BULLETIN DE LA S. M. F.

CH. HERMITE

Sur l'indice des fractions rationnelles

Bulletin de la S. M. F., tome 7 (1879), p. 128-131
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1879__7__128_1>

Sur l'indice des fractions rationnelles; par M. Hermite.

(Séance du 25 avril 1879.)

Soient U et V deux polynômes de degré n et $n-1$, que je supposerai premiers entre eux; je me propose de montrer, par une considération directe et entièrement élémentaire, que l'indice de la fraction $\frac{V}{U}$, entre les limites $-\infty$ et $+\infty$ de la variable, donne la différence entre le nombre des racines imaginaires de l'équation $U+iV=0$, où le coefficient de i est positif, et le nombre de ces racines où il est négatif. Soit, à cet effet,

$$U+iV=(x-a_1-ib_1)(x-a_2-ib_2)\ldots(x-a_n-ib_n),$$

et posons

$$U_1+iV_1=(x-a_2-ib_2)\ldots(x-a_n-ib_n),$$

de sorte qu'on ait

$$U+iV=(x-a_1-ib_1)(U_1+iV_1),$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} U &= (x-a_1)U_1+b_1V_1, \\ V &= -b_1U_1+(x-a_1)V_1. \end{aligned}$$

Je remarque d'abord qu'il résulte de ces relations que les polynômes U et U_1 sont premiers entre eux; car autrement U et V auraient un diviseur commun, contre la supposition faite. Cela posé, l'égalité

$$(U+iV)(U_1-iV_1)=(x-a_1-ib_1)(U_1^2+V_1^2)$$

donne, en égalant dans les deux membres les coefficients de i,

$$VU_1-UV_1=-b_1(U_1^2+V_1^2)$$

ou bien

$$\frac{V}{U} - \frac{V_1}{U_1} = -\frac{b_1(U_1^2 + V_1^2)}{UU_1}.$$

Faisons croître maintenant la variable de $-\infty$ à $+\infty$; puisque les polynômes U et U_1 ne peuvent s'évanouir pour la même valeur, on voit que l'indice du premier membre sera la différence des indices des fractions $\frac{U}{V}$ et $\frac{U_1}{V_1}$, qui va s'obtenir immédiatement.

Supprimons, en effet, le facteur positif $U_1^2 + V_1^2$; nous sommes amené à la quantité $\frac{-b_1}{UU_1}$, dont la réciproque a un indice nul, de sorte qu'il suffit d'appliquer la proposition contenue dans l'égalité

$$\mathop{\mathrm{I}}_{x_0}^{x_1} f(x) + \mathop{\mathrm{I}}_{x_0}^{x_1} \frac{1}{f(x)} = \varepsilon,$$

où $\varepsilon = +1$ lorsque $f(x_0) > 0$, $f(x_1) < 0$, $\varepsilon = -1$ si l'on a $f(x_0) < 0$, $f(x_1) > 0$, et enfin $\varepsilon = 0$ lorsque $f(x_0)$ et $f(x_1)$ sont de même signe. Dans le cas présent, $x_0 = -\infty$, $x_1 = +\infty$; d'ailleurs U et U_1 sont de degrés n et $n-1$: il en résulte que ε sera $+1$ ou -1 suivant que b_1 sera positif ou négatif.

La proposition énoncée à l'égard de l'équation $U + iV = 0$, de degré n, se trouve ainsi ramenée au cas de l'équation $U_1 + iV_1 = 0$, dont le degré est moindre d'une unité, et, de proche en proche, on arrivera au cas le plus simple, à savoir

$$x - a_n - ib_n = 0,$$

où elle se vérifie immédiatement.

Une première conséquence à en tirer, c'est que, en désignant par I l'indice de $\frac{V}{U}$, c'est-à-dire l'excès du nombre de fois que cette fraction, en devenant infinie, passe du positif au négatif sur le nombre de fois qu'elle passe du négatif au positif, le nombre des racines imaginaires de l'équation $U + iV = 0$ dans lesquelles le coefficient de i est positif est donné par la formule $\frac{I+n}{2}$.

Supposons ensuite que, en changeant x en $x + i\lambda$, $U + iV$ devienne $U_\lambda + iV_\lambda$, et soit I_λ l'indice de $\frac{V_\lambda}{U_\lambda}$. Le nombre des racines de l'équation proposée dans lesquelles le coefficient de i est supérieur à λ sera $\frac{I_\lambda + n}{2}$; la formule $\frac{I_\lambda - I_{\lambda'}}{2}$ donnera donc, en supposant $\lambda < \lambda'$, le nombre des racines où le coefficient de i est compris entre les deux limites λ et λ'. La transformée déduite de l'équation $U + iV = 0$ par le changement de x en ix conduira d'ailleurs de la même manière au nombre des racines dont la partie réelle est dans un intervalle donné. Considérons encore l'équation en y obtenue en faisant

$$y = \frac{x - g}{h - x}$$

et la droite passant par les points dont les affixes sont g et h. L'indice relatif à cette nouvelle transformée donnera le nombre des racines de la proposée qui sont au-dessus ou au-dessous de cette droite, et, si nous remplaçons g et h par $g + k$ et $h + k$, de manière à définir une seconde droite parallèle à la première, la demi-différence des indices relatifs aux deux transformées représentera le nombre des racines comprises entre les deux parallèles.

En dernier lieu, je remarquerai que, si l'on suppose les quantités $b_1, b_2, \ldots, b_n$ toutes de même signe, on a

$$I = +n \quad \text{ou} \quad I = -n,$$

selon qu'elles seront positives ou négatives. Dans les deux cas, la fraction $\frac{V}{U}$ doit, par conséquent, passer n fois par l'infini lorsque la variable croît de $-\infty$ à $+\infty$; ainsi l'équation $U = 0$ a nécessairement toutes ses racines réelles. C'est donc un nouvel exemple qui s'ajoute, en Algèbre, à l'équation dont dépendent les inégalités séculaires du mouvement elliptique des planètes et qui a été l'objet du travail célèbre de notre confrère M. Borchardt. Je ne tenterai point de suivre la voie qu'a ouverte l'illustre géomètre en appliquant le théorème de Sturm à l'équation $U = 0$ pour obtenir, sous forme de sommes de carrés, les fonctions littérales dont dépendent les conditions de réalité des racines; mais je saisis l'occasion d'employer, pour démontrer directement la propriété que j'ai en vue, une méthode que Sturm a lui-même donnée dans une Note du

Journal de M. Liouville, publiée à la suite d'un travail de M. Gascheau, intitulé *Application du théorème de Sturm aux transformées des équations binômes,* t. VII, p. 126 (*voir* aussi le *Cours d'Algèbre supérieure* de M. Serret, t. I, p. 183). J'introduis, à cet effet, la série entière des polynômes $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}$, en posant

$$U_k + iV_k = (x - a_{k+1} - ib_{k+1})(x - a_{k+2} - ib_{k+2})\ldots(x - a_n - ib_n),$$

et je remarque que la suite

$$U,\ U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_{n-1},\ 1$$

présente n variations pour $x = -\infty$ et n permanences pour $x = +\infty$. J'observe ensuite que trois fonctions consécutives quelconques, par exemple U, U_1, U_2, sont liées par la relation

$$b_2 U - [b_1(x - a_2) + b_2(x - a_1)]U_1 + b_1[(x - a_2)^2 + b_2^2]U_2 = 0.$$

Sous la condition admise à l'égard des quantités $b_1, b_2, \ldots$, on voit donc que, quand une fonction s'annule, la précédente et la suivante sont de signes contraires; il en résulte que, en faisant croître la variable de $-\infty$ à $+\infty$, des changements dans le nombre des variations de la suite considérée ne peuvent se produire qu'autant que c'est la première fonction qui s'évanouit. Puisqu'on perd n variations, il est donc démontré que le polynôme U passe n fois par zéro; en même temps nous voyons que, à l'égard de U, la fonction U_1 possède la propriété caractéristique de la dérivée, c'est-à-dire que le rapport $\frac{U}{U_1}$ passe toujours, en s'évanouissant, du négatif au positif, pour des valeurs croissantes de la variable.