BULLETIN DE LA S. M. F.

N. SHIMAKURA

Sur les domaines des puissances fractionnaires d'opérateurs

Bulletin de la S. M. F., tome 96 (1968), p. 265-288
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1968__96__265_0>

Bull. Soc. math. France,
96, 1968, p. 265 à 288.

SUR LES DOMAINES DES PUISSANCES FRACTIONNAIRES D'OPÉRATEURS

PAR

NORIO SHIMAKURA.

Introduction.

Soit A un opérateur linéaire fermé du domaine $\mathcal{D}[A]$ dense dans un espace hilbertien $\mathcal{H}$. Supposons qu'il existe la résolvante $(A + \lambda I)^{-1}$, bornée dans $\mathcal{H}$ pour tout $\lambda \geqq 0$, dont la norme se majore par $\mathrm{Cte}/(\lambda + 1)$ pour $\lambda \geqq 0$. Alors, on peut définir sa puissance fractionnaire $A^{-\alpha}$ et son inverse A^{α} pour $0 < \mathrm{Re}\,\alpha < 1$.

T. KATO et J.-L. LIONS ont traité dans leurs travaux ([1], [2] et [3]) les opérateurs maximalement (ou bien régulièrement) accrétifs. J.-L. LIONS a démontré que le domaine $\mathcal{D}[A^{\xi}]$ de A^{ξ} est égal à l'espace d'interpolation $[\mathcal{H}, \mathcal{D}[A]]_{\xi}$, où $0 < \xi < 1$, lorsque A est régulièrement accrétif. D'autre part, il y a une vaste classe d'opérateurs A qui ne sont pas accrétifs, mais des générateurs infinitésimaux des semi-groupes holomorphes e^{-tA}. Certainement, au point de vue de leurs spectres, cette classe d'opérateurs est assez restreinte, mais les caractérisations différentes de la définition des domaines de leurs puissances fractionnaires ne sont pas encore connues.

Nous allons considérer dans ce Mémoire un opérateur A de la forme $A = H + K$, où H est un opérateur auto-adjoint strictement positif et K est une perturbation. Dans le paragraphe 1, nous précisons les conditions sur H et K [les conditions (I), (II) et (III)], et nous énonçons notre résultat, le théorème d'isomorphisme entre $\mathcal{D}[A^{\xi}]$ et $\mathcal{D}[H^{\xi}]$ $(0 < \xi < 1)$. Nous donnons aussi, dans le paragraphe 1, des exemples importants des perturbations K. Le paragraphe 2 est consacré au calcul fonctionnel, surtout à la démonstration de la relation $A^{-\alpha} A_n^{\alpha} = J_n^{\alpha}$ pour $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, où $J_n = (n^{-1} A + I)^{-1}$, $A_n = A J_n$ et $n > 0$. Dans le paragraphe 3, nous démontrons que cette relation peut être prolongée par la continuité forte jusqu'à $\mathrm{Re}\,\alpha \geqq 0$, et nous obtenons quelques évaluations des normes des opérateurs. Nous établissons notre théorème dans le paragraphe 4, en montrant les inégalités du type de Heinz (1.6) et (1.7).

Les méthodes que nous utilisons sont des comparaisons entre plusieurs opérateurs induits par A et par H, et des approximations de A et de H par les opérateurs bornés. Ce sont des méthodes assez classiques.

L'auteur exprime ici sa reconnaissance profonde à MM. J.-L. Lions et S. Mizohata pour leurs encouragements et les discussions avec eux qui lui furent si utiles.

1. Hypothèses et Théorème.

Soit $\mathcal{H}$ un espace hilbertien. Désignons par $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ l'espace des opérateurs linéaires et bornés dans $\mathcal{H}$. Notons (u, v), $\| u \|$ et $\| T \|$ respectivement le produit scalaire entre u et v dans $\mathcal{H}$, la norme de $u \in \mathcal{H}$ et la norme de $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.

Considérons un opérateur linéaire A de la forme

$$A = H + K, \tag{1.1}$$

où nous supposons que H et K satisfassent aux trois conditions suivantes :

(I) *H est un opérateur auto-adjoint strictement positif du domaine $\mathcal{D}[H]$, dense dans $\mathcal{H}$; et il existe une constante $\delta > 0$ telle que*

$$(Hu, u) \geqq \delta \| u \|^2 \quad \textit{pour tout } u \in \mathcal{D}[H]; \tag{1.2}$$

(II) *K est un opérateur linéaire du domaine $\mathcal{D}[K]$ contenant $\mathcal{D}[H]$ avec l'inclusion continue [c'est-à-dire, $KH^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$]; il existe la résolvante $(A + \lambda I)^{-1}$, bornée pour tout $\lambda \geqq 0$, c'est-à-dire*

$$(A + \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) \quad \textit{pour tout } \lambda \geqq 0, \tag{1.3}$$

et $(A + \lambda I)^{-1}$ est une application linéaire, continue et biunivoque de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{D}[H]$ (muni de la norme de graphe);

(III) *La norme de $(A + \lambda I)^{-1} - (H + \lambda I)^{-1}$ est majorée par $a(\lambda)$, c'est-à-dire*

$$\| (A + \lambda I)^{-1} - (H + \lambda I)^{-1} \| \leqq a(\lambda) \quad \textit{pour tout } \lambda \geqq 0, \tag{1.4}$$

où $a(\lambda)$ est une fonction continue, bornée, ainsi que $\lambda\, a(\lambda)$, et satisfait de plus à la condition

$$\int_0^\infty a(\lambda)\, d\lambda < \infty. \tag{1.5}$$

REMARQUE 1.1. — Le domaine $\mathcal{D}[A]$ de A est égal, par définition, à $\mathcal{D}[H]$.

Sous ces hypothèses, nous avons le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Soit* $0 < \xi < 1$. *Alors, le domaine de* A^ξ *est égal à celui de* H^ξ, *et nous avons*

$$\| A^\xi H^{-\xi} \| \leq CC'(C'' \| AH^{-1} \|)^\xi \exp(2\pi\sqrt{\xi(1-\xi)}); \tag{1.6}$$

$$\| H^\xi A^{-\xi} \| \leq C \| HA^{-1} \|^\xi \exp(\pi\sqrt{\xi(1-\xi)}), \tag{1.7}$$

avec des constantes C, C' *et* C'' *indépendantes de* ξ.

Nous démontrerons ce théorème dans le paragraphe 4.

Nous donnons un exemple important d'une classe d'opérateurs A, satisfaisant aux conditions (I), (II) et (III). Nous remplaçons la condition (III) par une condition suivante plus forte :

(III)′ *La norme de* $K(H + \lambda I)^{-1}$ *est majorée par* $k(\lambda)$, *c'est-à-dire*

$$\| K(H + \lambda I)^{-1} \| \leq k(\lambda) \quad \textit{pour tout } \lambda \geq 0, \tag{1.8}$$

où $k(\lambda)$ *est une fonction continue, bornée, tendant vers zéro lorsque* $\lambda \to \infty$ *et satisfait de plus à la condition*

$$\int_0^\infty \frac{k(\lambda)}{1+\lambda} d\lambda < \infty. \tag{1.9}$$

PROPOSITION 1.1. — *Sous les hypothèses* (I) *et* (II), *la condition* (III)′ *implique* (III). *Elle implique aussi que* $-A$ *est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe* e^{-tA}, *et que le spectre* $\sigma(-A)$ *de* $-A$ *ne contient aucune région angulaire d'angle positif.*

Dans cette proposition, le spectre $\sigma(-A)$ signifie l'ensemble complémentaire de l'ensemble résolvant $\rho(-A)$ dans $\mathbf{C}^1$, où

$$\rho(-A) = \{ \lambda \in \mathbf{C}^1 ; (A + \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) \}.$$

Preuve de la proposition 1.1. — Soient $\lambda = \mu + i\tau$ ($\mu \geq 0$ et τ réel) et $u \in \mathcal{D}[H]$ quelconque; nous allons estimer inférieurement la norme de $(A + \lambda I)u$:

$$\begin{aligned} \| (A + \lambda I)u \|^2 = \| (H + \mu I)u \|^2 + 2\,\mathrm{Re}((H + \mu I)u, Ku) \\ + | \tau |^2 \| u \|^2 + i\tau \{ (u, Ku) - (Ku, u) \}, \end{aligned}$$

où l'on a, grâce à la condition (III)',

$$|((H+\mu I)u, Ku)| = |((H+\mu I)u, \{K(H+\mu I)^{-1}\}(H+\mu I)u)| \leqq k(\mu)\,\|(H+\mu I)u\|^2,$$

$$2|\tau(u, Ku)| \leqq 2|\tau|\,k(\mu)\,\|(H+\mu I)u\|.\|u\| \leqq k(\mu)\left\{\varepsilon\,\|(H+\mu I)u\|^2+\frac{1}{\varepsilon}|\tau|^2\|u\|^2\right\}$$

pour $\varepsilon > 0$ quelconque,

$$\|(H+\mu I)u\|^2 \geqq \mu^2\|u\|^2,$$

donc

$$\|(A+\lambda I)u\|^2 \geqq \left[\{1-(2+\varepsilon)k(\mu)\}\mu^2+\left\{1-\frac{1}{\varepsilon}k(\mu)\right\}|\tau|^2\right]\|u\|^2.$$

En posant, par exemple, $\varepsilon = \sqrt{2}-1$, on a

$$\|(A+\lambda I)u\| \geqq \sqrt{1-k_1(\mu)}.|\lambda|.\|u\|,$$

où $k_1(\mu) = (\sqrt{2}+1)\,k(\mu)$ a les mêmes propriétés que $k(\mu)$. Soit μ_0 un nombre positif tel que $k_1(\mu) \geqq 1/2$ pour tout $\mu \geqq \mu_0$.

Alors, pour $\lambda = \mu + i\tau(\mu \geqq \mu_0)$, on a

$$\|K(H+\lambda I)^{-1}\| \leqq k(\mu) < 1,$$

donc la série de Neumann

$$\sum_{j=0}^{\infty}(H+\lambda I)^{-1}\{-K(H+\lambda I)^{-1}\}^j \tag{1.10}$$

converge en norme, elle est égale à la résolvante $(A+\lambda I)^{-1}$. (En effet, la série multipliée par $A+\lambda I$ à gauche ou à droite est égale à I.) Donc, on a l'existence et l'estimation de la norme de $(A+\lambda I)^{-1}$ pour $\mathrm{Re}\,\lambda \geqq \mu_0$:

$$\|(A+\lambda I)^{-1}\| \leqq \frac{1}{\sqrt{1-k_1(\mu)}.|\lambda|} \qquad \text{pour} \quad \mathrm{Re}\lambda = \mu \geqq \mu_0. \tag{1.11}$$

L'opérateur $-A$ est donc un générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe e^{-tA}.

Lorsqu'on fixe $\lambda = \mu + i\tau(\mu \geqq \mu_0)$, tous les $z = x + iy$, tels que

$$(x-\mu)^2+(y-\tau)^2 < \{1-k_1(\mu)\}(\mu^2+\tau^2)$$

appartiennent à $\rho(-A)$ et cela implique que, pour μ fixé $(\mu \geqq \mu_0)$, tous les $z = x + iy$ tels que

$$x-\mu > -\sqrt{\{1-k_1(\mu)\}\{\mu^2+y^2/k_1(\mu)\}}$$

appartiennent à $\rho(-A)$. On voit donc que le spectre $\sigma(-A)$ est contenu dans l'ensemble

$$\bigcap_{\mu \geqq \mu_0} \{ z = x + iy \in \mathbf{C}^1 ;\ x < \mu - \sqrt{\{1 - k_1(\mu)\}\{\mu^2 + y^2/k_1(\mu)\}} \}$$

et que le dernier ne contient aucune région angulaire d'angle positif.

On a ensuite la relation suivante :

$$(1.12) \qquad \begin{aligned}&(A + \lambda I)^{-1} - (H + \lambda I)^{-1} \\ &\quad = (H + \lambda I)^{-1} [\{ I + K(H + \lambda I)^{-1}\}^{-1} - I] \qquad \text{pour } \lambda \geqq 0,\end{aligned}$$

d'où

$$\| (A + \lambda I)^{-1} - (H + \lambda I)^{-1} \| \leqq C(\lambda + \delta)^{-1} k(\lambda) \qquad \text{pour } \lambda \geqq 0,$$

avec une constante C indépendante de λ. Il suffit donc de poser

$$a(\lambda) = C(\lambda + \delta)^{-1} k(\lambda).$$

C. Q. F. D.

REMARQUE 1.2. — Si, en particulier, la fonction $k(\lambda)$ est majorée par Cteλ^{-1} pour $\lambda \to \infty$, il existe alors un nombre $\beta \geqq 0$ tel que $\| (A + \lambda I)^{-1} \| \leqq 1/(\lambda - \beta)$ pour $\lambda > \beta$, donc $A + \beta I$ est accrétif. Mais, en général, il n'existe pas de β réel tel que $A + \beta I$ soit accrétif, c'est-à-dire : l'ensemble des nombres $\mathrm{Re}(Au, u)$, lorsque u parcourt $\mathcal{D}[A]$ et $\| u \| \leqq 1$, n'est pas borné inférieurement.

Par exemple, prenons

$\mathcal{H} = L^2(0, \pi)$ par rapport à la mesure de Lebesgue dx;

$H = \dfrac{d^4}{dx^4} + \beta I$ ($\beta > 0$ assez grand), du domaine

$$\mathcal{D}[H] = \{ u \in H^4(0, \pi) ;\ u'(0) = u'''(0) = u'(\pi) = u'''(\pi) = 0 \},$$

et

$$K = -\frac{d^3}{dx^3}.$$

Alors l'opérateur $A = H + K$ satisfait à nos hypothèses (I), (II) et (III)', avec

$$k(\lambda) = \text{Cte} \min\left(1, \lambda^{-\frac{1}{4}}\right),$$

mais il n'existe pas de constante réelle β telle que $\mathrm{Re}(Au, u) \geqq -\beta \| u \|^2$ pour tout $u \in \mathcal{D}[A]$. (Cet exemple est dû à M. MIZOHATA.)

Considérons, en général, un problème aux limites du type elliptique dans un ouvert borné Ω de $\mathbf{R}^n$ (avec la frontière $\partial\Omega$ indéfiniment différentiable) dans le cadre de $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$.

Soit $H\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{|\nu| \leq 2m} h_\nu(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu$ un opérateur différentiel d'ordre $2m$, elliptique sur $\overline{\Omega}$, formellement auto-adjoint et de coefficients indéfiniment dérivables sur $\overline{\Omega}$. Nous posons une condition aux limites

$$B_r u \equiv \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^r u(x') - \sum_{\substack{\rho < r \\ \rho \in S}} B_{r\rho}\left(x'; \frac{\partial}{\partial x'}\right)\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^\rho u(x') = 0$$

pour tout $x' \in \partial\Omega$ et pour tout $r \in R$, où R est un ensemble de m entiers distincts r tels que $0 \leq r \leq 2m-1$, $S = \{0, 1, \ldots, 2m-1\} - R$, à chaque point $x' \in \partial\Omega$, $\frac{\partial}{\partial n}$ et $\frac{\partial}{\partial x'}$ désignent la dérivée normale à $\partial\Omega$ et les dérivées tangentielles à $\partial\Omega$ respectivement, et enfin $B_{r\rho}\left(x'; \frac{\partial}{\partial x'}\right)$ sont des opérateurs différentiels, tangentiels à $\partial\Omega$, d'ordre $\leq r - \rho$. Nous supposons que

(i) $S = \{2m - 1 - r;\ r \in R\}$;

(ii) $\{B_r\}_{r \in R}$ *recouvre* $H\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right) + \lambda I$ au sens d'Agmon-Douglis-Nirenberg, pour tout $\lambda \geq 0$;

(iii) le système $\left\{H\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right); \{B_r\}_{r \in R}\right\}$ est auto-adjoint, c'est-à-dire; ce système est égal à son système adjoint.

Posons donc

$$H = \left\{H\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right); \{B_r\}_{r \in R}\right\},$$

avec le domaine

$$\mathcal{D}[H] = \{u \in H^{2m}(\Omega);\ B_r u = 0 \text{ pour tout } r \in R\}.$$

Alors, nous savons que l'opérateur H est borné inférieurement, c'est-à-dire qu'il existe un nombre réel β tel que $H + \beta I$ soit accrétif. Ceci est équivalent, par définition, à dire que H est *variationnel* sur $\mathcal{D}[H]$.

Cela posé, nous donnons la définition suivante :

Définition. — Le problème aux limites $\left\{H\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right); \{B_r\}_{r \in R}\right\}$ est dit *stablement variationnel*, si, pour tout opérateur $K = K\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right)$ d'ordre $\leq 2m - 1$ et de coefficients indéfiniment dérivables sur $\overline{\Omega}$, il existe un nombre réel β (probablement dépendant de K) tel que $H + K + \beta I$ soit accrétif sur $\mathcal{D}[H]$.

PROPOSITION 1.2. — *Pour que le problème aux limites elliptique auto-adjoint d'ordre* $2m$ $\left\{H\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right); \{B_r\}_{r\in R}\right\}$ *soit stablement variationnel, il est nécessaire que l'ensemble* R *(des ordres des opérateurs au bord* B_r*) satisfasse à la condition suivante :*

Pour tout choix de $r \in R$ *et de* $s \in R$ *tels que* $r + s \geqq 2m$, *on n'a toujours que* $r \geqq m$ *et que* $s \geqq m$.

Esquissons la démonstration de la *nécessité* de la condition : L'hypothèse contraire à cette condition est la suivante : il existe $\rho \in S$ et $\sigma \in S$ tels que $\sigma \leqq m - 2$, $\rho \geqq m$ et que $\rho + \sigma \leqq 2m - 2$. Alors un opérateur K d'ordre $\rho + \sigma + 1$, qui est égal à

$$\mathrm{Cte}\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{\rho+\sigma-1}$$

dans un petit voisinage d'un certain point $x'_0 \in \partial\Omega$, nous offre un contre-exemple, c'est-à-dire : il n'existe plus de β réel tel que $H + K + \beta I$ soit accrétif sur $\mathcal{D}[H]$.

L'auteur donnera, dans un autre article, des conditions plus précises pour la variationalité stable.

Mais pourtant, tout opérateur $K = K\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right)$ d'ordre $\leqq 2m - 1$ satisfait, indépendamment de la variationalité stable, aux contitions (I), (II) et (III)$'$ relativement à $H = \left\{H\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right); \{B_r\}_{r\in R}\right\}$ (on ajoute βI si nécessaire), avec

$$k(\lambda) = \mathrm{Cte}\,\min\left(1, \lambda^{-\frac{1}{2m}}\right).$$

Nous citons encore des exemples de choix de la fonction $k(\lambda)$. Nous considérons le cas où K satisfait à la condition

$$\|Ku\| \leqq C\|Hu\|^{\theta}\|u\|^{1-\theta} \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{D}[H],$$

ou bien, plus généralement,

$$\|K(H + \lambda I)^{-1}\| \leqq C\lambda^{\theta-1} \qquad \text{lorsque } \lambda \to \infty,$$

où C est une constante et θ une autre constante telle que $0 < \theta < 1$ (C et θ indépendantes de λ). Dans ces cas, on peut prendre

$$k(\lambda) = \mathrm{Cte}\,\min(1, \lambda^{\theta-1}).$$

Et, de plus, le spectre $\sigma(-A)$ est contenu dans l'ensemble

$$\left\{\lambda = \mu + i\tau \in \mathbf{C}^1; -\mu \geqq C(\theta)|\tau|^{\frac{1}{\theta}} - C'(\theta)\right\}$$

dans le premier cas, et dans l'ensemble,

$$\left\{ \lambda = +\mu i\tau \in \mathbf{C}^1;\ -\mu \geq \tilde{C}(\theta)\,|\tau|^{\frac{2}{1+\theta}} - \tilde{C}'(\theta) \right\}$$

dans le deuxième cas, où $C(\theta)$ et $\tilde{C}(\theta)$ sont des constantes positives et $C'(\theta)$ et $\tilde{C}'(\theta)$ sont des constantes réelles.

REMARQUE 1.3. — La condition (III) n'implique pas, en général, la condition (III)'. Voici un exemple.

Dans l'espace des suites

$$\mathcal{H} = l^2 = \left\{ x = \{x_j\}_{j=1}^{\infty};\ x_j \in \mathbf{C},\ \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty \right\},$$

nous considérons les opérateurs H et K ayant les représentations matricielles de dimension infinie suivantes :

$$H = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \bigcirc \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ \bigcirc & & & \ddots \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad K = \begin{bmatrix} 0 & & & & \bigcirc \\ k_1 & 0 & & & \\ & k_2 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & k_3 & \ddots \\ \bigcirc & & & & \ddots \end{bmatrix};$$

plus précisément, nous posons

$$(Hx)_j = \lambda_j x_j \quad (j = 1, 2, 3, \ldots) \qquad \text{pour} \quad x \in \mathcal{D}[H],$$

$$(Kx)_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 1 \\ k_{j-1} x_{j-1} & \text{si } j = 2, 3, \ldots \end{cases} \qquad \text{pour} \quad x \in \mathcal{D}[H],$$

où

$$\mathcal{D}[H] = \left\{ x \in l^2;\ \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j x_j|^2 < \infty \right\},$$

$$\lambda_j = \exp(j^2) \qquad \text{et} \qquad k_j = \begin{cases} \lambda_j & \text{si } j \text{ est impair,} \\ 0 & \text{si } j \text{ est pair.} \end{cases}$$

Alors, les opérateurs H et K ne satisfont pas à (III)', car on a toujours

$$\| K(H + \lambda I)^{-1} \| \geq 1 \quad \text{pour tout } \lambda \notin \{\lambda_j\}_{\infty}^{j=1}.$$

Mais ils satisfont à (III), car la fonction

$$a(\lambda) = \sup_{t \geq 0} \frac{e^{t^2}}{(e^{t^2} + \lambda)(e^{(t+1)^2} + \lambda)}$$

est continue, bornée ainsi que $\lambda\, a(\lambda)$ pour $\lambda \geqq 0$, intégrable dans l'intervalle $0 \leqq \lambda < \infty$ et majore la norme de

$$(A+\lambda I)^{-1} - (H+\lambda I)^{-1} = -(H+\lambda I)^{-1} K (H+\lambda I)^{-1}.$$

L'opérateur $-A$ de cet exemple est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe.

Remarque 1.4. — On voit que la norme $\| K(H+\mu I)^{-1} \|$ est une fonction bornée et décroissante de $\mu \geqq 0$. Au lieu de la condition (III)$'$, nous supposons une condition beaucoup moins forte :

(III)$''$ *Il existe un* r $(0 < r < 1)$ *et un* $\mu_0 > 0$ *tels que l'on ait* $\| K(H+\mu I)^{-1} \| \leqq r$ *pour tout* $\mu \geqq \mu_0$.

Alors l'opérateur $-A = -(H+K)$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe. [En effet, pour $\lambda = \mu + i\tau\,(\mu \geqq \mu_0)$, on a $\| K(H+\lambda I)^{-1} \| \leqq r$, donc la série de Neumann (1.10) converge en norme, elle est égale à $(A+\lambda I)^{-1}$ et sa norme se majore par $|\lambda|^{-1}(1-r)^{-1}$.]

L'auteur n'est pas certain qu'il existe des exemples de $-A$ qui ne sont pas générateurs infinitésimaux des semi-groupes holomorphes, mais satisfont aux conditions (I), (II) et (III).

2. Calcul fonctionnel.

2.1. Nous traitons, dans ce paragraphe, le cas d'un opérateur T linéaire et fermé du domaine $\mathcal{D}[T]$, dense dans $\mathcal{H}$, tel qu'il existe la résolvante $(T+\lambda I)^{-1}$, bornée pour $\lambda \geqq 0$, et

$$\| (T+\lambda I)^{-1} \| \leqq C(\lambda+1)^{-1} \quad \text{pour} \quad \lambda \geqq 0, \tag{2.1}$$

avec une constante C indépendante de λ.

On peut alors définir sa puissance fractionnaire $T^{-\alpha}$ pour $\operatorname{Re}\alpha > 0$ par

$$T^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (-\lambda)^{-\alpha}(T+\lambda I)^{-1}\, d\lambda, \tag{2.2}$$

où γ est un contour dans le λ-plan complexe qui fait le tour de la demi-droite $\{\lambda \geqq 0\}$ du point $+\infty - i\varepsilon$ jusqu'au point $+\infty + i\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ petit) au sens négatif, et qui ne rencontre pas le spectre $\sigma(-T)$ de $-T$, et la fonction $(-\lambda)^{-\alpha}$ est supposée égale à sa valeur principale sur l'axe réel négatif. L'intégrale de (2.2) est prise dans l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. Elle s'écrit, pour $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$,

$$T^{-\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-\alpha}(T+\lambda I)^{-1}\, d\lambda \quad \text{pour} \quad 0 < \operatorname{Re}\alpha < 1. \tag{2.3}$$

L'opérateur $T^{-\alpha}$ ainsi défini est une fonction de α à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, holomorphe dans $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, et applique $\mathcal{H}$ biunivoquement à son image $\mathcal{R}[T^{-\alpha}]$.

Nous définissons la puissance fractionnaire T^{α} pour $0 < \mathrm{Re}\,\alpha < 1$ comme l'opérateur inverse de $T^{-\alpha}$:

DÉFINITION. — Soit $0 < \mathrm{Re}\,\alpha < 1$. On définit T^{α} au domaine $\mathcal{D}[T^{\alpha}] = \mathcal{R}[T^{-\alpha}]$ en posant

$$T^{\alpha} u = (T^{-\alpha})^{-1} u \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{R}[T^{-\alpha}]. \tag{2.4}$$

2.2. — Pour simplifier les calculs, nous nous bornerons, dans ce n° 2.2, au cas où *T lui-même est borné :* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.

L'opérateur T^{α} $(0 < \mathrm{Re}\,\alpha < 1)$ défini par (2.4) est égal à $T^{\alpha-1}T = TT^{\alpha-1}$, et donc par (2.2), on a

$$T^{\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda^{\alpha-1} (T + \lambda I)^{-1} T \, d\lambda. \tag{2.4$'$}$$

Ceci s'écrit encore

$$T^{\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} \left[I - \alpha \int_0^1 \lambda^{\alpha} (T + \lambda I)^{-1} \, d\lambda + \alpha \int_1^{\infty} \lambda^{\alpha-1} (T + \lambda I)^{-1} T \, d\lambda \right], \tag{2.4$''$}$$

et la dernière formule est valable pour $-1 < \mathrm{Re}\,\alpha < 1$.

Soit maintenant Γ un contour du λ-plan simple, fermé, rectifiable, contenant $\sigma(-T)$ à son intérieur et la demi-droite $\{ \lambda \geqq 0 \}$ à son extérieur. Alors, l'opérateur $T^{-\alpha}$ s'écrit encore

$$T^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (-\lambda)^{-\alpha} (T + \lambda I)^{-1} \, d\lambda, \tag{2.5}$$

où la fonction $(-\lambda)^{-\alpha}$ est supposée égale à sa valeur principale sur l'axe réel négatif. La formule (2.5) nous montre que l'opérateur $T^{-\alpha}$ est une fonction entière de α à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, et que l'opérateur T^{α} défini par (2.5) (avec $-\alpha$ remplacé par α) pour $0 < \mathrm{Re}\,\alpha < 1$ est égal à celui défini par (2.4) ou bien par (2.4)$'$.

Soit n un nombre positif; posons

$$L_n = (n^{-1} T + I)^{-1} \qquad \text{et} \qquad T_n = T L_n.$$

L_n et T_n appartiennent alors à $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ ainsi que leurs résolvantes $(L_n + \lambda I)^{-1}$ et $(T_n + \lambda I)^{-1}$ pour $\lambda \geqq 0$. Donc, on peut définir leurs puissances fractionnaires L_n^{α} et $T_n^{\alpha} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ pour tout $\alpha \in \mathbf{C}^1$.

LEMME 2.1. — *Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ satisfait aux hypothèses du n° 2.1, nous avons*

$$T^{-\alpha} T_n^{\alpha} = T_n^{\alpha} T^{-\alpha} = L_n^{\alpha}, \tag{2.6}$$

pour $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$, *et par le prolongement analytique, pour tout* $\alpha \in \mathbf{C}^1$.

Preuve. — Nous allons le démontrer pour $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$.

Nous écrivons encore deux formules

$$T^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} (-\lambda)^{-\alpha} (T + \lambda I)^{-1} \, d\lambda\,; \tag{2.5}$$

$$T_n^{\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} T_n (T_n + tI)^{-1} \, dt, \tag{2.4$'_n$}$$

où Γ' est un contour ayant la même propriété que Γ et contenant Γ à son intérieur. Soit $t \geqq 0$. On montre alors

$$T_n (T_n + tI)^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu}{1 + n^{-1} t} \left(\mu - \frac{t}{1 + n^{-1} t} \right)^{-1} \times (T + \mu I)^{-1} \, d\mu.$$

[En effet, le deuxième membre, multiplié par $(T_n + tI) T_n^{-1}$ à gauche ou à droite, est égal à I.] On met cette représentation de $T_n (T_n + tI)^{-1}$ dans $(2.4)'_n$, et l'on utilise le théorème de Fubini et l'égalité

$$\frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} (t + z)^{-1} \, dt = z^{\alpha-1},$$

pour $z = -\mu / (1 - n^{-1}\mu)$ qui n'est jamais égal à un nombre réel $\leqq 0$, car $\mu \in \Gamma$. On a donc

$$T_n^{\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{-\mu}{1 - n^{-1}\mu} \right)^{\alpha} (T + \mu I)^{-1} \, d\mu. \tag{2.7}$$

Si l'on multiplie l'intégrale de (2.5) à gauche de (2.7), et si l'on utilise l'équation de résolvantes

$$\begin{aligned}(T + \lambda I)^{-1} (T + \mu I)^{-1} &= (T + \mu I)^{-1} (T + \lambda I)^{-1} \\ &= \frac{1}{\lambda - \mu} \{ (T + \mu I)^{-1} - (T + \lambda I)^{-1} \},\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}T^{-\alpha} T_n^{\alpha} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma'} (-\lambda)^{-\alpha} \, d\lambda \int_{\Gamma} &\left(\frac{-\mu}{1 - n^{-1}\mu} \right)^{\alpha} \\ &\times \frac{1}{\lambda - \mu} \{ (T + \mu I)^{-1} - (T + \lambda I)^{-1} \} \, d\mu.\end{aligned}$$

Nous remarquons ici que le contour Γ' est situé à l'extérieur de Γ, alors, par le théorème de Fubini et le calcul de résidu, on a

$$(2.8) \qquad T^{-\alpha} T_n^\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (1 - n^{-1}\mu)^{-\alpha} (T + \mu I)^{-1}\, d\mu.$$

Si l'on multiplie l'intégrale de (2.5) à droite de (2.7), on voit, d'une manière analogue, que l'opérateur $T_n^\alpha T^{-\alpha}$ est aussi égal à l'intégrale de (2.8). Donc, $T^{-\alpha} T_n^\alpha = T_n^\alpha T^{-\alpha}$.

Il faut maintenant démontrer que l'intégrale de (2.8) est égale à L_n^α. La définition de L_n^α était la suivante :

$$(2.9) \qquad L_n^\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma''} (-\lambda)^\alpha (L_n + \lambda I)^{-1}\, d\lambda,$$

où Γ'' est un contour simple, fermé, rectifiable, contenant le spectre $\sigma(-L_n)$ à son intérieur et la demi-droite $\{\lambda \geqq 0\}$ à son extérieur. On a l'égalité importante

$$(2.10) \qquad (L_n + \lambda I)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left\{ I - \frac{1}{\lambda + 1} L_\xi \right\},$$

où

$$\xi = n\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \qquad \text{et} \qquad L_\xi = (\xi^{-1} T + I)^{-1}.$$

Il faut s'assurer que ξ n'appartienne pas à $\sigma(-T)$ lorsque λ parcourt Γ'', si l'on choisit Γ'' convenablement. Nous allons le voir.

La formule (2.10) nous montre que la demi-droite $\{\lambda \leqq -1\}$ (qui correspond au segment $\{0 \leqq \xi < n\}$) ne rencontre pas $\sigma(-L_n)$, car $L_\xi = \xi(T + \xi I)^{-1}$ s'annule au point $\xi = 0$ (c'est-à-dire au point $\lambda = -1$). On voit aussi que la demi-droite $\{\lambda \geqq 0\}$ (qui correspond à la demi-droite $\{n < \xi < +\infty\}$) ne rencontre pas $\sigma(-L_n)$, car $I - (\lambda + 1)^{-1} L_\xi$ s'annule au point $\xi = \infty$ (c'est-à-dire au point $\lambda = 0$). Donc, pour que $\lambda \in \sigma(-L_n)$, il faut et il suffit que $\xi \in \sigma(-T)$. Nous pouvons donc choisir le contour Γ'' de telle sorte qu'il ne rencontre ni $\{\lambda \geqq 0\}$, ni $\{\lambda \geqq -1\}$ et qu'il contienne $\sigma(-L_n)$ à son intérieur. Alors, lorsque λ parcourt Γ'', ξ parcourt un contour $\tilde{\Gamma}''$ qui ne rencontre pas $\{\xi \geqq 0\}$ et contient $\sigma(-T)$ à son intérieur. L'intégrale de (2.9) est donc égale à

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}''} (1 - n^{-1}\xi)^{-\alpha} (T + \xi I)^{-1}\, d\xi,$$

et celle-ci est égale à l'intégrale de (2.8).

C. Q. F. D

2.3. — Nous revenons maintenant à l'opérateur T (pas nécessairement borné) dont les hypothèses ont été précisées au début du n° 2.1.

On pose encore

$$L_n = (n^{-1}T + I)^{-1} \qquad \text{et} \qquad T_n = TL_n \qquad \text{pour} \quad n > 0.$$

Nous allons démontrer que le lemme 2.1 reste encore valable pour $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$, si l'on définit L_n^α par la formule analogue à (2.4)″, c'est-à-dire par

$$(2.11) \qquad L_n^\alpha = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\left[I - \alpha\int_0^1 \lambda^\alpha (L_n + \lambda I)^{-1}\,d\lambda \right.$$
$$\left. + \alpha\int_1^\infty \lambda^{\alpha-1}(L_n + \lambda I)^{-1}L_n\,d\lambda\right].$$

Nous remarquons ici que les intégrales de cette formule convergent dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, car il existe une constante C_1, indépendante de $n > 0$ et de $\lambda > 0$, telle que l'on ait $\|(L_n + \lambda I)^{-1}\| \leq C_1 \lambda^{-1}$ pour $\lambda > 0$ [*voir* (2.10)].

Nous posons de nouveau, pour $m > 0$,

$$L_{m,n} = (n^{-1}T_m + I)^{-1} \qquad \text{et} \qquad T_{m,n} = T_m L_{m,n}.$$

Les opérateurs T_m satisfont aux hypothèses du lemme 2.1. On a donc

$$(2.12) \quad T_m^{-\alpha}T_{m,n}^\alpha = T_{m,n}^\alpha T_m^{-\alpha} = L_{m,n}^\alpha \qquad \text{pour} \quad m > 0 \quad \text{et} \quad 0 < \operatorname{Re}\alpha < 1.$$

Nous allons voir que la formule (2.6) est obtenue, dans le cas présent, par passage à la limite de (2.12) lorsque $m \to \infty$. Nous écrivons

$$T^{-\alpha}T_n^\alpha - L_n^\alpha = (T^{-\alpha} - T_m^{-\alpha})T_n^\alpha + T_m^{-\alpha}(T_n^\alpha - T_{m,n}^\alpha) + (L_{m,n}^\alpha - L_n^\alpha),$$

et montrons que chacune des différences du deuxième membre tend vers zéro lorsque $m \to \infty$.

Notons d'abord que la norme de $(T_m + \lambda I)^{-1}$ est majorée par $\text{Cte}(\lambda + 1)^{-1}$ pour $\lambda \geq 0$ indépendamment de $m > 0$ suffisamment grand, parce que l'on a l'égalité

$$(T_m + \lambda I)^{-1} = \frac{1}{m+\lambda}I + \frac{m^2}{(m+\lambda)^2}\left(T + \frac{m\lambda}{m+\lambda}I\right)^{-1}.$$

Si λ, $m > 0$, on a

$$(2.13) \qquad L_{m,\lambda} - L_\lambda = m^{-1}T_{\frac{m\lambda}{m+\lambda}} . \lambda^{-1}T_\lambda,$$

d'où l'on a

$$(2.14) \qquad \|L_{m,\lambda} - L_\lambda\| \leq \frac{C_2\lambda}{m+\lambda} \qquad \text{pour} \quad m, \lambda > 0,$$

avec une constante C_2 indépendante de m et de λ. Alors la représentation intégrale

$$T^{-\alpha}-T_m^{-\alpha}=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-\alpha-1}(L_\lambda-L_{m,\lambda})\,d\lambda$$

implique la majoration

$$\| T^{-\alpha}-T_m^{-\alpha}\| \leqq C_2(\alpha)\, m^{-\mathrm{Re}\,\alpha},$$

avec une constante $C_2(\alpha)$ indépendante de m. D'où l'on a la convergence $\| T^{-\alpha}-T_m^{-\alpha}\| \to 0$ lorsque $m\to\infty$.

Ensuite, on écrit

$$T_{m,n}^{\alpha}-T_n^{\alpha}=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{\alpha}\{(T_n+\lambda I)^{-1}-(T_{m,n}+\lambda I)^{-1}\}\,d\lambda,$$

$$(T_n+\lambda I)^{-1}-(T_{m,n}+\lambda I)^{-1}=n(L_n-L_{m,n})(T_n+\lambda I)^{-1}(T_{m,n}+\lambda I)^{-1}.$$

Ces formules impliquent, grâce à la remarque ci-dessus et à (2.14),

$$\| T_{m,n}^{\alpha}-T_n^{\alpha}\| \leqq C_2(\alpha, n)/(m+n),$$

avec une constante $C_2(\alpha, n)$ indépendante de m. D'où, on a la convergence $\| T_{m,n}^{\alpha}-T_n^{\alpha}\| \to 0$ lorsque $m\to\infty$.

Écrivons maintenant, grâce à (2.11) et à la formule analogue pour $L_{m,n}^{\alpha}$,

$$L_{m,n}^{\alpha}-L_n^{\alpha}=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\Big[\int_0^1 \lambda^{\alpha}\{(L_n+\lambda I)^{-1}-(L_{m,n}+\lambda I)^{-1}\}\,d\lambda$$
$$+\int_1^\infty \lambda^{\alpha-1}\{L_{m,n}(L_{m,n}+\lambda I)^{-1}-L_n(L_n+\lambda I)^{-1}\}\,d\lambda\Big].$$

Dans les intégrales du deuxième membre, on a

$$(L_n+\lambda I)^{-1}-(L_{m,n}+\lambda I)^{-1}=\frac{1}{\lambda(\lambda+1)}\Big\{L_{m,n\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)}-L_{n\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)}\Big\},$$

et

$$L_{m,n}(L_{m,n}+\lambda I)^{-1}-L_n(L_n+\lambda I)^{-1}=\frac{1}{\lambda+1}\Big\{L_{m,n\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)}-L_{n\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)}\Big\}.$$

On les met dans les intégrales et l'on a, grâce à (2.14),

$$\| L_{m,n}^{\alpha}-L_n^{\alpha}\| \leqq C_2 n\left|\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\right|\int^\infty \lambda^{\mathrm{Re}\,\alpha-1}\{(m+n)\lambda+n\}^{-1}\,d\lambda$$
$$\leqq C_2'(\alpha, n)\,(m+n)^{-\mathrm{Re}\,\alpha},$$

avec une constante $C_2'(\alpha, n)$ indépendante de m. $\| L_{m,n}^{\alpha}-L_n^{\alpha}\|$ converge donc vers zéro lorsque $m\to\infty$.

Nous pouvons démontrer, de façon analogue, que

$$T^{-\alpha}\, T_n^{\alpha} = T_n^{\alpha}\, T^{-\alpha}.$$

Nous avons ainsi supprimé l'hypothèse que T lui-même soit borné. La relation (2.6) se prolonge, dans le cas présent, holomorphiquement dans $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$. En somme, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1. — *Supposons que l'opérateur T, linéaire et fermé du domaine $\mathcal{D}[T]$ dense dans $\mathcal{H}$, satisfasse à la condition* (2.1). *Alors, nous avons*

$$(2.15)\qquad T^{-\alpha}\, T_n^{\alpha} = T_n^{\alpha}\, T^{-\alpha} = L_n^{\alpha} \qquad \textit{pour}\quad n > 0 \quad \textit{et}\quad \mathrm{Re}\,\alpha > 0,$$
$$\textit{où}\ L_n = (n^{-1}T + I)^{-1}\ \textit{et}\ T_n = TL_n.$$

REMARQUE 2.1. — Sous les hypothèses de la proposition 2.1, nous avons la formule suivante qui se démontre grâce à (2.15)

$$(2.16)\qquad L_n^{\alpha}\, L_n^{\beta} = L_n^{\beta}\, L_n^{\alpha} = L_n^{\alpha+\beta} \qquad \text{pour}\quad \mathrm{Re}\,\alpha,\ \mathrm{Re}\,\beta > 0.$$

REMARQUE 2.2. — Dans le n° 2.2, la formule (2.8), dont l'intégrale est égale à L_n^{α}, s'écrit encore

$$(2.17)\quad L_n^{\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_n^{\infty} (n^{-1}\lambda - 1)^{-\alpha} (T + \lambda I)^{-1}\, d\lambda \qquad \text{pour}\quad 0 < \mathrm{Re}\,\alpha < 1.$$

Par approximation au moyen de T_m comme ci-dessus, on montre que(2.17) est valable pour tout T satisfaisant aux hypothèses de la proposition 2.1 (pas nécessairement borné).

Pour le démontrer, nous écrivons, pour T non borné,

$$L_n^{\alpha} - \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_n^{\infty} (n^{-1}\lambda - 1)^{-\alpha} (T + \lambda I)^{-1}\, d\lambda$$
$$= (L_n^{\alpha} - L_{m,n}^{\alpha}) - \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_n^{\infty} (n^{-1}\lambda - 1)^{-\alpha} \{ (T + \lambda I)^{-1} - (T_m + \lambda I)^{-1} \}\, d\lambda,$$
$$(T + \lambda I)^{-1} - (T_m + \lambda I)^{-1} = T(T + \lambda I)^{-1} (T_m + \lambda I)^{-1} (L_m - I),$$

où la norme de $T(T + \lambda I)^{-1} (T_m + \lambda I)^{-1}$ se majore par $\mathrm{Cte}\,(\lambda + 1)^{-1}$ indépendamment de $m > 0$ assez grand. D'autre part, $L_m - I$ converge fortement vers zéro lorsque $m \to \infty$. Donc, l'intégrale du deuxième membre de la première formule converge fortement vers zéro lorsque $m \to \infty$, tandis que $\mathrm{L}_n^{\alpha} - L_{m,n}^{\alpha}$ converge vers zéro en norme.

3. **Résultats préliminaires.**

Nous revenons maintenant à l'opérateur

$$(1.1)\qquad A = H + K$$

dont les hypothèses ont été précisées dans le paragraphe 1. Comme A possède les propriétés de T qu'on a posées au début du paragraphe 2, nous pouvons définir ses puissances fractionnaires $A^{-\alpha}$ par (2.3) et A^{α} par (2.4) pour $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$, c'est-à-dire

$$(3.1)\quad A^{-\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha}(A + \lambda I)^{-1}\, d\lambda \qquad \text{pour} \quad 0 < \operatorname{Re}\alpha < 1;$$

$$(3.2)\quad \begin{bmatrix} \mathcal{D}[A^{\alpha}] = \mathcal{R}[A^{-\alpha}] \text{ et } A^{\alpha} u = (A^{-\alpha})^{-1} u \text{ pour } u \in \mathcal{R}[A^{-\alpha}], \\ \text{où } 0 < \operatorname{Re}\alpha < 1 \end{bmatrix}.$$

L'opérateur $A^{-\alpha}$, défini encore par (2.2), est une fonction de α à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, holomorphe dans $\operatorname{Re}\alpha > 0$.

Soit $n > 0$, et posons de nouveau

$$I_n = (n^{-1} H + I)^{-1}, \qquad H_n = H I_n,$$
$$J_n = (n^{-1} A + I)^{-1} \qquad \text{et} \qquad A_n = A J_n.$$

Pour H_n et A_n, qui appartiennent à $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ ainsi que leurs résolvantes pour $\lambda \geqq 0$, on peut définir H_n^{α} et A_n^{α} par la formule (2.4)″ pour $0 \leqq \operatorname{Re}\alpha < 1$, et par le prolongement analytique, pour tout $\alpha \in \mathbf{C}^1$. Nous avons vu aussi dans le paragraphe 2 que la puissance fractionnaire J_n^{α} est une fonction de α à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, holomorphe dans $\operatorname{Re}\alpha > 0$ et que J_n^{α} a la représentation intégrale (2.17) pour $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$, c'est-à-dire

$$(3.3)\quad J_n^{\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_n^\infty (n^{-1}\lambda - 1)^{-\alpha} (A + \lambda I)^{-1}\, d\lambda \qquad \text{pour} \quad 0 < \operatorname{Re}\alpha < 1.$$

On a une formule analogue pour I_n^{α}.

D'autre part, la résolution spectrale

$$(3.4)\qquad H = \int_\delta^\infty \mu\, dE_\mu \qquad (\delta > 0)$$

nous donne les représentations suivantes :

$$H^{-\alpha} = \int_\delta^\infty \mu^{-\alpha}\, dE_\mu \qquad \text{pour} \quad \operatorname{Re}\alpha \geqq 0,$$

$$I_n = \int_\delta^\infty (n^{-1}\mu + 1)^{-1}\, dE_\mu,$$

$$H_n = \int_\delta^\infty \mu (n^{-1}\mu + 1)^{-1}\, dE_\mu,$$

$$H_n^{\alpha} = \int_\delta^\infty \{\mu (n^{-1}\mu + 1)^{-1}\}^{\alpha}\, dE_\mu \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbf{C}^1,$$

$$I_n^{\alpha} = \int_\delta^\infty (n^{-1}\mu + 1)^{-\alpha}\, dE_\mu \qquad \text{pour} \quad \operatorname{Re}\alpha \geqq 0.$$

Pour n fixé, l'opérateur I_n^α est une fonction de α à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, holomorphe dans $\operatorname{Re}\alpha > 0$, bornée et fortement continue dans $\operatorname{Re}\alpha \geqq 0$. Et pour α fixé dans $\operatorname{Re}\alpha \geqq 0$, I_n^α converge fortement vers I lorsque $n \to \infty$, et sa norme se majore par 1 indépendamment de n et de α.

Nous allons examiner les puissances fractionnaires de A, A_n et de J_n en détail, et les comparer avec celles de H, H_n et de I_n. Toutes les constantes C_1, C_2, etc., qui sont utilisées dans ce paragraphe et dans le suivant, sont indépendantes de celles du paragraphe 2.

D'abord, nous nous rappelons de l'hypothèse du paragraphe 1

$$(1.4)\qquad \|(A+\lambda I)^{-1}-(H+\lambda I)^{-1}\| \leqq a(\lambda) \qquad \text{pour}\quad \lambda \geqq 0.$$

La formule (3.3) entraîne

$$(3.5)\qquad \begin{cases} J_n^\alpha - I_n^\alpha = \dfrac{\sin\pi\alpha}{\pi}\displaystyle\int_n^\infty (n^{-1}\lambda - 1)^{-\alpha}\{(A+\lambda I)^{-1}-(H+\lambda I)^{-1}\}\,d\lambda \\ \qquad\qquad \text{pour}\quad 0 < \operatorname{Re}\alpha < 1, \end{cases}$$

d'où l'on a

$$(3.6)\qquad \begin{cases} \|J_n^\alpha - I_n^\alpha\| \leqq \left|\dfrac{\sin\pi\alpha}{\pi}\right| \displaystyle\int_n^\infty (n^{-1}\lambda - 1)^{-\operatorname{Re}\alpha}\, a(\lambda)\,d\lambda \\ \qquad\qquad \text{pour}\quad 0 < \operatorname{Re}\alpha < 1. \end{cases}$$

Nous posons

$$(3.7)\qquad \begin{cases} a_0(n) = \sup\limits_{\lambda \geqq n} \lambda\, a(\lambda) \qquad \text{et} \qquad a_1(n) = \displaystyle\int_n^\infty a(\lambda)\,d\lambda \\ \qquad\qquad \text{pour}\quad n > 0. \end{cases}$$

On a alors l'estimation

$$(3.8)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_n^\infty (n^{-1}\lambda - 1)^{-\operatorname{Re}\alpha}\, a(\lambda)\,d\lambda \leqq \dfrac{1}{1-\operatorname{Re}\alpha}\{a_0(n) + a_1(2n)\} \\ \qquad\qquad \text{pour}\quad 0 \leqq \operatorname{Re}\alpha < 1. \end{cases}$$

[En effet, on a

$$\int_n^{2n} (n^{-1}\lambda - 1)^{-\operatorname{Re}\alpha}\, a(\lambda)\,d\lambda \leqq n \sup_{n \leqq \lambda \leqq 2n} a(\lambda) \cdot \int_1^2 (\mu - 1)^{-\operatorname{Re}\alpha}\,d\mu \leqq \frac{a_0(n)}{1-\operatorname{Re}\alpha}$$

et

$$\int_{2n}^\infty (n^{-1}\lambda - 1)^{-\operatorname{Re}\alpha}\, a(\lambda)\,d\lambda \leqq a_1(2n),$$

car $(n^{-1}\lambda - 1)^{-\operatorname{Re}\alpha} \leqq 1$ pour tout $\lambda \geqq 2n$.]

L'inégalité (3.6) nous montre que nous pouvons passer à la limite lorsque $\operatorname{Re}\alpha \downarrow 0$ sous le signe d'intégrale de (3.5) et que la différence $J_n^\alpha - I_n^\alpha$ est prolongeable continûment en α dans $\operatorname{Re}\alpha \geqq 0$ dans l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ (théorème de Lebesgue). Donc l'inégalité (3.6) est valable pour $0 \leqq \operatorname{Re}\alpha < 1$. En particulier, pour $0 \leqq \operatorname{Re}\alpha \leqq 1/2$, on a, d'après (3.8),

$$(3.9)\quad \| J_n^\alpha - I_n^\alpha \| \leqq \frac{2\,|\sin\pi\alpha|}{\pi}\{a_0(n) + a_1(2n)\} \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq \operatorname{Re}\alpha \leqq \frac{1}{2}.$$

D'autre part, I_n^α étant bornée et fortement continue en α dans $0 \leqq \operatorname{Re}\alpha \leqq 1/2$, J_n^α est donc fortement continue en α dans $0 \leqq \operatorname{Re}\alpha \leqq 1/2$.

Considérons maintenant le cas où $1/2 < \operatorname{Re}\alpha \leqq 1$. On a démontré, dans le paragraphe 2, (2.16), que

$$J_n^\alpha = J_n^{1/2} J_n^{\alpha-1/2} = J_n^{\alpha-1/2} J_n^{1/2}.$$

Donc, en utilisant

$$J_n^\alpha - I_n^\alpha = (J_n^{1/2} - I_n^{1/2}) J_n^{\alpha-1/2} + I_n^{1/2}(J_n^{\alpha-1/2} - I_n^{\alpha-1/2}),$$

on obtient

$$(3.10)\quad \left\{\begin{aligned} \| J_n^\alpha - I_n^\alpha \| &\leqq \frac{2}{\pi}\{a_0(n) + a_1(2n)\} \\ &\quad \times \left[1 + |\cos\pi\alpha| + \frac{2\,|\cos\pi\alpha|}{\pi}\{a_0(n) + a_1(2n)\}\right] \\ &\qquad \text{pour} \quad \frac{1}{2} < \operatorname{Re}\alpha \leqq 1. \end{aligned}\right.$$

On a enfin la proposition suivante :

Proposition 3.1. — *L'opérateur J_n^α, qui est holomorphe de α dans $\operatorname{Re}\alpha > 0$, est prolongeable comme une fonction fortement continue jusqu'à $\operatorname{Re}\alpha \geqq 0$. Et nous obtenons les estimations*

$$(3.11)\qquad \| J_n^\alpha - I_n^\alpha \| \leqq C_1\, \tilde{a}(n) \exp(\pi\,|\operatorname{Im}\alpha|);$$

$$(3.12)\qquad \| J_n^\alpha \| \leqq 1 + C_1\, \tilde{a}(n) \exp(\pi\,|\operatorname{Im}\alpha|)$$

pour $0 \leqq \operatorname{Re}\alpha \leqq 1$, où C_1 est une constante indépendante de α et de n, et

$$(3.13)\qquad \tilde{a}(n) = a_0(n) + a_1(2n).$$

Remarque 3.1. — Il est possible à calculer C_1 avec (3.9) et (3.10). C_1 dépend essentiellement à la borne de $\tilde{a}(n)$ pour $n > 0$. Pour α fixé dans $0 \leqq \operatorname{Re}\alpha \leqq 1$, I_n^α converge fortement vers I lorsque $n \to \infty$, donc J_n^α aussi. Nous allons le démontrer.

Soit, d'abord, $0 \leqq \operatorname{Re}\alpha < 1$. Dans ce cas, la formule (3.5) est valable. Posons

$$B_1 = \int_n^{2n} (n^{-1}\lambda - 1)^{-\alpha}\{(A + \lambda I)^{-1} - (H + \lambda I)^{-1}\}\, d\lambda$$

et

$$B_2 = \int_{2n}^{\infty} (n^{-1}\lambda - 1)^{-\alpha} \{ (A + \lambda I)^{-1} - (H + \lambda I)^{-1} \} \, d\lambda.$$

Pour $x \in \mathcal{H}$ quelconque, on a

$$B_1 x = \int_1^2 (\lambda - 1)^{-\alpha} (J_{n\lambda} x - I_{n\lambda} x) \frac{d\lambda}{\lambda},$$

d'où l'on a

$$\| B_1 x \| \leq \int_1^2 (\lambda - 1)^{-\operatorname{Re}\alpha} \frac{d\lambda}{\lambda} \cdot \sup_{N \geq n} \| J_N x - I_N x \|.$$

On voit donc que l'opérateur $B_1 = B_1(n, \alpha)$ converge fortement vers zéro lorsque $n \to \infty$, car $J_N - I_N$ le fait. Quant à l'opérateur $B_2 = B_2(n, \alpha)$, sa norme se majore par $a_1(2n)$ qui converge vers zéro lorsque $n \to \infty$. En somme, $J_n^\alpha - I_n^\alpha$ converge fortement vers zéro si $0 \leq \operatorname{Re}\alpha < 1$. Soit maintenant $\operatorname{Re}\alpha = 1$. On écrit

$$J_n^\alpha - I_n^\alpha = (J_n^{1/2} - I_n^{1/2})(J_n^{\alpha - 1/2} - I) \\ + (J_n^{1/2} - I_n^{1/2}) + I_n^{1/2}(J_n^{\alpha - 1/2} - I_n^{\alpha - 1/2}),$$

où $J_n^{\alpha-1/2} - I$, $J_n^{1/2} - I_n^{1/2}$ et $J_n^{\alpha-1/2} - I_n^{\alpha-1/2}$ convergent fortement vers zéro lorsque $n \to \infty$, et les autres termes du deuxième membre restent bornés en norme. Donc, $J_n^\alpha - I_n^\alpha$ converge fortement vers zéro lorsque $n \to \infty$, même si $\operatorname{Re}\alpha = 1$.

PROPOSITION 3.2. — *L'opérateur $A^{-\alpha}$, qui est holomorphe de α dans* $\operatorname{Re}\alpha > 0$, *est prolongeable comme une fonction fortement continue jusqu'à* $\operatorname{Re}\alpha \geq 0$. *Et nous avons l'estimation*

$$\| A^{i\eta} \| \leq C_2 \, e^{\pi |\eta|} \quad \text{pour } \eta \text{ réel,} \tag{3.14}$$

avec une constante C_2 indépendante de η.

Preuve. — Soient $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$ et η réel. Nous avons, par (2.3),

$$A^{-\alpha} - H^{-\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda^{-\alpha} \{ (A + \lambda I)^{-1} - (H + \lambda I)^{-1} \} \, d\lambda.$$

Lorsque α tend vers $-i\eta$ dans $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$, l'intégrale du deuxième membre converge dans l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ (théorème de Lebesgue); d'autre part, $H^{-\alpha}$ converge fortement vers $H^{i\eta}$. Donc, nous pouvons prolonger $A^{-\alpha}$ comme une fonction fortement continue jusqu'à $\mathrm{Re}\,\alpha \geqq 0$ en posant

$$A^{i\eta} = H^{i\eta} + \lim_{\substack{-\alpha \to i\eta \\ \mathrm{Re}\,\alpha > 0}} (A^{-\alpha} - H^{-\alpha})$$

$$= H^{i\eta} + \frac{\sin \pi (-i\eta)}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda^{i\eta} \{ (A + \lambda I)^{-1} - (H + \lambda I)^{-1} \} \, d\lambda.$$

La dernière intégrale se majore en norme par $a_1(0)\pi^{-1} e^{\pi|\eta|}$, et l'on a $\| H^{i\eta} \| = 1$. Donc, on a (3.14) avec $C_2 = 1 + a_1(0)/\pi$.

C. Q. F. D.

Corollaire 3.1. — *Soit $n > 0$. L'égalité*

$$A^{-\alpha} A_n^{\alpha} = A_n^{\alpha} A^{-\alpha} = J_n^{\alpha} \tag{3.15}$$

est prolongeable comme une relation fortement continue en α jusqu'à $\mathrm{Re}\,\alpha \geqq 0$.

Remarque 3.2. — La relation

$$A^{-\alpha} A^{-\beta} = A^{-\beta} A^{-\alpha} = A^{-\alpha-\beta} \qquad \text{pour} \quad \mathrm{Re}\,\alpha,\ \mathrm{Re}\,\beta > 0,$$

est aussi valable jusqu'à $\mathrm{Re}\,\alpha$, $\mathrm{Re}\,\beta \geqq 0$. En particulier, on a $A^{i\eta} A^{-i\eta} = A^{-i\eta} A^{i\eta} = I$ pour η réel. Donc, (3.15) implique

$$A_n^{i\eta} = A^{i\eta} J_n^{i\eta} = J_n^{i\eta} A^{i\eta} \quad \text{pour } \eta \text{ réel et } n > 0. \tag{3.16}$$

4. Démonstration du théorème.

Nous allons démontrer le théorème énoncé dans le paragraphe 1, c'est-à-dire les inégalités, pour $0 < \xi < 1$,

$$\| A^{\xi} H^{-\xi} \| \leqq C . C' . (C'' \| A H^{-1} \|)^{\xi} \exp\left(2\pi \sqrt{\xi(1-\xi)}\right); \tag{1.6}$$

$$\| H^{\xi} A^{-\xi} \| \leqq C . \| H A^{-1} \|^{\xi} \exp\left(\pi \sqrt{\xi(1-\xi)}\right), \tag{1.7}$$

avec

$$C = C_2, \qquad C' = 1 + C_1 \varlimsup_{n \to \infty} \tilde{a}(n) \qquad \text{et} \qquad C'' = 1 + \varlimsup_{n \to \infty} a_0(n).$$

Pour cela, nous allons voir que les opérateurs

$$A_n^{\xi} H^{-\xi} \quad \text{et} \quad H_n^{\xi} A^{-\xi} \qquad \text{pour} \quad n > 0,$$

sont uniformément bornés en n et qu'ils convergent fortement vers les opérateurs $A^{\xi} H^{-\xi}$ et $H^{\xi} A^{-\xi}$ respectivement lorsque $n \to \infty$.

Posons

$$F_n(\alpha) = e^{\chi\alpha(\alpha-1)} M_n^{-\alpha} A_n^{\alpha} H^{-\alpha}, \qquad M_n = \| A_n H^{-1} \|,$$

$$G_n(\alpha) = e^{\chi\alpha(\alpha-1)} N_n^{-\alpha} H_n^{\alpha} A^{-\alpha}, \qquad N_n = \| H_n A^{-1} \|,$$

où $\varkappa$ est une constante positive à choisir plus tard. $F_n(\alpha)$ et $G_n(\alpha)$ sont des fonctions de α à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, holomorphes dans $0 < \operatorname{Re}\alpha \leqq 1$, bornées et fortement continues dans $0 \leqq \operatorname{Re}\alpha \leqq 1$. On obtient les évaluations des valeurs au bord :

$$\| F_n(i\eta) \|, \quad \| F_n(1 + i\eta) \| \leqq e^{-\varkappa\eta^2} \| A_n^{i\eta} \|,$$
$$\| G_n(i\eta) \|, \quad \| G_n(1 + i\eta) \| \leqq e^{-\varkappa\eta^2} \| A^{-i\eta} \|,$$

où η est réel quelconque. On a, par (3.12), (3.14) et par (3.16),

$$\| A^{-i\eta} \| \leqq C_2\, e^{\pi|\eta|},$$
$$\| A_n^{i\eta} \| \leqq \| A^{i\eta} \| . \| J_n^{i\eta} \| \leqq C_2\, e^{\pi|\eta|}(1 + C_1\, \tilde{a}(n)\, e^{\pi|\eta|}).$$

Les valeurs au bord de $F_n(\alpha)$ et de $G_n(\alpha)$ se majorent donc par

$$C_2 \left\{ \exp\left(\frac{\pi^2}{4\varkappa}\right) + C_1\, \tilde{a}(n) \exp\left(\frac{\pi^2}{\varkappa}\right) \right\} \quad \text{et par} \quad C_2 \exp\left(\frac{\pi^2}{4\varkappa}\right)$$

respectivement. Du principe du maximum, il résulte que

$$\| F_n(\alpha) \| \leqq C_2 \left\{ \exp\left(\frac{\pi^2}{4\varkappa}\right) + C_1\, \tilde{a}(n) \exp\left(\frac{\pi^2}{\varkappa}\right) \right\}$$

et que

$$\| G_n(\alpha) \| \leqq C_2 \exp\left(\frac{\pi^2}{4\varkappa}\right),$$

pour tout α dans $0 \leqq \operatorname{Re}\alpha \leqq 1$. Nous posons $\alpha = \xi$ et $\varkappa = \dfrac{\pi}{2\sqrt{\xi(1-\xi)}}$, nous avons donc

$$(4.1) \quad \| A_n^{\xi} H^{-\xi} \| \leqq C_2 M_n^{\xi} \left\{ \exp(\pi \sqrt{\xi(1-\xi)}) + C_1\, \tilde{a}(n) \exp(2\pi\sqrt{\xi(1-\xi)}) \right\},$$

$$(4.2) \quad \| H_n^{\xi} A^{-\xi} \| \leqq C_2 N_n^{\xi} \exp(\pi \sqrt{\xi(1-\xi)}).$$

Soit maintenant $u \in \mathcal{H}$ quelconque; posons, pour α fixé dans $0 \leqq \operatorname{Re}\alpha \leqq 1$,

$$v_n = A_n^{\alpha} H^{-\alpha} u \qquad \text{et} \qquad w_n = H_n^{\alpha} A^{-\alpha} u.$$

Montrons que v_n et w_n convergent fortement vers $A^{\alpha} H^{-\alpha} u$ et vers $H^{\alpha} A^{-\alpha} u$ respectivement lorsque $n \to \infty$. On a d'abord, $A^{-\alpha} v_n = J_n^{\alpha} H^{-\alpha} u$. Comme J_n^{α} converge fortement vers I, on a $A^{-\alpha} v_n \to H^{-\alpha} u$ (fort). D'autre part, $\{ v_n \}$ étant une suite bornée, on peut extraire une suite partielle faiblement convergente vers une limite v_0. On a alors

$$H^{-\alpha} u = A^{-\alpha} v_0 \in \mathcal{D}[A^{\alpha}] \qquad \text{et} \qquad A^{\alpha} H^{-\alpha} u = v_0.$$

Donc,

$$v_n = A_n^\alpha A^{-\alpha} v_0 = J_n^\alpha v_0 \to v_0 \text{ (fort)},$$

c'est-à-dire $v_n \to A^\alpha H^{-\alpha} u$ (fort). De la même façon, on montre que $w_n \to H^\alpha A^{-\alpha} u$ (fort).

Nous avons donc

$$\| A^\xi H^{-\xi} u \| = \lim_{n\to\infty} \| A_n^\xi H^{-\xi} u \|$$

et

$$\| H^\xi A^{-\xi} u \| = \lim_{n\to\infty} \| H_n^\xi A^{-\xi} u \|.$$

Nous allons ensuite évaluer les nombres M_n et N_n. L'inégalité (1.4) nous donne tout de suite

$$\| J_n \| \leqq \| I_n \| + n\, a(n) \leqq 1 + a_0(n),$$

d'où l'on a

$$M_n \leqq \| J_n \| . \| AH^{-1} \| \leqq \{ 1 + a_0(n) \} \| AH^{-1} \|.$$

D'autre part, on a

$$N_n \leqq \| I_n \| . \| HA^{-1} \| \leqq \| HA^{-1} \|.$$

Donc, les limites supérieures des deuxièmes membres de (4.1) et de (4.2) ne dépassent pas les deuxièmes membres de (1.6) et (1.7) respectivement avec les constantes C, C' et C'' indiquées ci-dessus.

Nous avons ainsi établi le théorème.

C. Q. F. D.

REMARQUE 4.1. — Dans l'hypothèse (III) sur A, nous supposons une condition supplémentaire :

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\, a(\lambda) = 0.$$

L'hypothèse (III)', par exemple, implique cette condition.

Alors la limite supérieure du deuxième membre de (4.1) ne dépasse pas $C \| AH^{-1} \|^\xi \exp(\pi \sqrt{\xi(1-\xi)})$, avec $C = C_2$. Donc (1.6) devient de la même forme que (1.7), c'est-à-dire

$$\| A^\xi H^{-\xi} \| \leqq C \| AH^{-1} \|^\xi \exp(\pi \sqrt{\xi(1-\xi)}). \tag{4.3}$$

Nous allons maintenant ajouter une généralisation du théorème. On suppose toujours (I) et (II) sur H et K. Nous remplaçons encore (III) par une condition légèrement plus faible :

$(\widetilde{\text{III}})$ *Il existe une constante C positive, telle que*

$$\| (A + \lambda I)^{-1} \| \leqq C(\lambda + 1)^{-1}$$

pour $\lambda \geqq 0$, *et il existe un entier positif k tel que la norme de*

$$(A+\lambda I)^{-k}-(H+\lambda I)^{-k}$$

soit majorée par $a(\lambda)$, *c'est-à-dire*

$$\| (A+\lambda I)^{-k}-(H+\lambda I)^{-k} \| \leqq a(\lambda) \quad \textit{pour tout } \lambda \geqq 0, \tag{$\widetilde{1.4}$}$$

où $a(\lambda)$ *est une fonction continue, bornée, ainsi que* $\lambda^k a(\lambda)$ *pour* $\lambda \geqq 0$, *et de plus satisfaisant à la condition*

$$\int_0^\infty \lambda^{k-1} a(\lambda)\, d\lambda < \infty. \tag{$\widetilde{1.5}$}$$

Nous avons donc le corollaire suivant :

COROLLAIRE 4.1. — *Sous les hypothèses* (I), (II) *et* $(\widetilde{\mathrm{III}})$, *le domaine de* A^ξ *est égal à celui de* H^ξ *pour* $0<\xi<1$, *et nous avons les inégalités* (1.6) *et* (1.7) *avec les constantes C, C' et C'' modifiées convenablement.*

Preuve. — Le théorème était essentiellement un résultat des propositions 2.1, 3.1 et 3.2. Pour la proposition 2.1, il n'y a rien à changer. Ce sont les deux dernières que l'on doit modifier.

La proposition 3.1 a été obtenue par (3.5), qui nous donne, par la répétition d'intégration par parties,

$$\left\{\begin{aligned} J_n^\alpha - I_n^\alpha = {} & \frac{n^{k-1}\Gamma(1-\alpha)(k-1)!}{\Gamma(k-\alpha)} \frac{\sin\pi\alpha}{\pi} \\ & \times \int_0^\infty (n^{-1}\lambda-1)^{k-1-\alpha} \{ (A+\lambda I)^{-k}-(H+\lambda I)^{-k} \}\, d\lambda \\ & \text{pour} \quad 0<\operatorname{Re}\alpha<1. \end{aligned}\right. \tag{$\widetilde{3.5}$}$$

On en établit la proposition 3.1, surtout les inégalités (3.11) et (3.12) avec (3.13), en posant, cette fois,

$$\left\{\begin{aligned} & a_0(n) = \sup_{\lambda \geqq n} \lambda^k a(\lambda) \\ & \text{et} \\ & a_1(n) = \int_n^\infty \lambda^{k-1} a(\lambda)\, d\lambda \qquad \text{pour} \quad n>0. \end{aligned}\right. \tag{$\widetilde{3.7}$}$$

Quant à la proposition 3.2, on part de

$$\begin{aligned} A^{-\alpha}-H^{-\alpha} = {} & \frac{\Gamma(1-\alpha)(k-1)!}{\Gamma(k-\alpha)} \frac{\sin\pi\alpha}{\pi} \\ & \times \int_0^\infty \lambda^{k-1-\alpha} \{ (A+\lambda I)^{-k}-(H+\lambda I)^{-k} \}\, d\lambda \\ & \text{pour} \quad 0<\operatorname{Re}\alpha<1. \end{aligned}$$

Nous obtenons la même conclusion, surtout (3.14) avec la constante C_2 modifiée suivant $(\widetilde{3.7})$. C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KATO (Tosio). — Fractional powers of dissipative operators, I and II, *J. math. Soc. Japan*, t. 13, 1961, p. 246-274; c. 14, 1962, p. 242-248.

[2] KATO (Tosio). — A generalization of the Heinz inequality, *Proc. Japan Acad.*, t. 37, 1961, p. 305-308.

[3] LIONS (Jacques-Louis). — Espaces d'interpolation et domaines de puissances fractionnaires d'opérateurs, *J. math. Soc. Japan*, t. 14, 1962, p. 233-241.

(Manuscrit reçu le 7 mars 1968.)

Norio SHIMAKURA,
Maison du Japon,
7-C, boulevard Jourdan, 75-Paris, 14e.