BULLETIN DE LA S. M. F.

T.S. BLYTH

Sur les demi-groupes de Brouwer et Glivenko

Bulletin de la S. M. F., tome 96 (1968), p. 15-40

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1968__96__15_0>

Bull. Soc. math. France,
96, 1968, p. 15 à 40.

SUR LES DEMI-GROUPES DE BROUWER ET GLIVENKO

PAR

THOMAS SCOTT BLYTH.

1. Introduction.

Dans une publication antérieure [1], nous avons introduit la notion de *demi-groupe de Glivenko*. Nous avons commencé par y considérer un demi-groupe S, avec élément zéro o, partiellement ordonné, de manière que la multiplication dans S soit isotone et que o soit équirésiduel (c'est-à-dire : les résiduels à droite et à gauche de o existent et sont égaux). Nous avons appelé une telle structure *demi-groupe pseudo-résidué*. Dans un tel demi-groupe, un rôle important est joué par l'équivalence du type A associée avec l'élément zéro, à savoir l'équivalence A_0, définie par

$$x \equiv y(A_0) \iff o : x = o : y.$$

Cette relation d'équivalence est compatible avec la multiplication dans S. En écrivant $o : x = x^*$, et en considérant l'application de fermeture $x \to x^{**} = o : (o : x)$, application de S sur l'ensemble S^{**} des fermés (c'est-à-dire : les éléments $a \in S$ tels que $a = a^{**}$), il arrive (*voir* [1], théor. 1) que S^{**} est une algèbre de Boole si, et seulement si, le demi-groupe quotient S/A_0 est une *bande* (c'est-à-dire : la loi de composition induite sur S/A_0 par A_0 est idempotente). Nous avons donc appelé *demi-groupe de Glivenko* tout demi-groupe pseudo-résidué S dans lequel S/A_0 est une bande. Pour les propriétés des demi-groupes de Glivenko, nous renvoyons à [1].

Dans le présent travail, nous étudions les demi-groupes abéliens S qui sont résidués (de manière que, pour tout élément $x \in S$, le demi-groupe quotient S/A_x est une bande) et qui sont quasi-intègres au sens que $xy \leq x, y$ pour tout $x, y \in$ S. Nous appellerons un tel demi-groupe *demi-groupe de Brouwer*. (Pour les propriétés fondamentales des demi-groupes résidués, nous renvoyons aux travaux de MOLINARO [3].)

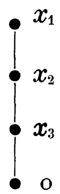
Lorsqu'un demi-groupe de Brouwer possède un élément zéro, il est en particulier un demi-groupe de Glivenko; nous l'appellerons *demi-groupe de Brouwer complété.*

La première chose à remarquer, c'est que, quoique o n'est pas nécessairement élément minimum dans un demi-groupe de Glivenko (*voir* [1], Exemple 1) il est bien élément minimum dans un demi-groupe de Brouwer complété; car, étant donné un élément arbitraire x d'un tel demi-groupe, l'existence de $x : \mathrm{o}$ entraîne que $\mathrm{o} = \mathrm{o}\,(x : \mathrm{o}) \leqq x$.

Exemple 1. — Tout $\cap$-demi-treillis relativement pseudo-complémenté L est un demi-groupe de Brouwer; en effet, avec $xy = x \cap y$, il est immédiat que L est quasi-intègre et, puisque cette multiplication est idempotente, que tout demi-groupe quotient L/A_x est une bande.

Exemple 2. — Considérons le demi-groupe abélien ordonné S dont le tableau de Cayley et le diagramme de Hasse sont les suivants :

$\cdot$	x_1	x_2	x_3	o
x_1	x_2	x_2	o	o
x_2	x_2	x_2	o	o
x_3	o	o	o	o
o	o	o	o	o



La multiplication ainsi définie est visiblement isotone, et S est quasi-intègre. De plus S est résidué, le tableau des résiduels étant :

:	x_1	x_2	x_3	o
x_1	x_1	x_1	x_1	x_1
x_2	x_1	x_1	x_1	x_1
x_3	x_3	x_3	x_1	x_1
o	x_3	x_3	x_1	x_1

Or, d'une part nous avons

$$x_1^2 = x_2^2 = x_2 \qquad \text{et} \qquad x_3 = \mathrm{o}^2 = \mathrm{o};$$

d'autre part, pour tout $y \in S$,

$$x_1 \equiv x_2\,(A_y) \qquad \text{et} \qquad x_3 \equiv \mathrm{o}\,(A_y).$$

Il en résulte donc

$$x \equiv x^2\,(A_y), \quad \forall\, x, y \in S;$$

par conséquent, S/A_y est une bande, quel que soit $y \in S$, et S est un demi-groupe de Brouwer complété.

EXEMPLE 3. — Pour trouver un exemple d'un demi-groupe de Brouwer (sans élément zéro), nous généralisons celui de l'exemple 2 : considérons le demi-groupe abélien ordonné S défini par

$$\begin{cases} S = \{x_i\}_{i \in N_+} \\ x_{i+1} \leqq x_i, \quad \forall\, i \in N_+, \\ x_{2m-1}x_{2n-1} = x_{2m-1}x_{2n} = x_{2m}x_{2n-1} = x_{2m}x_{2n} = x_{2\max\{m,n\}}. \end{cases}$$

Il est évident que ce demi-groupe est quasi-intègre. Il est, de plus, résidué avec les formules suivantes :

$$x_{2m-1} : x_{2n-1} = x_{2m-1} : x_{2n} = x_{2m} : x_{2n-1} = x_{2m} : x_{2n} = \begin{cases} x_1 & \text{si } m \leqq n, \\ x_{2m-1} & \text{si } m > n. \end{cases}$$

Enfin, utilisant ces formules, il est facile de vérifier que S/A_x est une bande, quel que soit $x \in S$, donc S est un demi-groupe de Brouwer.

L'exemple 3 ci-dessus nous montre en particulier que les demi-groupes de Brouwer sont des structures plus générales que les $\cap$-demi-treillis relativement pseudo-complémentés, et nous montrerons, comme suite à notre article [1], qu'un grand nombre des propriétés des tels demi-treillis subsistent dans ces demi-groupes. Quelques propriétés intéressantes des $\cap$-demi-treillis, relativement pseudo-complémentés, ont été données récemment par NEMITZ [4], qui les a appelés *demi-treillis implicatifs*. En généralisant ici la plupart de ces propriétés aux demi-groupes de Brouwer, nous montrerons en plus la liaison entre ces deux structures. Pour le faire, nous aurons besoin des résultats fondamentaux et des techniques de la théorie de la résiduation pour lesquels nous renvoyons à [3].

2. d-idéaux; demi-groupes de Glivenko.

DÉFINITION. — Comme dans [2], nous appelons *d-idéal* d'un demi-groupe ordonné S tout sous-ensemble non vide J de S qui satisfait aux propriétés suivantes :

$$\left.\begin{array}{r} x \in J \\ y \in J \end{array}\right\} \Rightarrow \quad xy \in J,$$

$$\left.\begin{array}{r} x \in J \\ y \in S,\ y \geqq x \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y \in J.$$

LEMME 1. — *L'ensemble D des éléments denses d'un demi-groupe de Glivenko S est un d-idéal de S.*

Démonstration. — Nous rappelons que $d \in S$ est dit *dense* si et seulement si, $d^{**} = o^*$; c'est-à-dire, si, et seulement si, d appartient à la classe de l'élément maximum o^* modulo A_0.

Or, d'après le théorème 1 dans [1], nous avons (¹), quels que soient $x, y \in S$,

$$(x^{**}y^{**})^{**} = x^{**} \curlywedge y^{**}.$$

Il en résulte alors

$$\left.\begin{array}{l} x \in D \\ y \in D \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^{**} = 0^{*} \\ y^{**} = 0^{*} \end{array}\right\} \Rightarrow (x^{**}y^{**})^{**} = 0^{*} \curlywedge 0^{*} = 0^{*}.$$

Mais d'après la compatibilité de A_0, $(x^{**}y^{**})^{**} = (xy)^{**}$; donc $xy \in D$. Aussi, d'après l'isotonie de l'application $x \rightarrow x^{**}$,

$$\left.\begin{array}{r} x \in D \\ y \in S,\ y \geqq x \end{array}\right\} \Rightarrow y^{**} \geqq x^{**} = 0^{*},$$

d'où $y^{**} = 0^{*}$ et $y \in D$.

Définition. — Soient S, T deux demi-groupes ordonnés T possédant un élément maximum m. Étant donnée une application isotone $f : S \rightarrow T$, nous appellerons *noyau* de f l'ensemble

$$\mathrm{Ker} f = \{ x \in S ;\ f(x) = m \}.$$

Théorème 1. — *Soient S un demi-groupe de Glivenko, S^{**} l'algèbre de ses éléments fermés, et D le d-idéal de ses éléments denses. Alors, il existe une algèbre de Boole B et un homomorphisme isotone $f : S \rightarrow B$ tel que* $\mathrm{Im}\, f \simeq S^{**}$ *et* $\mathrm{Ker}\, f = D$.

Démonstration. — Définissons la relation R sur l'ensemble $S \times S^{**}$ par

$$(x, a) \equiv (y, b)\,(R) \quad \Leftrightarrow \quad (x^{*} = y^{*} \text{ et } a = b).$$

Il est évident que R est une relation d'équivalence. Si nous définissons sur $S \times S^{**}$ la loi de composition $\otimes$ par

$$((x, a), (y, b)) \rightarrow (x, a) \otimes (y, b) = ((xy)^{**}, a \cap b),$$

nous voyons que R est compatible avec cette loi; car si $(x, a) \equiv (y, b)\ (R)$, alors $x^{*} = y^{*}$ et $a = b$, d'où, en vertu de la compatibilité de A_0, $(xz)^{*} = (yz)_{*}$ quel que soit $z \in S$, et $a \cap c = b \cap c$ quel que soit $c \in S^{**}$, d'où

$$(x, a) \otimes (z, c) \equiv (y, b) \otimes (z, c)\ (R).$$

Or, la loi $\otimes$ est commutative; elle est aussi associative d'après la compatibilité de A_0, puisque

$$[(xy)^{**}z]^{**} = (xyz)^{**} = [x(yz)^{**}]^{**}.$$

(¹) La notation $a \curlywedge b$, ou $\inf(a, b)$, représente le plus grand minorant, ou borne inférieure, de a et b. De même, la notation $a \curlyvee b$, ou $\sup(a, b)$, représente le plus petit majorant, ou borne supérieure, de a et b. Dans ce texte, le signe $\curlywedge$ est distinct du signe $\wedge$ du produit vectoriel.

En plus, $\otimes$ est idempotent puisque S/A_0 est une bande. Donc la loi, induite sur $(S\times S^{**})/R$ par $\otimes$, est une loi de demi-treillis que nous noterons $\wedge$:

$$(x, a)/R \wedge (y, b)/R = ((xy)^{**}, a \cap b)/R,$$

la classe de $(x, a) \in S \times S^{**}$ modulo R étant notée $(x, a)/R$.

Nous allons montrer que $((S\times S^{**})/R, \wedge)$ est en effet une algèbre de Boole; la meilleure méthode pour démontrer ceci consiste à démontrer que c'est un demi-groupe de Glivenko dans lequel l'équivalence du type A associée avec l'élément zéro se réduit à l'égalité (*cf.* [1], théor. 1).

D'abord, remarquons que $(o, o^{**})/R$ est l'élément zéro (donc élément minimum) de $(S\times S^{**})/R$. En effet, quels que soient $x \in S$ et $a \in S^{**}$,

$$\begin{aligned}(x, a)/R \wedge (o, o^{**})/R &= ((xo)^{**}, a \curlywedge o^{**})/R \\ &= (o^{**}, o^{**})/R \\ &= (o, o^{**})/R,\end{aligned}$$

o^{**} étant l'élément minimum de S^{**} ([1], théor. 1 (4)).

Pour démontrer que $(S\times S^{**})/R$ est pseudo-résidué, nous remarquons que

$$\begin{aligned} & (x, a)/R \wedge (y, b)/R \leqq (o, o^{**})/R \\ \Leftrightarrow\ & ((xy)^{**}, a \curlywedge b)/R = (o, o^{**})/R \\ \Leftrightarrow\ & (xy)^{**} = o^{**} \quad \text{et} \quad a \curlywedge b = o^{**} \\ \Leftrightarrow\ & xy \leqq o^{**} \quad \text{et} \quad b \leqq o^{**} \curlyvee a^{*} = a^{*} \end{aligned}$$

[puisque $x \to x^{**}$ est une application de fermeture, o^{**} est l'élément minimum de S^{**}, et a^* est le complément de $a \in S^{**}$ ([1], théor. 1)]

$$\Leftrightarrow\ y \leqq o^{**} \curlyvee x^{*} = x^{*} \quad \text{et} \quad b \leqq a^{*}$$

[puisque dans un demi-groupe de Glivenko les résiduels des pseudo-résiduels existent ([1], lemme 14)]

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow\ & y^{**} \leqq x^{*} \qquad \text{et} \qquad b \leqq a^{*} \\ \Leftrightarrow\ & y^{**} = y^{**} \curlywedge x^{*} = (y^{**}x^{*})^{**} = (yx^{*})^{**} \quad \text{et} \quad b = b \curlywedge a^{*} \\ \Leftrightarrow\ & (y, b)/R = (y, b)/R \wedge (x^{*}, a^{*})/R \\ \Leftrightarrow\ & (y, b)/R \leqq (x^{*}, a^{*})/R. \end{aligned}$$

Il en résulte que les pseudo-résiduels sont donnés par la formule

$$(o, o^{**})/R \vdots (x, a)/R = (x^{*}, a^{*})/R.$$

La loi de $(S\times S^{**})/R$ étant idempotente, il est immédiat que le demi-groupe quotient donné par $A_{(o, o^{**})/R}$ est une bande.

Enfin, pour démontrer que l'équivalence $A_{(0,\, 0^{**})/R}$ se réduit à l'égalité, nous utilisons la formule ci-dessus deux fois :

$$(0,\, 0^{**})/R \,\vdots\, [(0,\, 0^{**})/R \,\vdots\, (x,\, a)/R] = (x^{**},\, a^{**})/R = (x,\, a)/R,$$

d'où tout élément de $(S \times S^{**})/R$ est maximum dans sa classe modulo $A_{(0,\, 0^{**})/R}$, d'où le résultat d'après ([1], théor. 1).

Considérons maintenant l'application $f : S \to (S \times S^{**})/R$, définie par $f(a) = (a,\, 0^{*})/R$. Nous avons

$$f(a) \wedge f(b) = (a, 0^{*})/R \wedge (b,\, 0^{*})/R = ((ab)^{**},\, 0^{*})/R = f(ab),$$

donc f est un homomorphisme. Aussi, puisque $(a,\, 0^{*})/R = (a^{**},\, 0^{*})/R$, les implications suivantes :

$$a \leqq b \quad \Rightarrow \quad a^{**} \leqq b^{**} \quad \Leftrightarrow \quad (a,\, 0^{*})/R \leqq (b,\, 0^{*})/R \quad \Leftrightarrow \quad f(a) \leqq f(b)$$

montrent que f est isotone et que $\operatorname{Im} f \simeq S^{**}$.

Enfin, l'élément maximum de $(S \times S^{**})/R$ est

$$(0,\, 0^{**})/R \,\vdots\, (0,\, 0^{**})/R = (0^{*},\, 0^{*})/R,$$

et $f(a) = (0^{*},\, 0^{*})/R \Leftrightarrow a^{**} = 0^{*} \Leftrightarrow a \in D$; donc $\operatorname{Ker} f = D$.

3. Propriétés remarquables des demi-groupes de Brouwer.

Rappelons les définitions [3] des équivalences fondamentales des types B et F dans un demi-groupe abélien résidué S; pour chaque $a \in S$, ces équivalences sont définies par

$$x \equiv y\,(B_a) \quad \Leftrightarrow \quad x : a = y : a,$$
$$x \equiv y\,(F_a) \quad \Leftrightarrow \quad xa = ya.$$

THÉORÈME 2. — *Pour qu'un demi-groupe abélien résidué S soit un demi-groupe de Brouwer, il faut et il suffit que, quel que soit $x \in S$,*

(α) $B_x = F_x$;

(β) *S/F_x soit une bande.*

Démonstration. — Soit S un demi-groupe de Brouwer. S/A_x étant une bande pour tout $x \in S$, nous avons

$$x : y = x : y^2 = (x : y) : y,$$

d'où, quels que soient x et y,

$$x \equiv x : y\,(B_y).$$

Aussi,

$$x : y \equiv z : y\,(B_y) \quad \Rightarrow \quad x : y^2 = z : y^2 \quad \Rightarrow \quad x : y = z : y,$$

donc chaque classe modulo B_y contient au plus un résiduel par y.

Or, S étant quasi-intègre, nous avons

$$x \leqq xy : y \leqq x : y;$$

donc, puisque $x \equiv x : y\ (B_y)$, la convexité des classes modulo B_y donne $xy : y \equiv x : y\ (B_y)$, d'où

$$(1) \qquad xy : y = x : y, \quad \forall\, x, y \in S.$$

Donc

$$\begin{aligned} x \equiv z(F_y) \quad &\Rightarrow \quad xy : y = zy : y \\ &\Rightarrow \quad x : y = z : y \quad \Rightarrow \quad x \equiv z\ (B_y), \end{aligned}$$

c'est-à-dire, $F_y \subseteq B_y$ pour tout $y \in S$. Mais nous avons démontré que toute classe modulo B_y contient au plus un résiduel par y, et nous savons que toute classe modulo F_y contient un, et un seul, résiduel par y. Il en résulte alors que $F_y = B_y$, $\forall\, y \in S$.

D'après ce fait, l'égalité (1) peut s'écrire $xy \equiv x\ (F_y)$, c'est-à-dire $xy^2 = xy$, ou encore

$$y^2 \equiv y(F_x), \quad \forall\, x, y \in S,$$

d'où S/F_x est une bande, quel que soit $x \in S$.

Inversement, supposons que les propriétés (α) et (β) sont satisfaites dans S. De la propriété (β) résulte $xy^2 = xy$, d'où, d'après la propriété (α), $xy \equiv x\ (B_y)$ quels que soient $x, y \in S$. Or, puisque $x \equiv y\ (x : y)\ (B_y)$, ceci nous donne $xy \equiv y\ (x : y)\ (B_y)$, d'où il résulte $xy = y\ (x : y) \leqq x$, et ceci quels que soient $x, y \in S$. Par conséquent, S est quasi-intègre.

Enfin, puisque $xy^2 = xy$ quels que soient $x, y \in S$ [d'après (β)], nous avons en particulier $y^3 = y^2$, $\forall\, y \in S$, et

$$\begin{aligned} x : y^3 = x : y^2 \quad &\Rightarrow \quad (x : y^2) : y = (x : y) : y \\ &\Rightarrow \quad x : y^2 \equiv x : y(B_y). \end{aligned}$$

Mais $B_y = F_y$ par hypothèse, et toute classe modulo F_y contient un, et un seul, résiduel par y; il en résulte alors que

$$x : y^2 = x : y, \quad \forall\, x, y \in S.$$

Autrement dit, S/A_x est une bande, quel que soit $x \in S$.

Corollaire. — *Si S est un demi-groupe de Brouwer, alors quels que soient les éléments $x, y, z \in S$,*

(*a*) $x : x = y : y =$ *l'élément maximum de* S;
(*b*) $y\ (x : y) = yx$;
(*c*) $(xy)^2 = xy$;

(*d*) $x : yz = (x : z) : (y : z)$;

(*e*) $xy : z \geqq (x : z)(y : z) = (xy : z)^2$.

Démonstration.

(*a*) S étant quasi-intègre nous avons

$$xy \leqq x \quad \Rightarrow \quad y \leqq x : x, \quad \forall\, x, y \in S,$$

d'où $x : x = y : y$, et c'est l'élément maximum de S.

(*b*) D'après la propriété (1), établie dans le théorème, nous avons $xy \equiv x\,(B_y)$. Mais l'élément minimum dans la classe de x modulo B_y est l'élément $y\,(x : y)$. Donc $xy \equiv y\,(x : y)\,(B_y)$ et, puisque toute classe modulo B_y contient un, et un seul, multiple de y, nous avons $xy = y\,(x : y)$.

(*c*) D'après la propriété (β) du théorème, nous avons $xy^2 = xy$, et ceci quels que soient $x, y \in S$. Inversant les rôles de x et y, nous avons $yx^2 = yx$; donc, S étant abélien,

$$(xy)^2 = xy^2x = xyx = yx^2 = yx = xy.$$

(*d*) D'après le résultat (*b*),

$$(x : z) : (y : z) = x : z\,(y : z) = x : zy = x : yz.$$

(*e*) Puisque, dans tout demi-groupe abélien résidué $x\,(y : z) \leqq xy : z$ (*voir* [3]), nous avons, dans un demi-groupe de Brouwer,

$$(x : z)\,(y : z) \leqq (x : z)\,y : z \leqq (xy : z) : z = xy : z^2 = xy : z,$$

donc, d'après (*c*) et le fait que S est quasi-intègre,

$$(x : z)\,(y : z) = [(x : z)\,(y : z)]^2 \leqq (xy : z)^2 \leqq xy : z.$$

Mais puisque S est quasi-intègre, nous avons aussi $xy : z \leqq x : z$ et $xy : z \leqq y : z$, donc

$$(xy : z)^2 \leqq (x : z)\,(y : z).$$

Il en résulte alors

$$(xy : z)^2 = (x : z)\,(y : z) \leqq xy : z.$$

Remarque. — Bien que l'égalité $xy : z = (x : z)\,(y : z)$ ait lieu dans un demi-treillis de Brouwer, c'est-à-dire un demi-groupe de Brouwer dans lequel $xy = x \cap y$, ce n'est plus le cas dans un demi-groupe de Brouwer. Par exemple, dans l'exemple 2 du paragraphe 1, nous avons

$$x_3^2 : x_2 = 0 : x_2 = x_3,$$

$$(x_3 : x_2)\,(x_3 : x_2) = x_3 x_3 = 0.$$

Le résultat suivant nous montre la liaison entre les demi-groupes de Brouwer et les demi-treillis de Brouwer (c'est-à-dire : les « demi-treillis implicatifs » de Nemitz).

THÉORÈME 3. — *Soit S un demi-groupe de Brouwer. Les conditions suivantes sur S sont équivalentes :*

(1) *S est un demi-treillis de Brouwer (c'est-à-dire : un demi-treillis dans lequel* $x \cap y = xy$);

(2) $S^2 = S$;

(3) *S possède un élément neutre.*

Démonstration. — Il est immédiat que (1) $\Rightarrow$ (3), l'élément neutre étant l'élément maximum de S. Nous montrerons alors que (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1).

Si S possède un élément neutre 1, alors d'après le fait que $xy^2 = xy$, $\forall\ x, y \in S$, nous avons $y^2 = 1y^2 = 1y = y$, $\forall\ y \in S$, donc nous avons (2).

Enfin, si la condition (2) est satisfaite, alors

$$z \in S = S^2 \quad \Rightarrow \quad z = ab, \qquad (a, b \in S) \quad \Rightarrow \quad z^2 = z$$

en vertu de la propriété (c) du corollaire au théorème 2. Il en résulte alors que

$$\left.\begin{array}{l} z \leqq x \\ z \leqq y \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad z = z^2 \leqq xy;$$

donc, S étant quasi-intègre, xy est le plus grand minorant commun de x et y.

Remarque. — Il faut se méfier de la simplicité des conditions du théorème 3. Ajouter un élément neutre à un demi-groupe résidué changera la structure du demi-groupe à cause de la résiduation.

4. **Résimorphismes.**

LEMME 2. — *Soit S un demi-groupe de Brouwer dans lequel l'élément maximum est noté* α *et la résiduation est notée* $:$. *Soit L un demi-treillis de Brouwer dans lequel l'élément maximum est noté* β *et la résiduation est notée* $\vdots$. *Soit* $f : S \to L$ *une surjection telle que, quels que soient* $x, y \in S$,

$$f(x : y) = f(x) \vdots f(y).$$

Alors,

(1) $f(\alpha) = \beta$;

(2) *f est isotone;*

(3) *f est un homomorphisme si et seulement si* Ker f *est un d-idéal de S.*

Démonstration.

(1) $f(\alpha) = f(\alpha : \alpha) = f(\alpha) \vdots f(\alpha) = \beta$.

(2) Étant donnés $x, y \in S$, nous avons

$$\begin{aligned} x \leqq y \quad \Rightarrow \quad y : x \geqq y : y = \alpha \quad & \Rightarrow \quad y : x = \alpha \\ & \Rightarrow \quad f(y : x) = \beta \\ & \Rightarrow \quad f(y) \,\vdots\, f(x) = \beta \\ & \Rightarrow \quad f(x) = f(x) \cap \beta \leqq f(y). \end{aligned}$$

(3) Si f est un homomorphisme, alors $f(xy) = f(x) \cap f(y)$, $\forall\, x, y \in S$, d'où

$$\left.\begin{array}{l} x \in \operatorname{Ker} f \\ y \in \operatorname{Ker} f \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(xy) = f(x) \cap f(y) = \beta \cap \beta = \beta \quad \Rightarrow \quad xy \in \operatorname{Ker} f,$$

$$\left.\begin{array}{l} x \in \operatorname{Ker} f \\ y \geqq x \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(y) \geqq f(x) = \beta \quad \Rightarrow \quad f(y) = \beta \quad \Rightarrow \quad y \in \operatorname{Ker} f.$$

Par conséquent, Ker f est un d-idéal de S.

Inversement, supposons que Ker f est un d-idéal de S. Soit $z \in L$ tel que $z \leqq f(x)$ et $z \leqq f(y)$. Puisque f est surjective d'après l'hypothèse, $z = f(u)$ pour un élément $u \in S$; donc

$$\begin{aligned} f(u) \leqq f(x) \quad & \Rightarrow \quad f(x) \,\vdots\, f(u) = \beta \\ & \Rightarrow \quad f(x : u) = \beta \\ & \Rightarrow \quad x : u \in \operatorname{Ker} f \end{aligned}$$

et, de façon analogue, $y : u \in \operatorname{Ker} f$. Puisque Ker f est un d-idéal, il en résulte $(x : u)(y : u) \in \operatorname{Ker} f$, d'où $xy : u \in \operatorname{Ker} f$ en vertu de la propriété (e) du corollaire au théorème 2. Par conséquent,

$$f(xy) \,\vdots\, f(u) = f(xy : u) = \beta,$$

d'où $f(u) = f(u) \cap \beta \leqq f(xy)$. Alors, f étant isotone et S étant quasi-intègre, il en résulte que $f(xy)$ est le plus grand minorant commun de $f(x)$ et $f(y)$, c'est-à-dire : $f(xy) = f(x) \cap f(y)$.

Corollaire. — *Si f, définie comme ci-dessus, est un homomorphisme, alors $f \mid S^2$ est un isomorphisme (isotone) de S^2 sur L si, et seulement si,* Ker $(f \mid S^2) = \{\alpha^2\}$.

Démonstration. — Il est clair que si $f \mid S^2$ est un isomorphisme isotone alors Ker $(f \mid S^2) = \{\alpha^2\}$.

Pour démontrer que cette condition est suffisante, il suffit de démontrer que $f(x^2) \leqq f(y^2) \Rightarrow x^2 \leqq y^2$. Or

$$\begin{aligned} f(x^2) \leqq f(y^2) \quad & \Rightarrow \quad f(y^2) \,\vdots\, f(x^2) = \beta \\ & \Rightarrow \quad f(y^2 : x^2) = \beta \\ & \Rightarrow \quad y^2 : x^2 \in \operatorname{Ker} f \\ & \Rightarrow \quad y^2 : x = y^2 : x^2 \geqq \alpha^2 \\ & \Rightarrow \quad x^2 = x(x : x) = x\alpha = x\alpha^2 \leqq y^2. \end{aligned}$$

DÉFINITION. — Nous dirons qu'une application surjective f d'un demi-groupe de Brouwer S sur un demi-treillis de Brouwer L est un *résimorphisme* si elle est un homomorphisme qui satisfait à la propriété

$$f(x : y) = f(x) \vdots f(y) \quad \text{quels que soient } x, y \in S.$$

THÉORÈME 4. — *Un sous-ensemble non vide J d'un demi-groupe de Brouwer S est un d-idéal de S si, et seulement si, c'est le noyau d'un résimorphisme.*

Démonstration. — Si $f : S \to L$ est un résimorphisme de S sur un demi-treillis de Brouwer L, alors $\operatorname{Ker} f$ est un d-idéal de S d'après le lemme 2 (3).

Inversement, supposons que J est un d-idéal de S. Définissons sur S la relation $\mathcal{J}$ par

$$x \equiv y\,(\mathcal{J}) \iff x \equiv y \left(\bigcup_{d \in J} F_d \right)$$

Il est immédiat que $\mathcal{J}$ est réflexive et symétrique. $\mathcal{J}$ est en plus transitive car

$$\begin{aligned} x \equiv y\,(\mathcal{J}) &\Rightarrow (\exists\, d \in J)\ xd = yd, \\ y \equiv z\,(\mathcal{J}) &\Rightarrow (\exists\, e \in J)\ ye = ze \end{aligned}$$

et ces deux conditions ensemble nous donnent, puisque S est abélien et J est un d-idéal, l'existence de $f\,(= de) \in J$ tel que $xf = zf$, d'où $x \equiv z\,(\mathcal{J})$.

La relation d'équivalence $\mathcal{J}$ est compatible avec la multiplication dans S; en effet,

$$\begin{aligned} x \equiv y(\mathcal{J}) &\Rightarrow (\exists\, d \in J)\ xd = yd \\ &\Rightarrow (\exists\, d \in J)\ zxd = zyd, \quad \forall\, z \in S \\ &\Rightarrow zx \equiv zy\,(\mathcal{J}), \quad \forall\, z \in S. \end{aligned}$$

En notant par $\otimes$ la loi de composition induite sur $S/\mathcal{J}$,

$$x/\mathcal{J} \otimes y/\mathcal{J} = (xy)/\mathcal{J},$$

il est immédiat que $\otimes$ est commutative et associative. Elle est, en plus, idempotente, car étant donné un élément arbitraire $d \in J$ nous avons $x^2 d = xd$ [d'après le théorème 2], d'où $x^2/\mathcal{J} = x/\mathcal{J}$ quel que soit $x \in S$. Par conséquent, $\otimes$ est une loi de demi-treillis; nous la noterons alors $\wedge$. La relation d'ordre dans $S/\mathcal{J}$ est définie de manière usuelle, à savoir

$$x/\mathcal{J} \leq y/\mathcal{J} \iff x/\mathcal{J} \wedge y/\mathcal{J} = x/\mathcal{J}.$$

Nous montrerons maintenant que $(S/\mathcal{J}, \wedge)$ est un demi-treillis de Brouwer. D'abord, remarquons que

$$x/\mathcal{J} \leq y/\mathcal{J} \iff (\exists\, d \in J)\, xd \leq y.$$

En effet,

$$\begin{aligned} x/\mathcal{J} \leqq y/\mathcal{J} &\Rightarrow (xy)/\mathcal{J} = x/\mathcal{J} \\ &\Rightarrow (\exists\, d \in J)\ xyd = xd \\ &\Rightarrow (\exists\, d \in J)\ xd \leqq y, \end{aligned}$$

puisque S est quasi-intègre. Inversement, supposons que, étant donnés x et y dans S, il existe un élément $d \in J$ tel que $xd \leqq y$. Il en résulte $d \leqq y : x$, d'où $y : x \in J$ puisque J est un d-idéal. Donc, puisque

$$yx(y : x) = yxy = xy^2 = xy = x\,(y : x),$$

il existe $e\,(= y : x) \in J$ tel que $yxe = xe$, d'où $x/\mathcal{J} \leqq y/\mathcal{J}$.

Supposons maintenant que $x/\mathcal{J} \wedge y/\mathcal{J} \leqq z/\mathcal{J}$; nous avons alors $(xy)/\mathcal{J} \leqq z/\mathcal{J}$, d'où il existe $d \in J$ tel que $xyd \leqq z$. Il en résulte $yd \leqq z : x$, et par conséquent $y/\mathcal{J} \leqq (z : x)/\mathcal{J}$. De plus, puisque pour tout $d \in J$,

$$x(z : x)\,d = xzd \leqq z,$$

nous avons

$$x/\mathcal{J} \wedge (z : x)/\mathcal{J} \leqq z/\mathcal{J},$$

donc $S/\mathcal{J}$ est un demi-treillis de Brouwer avec la résiduation donnée par la formule

$$z/\mathcal{J} \,\vdots\, x/\mathcal{J} = (z : x)/\mathcal{J}.$$

Considérons maintenant l'application $f : S \to S/\mathcal{J}$ définie par $f(x) = x/\mathcal{J}$ quel que soit $x \in S$. Il est évident que cette application est surjective; elle est aussi un homomorphisme, car

$$f(xy) = (xy)/\mathcal{J} = x/\mathcal{J} \wedge y/\mathcal{J} = f(x) \wedge f(y).$$

Pour démontrer que f est un résimorphisme, il suffit d'utiliser la formule établie ci-dessus :

$$f(x : y) = (x : y)/\mathcal{J} = x/\mathcal{J} \,\vdots\, y/\mathcal{J} = f(x) \,\vdots\, f(y).$$

Or, si α est l'élément maximum de S, l'élément maximum de $S/\mathcal{J}$ est $\alpha/\mathcal{J}$; car $\alpha \in J$, donc

$$x\alpha \leqq \alpha \Rightarrow x/\mathcal{J} \leqq \alpha/\mathcal{J}, \quad \forall\, x \in S.$$

Il en résulte alors que

$$\operatorname{Ker} f = \{ x \in S ; x/\mathcal{J} = \alpha/\mathcal{J} \}.$$

Or $x/\mathcal{J} = \alpha/\mathcal{J} \Rightarrow \alpha/\mathcal{J} \leqq x/\mathcal{J} \Rightarrow (\exists\, d \in J)\ \alpha d \leqq x$, et puisque $\alpha \in J$, nous avons $\alpha d \in J$, d'où $x \in J$. Inversement, si $x \in J$, alors l'inégalité $\alpha x \leqq x$ entraîne l'existence d'un élément $d\,(= x) \in J$ tel que $\alpha d \leqq x$, d'où $\alpha/\mathcal{J} \leqq x/\mathcal{J}$ et $\alpha/\mathcal{J} = x/\mathcal{J}$. Nous avons ainsi démontré que $\operatorname{Ker} f = J$.

C. Q. F. D.

Remarque. — Par abus de notation, nous écrirons $S/\mathrm{Ker} f$ au lieu de $S/\mathcal{J}$, $\mathcal{J}$ étant définie comme dans le théorème 4 suivant le d-idéal $J = \mathrm{Ker} f$.

THÉORÈME 5. — *Si f est un résimorphisme d'un demi-groupe de Brouwer S sur un demi-treillis de Brouwer L, alors*

$$L = \mathrm{Im} f \simeq S/\mathrm{Ker} f.$$

Démonstration. — D'abord, montrons que

$$x/\mathrm{Ker} f = y/\mathrm{Ker} f \iff (x : y)\,(y : x) \in \mathrm{Ker} f.$$

En effet, si $x/\mathrm{Ker} f = y/\mathrm{Ker} f$, il existe $d \in \mathrm{Ker} f$ tel que $xd = yd$, d'où

$$d \leqq yd : x \leqq y : x \qquad \text{et} \qquad y : x \in \mathrm{Ker} f.$$

De façon analogue, nous avons $x : y \in \mathrm{Ker} f$, d'où $(x : y)\,(y : x) \in \mathrm{Ker} f$. Inversement, nous remarquons que, d'après les résultats du théorème 2 et son corollaire,

$$\begin{aligned} x(y : x)\,(x : y) = xy(x : y) &= x^2 y \\ &= xy \\ &= y^2 x \\ &= yx(y : x) = y(x : y)\,(y : x), \end{aligned}$$

donc $(y : x)\,(x : y) \in \mathrm{Ker} f$ implique que $x/\mathrm{Ker} f = y/\mathrm{Ker} f$.

Ceci étant, nous avons

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\iff f(x) \leqq f(y) \quad \text{et} \quad f(y) \leqq f(x) \\ &\iff f(y) : f(x) = \beta = f(x) : f(y) \\ &\iff f(y : x) \cap f(x : y) = \beta \\ &\iff f((y : x)\,(x : y)) = \beta \\ &\iff (y : x)\,(x : y) \in \mathrm{Ker} f \\ &\iff x/\mathrm{Ker} f = y/\mathrm{Ker} f. \end{aligned}$$

Considérons maintenant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\#"'] & & L \arrow[dl, "\pi"] \\ & S/\mathrm{Ker} f & \end{tikzcd}$$

dans lequel $\#$ est la surjection canonique et π est définie par $\pi\,(f(x)) = x/\mathrm{Ker} f$. Il résulte de ce que nous avons démontré que π est bien définie et est bijective; en plus, c'est un résimorphisme, puisque

$$\begin{aligned}\pi(f(x)\cap f(y)) &= \pi(f(xy)) = (xy)/\mathrm{Ker} f = x/\mathrm{Ker} f \wedge y/\mathrm{Ker} f \\ &= \pi(f(x)) \wedge \pi(f(y)), \\ \pi(f(x) \mathbin{\vdots} f(y)) &= \pi(f(x : y)) = (x : y)/\mathrm{Ker} f = x/\mathrm{Ker} f \mathbin{\vdots} y/\mathrm{Ker} f \\ &= \pi(f(x)) \mathbin{\vdots} \pi(f(y)).\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\,\pi &= \{ f(x) \in L;\ x/\mathrm{Ker} f = \alpha/\mathrm{Ker} f \} \\ &= \{ f(x) \in L;\ f(x) = f(\alpha) \} \\ &= \{ f(\alpha) \};\end{aligned}$$

donc puisque $L^2 = L$ et $f(\alpha) \cap f(\alpha) = f(\alpha)$, il résulte du corollaire au lemme 2 que π est un isomorphisme isotone. Donc $L \simeq S/\mathrm{Ker}\, f$.

LEMME 3. — *Dans un demi-groupe de Brouwer S,*

$$x \leqq y \Rightarrow F_y \subseteq F_x.$$

Démonstration. — Soient $x, y \in S$ tels que $x \leqq y$. Nous avons alors $z : y \leqq z : x$ quel que soit $z \in S$, d'où

$$(z : y) : x \leqq (z : x) : x = z : x^2 = z : x \leqq (z : x) : y = (z : y) : x.$$

Par conséquent, quel que soit $z \in S$,

$$z \equiv z : y\,(B_x).$$

Or, puisque $B_x = F_x$ et $z : y = yz : y$, ceci peut s'écrire $z \equiv yz : y\,(F_x)$, d'où

$$z_1 \equiv z_2\,(F_y) \Rightarrow yz_1 : y = yz_2 : y \Rightarrow z_1 \equiv z_2\,(F_x),$$

c'est-à-dire : $F_y \subseteq F_x$.

LEMME 4. — *Dans un demi-groupe de Brouwer S,*

$$F_x = F_y \Leftrightarrow x^2 = y^2.$$

Démonstration. — Supposons que $F_x = F_y$. Soit z un élément arbitraire de S. L'élément maximum dans la classe de z modulo F_x est alors l'élément maximum dans la classe de z modulo F_y; c'est-à-dire

$$z : x = xz : x = yz : y = z : y.$$

Soit, en particulier, $z = x$; il en résulte $x : x = x : y$, d'où

$$y^2 = y(y : y) = y(x : x) \leqq x$$

et, par conséquent,

$$y^2 = y^4 \leqq x^2.$$

De manière analogue, en choisissant $z = y$, nous avons $x^2 \leqq y^2$, d'où résulte $x^2 = y^2$.

Inversement, si $x^2 = y^2$, alors, quel que soit $z \in S$,

$$xz : x = z : x = z : x^2 = z : y^2 = z : y = yz : y.$$

Donc

$$\begin{aligned} z_1 \equiv z_2(F_x) \quad &\Leftrightarrow \quad xz_1 : x = xz_2 : x \\ &\Leftrightarrow \quad yz_1 : x = yz_2 : y \quad \Leftrightarrow \quad z_1 \equiv z_2(F_y); \end{aligned}$$

c'est-à-dire, $F_x = F_y$.

Corollaire. — *Quel que soit* $x \in S$, $F_x = F_{x^2}$.

Étant donné un élément p d'un demi-groupe de Brouwer S dont l'élément maximum est noté α, considérons l'ensemble

$$[p] = \{ x \in S;\, p^2 \leqq x \leqq \alpha \}.$$

Puisque p^2 est idempotent [propriété (c) du corollaire au théorème 2], il est clair que $[p]$ est un d-idéal de S. En plus, c'est un sous-demi-groupe de Brouwer de S, car $x \leqq x : y$, $\forall\, x, y \in S$, donc

$$x, y \in [p] \quad \Rightarrow \quad x : y \in [p].$$

Or, puisque p^2 est idempotent et

$$p^2 \alpha = p^2 (p : p) = p^3 = p^2,$$

l'isotonie de la multiplication montre que

$$p^2 x = p^2, \quad \forall\, x \in [p].$$

Autrement dit, p^2 est l'élément zéro de $[p]$; donc $[p]$ est un sous-demi-groupe de Brouwer complété de S.

Théorème 6. — *Soit S un demi-groupe de Brouwer. Pour chaque élément $c \in S$, soit*

$$S : \{ c \} = \{ x : c;\, x \in S \}.$$

Alors $S : \{ c \}$ est un demi-treillis de Brouwer et

$$S : \{ c \} \simeq S/[c] = S/F_c.$$

Démonstration. — Étant donnés $x, y \in S$, soit $p \leqq x : c$ et $p \leqq y : c$. Nous avons alors $pc \leqq x$ et $pc \leqq y$; donc, en vertu de la propriété (c) du corollaire au théorème 2,

$$pc = (pc)^2 \leqq xy,$$

d'où $p \leqq xy : c$. Or, S étant quasi-intègre, nous avons $xy : c \leqq x : c$ et $xy : c \leqq y : c$. Il en résulte alors que $S : \{ c \}$ est un $\cap$-demi-treillis dans lequel $(x : c) \cap (y : c) = xy : c$.

De plus,

$$xy : c \leqq z : c \quad \Leftrightarrow \quad cxy = c(xy : c) \leqq z \quad \Leftrightarrow \quad y \leqq z : cx,$$

donc $S : \{ c \}$ est résidué (c'est-à-dire, est un $\cap$-sous-demi-treillis de Brouwer de S) avec

$$(z : c) \vdots (x : c) = (z : x) : c.$$

Considérons alors l'application $f_c : S \to S : \{ c \}$ définie par $f_c(x) = x : c$. Cette application est visiblement surjective; de plus,

$$f_c(xy) = xy : c = (x : c) \cap (y : c) = f_c(x) \cap f_c(y)$$

et

$$f_c(x : y) = (x : y) : c = (x : c) \vdots (y : c) = f_c(x) \vdots f_c(y),$$

donc f_c est un résimorphisme.

Par définition,

$$\mathrm{Ker} f_c = \{ x \in S;\ x : c = \alpha \},$$

où α est l'élément maximum commun de S et $S : \{ c \}$. Or,

$$x \in \mathrm{Ker} f_c \quad \Rightarrow \quad x : c = \alpha \quad \Rightarrow \quad c^2 = c(c : c) = c\alpha \leqq x \quad \Rightarrow \quad x \in [c]$$

et

$$x \in [c] \quad \Rightarrow \quad \alpha = c : c = c^2 : c \leqq x : c \leqq \alpha : c = \alpha \quad \Rightarrow \quad x \in \mathrm{Ker} f_c.$$

Donc, en appliquant le théorème 5,

$$S : \{ c \} \simeq S/\mathrm{Ker} f_c = S/[c].$$

Il reste à démontrer $S/[c] = S/F_c$. Comme nous l'avons signalé plus haut, nous écrivons $S/[c]$ au lieu de $S/\mathcal{J}$, où

$$\mathcal{J} = \bigcup_{x \in [c]} F_x.$$

Or, d'après les lemmes 3 et 4, nous avons, quel que soit $x \in [c]$,

$$F_x \subseteq F_{c^2} = F_c.$$

Il en résulte alors $\mathcal{J} = F_c$, d'où $S/[c] = S/F_c$.

THÉORÈME 7. — *Soit S un demi-groupe de Brouwer dont l'élément maximum est noté α. Alors $[\alpha]$, le sous-demi-groupe de Brouwer complété* *engendré par α, est le plus petit d-idéal contenu dans S. En plus* $[\alpha]$ *coïncide avec l'ensemble des éléments $\mathfrak{A}$-nomaloïdes de S et est tel que*

$$S/[\alpha] = S/F_\alpha \simeq S^2.$$

Démonstration. — Soit T un d-idéal de S. Considérons un élément arbitraire $x \in T$. Il est clair que $[x] \subseteq T$. Or $x \leqq \alpha$, donc $x^2 \leqq \alpha^2$, et par conséquent

$$[\alpha] \subseteq [x] \subseteq T,$$

d'où $[\alpha]$ est le plus petit d-idéal contenu dans S.

Rappelons (*voir* [3], théor. 11 *a*, coroll. 10) qu'un élément $\theta \in S$ est $\mathfrak{A}$-nomaloïde si, et seulement si, tout résiduel de θ est $\mathfrak{A}$-nomal, c'est-à-dire puisque α est le seul élément $\mathfrak{A}$-nomal dans ce cas, si, et seulement si,

$$\theta : x = \alpha, \quad \forall x \in S.$$

Or, si c'est le cas, en particulier $\theta : \alpha = \alpha$, donc nous avons $\alpha^2 \leqq \theta$ et par conséquent $\theta \in [\alpha]$. Inversement, si $\theta \in [\alpha]$, alors $\alpha^2 \leqq \theta$ et, quel que soit $x \in S$.

$$\alpha = \alpha : x = \alpha^2 : x \leqq \theta : x,$$

d'où $\alpha = \theta : x$ et θ est $\mathfrak{A}$-nomaloïde.

D'après le théorème 5, nous avons $S/[\alpha] = S/F_\alpha$. Considérons alors l'application surjective

$$f : S^2 \to S/F_\alpha$$

définie par $f(x^2) = x/F_\alpha$. Cette application est bien définie puisque

$$x^2 = y^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha x = \alpha x^2 = \alpha y^2 = \alpha y \quad \Rightarrow \quad x/F_\alpha = y/F_\alpha.$$

C'est aussi un résimorphisme, car

$$f(x^2 y^2) = f(xy) = xy/F_\alpha = x/F_\alpha \wedge y/F_\alpha = f(x^2) \wedge f(y^2),$$
$$f(x^2 : y^2) = f(x : y) = (x : y)/F_\alpha = x/F_\alpha \vdots\, y/F_\alpha = f(x^2) \vdots\, f(y^2).$$

Enfin, puisque

$$\operatorname{Ker} f = \{ x^2 \in S^2 ; f(x) = \alpha/F_\alpha \} = \{ \alpha^2 \},$$

il résulte du corollaire au lemme 2 que $S^2 \simeq S/F_\alpha$.

5. Demi-groupes de Brouwer complétés.

Lemme 5. — *Quels que soient les éléments x, y d'un demi-groupe de Brouwer complété S,*

$$(x : y)^* = (x^{**} : y)^*.$$

Démonstration. — Puisque $x \leqq x : y$, nous avons

$$(x : y)^* = 0 : (x : y) \leqq 0 : x = x^*.$$

Mais $y^* = 0 : y \leqq x : y$; donc $(x : y)^* \leqq y^{**}$. D'après le lemme 14 et le théorème 1 dans [1], il en résulte alors

$$(x : y)^* \leqq x^* \curlywedge y^{**} = (x^{**} \curlyvee y^*)^* = (x^{**} : y)^*.$$

Mais $x \leqq x^{**}$, donc $x : y \leqq x^{**} : y$ et, par conséquent,

$$(x^{**} : y)^* \leqq (x : y)^*,$$

d'où résulte l'égalité.

Théorème 8. — *Soient S un demi-groupe de Brouwer complété, S^{**} l'algèbre de ses éléments fermés, et D le d-idéal de ses éléments denses. Alors l'application $f : S \to S^{**}$ définie par $f(x) = x^{**}$ est un résimorphisme et $S^{**} \simeq S/D$.*

Démonstration. — Il est évident que f est surjective; d'après le théorème 1 dans [1], c'est un homomorphisme, car

$$f(xy) = (xy)^{**} = (x^{**}y^{**})^{**} = x^{**} \curlywedge y^{**} = f(x) \curlywedge f(y).$$

Or, quel que soit $x^{**} \in S^{**}$, nous avons ([1], théor. 3)

$$A_0 = A_{0^{**}} \subseteq A_{x^{**}},$$

donc de $y \equiv y^{**}(A_0)$ résulte $y \equiv y^{**}(A_{x^{**}})$; c'est-à-dire, $x^{**} : y = x^{**} : y^{**}$. D'après le lemme 5, nous avons alors, quels que soient $x, y \in S$,

$$\begin{aligned}(x : y)^{**} = (x^{**} : y)^{**} &= (x^{**} : y^{**})^{**} \\ &= (x^{**} \curlyvee y^*)^{**} \\ &= x^{**} \curlyvee y^* \\ &= x^{**} : y \\ &= x^{**} : y^{**},\end{aligned}$$

c'est-à-dire : $f(x : y) = f(x) : f(y)$. Par conséquent, f est un résimorphisme.

Enfin, $\operatorname{Ker} f = \{ x \in S;\ f(a) = 0^* \} = \{ x \in S;\ a^{**} = 0^* \} = D$, donc en appliquant le théorème 5, $S^{**} = \operatorname{Im} f \simeq S/D$.

Théorème 9. — *Soient S un demi-groupe de Brouwer complété, et D le d-idéal de ses éléments denses. Alors D peut être caractérisé comme le plus petit d-idéal de S tel que S/D soit une algèbre de Boole.*

Démonstration. — Nous avons vu dans le théorème précédent que S/D est une algèbre de Boole, isomorphe à S^{**}.

Or, étant donné un d-idéal J de S, la relation d'équivalence

$$\mathcal{J} = \bigcup_{d \in J} F_d$$

nous fournit d'un demi-groupe quotient S/J [$= S/\mathcal{J}$], comme nous l'avons vu dans le théorème 4. S étant un demi-groupe de Brouwer complété, S/J possède un élément zéro, à savoir $0/J$. Ainsi le demi-groupe S/J est un demi-treillis de Brouwer complété. Si ce demi-treillis est une algèbre de Boole, l'équivalence du type A associée avec l'élément zéro se réduit alors à l'égalité, donc tout élément est maximum dans sa classe modulo cette équivalence. Autrement dit, d'après les formules trouvées dans le théorème 4,

$$x^{**}/J = 0/J \vdots (0/J \vdots x/J) = x/J, \quad \forall x \in S;$$

c'est-à-dire, quel que soit $x \in S$, il existe $d \in J$ tel que $x^{**} d = xd$.

Supposons donc que $y \in S$ est tel que $y^{**} \in J$; de

$$y^{**} d = yd \leqq y$$

et du fait que $y^{**} d \in J$ résulte que $y \in J$. Or, en particulier, pour $y \in D$, nous avons $y^{**} = 0^{*} \in J$, d'où l'on tire $y \in J$. Il en résulte alors $D \subseteq J$, ce qui achève la démonstration.

Théorème 10. — *Soient S un demi-groupe de Brouwer complété, et D le d-idéal de ses éléments denses. Alors D est un sous-demi-groupe de Brouwer complété si, et seulement si, il existe $m \in D$ tel que S/F_m soit une algèbre de Boole.*

Démonstration. — Si D est un sous-demi-groupe de Brouwer complété alors D contient un élément zéro m. D étant en particulier un sous-demi-groupe résidué, cet élément m est nécessairement l'élément minimum de D. En vertu du lemme 3, nous avons

$$F_d \subseteq F_m, \quad \forall d \in D,$$

d'où

$$\bigcup_{d \in D} F_d = F_m.$$

Par conséquent, S/F_m est une algèbre de Boole (isomorphe à S^{**}).

Inversement, supposons qu'il existe $m \in D$ tel que S/F_m soit une algèbre de Boole. D'après un raisonnement analogue à celui du théorème précédent, nous avons

$$x^{**} m = xm, \quad \forall x \in S.$$

Considérons alors en particulier $x \in D$: nous avons

$$m^2 = (m : m)\, m = o^* m = x^{**} m = xm = xm^2,$$

donc m^2 est l'élément zéro de D et l'élément minimum de D. Par conséquent, D est un sous-demi-groupe de Brouwer complété.

Théorème 11. — *Soit S un demi-groupe de Brouwer complété. Pour que S^2 soit une algèbre de Boole, il faut et il suffit que $D = [o^*]$.*

Démonstration. — Si S^2 est une algèbre de Boole, alors d'après le théorème 7, il en est de même de $S/F_{0^*} = S/[o^*]$. Or, $[o^*]$ est un d-idéal de S qui est contenu dans D et, d'après le théorème 9, D est le plus petit d-idéal de S tel que S/D est une algèbre de Boole. Il en résulte alors que $[o^*] = D$.

Inversement, supposons que $[o^*] = D$. Ceci implique que D est un sous-demi-groupe de Brouwer complété, donc, d'après le théorème 10, il existe un élément $m \in D$ tel que S/F_m est une algèbre de Boole. Or, d'après les lemmes 3 et 4, quel que soit $x \in [o^*] = D$,

$$F_{0^*} \subseteq F_x \subseteq F_{0^{*2}} = F_{0^*},$$

d'où $F_x = F_{0^*}$, $\forall\, x \in D$. Par conséquent, S/F_{0^*} est une algèbre de Boole; et il en est de même de S^2 d'après le théorème 7.

[Comme illustration de ce résultat, citons l'exemple 2 du paragraphe 1.]

6. d-idéaux d'un demi-groupe de Brouwer complété.

Rappelons ([1], théor. 1) que si S est un demi-groupe de Glivenko, alors S^{**} est une algèbre de Boole dans laquelle les lois de composition sont

$$a \curlyvee b = (a^* b^*)^*, \qquad a \curlywedge b = (ab)^{**}.$$

Nous appellerons $\curlywedge$-*idéal* un d-idéal du demi-groupe $(S^{**}, \curlywedge)$.

Lemme 6. — *Soit S un demi-groupe de Brouwer complété. Si J est un d-idéal de S, alors*

$$J^{**} = \{ x^{**} \in S^{**} ; x \in J \}$$

est un $\curlywedge$-idéal de S^{**}; et si K est un $\curlywedge$-idéal de S^{**}, alors

$$({}^{**})^{-1}(K) = \{ x \in S ; x^{**} \in K \}$$

est un d-idéal de S.

Démonstration. — Soit J un d-idéal de S, et soient $x^{**}, y^{**} \in J^{**}$. Nous avons alors $x, y \in J$, d'où, puisque $xy \leqq x \leqq x^{**}$ et $xy \leqq y \leqq y^{**}$,

$$x^{**} \curlywedge y^{**} \geqq xy \in J.$$

Par conséquent, $x^{**} \curlywedge y^{**} \in J$ et $x^{**} \curlywedge y^{**} = (x^{**} \curlywedge y^{**})^{**} \in J^{**}$.

Donc si $x^{**} \in J^{**}$ et $y \in S^{**}$ est tel que $y \geqq x^{**}$, alors nous avons $y \geqq x \in J$, d'où $y \in J$ et $y^{**} \in J^{**}$. Par conséquent, J^{**} est un $\curlywedge$-idéal de S^{**}.

Soit maintenant K un $\curlywedge$-idéal de S^{**}. Nous avons alors

$$\left.\begin{matrix} x \in (^{**})^{-1}(K) \\ y \in (^{**})^{-1}(K) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^{**} \in K \\ y^{**} \in K \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \Rightarrow & (xy)^{**} = x^{**} \curlywedge y^{**} \in K \\ \Rightarrow & xy \in (^{**})^{-1}(K), \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} x \in (^{**})^{-1}(\mathrm{K}) \\ y \geqq x \end{matrix}\right\} \Rightarrow y^{**} \geqq x^{**} \in K \Rightarrow y^{**} \in K \Rightarrow y \in (^{**})^{-1}(K),$$

d'où il résulte que $(^{**})^{-1}(K)$ est un d-idéal de S.

Or, d'après les définitions données dans les deux lemmes précédents, il est clair que

$$J^{**} = J \cap S^{**} \qquad \text{et} \qquad J \subseteq \{ x \in S;\, x^{**} \in J^{**} \} = (^{**})^{-1}(J^{**}).$$

Donc, quel que soit le d-idéal J de S,

$$J^{**} \subseteq J \subseteq (^{**})^{-1}(J^{**}). \tag{2}$$

Nous dirons que J est un d-idéal *propre* de S s'il est un d-idéal de S différent de S et de $[0^*]$, le d-idéal minimum de S (*voir* le théorème 7); nous dirons aussi que J est *maximal* s'il est propre et tel que si K est un d-idéal propre de S avec $J \subseteq K$, alors $J = K$.

LEMME 7. — *Soit S un demi-groupe de Brouwer complété. Alors J est un d-idéal maximal de S si, et seulement si, J^{**} est un $\curlywedge$-idéal maximal de S^{**}.*

Démonstration. — Soit J maximal, et soit K un $\curlywedge$-idéal de S^{**} tel que $J^{**} \subseteq K$. Nous avons donc

$$J \subseteq (^{**})^{-1}(J^{**}) \subseteq (^{**})^{-1}(K),$$

d'où, en vertu du lemme 6, $J = (^{**})^{-1}(K)$ et $J^{**} = K$, c'est-à-dire, J^{**} est maximal dans S^{**}.

Inversement, soit J^{**} maximal dans S^{**}, et soit L un d-idéal de S tel que $J \subseteq L$. Nous avons donc $J^{**} \subseteq L^{**}$ et $(^{**})^{-1}(J^{**}) \subseteq (^{**})^{-1}(L^{**})$. D'après les inclusions (2), et le fait que J^{**} est maximal, nous avons

$$L \subseteq (^{**})^{-1}(L^{**}) \qquad \text{et} \qquad J^{**} = J = (^{**})^{-1}(J^{**}) = (^{**})^{-1}(L^{**}),$$

d'où $L \subseteq J$. Par conséquent, $L = J$, et J est maximal dans S.

LEMME 8. — *Soit S un demi-groupe de Brouwer complété. Tout d-idéal propre de S est contenu dans un d-idéal propre maximal.*

Démonstration. — Il suffit, en vertu du lemme de Zorn, de démontrer que l'ensemble des d-idéaux propres de S est inductif. Considérons une chaîne

$$J_1 \subseteq J_2 \subseteq J_3 \subseteq \dots$$

de d-idéaux propres J_α. Soit

$$K = \bigcup_\alpha J_\alpha.$$

Or, K est aussi un d-idéal propre de S, car

$$\left.\begin{array}{l} x \in K \\ y \in K \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (\exists\,\alpha)\ x \in J_\alpha \\ (\exists\,\beta)\ x \in J_\beta \end{array}\right\} \Rightarrow x,\, y \in J_{\max,(\alpha,\beta)} \begin{array}{l} \Rightarrow xy \in J_{\max,(\alpha,\beta)} \\ \Rightarrow xy \in K, \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \in K \\ y \geqq x \end{array}\right\} \Rightarrow (\exists\,\alpha)\ y \geqq x \in J_\alpha \Rightarrow y \in J_\alpha \Rightarrow y \in K,$$

$0 \in K \Rightarrow (\exists\,\alpha)\ 0 \in J_\alpha$, contrairement à l'hypothèse; donc $0 \notin K$.

DÉFINITION. — Suivant NEMITZ [4], nous dirons qu'un d-idéal J d'un demi-groupe de Brouwer complété S est *total* si et seulement si $J = ({}^{**})^{-1}(J^{**})$.

Il est immédiat grâce aux inclusions (2) que tout d-idéal maximal est total. De plus, on voit facilement que le résimorphisme $({}^{**}) : S \to S^{**}$ induit une bijection entre les d-idéaux totaux de S et les $\curlywedge$-idéaux de S^{**}, qui associé les d-idéaux maximaux de S avec les $\curlywedge$-idéaux maximaux de S^{**}.

Nous allons donner maintenant trois caractérisations équivalentes des d-idéaux totaux d'un demi-groupe de Brouwer complété. D'abord, nous donnons un lemme dont nous aurons besoin dans la suite.

LEMME 9. — *Soient S un demi-groupe de Brouwer complété, et D le d-idéal de ses éléments denses. Alors, quel que soit $x \in S$,*

$$x : x^{**} \in D \qquad \textit{et} \qquad x^2 = x^{**}(x : x^{**}).$$

Démonstration. — D'après le lemme 5, nous avons

$$(x : x^{**})^{**} = (x^{**} : x^{**})^{**} = (0^*)^{**} = 0^*,$$

c'est-à-dire, $x : x^{**} \in D$, et aussi,

$$x^2 = x\,(x : x) = x\,0^*,$$

donc, puisque $x \leqq x^{**} \leqq 0^*$, l'isotonie de la multiplication nous donne $x^2 = x^{**}x = x^{**}(x : x^{**})$.

THÉORÈME 12. — *Soient S un demi-groupe de Brouwer complété, et D le d-idéal de ses éléments denses. Alors, pour un d-idéal J de S, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(α) *J est total;*

(β) *J est une intersection de d-idéaux maximaux;*

(γ) $D \subseteq J$;

(δ) *S/J est une algèbre de Boole.*

Démonstration. — Nous démontrons que $(\alpha) \Longleftrightarrow (\beta)$ et que $(\gamma) \Rightarrow (\alpha) \Rightarrow (\delta) \Rightarrow (\gamma)$.

Puisque tout λ-idéal d'une algèbre de Boole est une intersection de λ-idéaux maximaux, il est immédiat que $(\beta) \Rightarrow (\alpha)$. Inversement, supposons que J est une intersection de d-idéaux maximaux,

$$J = \bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha.$$

Nous avons donc $J \subseteq M_\alpha$, $J^{**} \subseteq \mathrm{M}_\alpha^{**}$ et puis

$$({}^{**})^{-1}(J^{**}) \subseteq ({}^{**})^{-1}(M_\alpha^{**}) = M_\alpha, \quad \forall\, \alpha \in I$$

(l'égalité ayant lieu puisque tout d-idéal maximal est total), d'où

$$({}^{**})^{-1}(J^{**}) \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha = J$$

et, par conséquent, J est total.

Supposons maintenant que $D \subseteq J$. Soit $x \in ({}^{**})^{-1}(J^{**})$; nous avons alors $x^{**} \in J^{**}$, d'où $x^{**} = y^{**}$, où $y \in J$. Puisque J est un d-idéal, il en résulte $x^{**} \in J$. Or, d'après le lemme 9, $x : x^{**} \in D \subseteq J$, donc

$$x \geqq x^2 = x^{**}(x : x^{**}) \in J,$$

d'où $x \in J$. Par conséquent, $({}^{**})^{-1}(J^{**}) \subseteq J$, d'où résulte l'égalité, et nous avons démontré que $(\gamma) \Rightarrow (\alpha)$.

Démontrons maintenant $(\alpha) \Rightarrow (\delta)$. Remarquons d'abord que, J étant total, il satisfait à $x^{**} \in J^{**} \Rightarrow x \in J$. Pour montrer que S/J est une algèbre de Boole, il suffit de démontrer, en utilisant les formules du théorème 4, que l'équivalence du type A associée avec l'élément zéro o/J de S/J se réduit à l'égalité; et pour démontrer ceci, il suffit de montrer que

$$x^{**}/J = y^{**}/J \quad \Rightarrow \quad x/J = y/J.$$

Or, si $x^{**}/J = y^{**}/J$, il existe $d \in J$ tel que $x^{**}d = y^{**}d$, d'où

$$d \leqq y^{**}d : x^{**} \leqq y^{**} : x^{**} = (y : x)^{**}.$$

Puisque $x \to x^{**}$ est une application de fermeture, il en résulte que $d^{**} \leqq (y : x)^{**}$, d'où $(y : x)^{**} \in J^{**}$ et, par conséquent, $y : x \in J$. De manière analogue, nous avons $x : y \in J$. Donc, J étant un d-idéal, $(x : y)\,(y : x) \in J$, et ceci implique que $x/J = y/J$ en vertu du théorème 4 et de la démonstration du théorème 5.

Enfin, pour établir que $(\varrho) \Leftarrow (\lambda)$, nous remarquons que, d'après le théorème 9, D est le plus petit d-idéal pour lequel S/D est une algèbre de Boole. Le résultat est donc immédiat.

Définition. — Nous dirons qu'un demi-groupe de Brouwer complété S est *semi-simple* si son d-idéal minimum $[o^\star]$ peut s'écrire comme une intersection de d-idéaux maximaux.

Or, d'après la correspondance biunivoque induite par l'application (**), ou bien d'après le théorème 12, il est immédiat que l'intersection de tous les d-idéaux maximaux d'un demi-groupe de Brouwer complété est le d-idéal D des éléments denses. Compte tenu de ce fait et du théorème 12, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 13. — *Pour un demi-groupe de Brouwer complété S, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *S est semi-simple;*

(2) *S^2 est une algèbre de Boole;*

(3) $D = [o^\star]$.

Corollaire. — *Pour qu'un demi-treillis de Brouwer complété soit une algèbre de Boole, il faut et il suffit que son élément maximum soit le seul élément dense.*

Ce corollaire est immédiat en vertu du théorème 3.

Définition. — Nous appellerons algèbre de Boole *simple* l'algèbre à deux éléments.

Théorème 14. — *Soient S un demi-groupe de Brouwer complété, et J un d-idéal de S. Alors J est maximal si, et seulement si, S/J est l'algèbre de Boole simple.*

Démonstration. — Supposons que J est maximal, et considérons $x \in S \setminus J$. Puisque J est total, nous avons $x^{\star\star} \notin J^{\star\star}$, donc, $J^{\star\star}$ étant un $\curlywedge$-idéal maximal de $S^{\star\star}$, $x^\star \in J^{\star\star} \subseteq J$. Or, puisque

$$\begin{aligned} x/J = o/J \quad & \Leftrightarrow \quad (\exists\, d \in J)\, xd = o \\ & \Leftrightarrow \quad (\exists\, d \in J)\, d \leq o : x = x^\star \\ & \Leftrightarrow \quad x^\star \in J, \end{aligned}$$

il en résulte que l'algèbre de Boole S/J est simple.

Inversement, supposons que S/J est l'algèbre de Boole simple. Soit K un d-idéal de S tel que $J \subset K$, et considérons un élément arbitraire $x \in K \setminus J$. Soit π le résimorphisme $\pi : S \to S/J$ défini par $\pi(y) = y/J$. Nous avons $\pi(x) = o/J$, puisque S/J est simple, donc

$$\pi(x^\star) = \pi(o : x) = \pi(o) : \pi(x) = o/J \vdots o/J = \alpha/J.$$

Par conséquent,

$$x^\star \in \operatorname{Ker} \pi = J,$$

et il en résulte que

$$o = x(o : x) = xx^* \in K,$$

c'est-à-dire, K n'est pas propre. Donc J est maximal.

COROLLAIRE. — *Soit S un demi-groupe de Brouwer complété, et soit D le d-idéal de ses éléments denses. Alors D est un d-idéal maximal si, et seulement si, S^{**} est simple.*

DÉFINITION. — Nous dirons qu'un demi-groupe de Brouwer complété S est *simple* si ses seuls d-idéaux sont $[o^*]$ et S lui-même.

Compte tenu du corollaire précédent et du théorème 13, nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME 15. — *Pour qu'un demi-groupe de Brouwer complété S soit simple, il faut et il suffit que S soit semi-simple et que S^{**} soit simple.*

7. Quelques remarques.

Ayant généralisé ici la plupart des résultats donnés dans [4], on se demande s'il est possible de donner aussi une généralisation des deux résultats principaux qui restent dans [4], à savoir les théorèmes 5.2 et 6.6. En effet, ces deux résultats sont essentiellement des résultats concernant les demi-treillis de Brouwer complétés, et ne se généralisent pas aux demi-groupes de Brouwer complétés. Ces deux derniers résultats de Nemitz reposent en effet sur la propriété suivante : Tout élément x d'un demi-treillis de Brouwer complété L, peut s'écrire $x = x^{**}d$, où $x^{**} \in L^{**}$ et $d \in D$. Cette propriété ne subsiste plus dans un demi-groupe de Brouwer complété. C'est en effet une condition nécessaire et suffisante pour qu'un demi-groupe de Brouwer complété soit un demi-treillis de Brouwer complété; car si $x = y^{**}d$, où $y^{**} \in S^{**}$ et $d \in D$, alors

$$x^{**} = (y^{**}d^{**}) = y^{**} \curlywedge d^{**} = y^{**} \curlywedge o^* = y^{**},$$

donc $x = x^{**}d$, d'où $x = x^{**}(x : x^{**})$. D'après le lemme 9 et le théorème 3 du présent travail, S est alors un demi-treillis de Brouwer complété.

Ajouté en mars 1968. — Depuis la rédaction de ce travail, nous avons quelques résultats supplémentaires à annoncer. En particulier, remarquons qu'une relation d'équivalence sur un demi-groupe de Brouwer est compatible avec la multiplication et avec la résiduation et telle que l'ensemble quotient soit une bande si, et seulement si, elle est de la forme rencontrée pour $\mathcal{J}$ dans le théorème 4. Remarquons aussi que l'on peut arriver à la notion de demi-groupe de Brouwer de manière tout à fait naturelle : ils sont caractérisés comme les demi-groupes abéliens ordonnés dans lesquels toute translation est une application d'antifermeture résiduée. Ceci sera publié ailleurs.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Blyth (Thomas S.). — Pseudo-residuals in semigroups, *J. London math. Soc.*, t. 40, 1965, p. 441-454.

[2] Dubreil-Jacotin (Marie-Louise), Lesieur (Léonce) et Croisot (Robert). — *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques.* — Paris, Gauthier-Villars, 1953 (*Cahiers scientifiques*, 21).

[3] Molinaro (Italico). — Demi-groupes résidutifs, *J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. 39, 1960, p. 319-356 (*Thèse Sc. math. Paris*, 1956).

[4] Nemitz (William C.). — Implicative semi-lattices, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 117, 1965, p. 128-142.

(Manuscrit reçu en septembre 1966.)

Thomas Scott Blyth,
Department of Mathematics,
St. Salvator's College,
University of St. Andrews,
St. Andrews (Grande-Bretagne).