = \int_{V'(K)} E_{V''}(gv', \mathfrak{D}, \chi, \lambda)\,\zeta(v')\,dv'.$$

Alors l'assertion (2.9.2) est seulement une conséquence de la propotion (2.5). Quant à l'assertion (2.9.1), on remplace g par gu dans la formule précédente. Il vient ainsi

$$(2.9.5)\qquad E_V(gu, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta) = \int_{V'(K)} E_{V''}(gv'u', \mathfrak{D}, \chi, \lambda)\,\zeta(v')\,dv',$$

où $u' = (v')^{-1}uv'$ est encore un élément de $U(K)$. Comme la fonction $E_{V''}(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda)$ est invariante par $U(K)$ [puisqu'on peut la définir par une intégrale portant sur un quotient de $U(K)$], la relation (2.9.1) est établie.

REMARQUE (2.9.6). — Par récurrence sur le nombre de racines contenues dans V, on ramène facilement l'intégrale $E_V(\mathfrak{D}, \chi, \lambda)$ à un produit d'intégrales analogues pour un groupe G de rang 1, i. e. isomorphe à $\mathbf{SL}(2, K)$. Une telle intégrale se prolonge analytiquement en une fonction méromorphe, comme il est facile de le voir [*cf.* § 4, remarque (4.5)]. D'autre part, on a déjà vu que l'intégrale $E_V(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda)$ se ramène à l'intégrale $E_V(\mathfrak{D}, \chi, \lambda)$ [*cf.* proposition (2.5) et les remarques qui la précèdent]. En combinant ces résultats, on obtient le fait que $E_V(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda)$ se prolonge en une fonction méromorphe de la variable λ.

(2.9.7) Soit ζ un caractère de module 1 de l'hémicycle V. On peut appliquer la proposition précédente en prenant pour V'' un hémicycle contenu dans V sur lequel ζ soit trivial, maximal pour cette propriété. Avec les notations de la proposition (2.9), dans l'étude de l'intégrale $E_{V'}(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta)$, on peut se borner aux $g \in G'(K)$ puisqu'on connaît le comportement de l'intégrale lorsqu'on remplace g par mg, par ga [*cf.* (2.5.9)] ou par gu [*cf.* (2.9.1)] et qu'on a $G(K) = M G'(K) A(K) U(K)$. Comme $E_{V''}(\mathfrak{D}, \chi, \lambda)$ admet un prolongement analytique méromorphe d'après la remarque (2.9.6), la formule (2.9.2) ramène le prolongement analytique de $E_{V'}(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta)$ à celui de l'intégrale

$$(2.9.8) \qquad \int_{V'(K)} L'(gv, \mathfrak{D}, \chi, \lambda + \rho)\,\zeta(v')\,dv'.$$

En d'autres termes, pour faire le prolongement analytique de l'intégrale $E_{V'}$, on peut remplacer le groupe G par le groupe G'. De proche en proche, on est ramené au cas où ζ est « générique », i. e. n'est trivial sur aucun des hémicycles contenus dans V. Comme un hémicycle contient toujours l'opposé d'une racine simple et que, pour toute racine simple α, le groupe $N_{\bar{\alpha}}$ est un hémicycle, cette condition signifie encore que ζ n'est trivial sur aucun des groupes $N_{\bar{\alpha}}$, $\alpha \in \Delta$, contenus dans V.

REMARQUE (2.9.9). — Les résultats précédents s'étendent au cas d'un groupe semi-simple réel quelconque, non nécessairement déployé. Ils s'étendent aussi au cas d'un groupe déployé mais non nécessairement simplement connexe, sur un corps K localement compact quelconque.

3. L'équation fonctionnelle des fonctions de Whittaker.

Les notations sont celles du § 2; on se donne en particulier une représentation unitaire $\mathfrak{D}$ du groupe M dans un espace hilbertien de dimension finie $\mathcal{H}(\mathfrak{D})$, un caractère de module 1 χ du groupe $A(K)$, un élément λ de F. On pose

$$(3.1.1) \qquad \lambda = \sum_{\beta \in \Delta} s_\beta \Lambda_\beta, \qquad \chi(a) = \prod_{\beta \in \Delta} \chi_\alpha(\Lambda_\alpha(a)).$$

Pour chaque $\alpha \in \Delta$, on choisit un isomorphisme

$$(3.1.2) \qquad \mathfrak{X}_\alpha : \ \mathbf{SL}(2, K) \to G_\alpha$$

transformant le sous-groupe compact maximal M_0 de $\mathbf{SL}(2, K)$ déjà introduit au § 1 (resp. le sous-groupe de Borel $B_0 = A_0 N_0$ des matrices triangulaires) en $M^\alpha = M \cap G^\alpha(K)$ (resp. en le sous-groupe de Borel $B^\alpha = A^\alpha N_\alpha$). Soit maintenant $\mathfrak{D}_\alpha$ la représentation $\mathfrak{D} \circ \mathfrak{X}_\alpha$ de M_0 dans le sous-espace $\mathcal{H}_\alpha$ engendré par les vecteurs de la forme $\mathfrak{D}(m)\,v$, où $m \in M^\alpha$, et v est dans l'image $\mathcal{H}(\mathfrak{D}, \chi)$ du projecteur $P(\mathfrak{D}, \chi)$. Vu le lemme (1.2), la restriction de $P(\mathfrak{D}, \chi)$ à $\mathcal{H}_\alpha$ est le projecteur $P(\mathfrak{D}_\alpha, \chi_\alpha)$ de $\mathcal{H}_\alpha$ sur le sous-espace des vecteurs $v \in \mathcal{H}_\alpha$ tels que

$$(3.1.3) \quad \mathfrak{D}_\alpha(an)\,v = \chi_\alpha(a)\,v \qquad \text{pour} \quad a \in A_0(K) \cap M_0 \quad \text{et} \quad n \in N_0(K) \cap M_0.$$

Il en résulte que, pour tout $g \in G^\alpha(K)$, on a

(3.1.4) $$L(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda + \rho) = L(\mathfrak{X}_{\overline{\alpha}}^{-1}(g), \mathfrak{D}_\alpha, \chi_\alpha, s_\alpha + 1),$$

où le second membre désigne la fonction introduite sous cette notation au § 1. Soit, d'autre part, ζ un caractère de module 1 du groupe $N_{\overline{\alpha}}(K)$ ou plus généralement d'un groupe $V(K)$ contenant $N_{\overline{\alpha}}(K)$ et $\mu_\alpha \in K$ le scalaire déterminé par la relation

(3.1.5) $$\zeta\left[\mathfrak{X}_\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}\right] = \tau(x\mu_\alpha).$$

D'autre part, le groupe $N_{\overline{\alpha}}$ est, comme on l'a déjà dit, un hémicycle de G, et l'on notera simplement $E_\alpha(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta)$ l'intégrale correspondante. Alors, pour tout $g \in G^\alpha(K)$, on a

(3.1.6) $$E_\alpha(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta) = E(\mathfrak{X}_{\overline{\alpha}}^{-1}(g), \mathfrak{D}_\alpha, \chi_\alpha, s_\alpha; \mu_\alpha),$$

où le second membre désigne la fonction introduite sous cette notation au § 1. Enfin, nous désignerons par $\mathfrak{U}_\alpha(\mathfrak{D}, \chi, s)$ l'opérateur de $\mathcal{H}(\mathfrak{D})$ qui est nul sur l'orthogonal de $\mathcal{H}_\alpha$ et se réduit sur $\mathcal{H}$ à l'opérateur $\mathfrak{U}(\mathfrak{D}_\alpha, \chi_\alpha, s)$ [*cf.* form. (1.10.1)].

Supposons maintenant $\mu_\alpha \neq 0$. Le corollaire (1.10) implique que $E_\alpha(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta)$ se prolonge en une fonction entière de λ lorsque g est dans $G^\alpha(K)$. Ce même corollaire implique aussi la relation

(3.1.7) $$E_\alpha(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta) = \overline{\chi}_\alpha(\mu_\alpha)\,|\mu_\alpha|^{s_\alpha} E_\alpha(g, \mathfrak{D}, w_\alpha\chi, w_\alpha\lambda; \zeta)\,\mathfrak{U}_\alpha(\mathfrak{D}, \chi, s_\alpha)$$

toujours pour $g \in G^\alpha(K)$. Enfin le corollaire (1.12) entraîne l'existence d'une fonction continue $C(s) \geqq 0$ possédant la propriété suivante : Pour tout compact Ω de K^* et tout $b > 0$, il existe une constante $B > 0$ telle que

(3.1.8) $$|E_\alpha(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta)| \leqq B\,C(s)\,E_\alpha(g, \lambda_b)$$

pour $\mu_\alpha \in \Omega$, $g \in G^\alpha(K)$, $|\mathcal{R} s_\alpha| \leqq b$ et où l'on pose

(3.1.9) $$\lambda_b = \mathcal{R}\lambda - \frac{1}{2}(\mathcal{R} s_\alpha - b)\,\alpha.$$

En effet, la restriction de λ_b au tore A est égale à celle de $b\Lambda_\alpha$ de sorte que $E_\alpha(g, \lambda_b) = E(\mathfrak{X}_{\overline{\alpha}}^{-1}(g), b)$. L'inégalité (3.1.8) se réduit donc à l'inégalité (1.12.1).

Ces résultats s'étendent au cas d'un élément g quelconque dans le groupe $G(K)$. De façon précise, on a la proposition suivante :

LEMME (3.2). — *On suppose le caractère ζ non trivial.*

(i) *L'intégrale $E_\alpha(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta)$, pour $g \in G(K)$, se prolonge en une fonction holomorphe de λ.*

(ii) *Pour* $g \in G(K)$, *on a*

$$(3.2.1)\quad E_\alpha(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta) = \overline{\chi}_\alpha(\mu_\alpha)\,|\mu_\alpha|^{s_\alpha} E_\alpha(g, \mathfrak{D}, w_\alpha\chi, w_\alpha\lambda; \zeta)\,\Psi_\alpha(\mathfrak{D}, \chi, s_\alpha).$$

(iii) *Soit* $b > 0$ *et* $\mu_\alpha \in K^*$. *Il existe une constante B telle que*

$$(3.2.2)\qquad |E_\alpha(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta)| \leq B\,C(s)\,E_\alpha(g, \lambda_b)$$

pour $|\mathcal{R} s_\alpha| \leq b$ et $\lambda_b = \mathcal{R}\lambda - \frac{1}{2}(\mathcal{R} s_\alpha - b)\,\alpha$.

(iv) *Le prolongement* $E_\alpha(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta)$ *est une fonction continue du couple* (g, λ).

Soit U le groupe horicyclique engendré par les racines positives distinctes de α. La fonction $E_\alpha(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta)$ est invariante par $U(K)$ à droite [*cf.* (2.6.1)]. Elle se transforme à gauche par la représentation $\mathfrak{D}$ de M. Or, on a

$$(3.2.3)\qquad G(K) = M\,.\,G_\alpha(K)\,A(K)\,U(K).$$

Il suffit donc de prouver les assertions (i) à (iii) du lemme (3.2), pour un $g \in G_\alpha(K)\,A(K)$. Désignons par T la composante neutre du noyau de α dans le tore A. Il existe un ensemble fini $\Omega_A \subset A(K)$ tel que

$$(3.2.4)\qquad A(K) = A^\alpha(K)\,\Omega_A\,T(K).$$

Comme $t \in T(K)$ commute à G^α, on a

$$(3.2.5)\qquad E_\alpha(gt, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta) = \int_{N_\alpha^-(K)} L(gnt, \mathfrak{D}, \chi, \lambda + \rho)\,\zeta(n)\,dn$$

ou encore

$$(3.2.6)\qquad E_\alpha(gt, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta) = \chi(t)\langle -\lambda - \rho, t\rangle E_\alpha(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta).$$

On a, de même,

$$(3.2.7)\qquad E_\alpha(gt, \mathfrak{D}, w_\alpha\chi, w_\alpha\lambda; \zeta) = \chi(w_\alpha(t))\langle -\rho - w_\alpha\lambda, t\rangle E_\alpha(g, \mathfrak{D}, w_\alpha\chi, w_\alpha\lambda; \zeta);$$

$$(3.2.8)\qquad E_\alpha(gt, \lambda_b) = \langle -\rho - \lambda_b, t\rangle E_\alpha(g, \lambda_b).$$

Comme t est par hypothèse dans le noyau de α, on a

$$(3.2.9)\qquad w_\alpha t = t \qquad \text{et} \qquad \langle \lambda_b, t\rangle = \langle \mathcal{R}\lambda, t\rangle.$$

Les relations (3.2.7) et (3.2.8) se réduisent donc simplement à

$$(3.2.10)\quad E_\alpha(gt, \mathfrak{D}, w_\alpha\chi, w_\alpha\lambda; \zeta) = \chi(t)\langle -\rho - \lambda, t\rangle E_\alpha(g, \mathfrak{D}, w_\alpha\chi, w_\alpha\lambda; \zeta);$$

$$(3.2.11)\qquad E_\alpha(gt, \lambda_b) = \langle -\rho - \mathcal{R}\lambda, t\rangle E_\alpha(g, \lambda_b).$$

Les relations (3.2.6), (3.2.10) et (3.2.11) montrent qu'on peut se borner désormais à établir les assertions (i) à (iii) du lemme (3.2) pour g dans un ensemble de la forme $G^{\alpha}(K)\,\Omega_{\mathcal{A}}$.

Soit donc $\omega \in \Omega_{\mathcal{A}}$. Désignons par ζ^{ω} le caractère de $N_{\bar{\alpha}}(K)$ défini par

$$(3.2.12) \qquad \zeta(\omega^{-1} n \omega) = \zeta^{\omega}(n).$$

Il est de paramètre $\alpha(\omega)\,\mu_{\alpha}$. On a [*cf.* (2.5.7.3)]

$$(3.2.13) \quad E_{\alpha}(g\omega, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta) = \chi(\omega) \langle \alpha - \rho - \lambda, \omega \rangle E_{\alpha}(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta^{\omega}).$$

Cette formule achève de prouver la première assertion.

On a, de même,

$$(3.2.14) \quad E_{\alpha}(g\omega, \mathfrak{D}, w_{\alpha}\chi, w_{\alpha}\lambda; \zeta) = w_{\alpha}\chi(\omega) \langle \alpha - \rho - w_{\alpha}\lambda, \omega \rangle \times E_{\alpha}(g, \mathfrak{D}, w_{\alpha}\chi, w_{\alpha}\lambda; \zeta^{\omega}).$$

D'autre part, supposant $g \in G^{\alpha}(K)$, l'équation fonctionnelle (3.1.7) pour le caractère ζ^{ω} s'écrit

$$(3.2.15) \quad E_{\alpha}(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta^{\omega}) = \bar{\chi}_{\alpha}[\mu_{\alpha}\alpha(\omega)]\,|\mu_{\alpha}\alpha(\omega)|^{s_{\alpha}} \times E_{\alpha}(g, \mathfrak{D}, w_{\alpha}\chi, w_{\alpha}\lambda; \zeta^{\omega})\, \mathfrak{U}_{\alpha}(\mathfrak{D}, \chi, s_{\alpha}),$$

soit encore

$$(3.2.16) \quad E_{\alpha}(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta^{\omega}) = \bar{\chi}_{\alpha}[\alpha(\omega)] \langle s_{\alpha}\alpha, \omega \rangle \bar{\chi}_{\alpha}(\mu_{\alpha})\,|\mu_{\alpha}|^{s_{\alpha}} \times E_{\alpha}(g, \mathfrak{D}, w_{\alpha}\chi, w_{\alpha}\lambda; \zeta^{\omega})\, \mathfrak{U}_{\alpha}(\mathfrak{D}, \chi, \alpha).$$

Compte tenu des relations (3.2.13), (3.2.14) et (3.2.16), la rela- (3.2.1) pour un élément de la forme $g\omega$ avec $g \in G^{\alpha}(K)$ et $\omega \in \Omega_{\mathcal{A}}$ se ramène à l'égalité :

$$\chi(\omega) \langle \alpha - \lambda, \omega \rangle \bar{\chi}_{\alpha}[\alpha(\omega)] \langle s_{\alpha}\alpha, \omega \rangle = w_{\alpha}\chi(\omega) \langle \alpha - w_{\alpha}\lambda, \omega \rangle,$$

formule qui résulte simplement de la définition de w_{α}.

Prouvons maintenant l'assertion (iii). Soit $b > 0$. Il existe une constante B telle que, pour tout $\omega \in \Omega_{\mathcal{A}}$ et tout $g \in G^{\alpha}(K)$, on ait

$$(3.2.17) \qquad |E_{\alpha}(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta^{\omega}| \leqq B\, C(s)\, E_{\alpha}(g, \lambda_b)$$

chaque fois que $|\mathcal{R} s_{\alpha}| \leqq b$.

On a déjà vu que

$$(3.2.13) \quad E_{\alpha}(g\omega, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta) = \chi(\omega) \langle \alpha - \rho - \lambda, \omega \rangle E_{\alpha}(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta^{\omega}).$$

De même, on a

$$(3.2.18) \qquad E_{\alpha}(g\omega, \lambda_b) = \langle \alpha - \rho - \lambda_b, \omega \rangle E_{\alpha}(g, \lambda_b).$$

Or le quotient

$$|\chi(\omega) \langle \alpha - \rho - \lambda, \omega \rangle| / \langle \alpha - \rho - \lambda_b, \omega \rangle = \left\langle -\frac{1}{2}(\mathcal{R} s_{\alpha} - b)\,\alpha, \omega \right\rangle$$

reste borné pour $|\mathcal{R} s_\alpha| \leq b$. Quitte à changer la constante B, on a donc encore

$$(3.2.19) \qquad |E_\alpha(g\omega, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta)| \leq B\, C(s)\, E_\alpha(g\omega, \lambda_b)$$

pour $g \in G^\alpha(K)$, $\omega \in \Omega_A$ et $|\mathcal{R} s_\alpha| \leq b$. Ceci achève la démonstration de l'assertion (iii) du lemme (3.2).

Il reste à prouver la dernière assertion. Elle est évidente si K est non archimédien, car la fonction $E_\alpha(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta)$ se transforme par une représentation fixe du compact maximal M et est donc invariante par les translations à gauche par les éléments d'un sous-groupe ouvert de $G(K)$. Si, au contraire, $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, appelons A_+ et T_+ les points de $A_\alpha(K)$ et $T(K)$ sur lesquels les caractères rationnels de ces deux tores prennent des valeurs réelles > 0; en transformant la décomposition d'Ivasawa par un représentant de w_α, on obtient que

$$(3.2.20) \qquad G(K) = M A_+ T_+ N_\alpha^-(K)\, V(K)$$

et même le fait que l'application $(m, a, t, n, v) \mapsto matnv$ est un homéomorphisme du produit $M \times A_+ \times T_+ \times N_\alpha^-(K) \times V(K)$ sur $G(K)$. Compte tenu des formules qui précèdent, l'assertion (iii) se ramène aussitôt à la continuité de $E_\alpha(a, \mathfrak{D}, \chi, s_\alpha \Lambda_\alpha; \zeta)$ sur $A_+ \times \mathbf{C}$ qui est déjà connue d'après le § 1.

Nous allons en déduire le résultat fondamental de ce paragraphe.

Proposition (3.3). — *Soient V un sous-groupe hémicycle de N^-, et α une racine simple dont l'opposé est dans V. Soit ζ un caractère de module 1 de $V(K)$ qui soit non trivial sur le groupe $N_\alpha^-(K)$ (i. e. tel que le paramètre μ_α soit non nul). Alors l'intégrale $E_V(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta)$ se prolonge en une fonction holomorphe à l'enveloppe convexe* D *de $B(V) \cup w_\alpha B(V)$. On a, pour tout $\lambda \in D$,*

$$(3.3.1) \qquad E_V(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta) = \overline{\chi}_\alpha(\mu_\alpha)\, |\mu_\alpha|^{s_\alpha} \times E_V(g, \mathfrak{D}, w_\alpha\chi, w_\alpha\lambda; \zeta)\, \Psi_\alpha(\mathfrak{D}, \chi_\alpha, s_\alpha).$$

Soit ψ l'ensemble des $\beta \in V$ et soit $\eta \subset \psi$ l'ensemble des $\beta \in \psi$ distincts de $-\alpha$. Comme ψ et η sont des ensembles clos, on voit qu'en posant $U = N_\eta$, tout point $v \in V(K)$ s'écrit de façon unique

$$(3.3.2) \qquad v = un, \qquad u \in U(K), \qquad n \in N_\alpha^-(K)$$

et l'on a

$$(3.3.3) \qquad \zeta(v) = \zeta(u)\, \zeta(n) \qquad \text{et} \qquad dv = du\, dn.$$

Pour λ dans le domaine de convergence de l'intégrale E_V, i. e. $\lambda \in B(V)$, on a donc

$$(3.3.4) \qquad E_V(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta) = \int_{U(K)} \int_{N_\alpha^-(K)} L(gun, \mathfrak{D}, \chi, \lambda + \rho)\, \zeta(u)\, \zeta(n)\, du\, dn,$$

soit encore

$$E_F(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta) = \int_{U(K)} E_\alpha(gu, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta)\, \zeta(u)\, du. \tag{3.3.5}$$

De manière plus précise, il résulte du théorème de Lebesgue-Fubini que, pour λ dans $B(V) \cap F_{\mathbf{R}}$,

$$\int_{U(K)} E_\alpha(u, \lambda)\, du \tag{3.3.6}$$

(qui est l'intégrale d'une fonction positive) est finie. Si, de plus, Ω_G est un compact de $G(K)$ et Ω_F un compact de $B(V) \cap F_{\mathbf{R}}$, il existe un $\lambda_0 \in B(V) \cap F_{\mathbf{R}}$ tel que $\Omega_F \subset \lambda_0 + B(V)$ et une constante $A > 0$ telle que

$$|L(gh, \mathfrak{D}, \lambda + \rho)| \leqq A\, L(h, \mathcal{R}\lambda + \rho) \leqq A\, L(h, \lambda_0 + \rho) \tag{3.3.7}$$

pour $g \in \Omega_G$, $h \in G(K)$, $\mathcal{R}\lambda \in \Omega_F$. [*Cf.* lemme (2.4) et formule (2.8.2).] Cela montre que, pour $g \in G(K)$, $\mathcal{R}\lambda \in \Omega_F$, $u \in U(K)$, on a

$$|E_\alpha(gu, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta)| \leqq A\, E_\alpha(u, \lambda_0) \tag{3.3.8}$$

et l'intégrale (3.3.5) est donc normalement convergente pour $g \in \Omega_G$ et $\mathcal{R}\lambda \in \Omega_F$.

Soit maintenant D' l'ensemble des $\lambda \in F$ qui vérifient la condition suivante :

(3.3.9) Il existe $b > 0$ tel que $|\mathcal{R}s_\alpha| < b$ et $\lambda_b \in B(V)$.

$\left(\text{On pose } \lambda_b = \mathcal{R}\lambda - \frac{1}{2}(\mathcal{R}s_\alpha - b)\,\alpha.\right)$

Il est clair que D' est un tube ouvert, c'est-à-dire l'ensemble des $\lambda \in F$ dont la partie réelle est dans un ouvert de $F_{\mathbf{R}}$. De plus, il est clair que D' est convexe. Enfin D' contient $B(V)$ et $w_\alpha B(V)$. En effet, si $\lambda \in B(V)$, on a en particulier $(\mathcal{R}\lambda, \alpha) > 0$, donc $\mathcal{R}s_\alpha > 0$. Prenant $b > \mathcal{R}s_\alpha$ et assez voisin de $\mathcal{R}s_\alpha$, on a encore $\lambda_b \in B(V)$. Donc $D' \supset B(V)$. Si $w_\alpha\lambda \in B(V)$, on a $\mathcal{R}s_\alpha < 0$ et en prenant $b > -\mathcal{R}s_\alpha$ et assez voisin de $-\mathcal{R}s_\alpha$, on prend λ_b assez voisin de $\lambda_{-\mathcal{R}s_\alpha} = \mathcal{R}(w_\alpha\lambda)$ pour que $\lambda_b \in B(V)$. Donc, on a aussi $D' \supset w_\alpha B(V)$ et finalement $D' \supset D$.

Soit $\nu \in D'$. Il existe donc un $b > 0$ tel que $b > |\mathcal{R}s_\alpha|$ et $\nu_b \in B(V)$. Il existe donc un voisinage compact Ω_F de $\mathcal{R}\nu$ dans $F_{\mathbf{R}} \cap D'$ tel que, pour $\lambda \in \Omega_F$, on ait encore $b > |\mathcal{R}s_\alpha|$ et $\lambda_b \in B(V)$. Soit $\Omega_{D'}$ un *compact de* D' tel que $\mathcal{R}(\Omega_{D'}) \subset \Omega_F$. Il existe, d'après (3.2.2), une constante B telle que

$$|E_\alpha(gu, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta)| \leqq B\, E_\alpha(gu, \lambda_b) \tag{3.3.10}$$

pour $\lambda \in \Omega_{D'}$, $g \in G(K)$, $u \in U(K)$.

L'intégrale (3.3.5) est alors dominée par l'intégrale

$$(3.3.11) \qquad \int_{U(K)} E_\alpha(gu, \lambda_b)\, du.$$

Si g est dans un compact fixe Ω_G de $G(K)$ et $\lambda \in \Omega_{D'}$ *a fortiori* λ_b est dans un compact de $B(V)$, et l'intégrale (3.3.11) est normalement convergente. Ainsi, pour tout compact Ω_G de $G(K)$ et tout compact assez petit $\Omega_{D'}$ de D', l'intégrale (3.3.5) est normalement convergente dès que $g \in \Omega_G$ et $\lambda \in \Omega_{D'}$. Cette intégrale fournit donc un prolongement holomorphe de $E_{I'}(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta)$ au domaine $D' \supset D$, et ce prolongement est fonction continue du couple (g, λ).

Quant à l'équation fonctionnelle, elle résulte simplement du lemme (3.2) (ii).

THÉORÈME (3.4). — *Soient V un hémicycle et ζ un caractère de module* 1 *du groupe $V(K)$. Soit θ l'ensemble des racines simples α dont l'opposé $-\alpha$ est dans V et qui sont telles que ζ soit non trivial sur $N_{\alpha}^{-}(K)$. Soit W' le groupe engendré par les symétries pour $\alpha \in \theta$. Alors la fonction $E_I(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta)$ se prolonge en une fonction holomorphe de λ à l'enveloppe convexe de la réunion des $wB(V)$ pour $w \in W'$.*

On notera qu'on peut toujours se ramener au cas où ζ n'est trivial sur aucun des groupes $N_{\alpha}^{-}(K)$ contenus dans $V(K)$, pour α simple. [*Cf.* remarque (2.9.7).]

Rappelons qu'on appelle longueur d'un élément $w \in W$ le plus petit des entiers q tels que w soit produit de q symétries par rapport aux racines simples. On a également le résultat suivant que nous rappelons sans démonstration (*cf.* [4] par exemple) :

LEMME (3.4.1). — *Soit $w = w_\alpha w'$, où w' est un élément de longueur q et α une racine simple. Alors si w est de longueur $q+1$, la racine $w'^{-1}(\alpha)$ est une racine positive.*

Appliquons ces résultats au groupe de Weyl W' du système de racines $[\theta]$. Nous noterons $l(w)$ la longueur dans W' (ou dans W cela revient au même) d'un élément $w \in W'$.

LEMME (3.4.2). — *Soit $w = w_\alpha w'$, où w et w' sont dans W' et α dans θ, et où $l(w) = q+1$, $l(w') = q$. Alors, pour tout λ dans l'adhérence de $wB(V)$, on a $\mathcal{R}s_\alpha \leq 0$ $\left(\text{on pose } \lambda = \sum_{\Delta} s_\beta \Lambda_\beta\right)$.*

En effet, soit $\lambda = w\mu$, où $\mu \in B(V)$. Alors

$$\mathcal{R}s_\alpha = 2\frac{(\mathcal{R}\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = 2\frac{(\mathcal{R}w_\alpha w'\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = -2\frac{(\mathcal{R}\mu, w'^{-1}\alpha)}{(\alpha, \alpha)}.$$

Comme $w'^{-1}\alpha[\theta]$ et est une racine positive, on voit que $-w'^{-1}\alpha$ est dans V, de sorte que, par définition du tube $B(V)$, on doit avoir

$$(\mathcal{R}\mu, w'^{-1}\alpha) > 0 \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{R}s_\alpha < 0.$$

Si maintenant λ est dans l'adhérence de $wB(V)$, on a aussitôt $\mathcal{R}s_\alpha \leqq 0$ par continuité.

D'autre part, appelons tube diédral tout sous-ensemble H de F défini par des inégalités $(\mathcal{R}\lambda, \mu) > 0$, où μ est un élément convenable de $F_{\mathbf{R}}$. En particulier, si H est contenu dans le demi-espace ouvert $(\mathcal{R}\lambda, \mu) > 0$, on dit que l'hyperplan L d'équation $(\mathcal{R}\lambda, \mu) = 0$ est un mur de H si $\overline{H} \cap L$ est d'intérieur non vide dans L. Cet intérieur est la face de H relativement à L.

En particulier, posons $B = B(V)$. Alors, pour tout $\alpha \in \theta$, l'hyperplan d'équation $(\mathcal{R}\lambda, \alpha) = 0$ est un mur de B (car cet hyperplan est déjà un mur de la chambre de Weyl positive qui est contenue dans B). D'une façon générale, nous appellerons face spéciale d'un transformé wB de B par W', toute face de wB relative à un hyperplan défini par une racine $\alpha \in [\theta]$. Il est clair que B et $w_\alpha B$ ont une face spéciale commune si $\alpha \in \theta$. Il en résulte que, pour tout $w \in W'$, les tubes diédraux wB et $ww_\alpha B$ ont une face spéciale commune. Du reste, écrivons tout $w \in W'$ sous la forme d'un produit de générateurs $w = w_1 w_2 \ldots w_q$. Alors dans la suite

(3.4.3) $\qquad B, \quad w_1 B, \quad w_1 w_2 B, \quad \ldots, \quad w_1 w_2 \ldots w_q B = wB$

deux tubes consécutifs ont une face spéciale commune. On a aussi

(3.4.3.1) Si $w_1 B \cap w_2 B \neq \emptyset$, où $w_i \in W'$, on a $w_1 = w_2$.

En effet, soient $G' = G_{[\theta]}$, $A' = (G' \cap A)^0$ et $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$ la restriction d'un λ à A' [*cf.* (2.1.11)]. Le groupe de Weyl de G' s'identifie à W' et si $\lambda = w_1 \mu_1 = w_2 \mu_2$, où $\mu_i \in B$, on a

$$\bar{\lambda} = w_1 \bar{\mu}_1 = w_2 \bar{\mu}_2,$$

où $\bar{\mu}_i$ est dans la chambre de Weyl positive de A'. D'où $w_1 = w_2$. Soit, d'autre part, B_q la réunion des wB, pour $w \in W'$ et $l(w) \leqq q$, et de leurs faces spéciales communes. On a :

(3.4.4) L'ensemble B_q est un tube et en particulier un ensemble ouvert et connexe dans F;

(3.4.5) Pour $q > 0$, on a $B_{q+1} \supset B_q$;

(3.4.6) La bande B_{q+1} contient la réunion des $w_\alpha B_q \cup B_q$ pour $\alpha \in \theta$ et est contenue dans l'enveloppe convexe de cette réunion;

(3.4.7) Pour $q > 0$ et $\alpha \in \theta$, l'intersection $B_q \cap w_\alpha B_q$ est connexe et contient $B \cup w_\alpha B$; en particulier, la réunion $B_q \cup w_\alpha B_q$ est un tube connexe;

(3.4.7.1) Pour α et $\beta \in \theta$, l'intersection $[B_q \cup w_\alpha B_q] \cap [B_q \cup w_\beta B_q]$ est connexe.

En effet, il est clair que si deux tubes diédraux ont une face commune, la réunion de ces tubes et de leur face commune est encore un tube connexe. Cela montre déjà que B_q est un ouvert, et (3.4.3) montre qu'il est connexe. D'où la première assertion (3.4.4). L'assertion (3.4.5) est immédiate. Quant à l'assertion (3.4.6), il suffit d'observer que si deux tubes diédraux ont une face commune, l'enveloppe convexe de leur réunion contient certainement cette face. En particulier, la réunion des $w_\alpha B_q \cup B_q$ pour $\alpha \in \theta$ admet une enveloppe convexe qui contient tous les ensembles wB pour $l(w) \leqq q+1$ et toutes leurs faces spéciales communes. En particulier, cette réunion contient B_{q+1}. Prouvons maintenant l'assertion (3.4.7). Comme $B_q \cap w_\alpha B_q$ est un ouvert, il est évident que cette intersection est la réunion de certains transformés de B par W' et des faces spéciales communes à ces transformés. Nous allons voir que les transformés de B par W' qui sont contenus dans $B_q \cap w_\alpha B_q$ sont exactement les ensembles de la forme wB et $w_\alpha wB$ pour $l(w) \leqq q-1$. D'après (3.4.3), la réunion de ces tubes diédraux et de leurs faces spéciales communes est connexe, et cela prouvera (3.4.7).

Soit donc wB un transformé de B par un élément $w \in W'$ de longueur $q-1$. On a donc $wB \subset B_{q-1} \subset B_q$ et l'on peut écrire $w = w_\alpha(w_\alpha w)$, où $l(w_\alpha w) \leqq q$. On a donc $wB = w_\alpha(w_\alpha wB) \subset w_\alpha B_q$. Ainsi $wB \subset B_q \cap w_\alpha B_q$ et il en résulte aussi que $w_\alpha wB \subset B_q \cap w_\alpha B_q$.

En sens inverse, soit wB un transformé de B par un élément de longueur $\leqq q$. Supposons $wB \subset w_\alpha B_q$ soit encore $w_\alpha wB \subset B_q$. Cela signifie que $w_\alpha w$ est au plus de longueur q [*cf.* (3.4.3.1)]. Il n'y a alors que deux possibilités : Ou bien $l(w) \leqq q-1$, ou bien $l(w) = q$ et $l(w_\alpha w) = q-1$. Mais alors, on peut écrire $w_\alpha = w_\alpha(w_\alpha w)$, où $w_\alpha w$ est de longueur au plus $q-1$. Notre assertion est donc démontrée. On prouve de même (3.4.7.1). Notons aussi que :

(3.4.8) Si $\lambda_0 \in w_\alpha B_q$ et $\lambda_0 \notin B_q$, le coefficient $\mathcal{R}s_\alpha$ reste < 1 au voisinage de λ_0.

En effet, s'il en est ainsi, le point λ_0 est nécessairement dans l'adhérence d'un ensemble de la forme $w_\alpha wB$ avec $l(w_\alpha w) = q+1$ et $l(w) = q$. Au point λ_0, le coefficient $\mathcal{R}s_\alpha$ est $\leqq 0$ en vertu du lemme (3.4.2). D'où notre assertion

Nous allons maintenant prouver, par récurrence sur q, que la fonction $E_{r'}$ se prolonge en une fonction holomorphe de λ à B_{q+1}.

En vertu de la proposition (3.3), pour chaque $\alpha \in \theta$, nous avons déjà montré que $E_{r'}$ se prolonge en une fonction holomorphe à l'enveloppe convexe de $B \cup w_\alpha B$, donc *a fortiori* à la réunion de B, $w_\alpha B$ et de leur face commune dans l'hyperplan défini par α. L'intersection de ces différents ensembles, pour $\alpha \in \theta$, est évidemment B qui est connexe. Il en résulte que E_P se prolonge en une fonction holomorphe à B_1.

Nous pouvons donc désormais supposer $q > 0$ et notre assertion établie pour les $q' < q$. Prenons maintenant un $\alpha \in \theta$. Nous allons voir que E_P se prolonge analytiquement à la réunion $B_q \cup w_\alpha B_q$.

Si $\lambda \in w_\alpha B_q$, on a $w_\alpha \lambda \in B_q$. D'après l'hypothèse de récurrence, $E_P(g, \mathfrak{D}, w_\alpha \chi, w_\alpha \lambda; \zeta)$ est déjà définie et holomorphe au voisinage de λ. On peut donc poser provisoirement

$$(3.4.9) \qquad \psi(\lambda) = \chi(\mu_\alpha) \,|\, \mu_\alpha \,|^{s_\alpha} E_P(g, \mathfrak{D}, w_\alpha, \chi, w_\alpha \lambda; \zeta)\, \mathrm{Y}_\alpha(\mathfrak{D}, \chi, s_\alpha)$$

et cela définit une fonction méromorphe de λ, dont les seules singularités sont les pôles de $\mathrm{Y}_\alpha(\mathfrak{D}, \bar{\chi}, s_\alpha)$, donc sur des hyperplans, $s_\alpha = \text{Cte}$. Regardons maintenant ce qui se passe si λ est dans l'ensemble connexe $B_q \cap w_\alpha B_q$. Cet ensemble contient $B \cup w_\alpha B$. D'après la proposition (3.3), si λ est dans $B \cup w_\alpha B$, on a

$$(3.4.10) \qquad E_P(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta) = \psi(\lambda).$$

Par conséquent, la fonction $\psi(\lambda)$ coïncide avec $E_P(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta)$ sur tout l'ensemble $B_q \cap w_\alpha B_q$. Ainsi $E_P(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta)$ admet un prolongement, *a priori* méromorphe à l'ensemble $B_q \cap w_\alpha B_q$. Montrons que ce prolongement est en fait holomorphe.

Il suffira de montrer que la fonction $\psi(\lambda)$ est holomorphe au voisinage d'un point λ_0 de $w_\alpha B_q$ n'appartenant pas à B_q. Mais d'après (3.4.8), au voisinage d'un tel point $\mathcal{R} s_\alpha$ reste < 1 et, d'après (1.10.1), le facteur $\mathrm{Y}_\alpha(\mathfrak{D}, \chi, s_\alpha)$ reste holomorphe au voisinage de λ_0. Donc $\psi(\lambda)$ est holomorphe au voisinage de λ_0. Ce qui prouve notre assertion.

D'après (3.4.7.1), l'intersection de $B_q \cup w_\alpha B_q$ et de $B_q \cup w_\beta B_q$ pour α et $\beta \in \theta$ est encore connexe. Il en résulte que E_P se prolonge analytiquement à la réunion des $B_q \cup w_\alpha B_q$ pour $\alpha \in \theta$. Appliquant le théorème de Hartogs, on obtient le prolongement de E_P à l'enveloppe convexe de cette réunion et *a fortiori* à B_{q+1}.

Ainsi E_P se prolonge à tout ensemble B_q. Soit m la borne supérieure des longueurs des $w \in W'$; la bande B_m contient la réunion des wB pour $w \in W'$. Il suffit donc d'appliquer une nouvelle fois le théorème de Hartogs pour obtenir le théorème.

COROLLAIRE (3.5). — *Soit ζ un caractère « générique » de $N^-(K)$ (i. e. $\mu_\alpha \neq 0$ pour toute racine simple α). Alors $E_{N^-(K)}(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \zeta)$ se prolonge en une fonction holomorphe de λ sur F.*

En effet, dans ce cas, le tube $B(V)$ est la chambre de Weyl positive définie par les inégalités

$$\mathcal{R} s_\alpha > 0 \quad \text{pour tout } \alpha \in \Delta.$$

Il existe un élément w_0 de W qui transforme $B(V)$ en $-B(V)$. L'enveloppe convexe de $WB(V)$ est donc l'espace F tout entier.

Remarque (3.5.1). — Le domaine D du théorème (3.4) n'est pas toujours l'espace F tout entier comme le montre l'exemple suivant. Soit $G = \mathbf{SL}(4, K)$. Le système de racines simples Δ est formé de trois racines α_1, α_2, α_3. Prenons pour V le groupe unipotent horicyclique engendré par les racines négatives qui contiennent $-\alpha_2$. Le domaine $B(V)$ est défini par les inégalités

$$\mathcal{R}s_1 + \mathcal{R}s_2 > 0, \qquad \mathcal{R}s_2 + \mathcal{R}s_3 > 0, \qquad \mathcal{R}(s_1 + s_2 + s_3) > 0, \qquad \mathcal{R}s_2 > 0;$$

le groupe W' se réduit à l'identité et w_2. Le transformé de $B(V)$ par w_2 est défini par les inégalités

$$\mathcal{R}s_1 > 0, \qquad \mathcal{R}s_2 < 0, \qquad \mathcal{R}s_3 > 0, \qquad \mathcal{R}(s_1 + s_2 + s_3) > 0.$$

L'enveloppe convexe de la réunion est contenue dans le demi-espace $\mathcal{R}(s_1 + s_2 + s_3) > 0$.

4. Le groupe SL (2, R).

Dans les § 4, 5, 6, on se propose d'étudier plus en détail le cas du groupe $\mathbf{SL}(2, K)$. On rappelle la nature des représentations du compact maximal M, et l'on exhibe une fonction φ « privilégiée » au sens de (1.8). On calcule $\hat{\varphi}$, L_φ, $L_{\hat{\varphi}}$ et l'opérateur $\mathfrak{U}(\mathfrak{D}, \chi, s)$.

Dans ce paragraphe, le corps K est le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels. On a posé

$$(4.1.1) \qquad \tau(x) = \exp(2i\pi x).$$

Les caractères multiplicatifs de module 1 de $\mathbf{R}^*$ sont donnés par

$$(4.1.2) \qquad x \mapsto \operatorname{sgn}(x)^\varepsilon |x|^{i\sigma},$$

où $\varepsilon = 0$, 1 et $\sigma \in \mathbf{R}$.

On prend comme sous-groupe compact maximal de G le groupe abélien $\mathbf{SO}(2, \mathbf{R})$ formé des matrices de la forme

$$(4.1.3) \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \theta \in \mathbf{R}.$$

Les représentations irréductibles de M sont donc de dimension 1; ce sont les caractères

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mapsto e^{im\theta}, \qquad m \in \mathbf{Z}.$$

Si $\mathfrak{D}$ est le caractère de paramètre m et χ le caractère de $\mathbf{R}^*$ de paramètre (ε, σ), le projecteur $P(\mathfrak{D}, \chi)$ se réduit au scalaire 1 si m et ε ont la même parité et à 0 dans le cas contraire.

On suppose désormais m et ε de même parité en sorte que $P(\mathfrak{D}, \chi) = 1$. Une fonction privilégiée de type $\mathfrak{D}$ (par rapport à χ) est donnée par

$$(4.1.4)\qquad \varphi(xe_1 + ye_2) = [x + iy.\operatorname{sgn}(m)]^{|m|} e^{-\pi(x^2+y^2)}.$$

Il est clair que c'est bien une fonction à décroissance rapide.

PROPOSITION (4.2). — *Avec les notations précédentes, on a*

$$(4.2.1)\qquad L_\varphi(\chi, s) = \pi^{-\frac{1}{2}(m+s-i\sigma)}\Gamma\left[\frac{1}{2}(|m| + s - i\sigma)\right];$$

$$(4.2.2)\qquad \hat{\varphi}(xe_1 + ye_2) = \varphi(xe_1 + ye_2)[-\operatorname{sgn}(m)]^m;$$

$$(4.2.3)\qquad \gamma(\mathfrak{D}, \chi, s) = [-\operatorname{sgn}(m)]^m \pi^{(s-i\sigma)} \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(|m| + 1 - s + i\sigma)\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(|m| + 1 + s - i\sigma)\right]}.$$

La première assertion est immédiate. Il suffit de prouver la seconde, car la troisième s'ensuivra aussitôt. Comme $\hat{\varphi}$ est aussi de type $\mathfrak{D}$, il suffit de calculer

$$(4.2.4)\qquad \hat{\varphi}(ye_2) = \int \varphi(ue_1 + ve_2) e^{-2i\pi yu}\, dv\, du,$$

ce qui donne, en passant en coordonnées polaires,

$$(4.2.5)\qquad \hat{\varphi}(ye_2) = \int_0^{+\infty} \rho^{|m|+1} e^{-\pi\rho^2}\, d\rho \int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-2i\pi y\rho\cos\theta}\, d\theta$$

ou encore, en introduisant la fonction de Bessel $J_{|m|}$,

$$(4.2.6)\qquad \hat{\varphi}(ye_2) = 2\pi i^{|m|} \int_0^{+\infty} \rho^{|m|+1} e^{-\pi\rho^2} J_{|m|}(-2\pi y\rho)\, d\rho.$$

Cette dernière intégrale se trouve, par exemple, dans [1], vol. II, 7.7.3 (24). Il vient ainsi, mettant fin à la démonstration de (4.2.2),

$$(4.2.7)\qquad \hat{\varphi}(ye_2) = (-i)^{|m|} y^{|m|} e^{-\pi y^2} = [-\operatorname{sgn}(m)]^m \varphi(ye_2).$$

Remarque. — La formule (4.2.2) résulte aussi des propriétés des polynômes harmoniques.

Nous allons maintenant calculer l'intégrale $E(g, \mathfrak{D}, \chi, s; \mu)$ en fonction des fonctions hypergéométriques confluentes. La proposition (2.5.7) montre qu'il suffit de calculer $E(\mathfrak{D}, \chi, s; \mu)$ [on a, en effet,

$G(K) = MA(K)N^{-}(K)$]. Le calcul qui suit reproduit un travail dû à Christian Houzel et resté impublié.

Pour $n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$, on a sans peine

$$L(n, \mathfrak{D}, \chi, s+1) = (-i)^m(-x+i)^m\,|x+i|^{-m-1-s}, \tag{4.2.8}$$

d'où

$$E(\mathfrak{D}, \chi, s; \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-i)^m\,|x+i|^{-m-1-s+i\sigma}(-x+i)^m e^{2i\pi x\mu}\,dx. \tag{4.2.9}$$

Il est très facile de prouver que l'intégrale précédente est fonction méromorphe de s pour $\mu = 0$. Pour $\mu \neq 0$, on peut écrire

$$E(\mathfrak{D}, \chi, s; \mu) = (\eta i)^m\,|2\pi\mu|^{\frac{1}{2}(s-1)}\,w_{\frac{1}{2}\eta m}\left(|2\pi\mu|, \frac{1}{2}(s+1)\right), \tag{4.2.10}$$

où l'on a posé, pour $u > 0$ et k demi-entier,

$$w_k(u, s) = u^s \int_{-\infty}^{+\infty} |t+iu|^{2k-2s}(t+iu)^{-2k} e^{-it}\,dt \tag{4.2.11}$$

et où $\eta = -\operatorname{sgn}(\mu)$. De plus, on a supposé $\sigma = 0$ (pour passer de là au cas général, il suffit de changer s en $s - i\sigma$ dans les formules qui suivent).

L'intégrale (4.2.11) converge pour $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$. On pose maintenant $v = it - u$. Alors, l'intégrale (4.2.11) prend la forme

$$w_k(u, s) = 2^{k-s} i^{-2k-1} u^k e^{-u} \int_D (-v)^{-s-k}\left(1 + \frac{v}{2u}\right)^{-s+k} e^{-v}\,dv, \tag{4.2.12}$$

où D désigne la droite $\mathcal{R}v = -u$, orientée comme l'axe imaginaire, et sur laquelle on choisit les arguments de $-v$ et $1 + \frac{v}{2u}$ tels que

$$|\arg(-v)| \leq \frac{\pi}{2}, \qquad \left|\arg\left(1 + \frac{v}{2u}\right)\right| \leq \frac{\pi}{2},$$

On peut maintenant transformer (4.2.12) en une intégrale sur le contour C de la figure 1, portant sur la fonction

$$v \mapsto (-v)^{-s-k}\left(1 + \frac{v}{2u}\right)^{-s+k} e^{-v}, \tag{4.2.13}$$

où les arguments sont choisis de façon que

$$(4.2.14) \qquad |\arg(-v)| \leqq \pi, \qquad \left|\arg\left(1+\frac{v}{2u}\right)\right| \leqq \pi.$$

Les pôles de (4.2.13) sont 0 et $-2u$; ils sont à l'extérieur du contour ($abcdca$) de la figure 2. Comme $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$, on vérifie que l'inté-

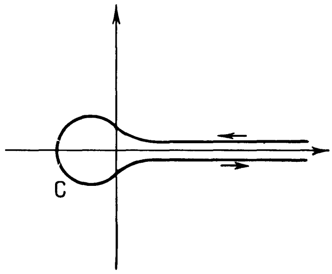

Fig. 1.

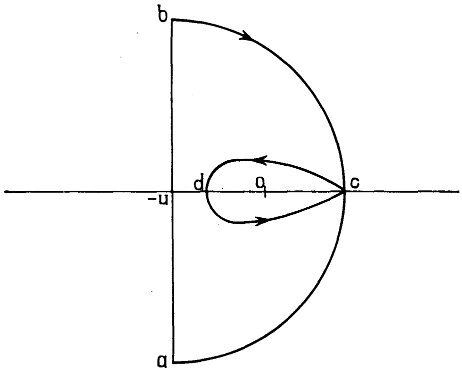

Fig. 2.

grale sur le demi-cercle tend vers zéro lorsque son rayon tend vers $+\infty$ On peut donc écrire

$$(4.2.15) \qquad w_k(u, s) = -2^{k-s} i^{-2k-1} u^k e^{-u} \int_C (-v)^{-s-k} \left(1+\frac{v}{2u}\right)^{-s+k} e^{-v}\, dv,$$

les arguments étant définis par (4.2.14). Cette intégrale converge pour tout s, d'où le prolongement analytique de w_k. On pose maintenant

$$(4.2.16) \qquad W_{k,r}(u) = -\frac{u^k}{2i\pi} e^{-\frac{1}{2}u} \Gamma\left(k-r+\frac{1}{2}\right)$$
$$\times \int_C (-v)^{r-k-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{v}{u}\right)^{r+k-\frac{1}{2}} e^{-v}\, dv$$

si k est demi-entier et $r \in \mathbf{C}$ tel que $k - r + \frac{1}{2}$ n'est pas entier négatif. Il vient

$$(4.2.17) \qquad w_k(u, s) = 2^{1-s}\pi(-i)^{2k}\frac{1}{\Gamma(s+k)}W_{k,-s+\frac{1}{2}}(2u)$$

si $s + k$ n'est pas entier négatif.

Transformons l'intégrale (4.2.16). Le contour C se déforme en le contour formé de la demi-droite $(+\infty, \delta)$, du cercle de centre O et de rayon δ et de la demi-droite $(\delta, +\infty)$. Si $\mathcal{R}\left(\frac{1}{2} + r - k\right) > 0$, l'intégrale sur le cercle tend vers O avec δ, d'où, pour $\mathcal{R}\left(r + \frac{1}{2} - k\right) > 0$, la relation

$$(4.3) \qquad W_{k,r}(u) = e^{-\frac{1}{2}u}u^k\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + r - k\right)} \int_0^{+\infty} v^{r-\frac{1}{2}-k}\left(1 + \frac{v}{u}\right)^{r-\frac{1}{2}+k} e^{-v}\,dv.$$

C'est là une expression connue des fonctions de Whittaker. (*Cf.* [1], vol. I, chap. 6, p. 274-275 et [20], chap. 16, 16.12 à 16.40.) Il est connu que, pour tout k, les fonctions de Whittaker se prolongent en fonctions entières de r avec la relation fondamentale

$$(4.3.1) \qquad W_{k,r} = W_{k,-r}.$$

Compte tenu de (4.2.17) et (4.2.10), on a

$$(4.4) \qquad E(\mathfrak{D}, \chi, s; \mu) = \pi^{\frac{1}{2}(s+1)}|\mu|^{\frac{1}{2}(s-1)} \times \frac{1}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(s + 1 + \eta m)\right]}W_{\frac{1}{2}\eta m, -\frac{s}{2}}(4\pi|\mu|)$$

et la relation (4.3.1) redonne l'équation fonctionnelle déjà établie pour l'intégrale $E(\mathfrak{D}, \chi, s; \mu)$.

REMARQUE (4.5). — La relation (1.10.5) du § 1 fournit donc une représentation intégrale des fonctions de Whittaker $W_{k,r}$ pour k demi-entier. Du reste, la même intégrale fournit le prolongement analytique de $E(\mathfrak{D}, \chi, s)$ (c'est-à-dire de l'intégrale relative à un caractère trivial) en une fonction méromorphe.

En effet, revenons pour un instant à la situation générale du § 1, et utilisons les notations de (1.10). Vu la relation (1.10.5), qui est vraie *a priori* pour $\mathcal{R}s > 0$, on peut se borner à établir que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(K^2)$, l'intégrale $E_\varphi(g, \chi, s)$ se prolonge en une fonction méromorphe de s. Or la relation (1.9.6) peut encore s'écrire

$$(4.5.1) \qquad E_\varphi(e, \chi, s) = \iint_{K^*\times K} \varphi(te_1 + xe_2)\overline{\chi}(t)\,|\,t\,|^s\,dx\,d^*t.$$

Mais il est clair que la fonction

$$(4.5.2) \qquad \psi(y) = \int \varphi(ye_1 + xe_2)\,dx$$

est encore dans $\mathcal{S}(K)$ et la formule (4.5.1) s'écrit donc

$$(4.5.3) \qquad E_\varphi(e, \chi, s) = \int_{K^*} \psi(t)\,\overline{\chi}(t)\,|\,t\,|^s\,d^*t.$$

Notre assertion est donc encore une conséquence des résultats de [17].

5. **Le groupe SL (2, C).**

Dans ce paragraphe, K est le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes et G le groupe $\mathbf{SL}(2, \mathbf{C})$. Le module de $\mathbf{C}$ est le carré de la valeur absolue ordinaire. Le caractère additif τ est donné par

$$(5.1.1) \qquad \tau(z) = \exp 4 i\pi\,\mathcal{R}z$$

et la mesure de Haar du groupe additif est la mesure

$$(5.1.2) \qquad dz = 2\,d\alpha\,d\beta \qquad \text{pour} \quad z = \alpha + i\beta, \qquad \alpha \text{ et } \beta \in \mathbf{R}.$$

Les caractères de module 1 du groupe multiplicatif $\mathbf{C}^*$ sont donnés par

$$(5.1.3) \qquad z \mapsto z^n\,|\,z\,|^{2i\sigma-n},$$

où $n \in \mathbf{Z}$ et $\sigma \in \mathbf{R}$.

On prend comme sous-groupe compact maximal de G le groupe $M = \mathbf{SU}(2, \mathbf{C})$. Les représentations irréductibles du groupe M sont paramétrées par les entiers $m \geqq 0$. La représentation de paramètre 1 est la représentation naturelle de M dans $\mathbf{C}^2$, la représentation $\mathfrak{D}$ de paramètre m est la puissance symétrique $m^{\text{ième}}$ de la précédente. En d'autres termes, si l'on désigne par X, Y la base canonique de $\mathbf{C}^2$, la représentation $\mathfrak{D}$ est la représentation naturelle de M dans l'espace des polyômes homogènes de degré m en X et Y. Une base de cet espace est formé des monômes

$$(5.1.4) \qquad X^{m-p}\,Y^p, \qquad 0 \leqq p \leqq m.$$

Ce vecteur est dans l'image du projecteur $P(\mathfrak{D}, \chi)$, où χ est n'importe quel caractère multiplicatif de paramètres $(m - 2p, \sigma)$. En particulier, l'assertion du lemme (1.2) est évidente.

Dans ce qui suit, la représentation $\mathfrak{D}$ de paramètre m et le caractère χ de paramètres (n, σ) sont choisis une fois pour toutes de façon que $P(\mathfrak{D}, \chi) \neq 0$. On a donc $n = m - 2p$. On supposera également $\sigma = 0$ pour simplifier. (Il suffira de changer s en $s - i\sigma$ dans les formules qui suivent pour retrouver le cas général.)

On désigne par φ la fonction de type $\mathfrak{D}$ qui est définie par la formule suivante :

$$(5.1.5) \qquad \varphi(v) = \mathfrak{D}(g)\, t^m \exp(-2\pi t^2)\, P(\mathfrak{D}, \chi),$$

où $v \in \mathbf{C}^2$, $v = t.g(e_1)$, $t > 0$, $g \in M$.

On définit ainsi une fonction à décroissance rapide qui est même indéfiniment dérivable à décroissance rapide [il est clair que φ est à décroissance rapide et la proposition (5.2) va montrer qu'il en est de même de $\hat{\varphi}$].

Proposition (5.2). — *On utilise les notations précédentes et l'on pose* $w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Alors on a*

$$(5.2.1) \qquad \hat{\varphi}(te_1) = i^m \mathfrak{D}(w)\, \varphi(te_1), \qquad t > 0;$$

$$(5.2.2) \qquad L_\varphi(\chi, s) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}m - s}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}m + s\right) P(\mathfrak{D}, \chi);$$

$$(5.2.3) \qquad \text{Ч}(\mathfrak{D}, \chi, s) = i^m (2\pi)^{2s} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1 - s\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1 + s\right)} P(\mathfrak{D}, \bar{\chi})\, \mathfrak{D}(w)\, P(\mathfrak{D}, \chi).$$

Il suffit de démontrer la première assertion, les autres en étant des conséquences immédiates.

Notons d'abord que $\hat{\varphi}$ étant de type $\mathfrak{D}$ et $e_2 = w(e_1)$, la relation (1) peut s'écrire aussi bien

$$(5.2.4) \qquad \hat{\varphi}(ye_2) = (-i)^m \varphi(ye_1), \qquad y > 0.$$

Notons maintenant que tout point $v \in \mathbf{C}^2$ peut s'écrire

$$(5.2.5) \qquad v = t.g(e_1), \qquad g \in M, \qquad t > 0,$$

et qu'on a, pour toute fonction f continue à support compact sur C^2,

$$(5.2.6) \qquad \iint f(ae_1 + be_2)\, da\, db = 8\pi^2 \iint_0^{+\infty} f[t.g(e_1)]\, t^3\, dt\, dg,$$

où dg désigne la mesure de Haar normalisée du groupe compact M. D'autre part, tout point $g \in M$ peut s'écrire sous la forme du produit

$$(5.2.7)\qquad \begin{cases} g = e(\psi_1)\, u(\theta)\, e(\psi_2), \\ \text{avec}\quad 0 \leqq \psi_1 \leqq 2\pi, \quad 0 \leqq \psi_2 \leqq 2\pi, \quad 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(5.2.8)\qquad e(\psi) = \begin{pmatrix} e^{i\psi} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi} \end{pmatrix}, \qquad u(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$(5.2.9)\qquad \int_M F(g)\, dg = (4\pi^2)^{-1} \iiint F[e(\psi_1)\, u(\theta)\, e(\psi_2)] \sin 2\theta\, d\psi_1\, d\psi_2\, d\theta.$$

Appliquons ceci au calcul de

$$(5.2.10)\qquad \hat{\varphi}(ye_2) = \iint \varphi(ae_1 + be_2)\, \tau\langle ae_1 + be_2, ye_2\rangle\, da\, db,$$

où l'on pose

$$\tau\langle ae_1 + be_2, xe_1 + ye_2\rangle = \exp[4i\pi\, \mathcal{R}(xb - ya)].$$

Nous avons donc

$$(5.2.11)\qquad \hat{\varphi}(ye_2) = 8\pi^2 \iint_0^{+\infty} t^3\, dt \int \varphi[tg(e_1)]\, \tau\langle tg(e_1), ye_2\rangle\, dg.$$

On a d'abord

$$(5.2.12)\qquad 4\pi^2 \int \varphi[tg(e_1)]\, \tau\langle tg(e_1), ye_2\rangle\, dg$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathfrak{D}[e(\psi_1)]\, d\psi_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathfrak{D}[u(\theta)] \sin 2\theta\, d\theta\, t^m e^{-2\pi t^2}$$

$$\times \int_0^{2\pi} \chi(e^{i\psi_2})\, \tau\langle t y\, e^{i(\psi_1+\psi_2)}\, u(\theta)\, e_1, e_2\rangle\, d\psi_2\, P(\mathfrak{D}, \chi)$$

$$= 2\pi P(\mathfrak{D}, \chi) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathfrak{D}[u(\theta)] \sin 2\theta\, d\theta\ t^m e^{-2\pi t^2}$$

$$\times \int_0^{2\pi} e^{in\psi} \exp(-4i\pi y t \cos\theta \cos\psi)\, d\psi\, P(\mathfrak{D}, \chi).$$

[On change ψ_2 en $(\psi_2 - \psi_1)$, et l'on remarque que

$$P(\mathfrak{D}, \chi) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \mathfrak{D}[e(\psi)]\, \bar{\chi}(e^{i\psi})\, d\psi.\ ]$$

L'intégrale en ψ_2 fait apparaître une fonction de Bessel, et l'on obtient

$$(5.2.13)\qquad \hat{\varphi}(ye_1) = 8\pi^2 i^{|n|}\int_0^{+\infty} e^{-2\pi t^2} F(yt)\, t^{3+n}\, dt,$$

où l'on a posé

$$F(yt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} P(\mathfrak{D}, \chi)\, u(\theta)\, P(\mathfrak{D}, \chi) \sin 2\theta\, J_{|n|}(-4\pi y \cos\theta)\, d\theta.$$

On a sans peine

$$(5.2.14)\quad P(\mathfrak{D}, \chi)\, u(\theta)\, P(\mathfrak{D}, \chi) = \sum_{0 \leqq s \leqq p,\, m-p} \binom{m-p}{s}\binom{p}{s}(-1)^s \cos^{m-2s}\theta \sin^{2s}\theta\, P(\mathfrak{D}, \chi).$$

Pour calculer l'intégrale $F(yt)$, on développe le fonction $J_{|n|}(-4\pi yt\cos\theta)$ en série entière, et l'on intègre terme à terme. Les intégrales en θ, qui apparaissent alors, se ramènent sans peine à des facteurs Γ et l'on obtient ainsi le développement en série entière de $F(yt)$:

$$(5.2.15)\quad F(yt) = \sum_{l \geqq \frac{m-|n|}{2}} (-1)^l(-2\pi yt)^{2l+|n|} \Big/ \left(l - \frac{m-|n|}{2}\right)! \times 1 \Big/ \left(1 + l + \frac{m+|n|}{2}\right)!\, P(\mathfrak{D}, \chi).$$

La dernière intégrale en t se calcule terme à terme.

On peut calculer l'intégrale $E(\mathfrak{D}, \chi, s; \mu)$ au moyen des séries hypergéométriques ${}_1F_2$ (*cf.* [1], vol. I, chap. IV et V). En effet, cette intégrale s'interprète comme la transformée de Fourier d'une fonction définie sur $N^-(\mathbf{C}) = \mathbf{R}^2$. Cette fonction est matricielle, et ses coefficients par rapport à la base (5.1.4) se transforment chacun par un caractère du groupe $M \cap A$ ($\mathbf{C}$) opérant dans $N^-(\mathbf{C})$ par la représentation adjointe. Lorsqu'on identifie $N^-(\mathbf{C})$ à $\mathbf{R}^2$, ce groupe s'identifie au groupe des rotations dans $\mathbf{R}^2$. La transformée de Fourier d'un tel coefficient se calcule au moyen d'une intégrale de Fourier-Bessel. On obtient ainsi une intégrale de la forme

$$(5.3)\qquad \int_0^{+\infty} f(t)\,(1+t^2)^{-\frac{1}{2}m-s-1} J_p(4\pi|\mu|t)\, t\, dt,$$

où $f(t)$ est un polynôme, et l'on peut maintenant calculer cette intégrale au moyen de la méthode exposée dans [19], 13.6, c'est-à-dire en remplaçant J_p par son développement en série entière ou son intégrale de Barnes-Mellin.

6. Le groupe $\mathbf{SL}(2, K)$ pour U non archimédien.

Dans ce paragraphe, on désigne par K un corps localement compact non archimédien de caractéristique quelconque. L'anneau des entiers de K est $\mathfrak{O}$, l'idéal maximal de ce dernier $\mathfrak{p}$. Le groupe G est le groupe $\mathbf{SL}(2, K)$ et le sous-groupe compact maximal de G est le groupe $M = \mathbf{SL}(2, \mathfrak{O})$.

Pour chaque entier $n \geqq 0$, on désigne par $\mathfrak{O}_n$ l'anneau quotient $\mathfrak{O}/\mathfrak{p}^n$, par $\mathfrak{O}_n^*$ le groupe des éléments inversibles de ce dernier et par $\overline{\mathfrak{p}}$ l'image de $\mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{O}_n$. Ainsi pour $m \geqq n$, à un isomorphisme près :

$$(6.1.1) \qquad \mathfrak{O}_n = \mathfrak{O}_m/{}^n\overline{\mathfrak{p}}.$$

De même, $1 + \mathfrak{p}^n$ est un sous-groupe multiplicatif de $\mathfrak{O}^*$ et $1 + \overline{\mathfrak{p}}^n$ un sous-groupe multiplicatif de $\mathfrak{O}_m^*$ et à des isomorphismes près, on a

$$(6.1.2) \qquad \mathfrak{O}_n = \mathfrak{O}/1 + \mathfrak{p}^n = \mathfrak{O}_m/1 + \overline{\mathfrak{p}}^n.$$

Soient τ le caractère de K choisi une fois pour toutes et π une uniformisante. Alors, pour $x \in \mathfrak{O}$, le scalaire $\tau(x\pi^{-n})$ ne dépend que de la classe $\dot{x}$ de x dans $\mathfrak{O}_n$, ce qui autorise à le noter simplement $\tau(\dot{x}\pi^{-n})$. Alors le groupe additif $\mathfrak{O}_n$ est mis en dualité avec lui-même par $(x, y) \mapsto \tau(xy\pi^{-n})$.

D'autre part, un caractère χ généralisé du groupe K^* est de la forme

$$(6.1.3) \qquad \chi(x) = |x|^{i\sigma}\chi_0[x\pi^{-v(x)}],$$

où $\sigma \in \mathbf{C}$, où χ_0 est la restriction de χ au groupe $\mathfrak{O}^*$ des unités et $v(x)$ désigne la valuation normalisée de x. On dit que χ est ramifié si χ_0 est non trivial. Dans ce cas, il existe un plus petit entier $m > 0$ tel que χ_0 soit non trivial sur $1 + \mathfrak{p}^m$. Nous dirons que $\mathfrak{p}^m$ est le conducteur de χ.

Comme au § 1, on désigne par G (resp. B, A, N) le groupe des matrices carrées 2×2 de déterminant 1 (resp. triangulaires supérieures, diagonales, triangulaires supérieures strictes). Pour chaque entier n, on note G_n (resp. B_n, A_n, N_n) le groupe des points à valeurs dans $\mathfrak{O}_n$. Ainsi la réduction modulo $\mathfrak{p}^n$ définit un homomorphisme surjectif de M sur G_n dont le noyau est le groupe I_n formé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients dans $\mathfrak{O}$ et telles que

$$(6.1.4) \qquad ad - bc = 1, \qquad a, d \equiv 1 \bmod \mathfrak{p}^n, \qquad b, c \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}^n.$$

Soit $\mathfrak{D}$ une représentation irréductible de M. Pour n assez grand, la représentation $\mathfrak{D}$ est triviale sur I_n et provient donc d'une représentation encore notée $\mathfrak{D}$ du groupe G_n. Soit n le plus petit de ces entiers. Nous dirons que $\mathfrak{p}^n$ est le conducteur de $\mathfrak{D}$. Soient χ un caractère de module 1 de K^*, et $\mathfrak{p}^m$ son conducteur. On suppose que le projecteur $P(\mathfrak{D}, \chi)$ n'est pas nul. Alors m est inférieur à n et la restriction de χ à $\mathfrak{O}^*$ définit, par passage au quotient, un caractère encore noté χ de $\mathfrak{O}_n^*$ ou encore un caractère (toujours noté χ) du groupe B_n, à savoir

$$(6.1.5) \qquad \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mapsto \chi(a).$$

Montrons que l'espace des vecteurs v de la représentation tels que

$$(6.1.6) \qquad \mathfrak{D}(b)\, v = \chi(b)\, v \quad \text{pour tout } b \in B_n$$

est de dimension 1. Cela entraînera que l'image de $P(\mathfrak{D}, \chi)$ est de dimension 1. Or vu l'hypothèse $P(\mathfrak{D}, \chi) \neq 0$, la représentation $\mathfrak{D}$, considérée comme représentation de G_n, est contenue dans la représentation de G_n induite par le caractère χ du groupe B_n. Il suffira donc de prouver le lemme suivant :

LEMME (6.2). — *Le commutant de la représentation de G_n induite par le caractère χ de B_n est une algèbre commutative.*

Ce résultat est bien connu. Pour la commodité du lecteur, nous en donnerons la démonstration. Ce commutant s'identifie à l'algèbre $H_n(\chi)$ des fonctions f sur G_n qui se transforment à droite et à gauche par $\overline{\chi}$, le produit étant la convolution

$$(6.2.1) \qquad f \star \varphi(h) = \sum_{G_n/B_n} f(g)\, \varphi(g^{-1}h).$$

Nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME (6.2.2). — *Soit $w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Un système de représentants des classes à droite G_n/B_n est formé des matrices suivantes :*

$$(6.2.3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \text{ pour } x \notin \mathfrak{O}_n^* \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \text{ pour } y \in \mathfrak{O}_n.$$

Observons que l'ensemble des matrices $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pour lesquelles c est inversible est une réunion de classes à droites de B_n. Si c est inversible, on peut écrire g de façon unique sous la forme

$$g = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w b_n \quad \text{avec} \quad b_n \in B_n.$$

Au contraire, si c n'est pas inversible, l'élément a est inversible, et l'on peut écrire g de façon unique sous la forme

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} b_n, \qquad \text{avec} \quad y \notin \mathfrak{O}_n^* \quad \text{et} \quad b_n \in B_n.$$

De façon précise, on a les relations suivantes :

(6.2.4) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ac^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$ pour c inversible.

(6.2.5) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ca^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ pour c non inversible;

Ces assertions entraînent aussitôt le lemme (6.2.2).

Ce lemme entraîne en particulier que G_n est réunion (non disjointe) des doubles classes des éléments suivants :

$$w, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour } z \notin \mathfrak{O}_n^\star. \tag{6.2.6}$$

En particulier, pour prouver le lemme (6.2), il suffit de prouver que, pour f et φ dans $H_n(\chi)$, les produits $f \star \varphi$ et $\varphi \star f$ prennent les mêmes valeurs sur chacun de ces éléments. On a

$$f \star \varphi(w) = \sum_{x \in \mathfrak{O}_n} f(w)\, \varphi\left[w^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \right] + \sum_{y \notin \mathfrak{O}_n^\star} f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \varphi\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -y & 1 \end{pmatrix} w \right]. \tag{6.2.7}$$

Soit encore

$$f \star \varphi(w) = \sum_{x \in \mathfrak{O}_n^\star} f(w)\, \varphi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} + \sum_{x \notin \mathfrak{O}_n^\star} f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \varphi(w) + \sum_{y \notin \mathfrak{O}_n^\star} \varphi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} f(w). \tag{6.2.8}$$

Mais si $x \in \mathfrak{O}_n^\star$, on a en vertu de (6.2.4),

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \tag{6.2.9}$$

et, par conséquent,

$$\sum_{x \in \mathfrak{O}_n^\star} \varphi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} = \varphi(w) \sum_{x \in \mathfrak{O}_n^\star} \bar{\chi}(x). \tag{6.2.10}$$

Cette dernière expression est d'ailleurs nulle si χ n'est pas trivial. En tout cas, on a toujours une expression de la forme

$$f \star \varphi(w) = \sum_{x \notin \mathfrak{O}_n^\star} \varphi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} f(w) + \sum_{y \notin \mathfrak{O}_n^\star} f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \varphi(w) + A\, f(w)\, \varphi(w), \tag{6.2.11}$$

qui est symétrique en f et φ, i. e. ne change pas si l'on intervertit f et φ. De même, pour $z \notin \mathfrak{O}_n^*$, on a

$$(6.2.12)\quad f\star\varphi\begin{pmatrix}1 & 0\\ z & 1\end{pmatrix} = \sum_{x\in\mathfrak{O}_n} f(w)\,\varphi\left[w^{-1}\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ z & 1\end{pmatrix}\right] + \sum_{y\in\mathfrak{O}_n} f\begin{pmatrix}1 & 0\\ y & 1\end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix}1 & 0\\ z-y & 1\end{pmatrix}.$$

Dans cette expression, la deuxième somme s'interprète comme un produit de convolution sur le groupe additif des éléments singuliers de $\mathfrak{O}_n$, et est donc symétrique. Évaluons la première. On a facilement

$$(6.2.13)\quad w^{-1}\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ z & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -z(1+xz)^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix} w \begin{pmatrix}-(1+xz) & -x\\ 0 & -(1+xz)^{-1}\end{pmatrix}.$$

Car z étant singulier, $1+xz$ est inversible. Sur l'élément (6.2.13), φ prend la valeur $\varphi(w)\,\bar{\chi}[-(1+xz)]$. On a donc, en définitive,

$$(6.2.14)\quad f\star\varphi\begin{pmatrix}1 & 0\\ z & 1\end{pmatrix} = f(w)\,\varphi(w)\sum_{x\in\mathfrak{O}_n}\bar{\chi}[-(1+xz)] + \sum_{y\notin\mathfrak{O}_n^*} f\begin{pmatrix}1 & 0\\ y & 1\end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix}1 & 0\\ z-y & 1\end{pmatrix}.$$

Cette dernière expression est symétrique en f et φ. D'où le lemme (6.2).

Nous choisissons maintenant de la façon suivante une fonction de type $\mathfrak{D}$ privilégiée par rapport à χ :

— Si $\mathfrak{D}$ est la représentation unité (ce qui entraîne que le caractère χ est non ramifié), φ est la fonction caractéristique des entiers dans K^2;

— Si $\mathfrak{D}$ est non triviale, φ est définie par

$$\varphi(v) = 0 \qquad \text{si}\quad v\notin Me_1,$$
$$\varphi(v) = \mathfrak{D}(m)\,P(\mathfrak{D},\chi) \qquad \text{si}\quad v = me_1,\quad m\in M.$$

Alors :

Proposition (6.3). — *On a*

(6.3.1) $L_\varphi(\chi, s) = [1 - N(\mathfrak{p})^{-1}]\,P(\mathfrak{D},\chi)$ *si $\mathfrak{D}$ est non triviale;*

(6.3.2) $L_\varphi(\chi, s) = [1 - N(\mathfrak{p})^{-1}]\,[1-\bar{\chi}(\mathfrak{p})\,N(\mathfrak{p})^{-s}]^{-1}P(\mathfrak{D},\chi)$ *dans le cas contraire.*

En effet, tout $k \in K$ s'écrit de façon unique :

(6.3.3) $$k = \pi^n u, \qquad \text{où} \quad n = v(k) \quad \text{et} \quad u \in \mathfrak{O}^*.$$

La mesure de Haar d^*t du groupe multiplicatif est donnée par

(6.3.4) $$\int f(t)\, d^*t = (1 - N(\mathfrak{p})^{-1}) \sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_{\mathfrak{O}^*} f(\pi^n u)\, du,$$

où du est la mesure de Haar de masse 1 du groupe compact $\mathfrak{O}^*$. Appliquons cette formule au calcul de l'intégrale $L_\varphi(\chi, s)$, il vient

(6.3.5) $$L_\varphi(\chi, s) = (1 - N(\mathfrak{p})^{-1}) \sum \int \varphi(\pi^n u e_1)\, \bar{\chi}(u)\, \bar{\chi}(\pi^n)\, N(\mathfrak{p})^{-ns}\, du.$$

Supposons $\mathfrak{D}$ non triviale. Alors, pour $n \neq 0$, le vecteur $\pi^n u e_1$ n'appartient pas à Me_1, et $\varphi(\pi^n u e_1) = 0$. L'intégrale (6.3.5) se réduit donc au terme $n = 0$, d'où (6.3.1).

Supposons $\mathfrak{D}$ triviale. Alors (6.3.5) se réduit aux termes $n \geqq 0$. Ainsi :

(6.3.6) $$L_\varphi(\chi, s) = [1 - N(\mathfrak{p})^{-1}] \sum_{n \geqq 0} [N(\mathfrak{p})^{-s} \bar{\chi}(\pi)]^n.$$

La formule (6.3.2) en découle aussitôt.

Proposition (6.4). — *Si $\mathfrak{D}$ est la représentation unité (et χ non ramifié), on a*

(6.4.1) $$\mathfrak{U}(1, \chi, s) = \frac{1 - \bar{\chi}(\mathfrak{p})\, N(\mathfrak{p})^{-s-1}}{1 - \chi(\mathfrak{p})\, N(p)^{s-1}};$$

(6.4.2) $$E(1, \chi, s; \mu) = 0 \qquad \text{si} \quad \mu \notin \mathfrak{O};$$

(6.4.3) $$\left\{ \begin{aligned} & E(1, \chi, s; \mu) = \frac{1 - \bar{\chi}(\mathfrak{p}\mu)\, N(\mathfrak{p})^{-s}\, |\mu|^s}{1 - \bar{\chi}(\mathfrak{p})\, N(\mathfrak{p})^{-s}} (1 - \bar{\chi}(\mathfrak{p})\, N(\mathfrak{p})^{-s-1}) \\ & \qquad \text{si} \quad \mu \in \mathfrak{O} \quad \text{et} \quad \mu \neq 0; \end{aligned} \right.$$

(6.4.4) $$E(1, 1, s) = [1 - \bar{\chi}(\mathfrak{p})\, N(\mathfrak{p})^{-s}]^{-1}.$$

La première assertion est immédiate, car on a dans ce cas $\hat{\varphi} = \varphi$. Pour prouver les autres, on peut se borner au cas où χ est trivial. Alors, on a

(6.4.5) $$\begin{aligned} E(1, 1, s; \mu) &= \int_K \sup(1, |y|)^{-s-1} \tau(y\mu)\, dy \\ &= \int_{\mathfrak{O}} \tau(\mu y)\, dy + \sum_{p \geqq 1} N(\mathfrak{p})^{-p(s+1)} \int_{\pi^{-p}\mathfrak{O}^*} \tau(\mu y)\, dy, \\ &= \int_{\mathfrak{O}} \tau(\mu y)\, dy + \sum_{p \geqq 1} N(\mathfrak{p})^{-p(s+1)} \left[\int_{\pi^{-p}\mathfrak{O}} \tau(\mu y)\, dy \right. \\ &\quad \left. - \int_{\pi^{-p+1}\mathfrak{O}} \tau(\mu y)\, dy \right]. \end{aligned}$$

Si μ n'est pas entier, il définit un caractère non trivial $y \mapsto \tau(y\mu)$ des groupes $\pi^{-p}\mathfrak{O}$ pour $p \geqq 0$, et il vient ainsi $E(1, 1, s; \mu) = 0$. Si, au contraire, μ est entier, le caractère $y \mapsto \tau(\mu y)$ est trivial sur les groupes $\pi^{-p}\mathfrak{O}$, avec $0 \leqq p \leqq v(\mu)$, et non trivial sur les groupes $\pi^{-p}\mathfrak{O}$, avec $p > v(\mu)$. L'intégrale (6.4.5) se réduit donc à l'expression

$$(6.4.6) \qquad 1 + \sum_{1 \leqq p \leqq v(\mu)} N(\mathfrak{p})^{-p(s+1)} \times \left[\int_{\pi^{-p}\mathfrak{O}} dy - \int_{\pi^{-p+1}\mathfrak{O}} dy\right] - N(\mathfrak{p})^{-(1+v(\mu))(s+1)+v(\mu)},$$

soit

$$(6.4.7) \qquad 1 + (1 - N(\mathfrak{p})^{-1}) \sum_{1 \leqq p \leqq v(\mu)} N(\mathfrak{p})^{-ps} - N(\mathfrak{p})^{-(s+1)(1+v(\mu))+v(\mu)},$$

ce qui se laisse facilement mettre sous la forme (6.4.3).

Enfin si μ est nul, l'intégrale se met sous la forme

$$(6.4.8) \qquad 1 + \sum_{p \geqq 1} \left[N(\mathfrak{p})^{-p(s+1)} \int_{\pi^{-p}\mathfrak{O}} dy - N(\mathfrak{p})^{-(p-1)(s+1)} \int_{\pi^{-p+1}\mathfrak{O}} dy\right],$$

soit

$$(6.4.9) \qquad 1 + \sum_{p \geqq 1} [N(\mathfrak{p})^{-ps} - N(\mathfrak{p})^{-(p-1)s}],$$

et ceci se ramène à (6.4.4).

Nous n'aborderons pas, dans le cas général, le calcul de $\hat{\varphi}$ et de l'opérateur $\Upsilon(\mathfrak{D}, \chi, s)$. Il est évident que $\Upsilon(\mathfrak{D}, \chi, s)$ est connu à un scalaire près, puisque c'est un isomorphisme de l'image de $P(\mathfrak{D}, \chi)$ sur celle de $P(\mathfrak{D}, \bar{\chi})$. Le problème est de déterminer ce scalaire. Par exemple, si $\mathfrak{D}$ et χ sont de même conducteur $\mathfrak{p}^m$, on a

$$(6.4.10) \qquad \Upsilon(\mathfrak{D}, \chi, s) = N(\mathfrak{p})^{-ms-1} g(\chi) \sum_{x \in \mathfrak{O}_n} \mathfrak{D}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathfrak{D}(w) P(\mathfrak{D}, \chi),$$

où $g(\chi)$ est la somme de Gauss

$$(6.4.11) \qquad g(\chi) = \sum_{\mathfrak{O}_m^*} \chi(a)\, \tau(\pi^{-m} a).$$

De plus, on peut voir que l'équation fonctionnelle se réduit essentiellement à la relation bien connue

$$g(\chi)\, g(\bar{\chi}) = \chi(-1)\, N(\mathfrak{p})^m.$$

7. Le cas global $G = \mathbf{SL}(2, \mathbf{A})$.

Dans ce paragraphe, k désigne un corps de nombres, c'est-à-dire une extension finie du corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels. On désigne par $\mathbf{A}$ l'anneau localement compact des adèles de k et, pour chaque place $\mathfrak{p}$, par $k_\mathfrak{p}$ le corps localement compact correspondant. En tant qu'ensemble, A est défini comme le sous-ensemble du produit $\prod k_\mathfrak{p}$, formé des éléments $x = (x_\mathfrak{p})$ tels que $x_\mathfrak{p} \in \mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ pour presque tout $\mathfrak{p}$ fini. On désigne par $\mathcal{S}(\mathbf{A}^n)$ l'espace des fonctions de Schwartz-Bruhat sur $\mathbf{A}^n$. C'est donc l'espace vectoriel, engendré par les fonctions de la forme

$$(7.1.1) \qquad \varphi(x) = \prod \varphi_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p}), \qquad \text{où} \quad \varphi_\mathfrak{p} \in \mathcal{S}(k_\mathfrak{p}^n) \ \text{pour tout } \mathfrak{p}$$

et où, pour presque tout $\mathfrak{p}$ fini, $\varphi_\mathfrak{p}$ est la fonction caractéristique de $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}^n$ dans $k_\mathfrak{p}^n$.

On désigne par dx la mesure de Haar du groupe additif $\mathbf{A}$ qui est le produit des mesures de Haar $d_\mathfrak{p} x_\mathfrak{p}$ des corps $k_\mathfrak{p}$, introduites au § 1 et aux § 4, 5, 6. On désigne par $\mathbf{A}^*$ le groupe des idèles, c'est-à-dire le groupe des éléments inversibles de $\mathbf{A}$. Pour toute place $\mathfrak{p}$, désignons par $\delta_\mathfrak{p} x_\mathfrak{p}$ la mesure de Haar de $k_\mathfrak{p}$ définie par

$$(7.1.2) \qquad \delta_\mathfrak{p} x_\mathfrak{p} = |x_\mathfrak{p}|^{-1} d_\mathfrak{p} x_\mathfrak{p} \qquad \text{si } \mathfrak{p} \text{ est à l'infini;}$$

$$(7.1.3) \qquad \delta_\mathfrak{p} x_\mathfrak{p} = (1 - N(\mathfrak{p})^{-1})^{-1} |x_\mathfrak{p}|^{-1} d_\mathfrak{p} x_\mathfrak{p} \quad \text{si } \mathfrak{p} \text{ est fini.}$$

Alors le produit de ces mesures est une mesure de Haar d^*x du groupe multiplicatif $\mathbf{A}^*$. Pour tout $y \in \mathbf{A}^*$, on a d'autre part

$$(7.1.4) \qquad d(yx) = |y|\, dx, \qquad \text{où} \quad |y| = \prod |y_\mathfrak{p}| \quad \text{si } y = (y_\mathfrak{p}).$$

Pour chaque place $\mathfrak{p}$, soit $\tau_\mathfrak{p}$ le caractère additif choisi au § 1. Alors la formule

$$(7.1.5) \qquad \tau(x) = \prod \tau_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p}) \qquad \text{pour} \quad x = (x_\mathfrak{p})$$

définit un caractère du groupe additif $\mathbf{A}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(7.1.6) Le groupe $\mathbf{A}$ est mis en dualité avec lui-même par $(x, y) \mapsto \tau(xy)$;

(7.1.7) Le sous-groupe discret k de $\mathbf{A}$ est son propre orthogonal;

(7.1.8) La transformation de Fourier

$$\hat{\varphi}(x) = \int_\mathbf{A} \varphi(y)\, \tau(xy)\, dy$$

définit une bijection de $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ sur lui-même, et la formule de réciprocité s'écrit

$$\int \hat{\varphi}(-x)\,\tau(xy) = \varphi(y).$$

On considère le groupe $G = \mathbf{SL}\,(2, k)$ comme groupe algébrique défini sur k, et l'on note $G(\mathbf{A}) = \mathbf{SL}\,(2, \mathbf{A})$ le groupe des points adèliques de G. On considère les sous-groupes A, N, N^- de G, introduits au § 1, et l'on pose

$$M = \prod M_{\mathfrak{p}},$$

où, pour chaque place $\mathfrak{p}$, $M_{\mathfrak{p}}$ est le sous-groupe compact maximal de $G_{\mathfrak{p}} = \mathbf{SL}\,(2, k_{\mathfrak{p}})$ introduit au § 1. Il est clair que M est un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbf{A})$, et qu'on a la décomposition

$$G(\mathbf{A}) = MA\,(\mathbf{A})\,N(\mathbf{A}). \tag{7.1.9}$$

On pose

$$\Lambda\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = a, \tag{7.1.10}$$

et, pour tout $s \in \mathbf{C}$, $b \in B(\mathbf{A})$,

$$\langle s, b \rangle = |\,\Lambda(b)\,|^s. \tag{7.1.11}$$

Tout caractère χ de module 1 de $\mathbf{A}^*$ définit un caractère de module 1 de $B(\mathbf{A})$ ou $A(\mathbf{A})$ auquel on l'identifie, à savoir $a \mapsto \chi(\Lambda(a))$. Le caractère χ est de la forme $\chi(x) = \prod \chi_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}})$, où, pour tout $\mathfrak{p}$, $\chi_{\mathfrak{p}}$ est un caractère de module 1 de $k_{\mathfrak{p}}^*$ supposé non ramifié pour presque tout $\mathfrak{p}$ fini. Dans la suite, on suppose que χ *est trivial sur* k^*, c'est-à-dire que χ est un caractère de Hecke.

Soit $\mathfrak{D}$ une représentation unitaire irréductible du groupe M. Alors $\mathfrak{D}$ est un produit tensoriel

$$\mathfrak{D} = \otimes\, \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}, \tag{7.1.12}$$

où $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$, pour chaque place $\mathfrak{p}$, désigne une représentation unitaire irréductible de $M_{\mathfrak{p}}$ qui, pour presque tout $\mathfrak{p}$, est triviale. Soit $P(\mathfrak{D}, \chi)$ le projecteur orthogonal de l'espace de la représentation sur le sous-espace $H(\mathfrak{D}, \chi)$ des vecteurs v qui vérifient

$$\mathfrak{D}(b)\,v = \chi(b)\,v, \qquad b \in B(\mathbf{A}). \tag{7.1.13}$$

Dans la suite, on suppose $P(\mathfrak{D}, \chi) \neq 0$. On a

$$P(\mathfrak{D}, \chi) = \otimes\, P(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}, \chi_{\mathfrak{p}}), \tag{7.1.14}$$

et en particulier l'image de $P(\mathfrak{D}, \chi)$ est de dimension 1. Si $g = man$ avec $m \in M$, $a \in A(\mathbf{A})$, $n \in N(\mathbf{A})$, on peut poser

$$(7.2) \qquad L(g, \mathfrak{D}, \chi, s) = \mathfrak{D}(m)\chi(a)\langle -s, a\rangle P(\mathfrak{D}, \chi).$$

Cette fonction est évidemment le produit de ses composantes locales; celle-ci sont les fonctions introduites au § 1; si $g = (g_\mathfrak{p})$, on a

$$(7.2.1) \qquad L(g, \mathfrak{D}, \chi, s) = \prod L_\mathfrak{p}(g_\mathfrak{p}, \mathfrak{D}_\mathfrak{p}, \chi_\mathfrak{p}, s).$$

Soit maintenant μ un élément de A. Il détermine un caractère

$$(7.2.2) \qquad \xi : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \mapsto \tau(x\mu)$$

du groupe $N^-(A)$. On se propose d'étudier l'intégrale

$$(7.2.3) \qquad E(\mathfrak{D}, \chi, s; \mu) = \int_{N^-(A)} L(gn^-, \mathfrak{D}, \chi, s+1)\, dn^-.$$

Il est clair que cette intégrale est le produit de ses composantes locales.

Proposition (7.3). — *L'intégrale* (7.2.3) *converge absolument pour* $\Re s > 1$. *Elle définit une fonction holomorphe et continue en* (g, s). *Pour* $\Re s > 1$, *elle est égale au produit infini convergent*

$$(7.3.1) \qquad E(g, \mathfrak{D}, \chi, s; \mu) = \prod E_p(g_\mathfrak{p}, \mathfrak{D}_\mathfrak{p}, \chi_\mathfrak{p}, s; \mu_\mathfrak{p}),$$

où $g = (g_\mathfrak{p})$, $\mu = (\mu_\mathfrak{p})$, $\chi = (\chi_\mathfrak{p})$, $\mathfrak{D} = \otimes \mathfrak{D}_\mathfrak{p}$.

Comme dans le cas local, il suffit d'étudier l'intégrale pour $g = e$, $\mathfrak{D} = 1$, $\chi = 1$, $s \in \mathbf{R}$, $\mu = 0$. Alors les fonctions à intégrer sont positives, et l'on a (avec les mêmes notations qu'au § 1)

$$(7.3.2) \qquad E(e, s) = \prod_{\mathfrak{p}\ \text{fini}} E_\mathfrak{p}(e, s) \prod_{\mathfrak{p}\ \text{infini}} E_\mathfrak{p}(e, s),$$

les deux membres étant simultanément définis. Si $\Re s > 1$, tous les facteurs locaux sont définis, et l'on a en particulier, pour toute place finie $\mathfrak{p}$ [*cf.* proposition (6.4.5)],

$$E_\mathfrak{p}(e, s) = (1 - N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}.$$

Vu les résultats connus sur la convergence des produits eulériens, on voit que le produit infini converge, et il en est donc de même de l'intégrale $E(e, s)$.

Du reste, on a, de façon générale, si $\mu = 0$,

$$(7.4)\qquad E(\mathfrak{D}, \chi, s) = \prod_{\mathfrak{p}\in S} E_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}, \chi_{\mathfrak{p}}, s) \prod_{\mathfrak{p}\notin S} E_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}, \chi_{\mathfrak{p}}, s),$$

où l'on désigne par S l'ensemble formé des places à l'infini et des places finies où $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ est non triviale. Pour $\mathfrak{p} \notin S$, on a

$$(7.4.1)\qquad E_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}, \chi_{\mathfrak{p}}, s) = [1 - \overline{\chi}(\mathfrak{p}) N(\mathfrak{p})^{-s}]^{-1}.$$

Désignons par $\zeta(\overline{\chi}, s)$ la fonction de Hecke ([8], [9], [16]) :

$$(7.4.2)\qquad \zeta(\overline{\chi}, s) = \prod [1 - \overline{\chi}(\mathfrak{p}) N(\mathfrak{p})^{-s}]^{-1},$$

le produit étant étendu aux places finies où χ n'est pas ramifié. Nous désignerons par $\zeta_{\mathfrak{D}}(\overline{\chi}, s)$ la fonction « incomplète » définie par le même produit étendu seulement aux places finies où $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ est triviale (ce qui entraîne $\chi_{\mathfrak{p}}$ non ramifié). On a donc

$$(7.4.3)\qquad \zeta_{\mathfrak{D}}(\overline{\chi}, s) = \zeta(\overline{\chi}, s) \prod_{\mathfrak{p}\in S'} [1 - \overline{\chi}(\mathfrak{p}) N(\mathfrak{p})^{-s}],$$

où S' désigne l'ensemble fini des places finies où $\chi_{\mathfrak{p}}$ est non ramifié et $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ non triviale. Avec cette notation, on a

$$(7.4.4)\qquad E(\mathfrak{D}, \chi, s) = \sum_{\mathfrak{p}\in S} E_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}, \chi_{\mathfrak{p}}, s)\, \zeta_{\mathfrak{D}}(\overline{\chi}, s).$$

Cette formule met en évidence le prolongement analytique de $E(\mathfrak{D}, \chi, s)$.

Gardons les mêmes notations et supposons que μ soit un idèle de **A**. Alors pour $\mathcal{R}s > 0$, on a

$$(7.4.5)\qquad E(\mathfrak{D}, \chi, s; \mu) = \prod_{\mathfrak{p}\in S} E_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}, \chi_{\mathfrak{p}}, s; \mu_{\mathfrak{p}}) \prod_{\mathfrak{p}\notin S} E_{\mathfrak{p}}(1_{\mathfrak{p}}, \chi_{\mathfrak{p}}, s; \mu_{\mathfrak{p}}).$$

Nous avons calculé les facteurs relatifs aux places $\mathfrak{p} \notin S$ dans la proposition (6.4.4). Il vient, en utilisant ce résultat,

$$(7.4.6)\qquad E(\mathfrak{D}, \chi, s; \mu) = \prod_{\mathfrak{p}\in S} E_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}, \chi_{\mathfrak{p}}, s; \mu_{\mathfrak{p}}) \frac{1}{\zeta_{\mathfrak{D}}(\overline{\chi}, s+1)} \times \prod_{\mathfrak{p}\notin S} \frac{1 - \overline{\chi}(\mathfrak{p}\mu_{\mathfrak{p}}) N(\mathfrak{p})^{-s} |\mu_{\mathfrak{p}}|^{s}}{1 - \overline{\chi}(\mathfrak{p}) N(\mathfrak{p})^{-s}}$$

pourvu que $\mu_\mathfrak{p}$ soit un entier de $k_\mathfrak{p}$ en toutes les places $\mathfrak{p} \notin S$. Sinon, on a $E(\mathfrak{D}, \chi, s; \mu) = 0$.

On sait que $\mu_\mathfrak{p}$ est de toute façon une unité pour presque tout $\mathfrak{p}$ et que, par conséquent, dans l'expression précédente, il n'y a qu'un nombre fini de termes de la forme

$$\frac{1-\bar{\chi}(\mathfrak{p}\mu_\mathfrak{p})\,N(\mathfrak{p})^{-s}\,|\,\mu\,|_\mathfrak{p}^s}{1-\bar{\chi}(\mathfrak{p})\,N(\mathfrak{p})^{-s}}.$$

On remarquera que, dans un tel facteur, $|\,\mu\,|_\mathfrak{p}$ est en fait une puissance négative de $N(\mathfrak{p})$, et en conséquence un tel facteur est en fait une fonction entière de s.

En particulier, on voit que le produit $E(\mathfrak{D}, \chi, s; \mu)\,\zeta_\mathfrak{D}(\bar{\chi}, s+1)$ se prolonge en une fonction entière de s. Introduisons maintenant l'opérateur

$$(7.4.7)\qquad \text{Ч}(\mathfrak{D}, \chi, s) = \prod_{p\in S} \text{Ч}_\mathfrak{p}(\mathfrak{D}_\mathfrak{p}, \chi_\mathfrak{p}, s)\,\frac{\zeta_\mathfrak{D}(\bar{\chi}, -s+1)}{\zeta_\mathfrak{D}(\chi, s+1)}.$$

On a aussitôt l'équation fonctionnelle

$$(7.4.8)\qquad E(\mathfrak{D}, \chi, s; \mu) = \bar{\chi}(\mu)\,|\,\mu\,|^s E(\mathfrak{D}, \bar{\chi}, -s; \mu)\,\text{Ч}(\mathfrak{D}, \chi, s).$$

On peut aussi retrouver ces résultats directement en raisonnant comme au § 1. Pour cela introduisons les notations suivantes : pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{A}^2)$, posons

$$(7.4.9)\qquad L_\varphi(g, \chi, s) = \int_* \varphi[\mathrm{t}g(e_1)]\,\bar{\chi}(t)\,|\,t\,|^s\,d^*t;$$

$$(7.4.10)\qquad E_\varphi(g, \chi, s; \mu) = \int_{N^-(\mathbf{A})} L_\varphi(gn, \chi, s+1)\,\xi(n)\,dn.$$

Ces intégrales convergent pour $\mathcal{R}s > 1$. Posons aussi

$$(7.4.11)\qquad \hat{\varphi}(xe_1 + ye_2) = \iint \varphi(ue_1 + ve_2)\,\tau(xv - yu)\,du\,dv.$$

THÉORÈME (7.5). — *Si μ est un idèle, la fonction $E_\varphi(g, \chi, s; \mu)$ se prolonge en une fonction entière de s. Soit $m > 1$; on a*

$$(7.5.1)\qquad \sup_{|\mathcal{R}s| \leq m} E_\varphi(g, \chi, s; \mu) = \sup_{|\mathcal{R}s| = m} E_\varphi(g, \chi, s; \mu).$$

Pour tout s, on a

$$(7.5.2)\qquad E_\varphi(g, \chi, s; \mu) = \bar{\chi}(\mu)\,|\,\mu\,|^s E_\varphi(g, \bar{\chi}, -s; \mu).$$

En effet, pour $\mathcal{R}s > 1$, on peut mettre E sous la forme d'une intégrale double convergente

$$(7.5.3)\qquad E_{\varphi}(\chi, s; \mu) = \iint \varphi(te_1 + xte_2)\bar{\chi}(t)\,|t|^{s+1}\,d^*t\,\tau(x\mu)\,dx,$$

ce qui s'écrit encore, en changeant x en xt^{-1} :

$$(7.5.4)\qquad E_{\varphi}(\chi, s; \mu) = \int_{\mathbf{A}^*} \hat{\varphi}(te_1 + t^{-1}e_2)\bar{\chi}(t)\,|t|^s\,d^*t,$$

où l'on a posé

$$(7.5.5)\qquad \hat{\varphi}(ue_1 + ve_2) = \int_{\mathbf{A}} \varphi(ue_1 + xe_2)\,\tau(xv\mu)\,dx.$$

Comme $\varphi \in \mathcal{S}(A^2)$, ces assertions seront conséquences du lemme suivant :

LEMME (7.5.6). — *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{A}^2)$. L'intégrale*

$$(7.5.7)\qquad \int_{\mathbf{A}} f(te_1 + t^{-1}e_2)\,|t|^s\,d^*t$$

est absolument convergente. Posons $s = \alpha + i\beta$. Elle tend vers zéro lorsque β tend vers $+\infty$, uniformément pour α dans un compact.

On peut supposer $f(x) = \prod f_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}})$, où $f_{\mathfrak{p}} \geqq 0$ et est égale pour presque tout $\mathfrak{p}$ fini à la fonction caractéristique de $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}^2$ dans $k_{\mathfrak{p}}^2$. Soit T l'ensemble formé des places à l'infini et des places exceptionnelles. On a alors (les deux membres étant définis simultanément) :

$$(7.5.8)\qquad \int_{\mathbf{A}^*} f(te_1 + t^{-1}e_2)\,|t|^s\,d^*t = \prod_{\mathfrak{p}} \int_{k_{\mathfrak{p}}} f_{\mathfrak{p}}(te_1 + t^{-1}e_2)\,|t|^s\,\delta_{\mathfrak{p}}t.$$

D'après le § 1, on sait déjà que le produit (fini) des facteurs précédents pour $\mathfrak{p} \in T$ est défini et tend vers zéro à l'infini, uniformément pour $\mathcal{R}s$ dans un compact. Le produit des facteurs précédents pour $\mathfrak{p} \notin T$ est convergent et borné dans toute bande. Or, si $f_{\mathfrak{p}}$ est la fonction caractéristique de $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}^2$ dans $k_{\mathfrak{p}}$, la fonction $t \mapsto f_{\mathfrak{p}}(te_1 + t^{-1}e_2)$ est la fonction caractéristique de $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}^*$ dans $k_{\mathfrak{p}}^*$. Tous les facteurs relatifs à des places $\mathfrak{p} \in T$ sont donc égaux à 1 dans le produit (7.5.8). Le lemme est donc démontré.

La première assertion de (7.5) est donc établie. La seconde résulte de ce qui précède et du principe du maximum. La dernière se prouve comme au § 1.

Remarque. — Les résultats précédents, en particulier l'équation (7.5.2) se rattachent à la théorie des séries d'Eisenstein. Ils se déduisent par la méthode exposée dans l'introduction des résultats exposés dans [8] [*voir* (3.11) à (3.14), *loc. cit.*].

Posons maintenant

$$(7.5.9)\qquad \varphi(x)=\prod \varphi_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}}),\qquad \text{où}\quad x=(x_{\mathfrak{p}})$$

en désignant, pour toute place $\mathfrak{p}$, par $\varphi_{\mathfrak{p}}$ la fonction « privilégiée » du § 1. Comme dx est le produit des mesures $\delta_{\mathfrak{p}}x_{\mathfrak{p}}$, introduites en (7.1.3), on a

$$(7.5.10)\qquad L_{\varphi}(\chi, s)=\prod_{\mathfrak{p}\text{ fini}} \frac{1}{1-N(\mathfrak{p})^{-1}} L_{\varphi_{\mathfrak{p}}}(\chi_{\mathfrak{p}}, s) \prod_{\mathfrak{p}\text{ infini}} L_{\varphi_{\mathfrak{p}}}(\chi_{\mathfrak{p}}, s).$$

Posons $C=\prod\limits_{\substack{\mathfrak{p}\text{ fini}\\ \mathfrak{p}\notin S}}[1-N(\mathfrak{p})^{-1}]^{-1}$ et appliquons la formule (6.3.2), il vient

$$(7.5.11)\qquad L_{\varphi}(\chi, s)=C\prod_{\mathfrak{p}\in S} L_{\varphi_{\mathfrak{p}}}(\chi_{\mathfrak{p}}, s)\,\zeta_{\mathfrak{D}}(\bar{\chi}, s),$$

où S est, on le rappelle, l'ensemble des places infinies et des places finies où $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ est non triviale et χ non ramifié et où $\zeta_{\mathfrak{D}}(\chi, s)$ est la fonction déjà introduite en (7.4.3).

Dans le domaine $\mathcal{R}s>1$, on a

$$(7.5.12)\qquad E_{\varphi}(g, \chi, s; \mu)=E(g, \mathfrak{D}, \chi, s; \mu)\,L_{\varphi}(\chi, s+1).$$

D'autre part, l'opérateur $\text{Ч}(\mathfrak{D}, \chi, s)$ déjà défini par (7.4.7) vérifie

$$(7.5.13)\qquad L_{\hat{\varphi}}(\bar{\chi}, -s+1)=\text{Ч}(\mathfrak{D}, \chi, s)\,L_{\varphi}(\chi, s+1).$$

THÉORÈME (7.6). — *Le produit $E(g, \mathfrak{D}, \chi, s; \mu)\,\zeta_{\mathfrak{D}}(\bar{\chi}, s+1)$ se prolonge en une fonction entière de s. On a*

$$(7.6.1)\qquad E(g, \mathfrak{D}, \chi, s; \mu)=\bar{\chi}(\mu)\,|\mu|^{s}E(g, \mathfrak{D}, \bar{\chi}, -s; \mu)\,\text{Ч}(\mathfrak{D}, \chi, s).$$

Il existe une fonction continue $C(s)$, possédant la propriété suivante : Pour tout $b>1$ et tout compact Ω de A^{*}, il existe une constante $C(b, \Omega)$ telle que pour $|\mathcal{R}s|\leq b$ et $\mu\in\Omega$, on ait

$$(7.6.2)\qquad \left|E(g, \mathfrak{D}, \chi, s; \mu)\,\zeta_{\mathfrak{D}}(\bar{\chi}, s+1)\right|\leq C(b, \Omega)\,E(g, b).$$

En effet, pour chaque place $\mathfrak{p}\in S$, on peut écrire

$$(7.6.3)\qquad L_{\varphi}(\chi_{\mathfrak{p}}, s)=\varepsilon(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}, \chi_{\mathfrak{p}}, s)\,P(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}, \chi_{\mathfrak{p}}),$$

où $\varepsilon^{-1}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}, \chi_{\mathfrak{p}}, s)$ est une fonction entière de s à valeurs complexes. La formule (7.5.11) peut encore s'écrire

$$(7.6.4)\qquad L_{\varphi}(\chi, s)=C\zeta_{\mathfrak{D}}(\bar{\chi}, s)\,\varepsilon(\mathfrak{D}, \chi, s)\,P(\mathfrak{D}, \chi),$$

où l'on a posé

$$\varepsilon(\mathfrak{D}, \chi, s) = \prod_{\mathfrak{p} \in S} \varepsilon(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}, \chi_{\mathfrak{p}}, s). \tag{7.6.5}$$

Alors la formule (7.5.12) s'écrit encore

$$CE(g, \mathfrak{D}, \chi, s; \mu)\, \zeta_{\mathfrak{D}}(\bar{\chi}, s+1) = E_{\varphi}(g, \chi, s; \mu)\, \varepsilon^{-1}(\mathfrak{D}, \chi, s+1), \tag{7.6.6}$$

et ceci donne le prolongement analytique du produit $E\zeta_{\mathfrak{D}}$. L'équation (7.6.1) s'établit comme au § 1. Quant à la dernière assertion, on écrit pour $b > 1$ et $|\mathcal{R}s| \leq b$, en tenant compte de (7.5.1),

$$C\left| E(g, \mathfrak{D}, \chi, s; \mu)\, \zeta_{\mathfrak{D}}(\bar{\chi}, s+1)\right| \leq \varepsilon^{-1}(\mathfrak{D}, \chi, s) \sup_{|\mathcal{R}s| = b} E_{\varphi}(g, \chi, s; \mu), \tag{7.6.7}$$

et l'on achève alors la démonstration comme dans (1.12).

Notons maintenant que si χ n'est pas une puissance (imaginaire pure) de la norme, la fonction $\zeta_{\mathfrak{D}}(\bar{\chi}, s)$ est *entière*. Au contraire, si $\chi(x) = |x|^{i\sigma}$, on a $\zeta_{\mathfrak{D}}(\chi, s) = \zeta_{\mathfrak{D}}(1, s - i\sigma)$, et cette fonction admet un pôle pour $s = i\sigma + 1$, d'ailleurs simple. En tout cas, la fonction

$$\zeta'_{\mathfrak{D}}(\chi, s) = \zeta_{\mathfrak{D}}(\chi, s).(s - i\sigma - 1) \tag{7.6.8}$$

est entière. On en déduit aussitôt le lemme suivant :

LEMME (7.7). — *Désignons par $\zeta'_{\mathfrak{D}}(\chi, s)$ la fonction précédente si χ est une puissance de la norme, et la fonction $\zeta_{\mathfrak{D}}(\chi, s)$ dans le cas contraire. Alors le produit*

$$\Psi(\mathfrak{D}, \chi, s)\, \zeta'_{\mathfrak{D}}(\bar{\chi}, s+1) \tag{7.7.1}$$

est holomorphe pour $\mathcal{R}s < 1$.

En effet, dans la formule (7.4.7) qui définit $\Psi(\mathfrak{D}, \chi, s)$, les facteurs $\Psi(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}, \chi_{\mathfrak{p}}, s)$, pour $\mathfrak{p} \in S$, sont holomorphes dans la bande $\mathcal{R}s < 1$. Le lemme (7.7) résulte donc simplement des assertions qui le précèdent.

Lorsque $\mathfrak{D}$ est une représentation quelconque non nécessairepent irréductible, mais encore écrite comme produit tensoriel $\bigotimes \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ d'une famille de représentations $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ de $M_{\mathfrak{p}}$, triviales pour presque tout $\mathfrak{p}$, on peut encore définir la fonction ζ incomplète

$$\zeta_{\mathfrak{D}}(\bar{\chi}, s) = \zeta(\bar{\chi}, s) \prod_{\mathfrak{p} \in T} \left[1 - \frac{\bar{\chi}(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^{s}}\right], \tag{7.7.2}$$

où T est l'ensemble des places finies où χ est non ramifié et $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ non triviale. Alors si $\mathfrak{D}_0$ est une représentation irréductible contenue dans $\mathfrak{D}$, on peut écrire

$$\zeta_{\mathfrak{D}}(\bar{\chi}, s) = \zeta_{\mathfrak{D}_0}(\bar{\chi}, s) \prod_{\mathfrak{p} \in T'} \left[1 - \frac{\bar{\chi}(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s} \right], \tag{7.7.3}$$

où T' est l'ensemble des places finies $\mathfrak{p}$ telles que χ ne soit pas ramifié en $\mathfrak{p}$, la représentation $(\mathfrak{D}_0)_{\mathfrak{p}}$ triviale et la représentation $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ non triviale. Ce dernier produit est d'ailleurs fonction entière de s, bornée dans toute bande bornée. On voit que les résultats précédents s'appliquent encore au cas d'une représentation non irréductible telle que $\mathfrak{D}$ et, en particulier, on a encore le lemme (7.7).

8. Cas global pour un groupe de rang quelconque.

Dans ce paragraphe, le groupe G est un groupe algébrique semi-simple, simplement connexe, défini et déployé sur le corps de nombres k. Il existe donc un tore maximal A de G déployé sur k. Le dual de Pontrjagin du groupe $A(\mathbf{A})$ n'est autre que le groupe

$$\hat{\mathbf{A}}^* \otimes_{\mathbf{Z}} X^*(\mathbf{A}), \tag{8.1.1}$$

l'élément $\chi \otimes \lambda$ définissant l'homomorphisme

$$a \mapsto \chi(\lambda(a)) \tag{8.1.2}$$

de $A(\mathbf{A})$ dans $\mathbf{T}$. De même, on désigne par F et $F_{\mathbf{R}}$ les espaces

$$F_{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \otimes X^*(\mathbf{A}), \qquad F = \mathbf{C} \otimes X^*(A). \tag{8.1.3}$$

Tout élément $\lambda \in F$ définit un caractère généralisé $a \mapsto \langle \lambda, a \rangle$. Si $\lambda = \sum s_i \otimes \lambda_i$, on a

$$\langle \lambda, a \rangle = \prod |\lambda_i(a)|^{s_i}. \tag{8.1.4}$$

On désigne toujours par W le groupe de Weyl, par R le système des racines de G par rapport à A. On choisit un k-sous-groupe de Borel $B = AN$, et l'on désigne par R_+ le système de racines correspondant. On utilise les notions introduites au § 2, horicycles, hémicycles, etc. On choisit un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbf{A})$ adapté au tore A. De façon précise, on choisit une base de Chevalley de la k-algèbre de Lie de G et, pour chaque place $\mathfrak{p}$, on désigne par $M_{\mathfrak{p}}$ le sous-groupe des points de $G(k_{\mathfrak{p}})$ qui conserve le réseau engendré sur $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$ par cette base. D'autre part, pour toute place à l'infini $\mathfrak{p}$, on choisit un sous-groupe compact maximal $M_\mathfrak{p}$ de $G(k_\mathfrak{p})$ adapté au tore $A(k_\mathfrak{p})$. Alors le produit $M = \prod M_\mathfrak{p}$ est un sous-groupe compact maximal de $G(A)$. Pour chaque racine α, il existe un isomorphisme

$$(8.1.5) \qquad \mathfrak{X}_\alpha : \mathbf{SL}(2, k) \to G^\alpha$$

qui transforme le sous-groupe des matrices triangulaires en le sous-groupe de Borel $A^\alpha N_\alpha$ de G^α et le compact maximal M_0 de $\mathbf{SL}(2, \mathbf{A})$ introduit au § 7 en le groupe $M^\alpha = M \cap G^\alpha(\mathbf{A})$.

On choisit maintenant une représentation $\mathfrak{D} = \bigotimes \mathfrak{D}_\mathfrak{p}$ de M et un caractère χ de module 1 de $A(\mathbf{A})$. On suppose χ *trivial* sur $A(k)$. On introduit, comme au § 2, un projecteur $P(\mathfrak{D}, \chi)$ et une fonction $L(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda)$, notée simplement $L(g, \lambda)$ si $\mathfrak{D}$ et χ sont triviaux. On se propose d'étudier l'intégrale

$$(8.2) \qquad E_V(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \xi) = \int_{V(\mathbf{A})} L(gv, \mathfrak{D}, \chi, \lambda + \rho)\, \xi(v)\, dv,$$

où V est un hémicycle de N^- et ξ un caractère de module 1 du groupe $V(\mathbf{A})$. Lorsque $\mathfrak{D}$ et χ sont triviaux et $\xi = 1$, on écrit simplement $E_V(g, \lambda)$ pour l'intégrale précédente. On a sans peine les analogues des propositions du § 2. En particulier, la convergence de (8.2) est donnée par le théorème suivant :

THÉORÈME (8.3). — *Pour tout hémicycle V, l'intégrale* (8.2) *converge absolument dans le tube défini par les inégalités :*

$$(8.3.1) \qquad (\mathcal{R}\lambda, \check{\alpha}) > 1 \quad \textit{pour tout } \alpha \textit{ tel que } -\alpha \in V.$$

Soit $B'(V)$ le tube précédent. La convergence est normale pour g dans un compact de $G(\mathbf{A})$ et $\mathcal{R}\lambda$ dans un compact de $B'(V)$. En particulier, l'intégrale (8.2) *définit une fonction holomorphe en λ et continue en (g, λ) sur $G(\mathbf{A}) \times B'(V)$.*

Lorsque V contient une seule racine, on est ramené au cas de $\mathbf{SL}(2, \mathbf{A})$. Alors la condition précédente est bien celle du § 7. Dans le cas général, on procède par récurrence sur le nombre de racines contenues dans V.

REMARQUE (8.3.2). — Au moins lorsque $V = N^-$, on peut déduire ce résultat du théorème de Godement sur la convergence des séries d'Eisenstein (*cf.* Introduction).

Le prolongement des intégrales (2.8) se fait alors comme au § 3. Soient α une racine simple et $\mathfrak{D}_\alpha$ la représentation $\mathfrak{D} \circ \mathfrak{X}_\alpha$ du compact maximal M_0 de $\mathbf{SL}(2, \mathbf{A})$ dans l'espace engendré par les vecteurs de la forme $\mathfrak{D}(m)v$, pour $m \in M^\alpha$ et v dans l'image de $P(\mathfrak{D}, \chi)$. Désignons par $\Psi_\alpha(\mathfrak{D}, \chi, s)$ l'opérateur qui se réduit à $\Psi(\mathfrak{D}_\alpha, \chi_\alpha, s)$ sur le sous-espace précédent et à zéro sur l'orthogonal. Soient enfin ξ un caractère de module 1 du groupe $N^-(\mathbf{A})$, et $\mu_\alpha \in \mathbf{A}$ le scalaire défini par

$$\xi\left[\mathfrak{X}_\alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix}\right] = \tau(x\mu_\alpha). \tag{8.3.3}$$

Proposition (8.4). — *Soit*

$$E_\alpha(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \xi) = \int_{N^-(\mathbf{A})} L(gn, \mathfrak{D}, \chi, \lambda + \rho)\,\xi(n)\,dn. \tag{8.4.1}$$

(8.4.2) *Avec les notations de* (7.4.3), *le produit*

$$E(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \xi)\,\zeta_{\mathfrak{D}_\alpha}(\overline{\chi}_\alpha, s_\alpha + 1)$$

se prolonge en une fonction holomorphe de λ.

(8.4.3) *On a, en posant* $\lambda = \sum_\Delta s_\beta \Lambda_\beta$ *et* $\chi(a) = \prod_\Delta \chi_\beta(\Lambda_\beta(a))$,

$$E_\alpha(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \xi) = \overline{\chi}_\alpha(\mu_\alpha)\,|\mu_\alpha|^{s_\alpha} E_\alpha(g, \mathfrak{D}, w_\alpha\chi, w_\alpha\lambda; \xi)\,\mathfrak{q}_\alpha(\mathfrak{D}, \chi_\alpha, s_\alpha).$$

(8.4.4) *Il existe une fonction continue* $C(s)$ *possédant la propriété suivante : Pour tout* $b > 1$ *et tout compact* Ω *de* A^*, *il existe une constante* $C(b, \Omega)$ *telle que, pour* $|\mathcal{R}s_\alpha| \leq b$ *et* $\mu \in \Omega$, *on ait*

$$|E_\alpha(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \xi)\,\zeta_{\mathbf{D}_\alpha}(\overline{\chi}_\alpha, s_\alpha + 1)| \leq C(s_\alpha)\,E_\alpha(g, \lambda_b)\,C(b, \Omega), \tag{8.4.5}$$

où l'on a posé $\lambda_b = \mathcal{R}\lambda - \frac{1}{2}(\mathcal{R}s_\alpha - b)\,\alpha$.

On déduit ceci de (7.6.2) en remarquant qu'on peut écrire $A(A) = \Omega' T(A)\, A^\alpha(A)$, où Ω' désigne un sous-ensemble compact de $A(\mathbf{A})$ et T la composante neutre du noyau de α dans A. Bien entendu, on raisonne comme dans (3.2).

En raisonnant comme dans (3.3), on en déduit le théorème suivant :

Proposition (8.5). — *Soient* V *un sous-groupe hémicycle de* N^-, α *une racine simple dont l'opposée est dans* V, *et* μ_α *un caractère de module* 1 *de* $V(\mathbf{A})$ *tel que le paramètre* μ_α *soit un idèle. On désigne par* D *l'enveloppe convexe de la réunion* $B'(V) \cup w_\alpha(B'(V))$. *Alors le produit*

$$E_V(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \xi)\,\zeta_{\mathfrak{D}_\alpha}(\overline{\chi}_\alpha, s_\alpha + 1) \tag{8.5.1}$$

se prolonge à D *en une fonction holomorphe. Pour* $\lambda \in \mathfrak{D}$, *on a*

$$E_V(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \xi) = \overline{\chi}_\alpha(\mu_\alpha)\,|\mu_\alpha|^{s_\alpha} E_V(g, \mathfrak{D}, w_\alpha\chi, w_\alpha\lambda; \xi)\,\mathfrak{q}_\alpha(\mathfrak{D}, \chi, s_\alpha). \tag{8.5.2}$$

En fait, on prouve que le produit (8.6.1) se prolonge au domaine D' des λ satisfaisant à la condition suivante :

Il existe $b > 1$ tel que

$$|\mathcal{R} s_\alpha| < b \qquad \text{et} \qquad \lambda_b = \mathcal{R}\lambda - \frac{1}{2}(\mathcal{R} s_\alpha - b)\alpha \in B'(V).$$

Si $\lambda \in B'(V)$, on a en particulier $\mathcal{R} s_\alpha = (\mathcal{R}\lambda, \check{\alpha}) < 1$ et, en prenant $b > \mathcal{R} s_\alpha$ et assez voisin de $\mathcal{R} s_\alpha$, on a $\lambda_b \in B'(V)$.

Si $\lambda \in w_\alpha(B'(V))$, on a $\mathcal{R} s_\alpha < -1$ et, en prenant $b > -\mathcal{R} s_\alpha$ et assez voisin de $-\mathcal{R} s_\alpha$, on a λ_b assez voisin de $w_\alpha \mathcal{R}\lambda$ pour que $\lambda_b \in B'(V)$. ainsi D' est un tube ouvert et convexe qui contient $B'(V)$ et $w_\alpha B'(V)$.

Gardons les mêmes notations, et appelons θ l'ensemble des racines simples α dont l'opposée est dans V et pour lesquelles le paramètre μ_α soit un idèle. Soit W' le groupe engendré par les w_α pour $\alpha \in \theta$. Avec les notations de (7.7), on pose

$$(8.5.3) \qquad A(\chi, \lambda) = \prod_{\alpha \in \theta} \zeta'_{\mathfrak{D}_\alpha}(\overline{\chi})_\alpha, s_\alpha + 1).$$

Par récurrence sur l'entier $q > 0$, on définit $A_q(\chi, \lambda)$:

$$(8.5.4) \quad A_0(\chi, \lambda) = A(\chi, \lambda), \qquad A_{q+1}(\chi, \lambda) = A_q(\chi, \lambda) \prod_{\alpha \in \theta} A_q(w_\alpha \chi, w_\alpha \lambda).$$

Les fonctions ainsi définies sont holomorphes en λ.

Théorème (8.6). — *Avec les notations précédentes, le produit*

$$(8.6.1) \qquad E_V(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \xi) A_{m-1}(\chi, \lambda),$$

où l'on désigne par m le maximum des longueurs des éléments de W', se prolonge en une fonction holomorphe à l'enveloppe convexe de la réunion des $wB'(V)$ pour $w \in W'$.

En vertu du théorème de Hartogs et de la proposition (8.5), le produit $E_V(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \xi) A_0(\chi, \lambda)$ se prolonge en une fonction holomorphe à l'enveloppe convexe C de la réunion de $B'(V)$ et de ses transformés par les w_α, où $\alpha \in \theta$. Posons $B = C \cap B(V)$. C'est un tube polyédrale (i. e. l'ensemble des λ dont la partie réelle est dans un polyèdre convexe). Chacun des hyperplans $\langle \check{\alpha}, \mathcal{R}\lambda \rangle = 0$, pour $\alpha \in \theta$, en est un mur. En particulier, B et $w_\alpha B$ ont une face commune dans ce mur. De façon générale, soit B' un transformé de B par W'. Nous appellerons face spéciale de B' toute face de B' définie par une $\alpha \in [\theta]$.

Pour tout entier $q > 0$, soit B_q la réunion des wB, pour $w \in W'$ et $l(w) \leq q$, et de leurs faces spéciales communes. On a l'analogue des propriétés (3.4.4) à (3.4.8) et, en particulier, le fait que B_q soit un tube ouvert et connexe. Par récurrence sur q, nous allons voir que le produit $E_{P}(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \xi)\, A_q(\chi, \lambda)$ se prolonge en une fonction holomorphe à B_{q+1}. Il suffira de faire $q = m - 1$ et d'appliquer le théorème de Hartogs pour obtenir (8.6).

Comme $C \supset B_1$, notre assertion est établie pour $q = 0$. Nous pouvons donc supposer $q > 0$ et notre assertion établie pour les $q' < q$. L'hypothèse de récurrence entraîne *a fortiori* que le produit $E_{P}(g, \mathfrak{D}, \chi, \lambda; \xi)\, A_q(\chi, \lambda)$ se prolonge en une fonction holomorphe à B_q. Le tube $B_q \cup w_\alpha B_q$ est connexe et la fonction

$$(8.6.2)\quad \psi(\lambda) = E_{P}(g, \mathfrak{D}, w_\alpha \chi, w_\alpha \lambda; \xi)\, |\mu_\alpha|^{s_\alpha} \chi_\alpha(\mu_\alpha)\, \Psi_\alpha(\mathfrak{D}, \chi_\alpha, s_\alpha)\, A_q(\chi, \lambda)$$

est une fonction méromorphe sur $w_\alpha B_q$ qui coïncide avec $E_{P}.A_q(\chi, \lambda)$ sur $B_q \cap w_\alpha B_q$ (qui est connexe) en vertu de (8.5). Mais si λ_0 est dans $w_\alpha B_q$, et non dans B_q, le coefficient $s_\alpha = (\lambda_0, \check{\alpha})$ est de partie réelle $\leqq 0$ [*cf.* (3.4.8)]. Alors le produit $\Psi_\alpha(\mathfrak{D}, \chi, s_\alpha)\, A_0(\chi, \lambda)$ est holomorphe au voisinage de λ_0 en vertu de (7.7). D'autre part, on a $w_\alpha \lambda_0 \in B_q$. Donc le produit

$$E_{P}(g, \mathfrak{D}, w_\alpha \chi, w_\alpha \lambda; \xi)\, A_{q-1}(w_\alpha \chi, w_\alpha \lambda)$$

est holomorphe au voisinage de λ_0 en vertu de l'hypothèse de récurrence. Par définition, $A_q(\chi, \lambda)$ est égal au produit de $A_{q-1}(w_\alpha \chi, w_\alpha \lambda)\, A_0(\chi, \lambda)$ par une fonction holomorphe. Il en résulte que $\psi(\lambda)$ est une fonction holomorphe sur $w_\alpha B_q$. Ainsi E_P admet un prolongement à tout ensemble $B_q \cup w_\alpha B_q$ pour $\alpha \in \theta$, donc aussi à B_{q+1} que contient leur enveloppe convexe.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BATEMAN (H.) [Bateman Manuscript Project]. — *Higher transcendental functions*, vol. 1 and 2. — New York, Mc Graw-Hill Book Company, 1953.

[2] BOREL (A.) et TITS (J.). — *Groupes réductifs.* — Paris, Presses universitaires de France, 1965 (*Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications mathématiques*, 27, p. 55-155).

[3] BOURBAKI (N.). — *Intégration*, chap. 7 et 8. — Paris, Hermann, 1963 (*Act. scient. et ind.*, 1306; *Bourbaki*, 29).

[4] BOURBAKI (N.). — *Groupes et algèbres de Lie*; Chap. 2 : *Systèmes de racines* (à paraître).

[5] BRUHAT (F.). — *Sur une classe de sous-groupes compacts maximaux des groupes de Chevalley sur un corps p-adique.* — Paris, Presses universitaires de France, 1964 (*Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications mathématiques*, 23, p. 45-74).

[6] GINDIKIN (S. G.) et KARPELEVIČ (F. I.). — Plancherel measure for Riemann symmetric spaces of nonpositive curvature [in russian], *Doklady Akad. Nauk S. S. S. R.*, t. 145, 1962, p. 252-255; *Soviet Math.*, t. 3, 1962, p. 962-965.

[7] GODEMENT (R.). — Travaux de Hecke, I et II, *Séminaire Bourbaki*, 4e année, 1951-1952, no 51, 7 pages et no 59, 8 pages.

[8] GODEMENT (R.). — Analyse spectrale des fonctions modulaires, *Séminaire Bourbaki*, 17e année, 1964-1965, n° 278, 26 pages.

[9] HECKE (E.). — Ueber die L-Funktionen und den Dirichletschen Primzahlsatz für einen beliebigen Zahlkörper, *Nachr. köningl. Gesellsch. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl.*, 1917, p. 299-318.

[10] HECKE (E.). — *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen*, 2te Aufl.-Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft, 1954.

[11] IWAHORI (N.) et MATSUMOTO (H.). — *On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of $\mathfrak{p}$-adic Chevalley groups.* — Paris, Presses universitaires de France, 1965 (*Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications mathématiques*, 25, p. 5-48).

[12] JACQUET (H.). — Fonctions spéciales sur un groupe semi-simple, *C. R. Acad. Sc.*, t. 260, 1965, p. 2395-2396.

[13] JACQUET (H.). — Une interprétation géométrique et une généralisation $\mathfrak{p}$-adique des fonctions de Whittaker en théorie des groupes semi-simples, *C. R. Acad. Sc.*, t. 262, 1966, série A, p. 934-935.

[14] LANG (S.). — *Algebraic numbers.* — Reading (Mass.), Addison-Wesley publ. Comp., 1964 (*Addison-Wesley Series in Mathematics*).

[15] LANGLANDS (R. P.). — *On the functional equation satisfied by the Eisenstein Series* (Notes multigraphiées, mais non publiées, Princeton University).

[16] SIEGEL (C. L.). — *Analytische Zahlentheorie*, II. Cours professé à l'Université de Göttingen, 1963-1964.

[17] TATE (J.). — *Fourier analysis in number fields and the Hecke's zeta-functions*, Thèse, Princeton University, 1950 (à paraître).

[18] WATSON (G. N.). — *A treatsise on the theory of Bessel functions*, 2nd edition. — Cambridge, at the University Press, 1944.

[19] WEIL (A.). — Adèles et groupes algébriques, *Séminaire Bourbaki*, 11e année, 1958-1959, n° 186, 9 pages.

[20] WHITTAKER (E. T.) et WATSON (G. N.). — *A course of modern analysis*, 4th edition. — Cambridge, at the University Press, 1935.

(Manuscrit reçu le 12 juin 1967.)