BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-PIERRE FERRIER

Ensembles spectraux et approximation polynomiale pondérée

Bulletin de la S. M. F., tome 96 (1968), p. 289-335

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1968__96__289_0>

Bull. Soc. math. France,
96, 1968, p. 289 à 335.

ENSEMBLES SPECTRAUX ET APPROXIMATION POLYNOMIALE PONDÉRÉE

PAR

JEAN-PIERRE FERRIER (*).

Table des matières.

Index des notations.

Notations latines.

(*) *Thèse Sc. math.*, Paris, 1968.

Index des notations (*suite*).

Notations latines.

Notations grecques.

Autres signes.

Le but de l'étude qui suit est de généraliser quelques théorèmes classiques d'approximation polynômiale pondérée et, en particulier, d'aborder un problème de spectre relatif dans les algèbres complètes qui est en liaison étroite avec cette approximation.

On sait que le problème classique de l'approximation polynômiale pondérée, posé par S. Bernstein en 1924, est le suivant : $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ désignant l'algèbre de Banach des fonctions numériques continues sur $\mathbf{R}$ qui tendent vers zéro à l'infini et $\mathbf{R}[\xi]$ l'algèbre des fonctions polynômes sur $\mathbf{R}$, on appelle poids toute fonction numérique w sur $\mathbf{R}$ telle que $\mathbf{R}[\xi]w$ soit contenu dans $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$; un poids w est dit fondamental si $\mathbf{R}[\xi]w$ est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$. Le problème consiste à déterminer les poids w qui sont fondamentaux. Il a été étudié en particulier par S. Bernstein [2], L. Carleson [5] et résolu en 1955 par H. Pollard [19] qui a montré qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un poids w soit fondamental est qu'il ne s'annule pas et que

$$\sup_{p \in \mathbf{R}[\xi],\, |pw| \leq 1} \int_{\mathbf{R}} \frac{\log^+ |p(u)|}{1 + u^2}\, du = +\infty. \tag{1}$$

Divers raffinements ont été apportés, en particulier par S. N. MERGELJAN [14]. En fait, H. POLLARD a également étudié un problème voisin, celui dans lequel $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ est remplacé par $\mathcal{L}^p(\mathbf{R})$ et donné pour ce dernier une condition nécessaire et suffisante analogue. Or nous prouvons que, pour qu'un poids (resp. un poids au sens de $\mathcal{L}^p$) soit fondamental, il est nécessaire et suffisant qu'il ne s'annule pas (resp. qu'il soit presque partout non nul) et que $\mathbf{R}[\xi]$ soit dense dans l'algèbre $\mathcal{C}_p(\mathbf{R})$ des fonctions continues sur $\mathbf{R}$ à croissance polynômiale (i. e. majorées à l'infini par un polynôme en $|\xi|$) pour la semi-norme $f \mapsto \|fw\|_\infty$ (resp. $f \mapsto \|fw\|_p$).

On peut donc, plus généralement, se donner une semi-norme finie π sur $\mathcal{C}_p(\mathbf{R})$ et rechercher à quelle condition $\mathbf{R}[\xi]$ est dense dans $\mathcal{C}_p(\mathbf{R})$ pour π. Nous avons montré dans [8] qu'une condition suffisante était que l'on ait

$$\sup_{p \in \mathbf{R}[\xi],\, \pi(p) \leqq 1} \int_{\mathbf{R}} \frac{\log^+ |p(u)|}{1 + u^2}\, du = +\infty \tag{2}$$

lorsque la semi-norme π était croissante, i. e. vérifiait $\pi(f) \leqq \pi(g)$ dès que $|f| \leqq |g|$.

Nous envisageons également le cas complexe, c'est-à-dire celui où $\mathbf{R}$ est remplacé par un ensemble fermé Σ de $\mathbf{C}$. Si $\mathbf{C}[\sigma]$ désigne l'algèbre des fonctions polynômes sur Σ et $\mathcal{C}_p(\Sigma)$ l'algèbre des fonctions continues sur Σ à croissance polynômiale, le problème consiste à déterminer les semi-normes π finies croissantes sur $\mathcal{C}_p(\Sigma)$ telles que $\mathbf{C}[\sigma]$ soit dense dans $\mathcal{C}_p(\Sigma)$ pour π. En réalité, l'étape intéressante réside dans la densité pour π de $\mathbf{C}[\sigma]$ dans l'algèbre $\mathbf{C}(\sigma)$ des fonctions rationnelles régulières sur Σ. On est donc amené à considérer une semi-norme finie croissante π définie seulement sur $\mathbf{C}(\sigma)$; nous dirons que π est fondamentale si $\mathbf{C}[\sigma]$ est dense dans $\mathbf{C}(\sigma)$ pour π, définition que nous avons adoptée dans [9]. Si π est définie sur $\mathcal{C}_p(\Sigma)$ et est finie croissante, la densité de $\mathbf{C}(\sigma)$ dans $\mathcal{C}_p(\Sigma)$ pour π a lieu, par exemple, lorsque Σ est de mesure nulle ou lorsqu'il est d'intérieur vide et que les composantes connexes de son complémentaire sont en nombre fini.

Nous généralisons la condition suffisante de H. POLLARD à des ensembles fermés privilégiés de $\mathbf{C}$ que nous appelons ensembles d'approximation. Nous montrons que si Σ est un ensemble d'approximation, pour qu'une semi-norme finie croissante π sur $\mathbf{C}(\sigma)$ soit fondamentale, il suffit que, pour toute composante connexe Ω de $\complement \Sigma$, il existe un point s de Ω tel que

$$\sup_{p \in \mathbf{C}[\sigma],\, \pi(p) \leqq 1} \int_{\partial\Omega} \log^+ |p(u)|\, d\mu_s^\Omega(u) = +\infty, \tag{3}$$

où μ_s^Ω est la mesure harmonique au point s dans le domaine Ω. Nous prouvons que sont des ensembles d'approximation les ensembles fermés convexes, les ensembles fermés ayant une frontière de classe $\mathcal{C}^2$ avec une courbure majorée et une direction de normale uniformément continue et les réunions finies d'ensembles de l'un de ces deux types.

Différents auteurs ont étudié l'approximation polynômiale pondérée complexe, notamment M. M. DŽRBAŠJAN dans le cas très particulier où Σ est un angle ou un ensemble de droites parallèles et où le poids vérifie certaines hypothèses de convexité et S. N. MERGELJAN dans le cas d'un ensemble fermé d'intérieur vide et d'un poids quelconques, mais la condition qu'il donne est loin d'être nécessaire.

Nous donnons, en même temps que (3), d'autres conditions s'exprimant en termes de fonctions harmoniques ou surharmoniques positives. Par exemple, si, pour un ouvert Ω de $\mathbf{C}$, nous désignons par $\mathcal{S}(\Omega)$ [resp. $\mathcal{H}(\Omega)$] l'algèbre complète dans laquelle un ensemble borné est un ensemble de fonctions numériques complexes sur Ω dont les modules sont majorés par une même fonction $\exp(f)$, où f est surharmonique (resp. harmonique) positive dans Ω, nous prouvons que, pour qu'une semi-norme finie croissante π sur $\mathbf{C}(\sigma)$ soit fondamentale, il suffit que, pour toute composante connexe Ω de $\complement\Sigma$,

(4) il existe une suite p_n de polynômes qui tende vers zéro pour π et dont on ne puisse extraire aucune suite tendant vers zéro dans $\mathcal{S}(\Omega)$ [resp. $\mathcal{H}(\Omega)$].

Pour ne pas faire jouer un rôle particulier au point à l'infini, nous étudions l'approximation rationnelle. Si Σ est un ensemble quelconque de $\mathbf{C}$, nous disons qu'une semi-norme finie croissante π sur $\mathbf{C}(\sigma)$ est fondamentale si, T désignant l'ensemble $\Sigma \cup \complement\overline{\Sigma}$ et $\mathbf{C}(\tau)$ l'algèbre des fonctions rationnelles régulières sur T, l'image de $\mathbf{C}(\tau)$ dans $\mathbf{C}(\sigma)$ est dense pour π; pour que π soit fondamentale, il suffit, lorsque Σ est d'approximation, que, pour toute composante connexe Ω de $\complement\overline{\Sigma}$, il existe un point s de Ω tel que

$$(5) \qquad \sup_{r \in \mathbf{C}(\tau),\ \pi(r) \leq 1} \int_{\partial\Omega} \log^+ |r(u)|\, d\mu_s^\Omega(u) = +\infty.$$

D'autres conditions sont données, dont une, (6), analogue à la condition (4).

Pour établir ces résultats, il nous faut savoir que certaines formes linéaires sur des algèbres de fonctions rationnelles sont les intégrales associées à des mesures de Radon. Dans le cas des ensembles fermés, nous utilisons un théorème de G. CHOQUET sur les cônes adaptés (*voir* [6] ou encore [15] ou [16]). Dans le cas général, nous faisons appel à la théorie des modules de domination de M. ROGALSKI [20].

Pour obtenir des conditions à la fois nécessaires et suffisantes, nous sommes amenés à étudier les algèbres à élément unité **A** munies d'une bornologie de type convexe. Pour tout élément a de **A**, nous considérons l'ensemble $S(a;\,\mathbf{A})$ complémentaire dans $\mathbf{C}$ de l'ensemble des points s tels que o adhère au sens de Mackey au sous-espace $(a - s)\mathbf{A} - 1$. Nous prouvons que si π est une semi-norme finie croissante sur $\mathbf{C}(\sigma)$ et si **A** est l'image de $\mathbf{C}(\tau)$ dans $\mathbf{C}(\sigma)$ munie de la semi-norme π, alors, σ désignant l'injection canonique de Σ dans $\mathbf{C}$, $S(\sigma;\,\mathbf{A}) \cap \complement\overline{\Sigma}$ est ouvert et fermé dans $\complement\overline{\Sigma}$, et pour que l'on ait $S(\sigma;\,\mathbf{A}) \subset \Sigma$, il faut et il suffit que la semi-norme $\rho : r \mapsto \pi((\sigma - s)r)$, où s est un point quelconque de $\complement\overline{\Sigma}$, soit fondamentale. Le problème initial est donc ramené de cette façon à un problème d'algèbre bornologique si l'on sait que $S(\sigma;\,\mathbf{A}) = S(\sigma;\,\mathbf{B})$, où **B** est l'algèbre sous-jacente à **A** munie de la bornologie pour laquelle un système fondamental de parties bornées est constitué par les homothétiques des enveloppes convexes des B^n, où B est la boule unité de π.

Lorsque Σ est un ensemble d'approximation, des conditions comme (5) et (6) sont encore suffisantes pour que l'on ait $S(\sigma;\,\mathbf{A}) \subset \Sigma$; la condition (6) est également nécessaire. En examinant le cas particulier où $\Sigma = \mathbf{R}$ et où π est associée à un poids, on découvre une différence d'un facteur $(\xi - i)$ avec la condition classique de H. Pollard. On en déduit aussitôt que si w est un poids fondamental (au sens classique ou au sens de $\mathcal{L}^p$), le poids $(1 + |\xi|)^n w$ est encore fondamental.

On sait que certains résultats d'approximation peuvent se déduire de la théorie des classes quasi-analytiques. Inversement, nous retrouvons et généralisons cette dernière grâce aux résultats d'approximation. Nous introduisons pour toute semi-norme π sur $\mathbf{C}[X]$ et tout nombre q de $[1, \infty]$, la classe des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ qui vérifient $\|\mathrm{D}_p(f)\|_q \leq \pi(p)$ pour tout p de $\mathbf{C}[X]$, D_p étant l'opérateur différentiel $p\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dx}\right)$. Nous disons, d'autre part, qu'un sous-ensemble A de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ possède la propriété (Q) si toute fonction non nulle de A ne s'annule en aucun point avec toutes ses dérivées. Nous montrons que, pour toute semi-norme finie π sur $\mathbf{C}[X]$ telle que $S(X;\,\mathbf{C}(X)_\pi) \subset \mathbf{R}$, la classe $\|\mathrm{D}_p(f)\|_2 \leq \pi(p)$ possède la propriété (Q). Il en résulte que, pour qu'une fonction f possède la propriété (Q), il suffit que l'on ait

$$\sup_{p \in \mathbf{C}[X],\ \|\mathrm{D}_p(f)\|_2 \leq 1} \int_{\mathbf{R}} \frac{\log^+|p(u)|}{1 + u^2}\,du = +\infty. \tag{7}$$

Il en résulte aussi que si w est un poids fondamental (au sens classique ou au sens de $\mathcal{L}^p$, $p \geq 2$), sa transformée de Fourier $\hat{w}$ possède la propriété (Q).

Nous montrons que le problème de l'approximation polynômiale pondérée est lié au problème de spectre relatif suivant : Étant donnés une algèbre complète à élément unité **A**, une sous-algèbre unitaire fermée **B** de **A** et un élément a de **B**, que faut-il imposer au spectre de a dans **A** pour qu'il soit égal au spectre de a dans **B** ? Nous étudions ce problème en termes d'ensembles spectraux à l'aide du calcul symbolique de L. Waelbroeck en un élément non régulier (*voir* [22] ou [23]). Nous disons qu'un ensemble Σ, spectral pour a, est fondamental s'il reste spectral dans toute sous-algèbre **B**, et nous prouvons que pour qu'un ensemble Σ, spectral pour a, soit fondamental, il suffit que Σ contienne $\overset{\circ}{\overline{\Sigma}}$ et que, pour toute composante connexe Ω de $\complement \overline{\Sigma}$, il existe un entier n et un point s de Ω tels que, $\mathbf{C}[\zeta]$ étant l'algèbre des fonctions polynômes sur $\mathbf{C}$, on ait

$$\text{(8)} \qquad \sup_{p \in \mathbf{C}[\zeta],\ \|p\,\delta_\Sigma^n\| \leq 1} \int_{\partial\Omega} \log^+ |p(u)|\, d\mu_s^\Omega(u) = +\infty.$$

La condition (8) entraîne que $\overset{\circ}{\Sigma}$ est simplement connexe; elle signifie, d'autre part, que δ_Σ décroît suffisamment vite à l'infini, i. e. que Σ est suffisamment fin vers l'infini. Elle est, par exemple, vérifiée si Σ est l'ensemble des $s = x + iy$ tels que $|y| \leq \alpha \exp(-\beta|x|)$, où α, β sont deux constantes strictement positives.

La considération des seuls ensembles spectraux est insuffisante car elle ne donne aucun renseignement lorsque le spectre est un angle, ou même une bande. Il faut avoir recours aux fonctions spectrales, mais si, pour une fonction spectrale δ telle que, Σ désignant l'ensemble des s tels que $\delta(s) > 0$, $\overset{\circ}{\overline{\Sigma}}$ soit contenu dans Σ, il est facile de voir que, lorsque la condition (8) dans laquelle δ remplace δ_Σ est vérifiée, Σ est alors fondamental, on ne peut en déduire en général que δ est fondamentale, i. e. reste spectrale pour toute sous-algèbre **B**. Il en est toutefois ainsi lorsque δ est de la forme $\chi_\Sigma . (w \circ |\zeta|^{\pi/\varphi})$, où χ_Σ est la fonction d'un ensemble Σ tel que $\overset{\circ}{\overline{\Sigma}} \subset \Sigma$ et que toute composante connexe de $\complement \overline{\Sigma}$ contienne un angle d'ouverture $\varphi (\varphi > 0)$ et w une fonction positive décroissante sur $\mathbf{R}_+$ telle que

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} w(x+y) \geq w(x)\, w(y), \\ \displaystyle\int_{\mathbf{R}} \frac{\log^- w(u)}{1+u^2}\, du = +\infty. \end{cases}$$

Il faut remarquer que le problème général de spectre relatif indiqué est un peu moins fin que celui de l'approximation polynômiale pondérée, ce dernier ne nécessitant pas la donnée d'une structure d'algèbre bornologique. Ce point n'est toutefois pas fondamental comme on pourra le voir *a posteriori* à la lumière des résultats obtenus.

Avant de terminer cette introduction, je voudrais remercier M. CHOQUET pour l'aide précieuse et constante qu'il m'a apportée dans le cadre de son séminaire. Je remercie également M. MALLIAVIN et M. LAZARD qui ont bien voulu faire partie du jury de thèse.

CHAPITRE 1.

Préliminaires.

1. Notations générales.

Dans toute la suite, $\mathbf{C}$ désigne le corps des nombres complexes, $\mathbf{R}$ celui des nombres réels, $\mathbf{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs. Toutes les algèbres considérées sont des algèbres sur $\mathbf{C}$. Nous leur réservons les majuscules grasses ou rondes : $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$. Pour un élément a d'une algèbre à unité $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}[a]$ désigne la sous-algèbre unitaire engendrée par a, $\mathrm{Sp}(a; \mathbf{A})$ ou plus simplement $\mathrm{Sp}(a)$ l'ensemble des points s de $\mathbf{C}$ tels que $a - s$ ne soit pas inversible et pour toute partie Σ de $\mathbf{C}$ contenant $\mathrm{Sp}(a)$, $\mathbf{C}(a; \Sigma)$ la sous-algèbre unitaire engendrée par a et les $(a - s)^{-1}$, où s est dans Σ; $\mathbf{C}(a; \mathrm{Sp}(a))$ est simplement noté $\mathbf{C}(a)$.

Nous désignons par des majuscules grecques Σ, T, Ω des parties de $\mathbf{C}$ et par la minuscule correspondante σ (resp. τ, ω) l'injection canonique de Σ (resp. T, Ω) dans $\mathbf{C}$. Nous désignons par ζ l'application identique de $\mathbf{C}$, par ξ l'injection canonique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, par ξ_+ celle de $\mathbf{R}_+$. Conformément à ce qui précède, $\mathbf{C}[\sigma]$ (resp. $\mathbf{C}[\tau]$, $\mathbf{C}[\zeta]$, $\mathbf{C}[\xi]$) désigne l'algèbre des polynômes en σ (resp. τ, ζ, ξ) et $\mathbf{C}(\sigma)$ [resp. $\mathbf{C}(\tau)$, $\mathbf{C}(\xi)$] l'algèbre des fractions rationnelles en σ (resp. τ, ξ), i. e. des restrictions à Σ (resp. T, $\mathbf{R}$) des fractions rationnelles régulières sur Σ (resp. T, $\mathbf{R}$). Nous désignons par χ_Σ la fonction caractéristique de Σ.

Toutes les fonctions numériques considérées sont, sauf mention contraire, à valeurs complexes. Pour tout espace topologique X, nous désignons par $\mathcal{C}(X)$ l'algèbre des fonctions numériques continues sur X. Lorsque X est localement compact, nous désignons par $\mathcal{C}_0(X)$ l'algèbre de Banach des fonctions de $\mathcal{C}(X)$ qui tendent vers zéro à l'infini (i. e. suivant le filtre des complémentaires des parties compactes) et par $\mathcal{K}(X)$ la sous-algèbre de $\mathcal{C}(X)$ des fonctions à support compact. Si Σ est un ensemble fermé de $\mathbf{C}$, $\mathcal{C}_p(\Sigma)$ désigne la sous-algèbre de $\mathcal{C}(\Sigma)$ des fonctions à croissance polynômiale à l'infini (i. e. majorées par un polynôme en $|\sigma|$). Nous notons $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ l'algèbre des fonctions numériques indéfiniment dérivables sur $\mathbf{R}$ et $\mathcal{D}\mathcal{L}^p(\mathbf{R})$ l'espace des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ dont toutes les dérivées sont dans $\mathcal{L}^p(\mathbf{R})$.

Étant donnés un espace vectoriel E et une semi-norme π sur E, nous notons E_π le sous-espace de E sur lequel π est finie muni de la restriction de la semi-norme π.

2. Terminologie relative aux bornologies et au calcul symbolique.

Dans tout ce qui suit, la terminologie relative aux espaces bornologiques (ou espaces à bornés) est conforme au langage adopté par L. Waelbroeck (*voir* [22] ou [23]), qui se trouve encore développé dans le Séminaire « Banach » [21]. Nous rappelons simplement ici les définitions les plus importantes. La donnée d'une bornologie sur un ensemble E est la donnée d'un ensemble $\mathcal{B}$ de parties de E qui satisfait aux axiomes qui suivent :

(B_1) la réunion de deux éléments de $\mathcal{B}$ appartient à $\mathcal{B}$;

(B_2) toute partie d'un élément de $\mathcal{B}$ appartient à $\mathcal{B}$;

(B_3) $\mathcal{B}$ contient les ensembles réduits à un élément.

Les éléments de $\mathcal{B}$ sont dits ensembles bornés, et tout ensemble muni d'une telle donnée est appelé ensemble bornologique (ou encore ensemble à bornés). Une partie $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{B}$ sera dite un système fondamental de parties bornées, si tout ensemble borné est contenu dans un élément de $\mathcal{B}'$. Étant donnés deux ensembles bornologiques E, F, une application f de E dans F sera dite bornée si l'image par f d'une partie bornée de E est bornée dans F. On définit ainsi une catégorie dont on voit facilement qu'elle possède des limites projectives et inductives quelconques; en particulier, puisque nous n'aurons pas à en considérer d'autre, la limite d'un système inductif filtrant $(E_\iota)_{\iota \in I}$ d'ensembles bornologiques est obtenue en prenant d'abord la limite inductive ensembliste, puis la bornologie définie par les images dans la limite des bornés quelconques des E_ι.

On trouvera dans [21] la définition des espaces vectoriels bornologiques; ici nous n'aurons à considérer que des structures de type convexe, le corps de base étant $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Un espace vectoriel bornologique de type convexe sera un espace vectoriel muni d'une bornologie satisfaisant les axiomes :

(BVC 1) l'enveloppe disquée (i. e. l'enveloppe convexe équilibrée) d'un ensemble borné est bornée;

(BV 2) l'homothétique d'un ensemble borné est borné.

Il découle facilement de ces deux axiomes que la somme de deux ensembles bornés est bornée, ce qui, compte tenu de (BV 2), assure la compatibilité avec la structure vectorielle sous-jacente.

On définit une nouvelle catégorie en prenant comme objets les espaces vectoriels bornologiques de type convexe et comme morphismes les applications linéaires bornées.

Contrairement à ce qui se passe en topologie, les limites inductives dans cette catégorie sont les mêmes que dans la catégorie des ensembles bornologiques. On dira qu'un espace bornologique de type convexe est séparé si o est le seul sous-espace borné; ces espaces sont les espaces à bornés au sens de L. Waelbroeck. Comme en topologie on peut définir une notion de convergence; on dira qu'un filtre Φ converge vers zéro au sens de Mackey s'il existe un borné B tel que, pour tout scalaire λ non nul, λB appartienne à Φ; en particulier, une suite x_n tend vers zéro au sens de Mackey s'il existe une suite y_n bornée et une suite λ_n tendant vers zéro de scalaires telles que $x_n = \lambda_n y_n$; on déduit de là des notions d'adhérence et d'ensembles fermés au sens de Mackey pour lesquelles on voit facilement qu'il suffit de se limiter aux suites.

On montre que, pour tout espace bornologique de type convexe, il existe une famille $(\pi_\iota)_{\iota \in I}$ de semi-normes telle que les homothétiques des boules unité $\pi_\iota^{-1}([0, 1])$ constituent un système fondamental de parties bornées; autrement dit, tout espace bornologique de type convexe est limite inductive d'espaces semi-normables. On peut prendre pour ces derniers les espaces semi-normés E_B, où E_B est l'espace vectoriel engendré par un disque borné B muni de la jauge de B dans E_B. On dira qu'un disque B est complétant si E_B est un espace de Banach, et qu'un espace bornologique de type convexe est complet s'il admet un système fondamental de disques bornés complétants, ou, ce qui revient au même, s'il est séparé et limite inductive d'espaces de Banach. L'intérêt de ces espaces est qu'y est convergente toute suite de Cauchy-Mackey, c'est-à-dire toute suite qui est de Cauchy dans un espace du type E_B. De plus, l'ensemble des sommes $\sum \lambda_n x_n$, où x_n est dans un ensemble borné fixe et où $\sum |\lambda_n| \leqq 1$, est borné.

Une algèbre bornologique de type convexe sera une algèbre munie d'une bornologie de type convexe satisfaisant l'axiome :

(AB) le produit de deux ensembles bornés est borné.

On écrira algèbre complète au lieu d'algèbre bornologique de type convexe complète; une telle algèbre est donc limite inductive d'espaces de Banach, mais n'est pas en général limite inductive d'algèbres de Banach.

Nous introduisons maintenant une notion nouvelle. Si $\mathbf{A}$ est une algèbre à unité munie d'une bornologie de type convexe, nous construisons une algèbre de type convexe ${}_m\mathbf{A}$ ayant même algèbre sous-jacente de la façon suivante : un système fondamental de parties bornées dans ${}_m\mathbf{A}$ est constitué par les enveloppes disquées $\Gamma(B^n)$ des ensembles B^n, où B parcourt l'ensemble des parties bornées de $\mathbf{A}$ et n l'ensemble des entiers $\geqq 1$.

Il est clair que la bornologie ainsi définie est de type convexe et moins fine que celle de $\mathbf{A}$. Voyons qu'elle est compatible avec la structure d'algèbre; cela résulte de l'inclusion :

$$\Gamma(B^n).\Gamma(B^p) \subset \Gamma(B^{n+p}).$$

En effet, tout élément de $\Gamma(B^n)$ peut s'écrire comme une somme finie $\sum \lambda_i x_i$, où les x_i appartiennent à B^n et $\sum |\lambda_i| \leq 1$; de même, tout élément de $\Gamma(B^p)$ s'écrit $\sum \mu_j y_j$, où les y_j appartiennent à B^p et $\sum |\mu_j| \leq 1$.

Le produit de ces deux éléments s'écrit donc $\sum\limits_{i,j} \lambda_i \mu_j x_i y_j$ et l'on a clairement $x_i y_j \in B^{n+p}$ et

$$\sum_{i,j} \lambda_i \mu_j = \left(\sum_i \lambda_i\right)\left(\sum_j \mu_j\right) = 1.$$

Un cas particulier intéressant est celui d'une algèbre $\mathbf{A}$ munie d'une semi-norme finie π. Un système fondamental de parties bornées dans ${}_m\mathbf{A}$ est alors constitué par les ensembles $\Gamma(B^n)$, où B est la boule unité de π, où λ parcourt $\mathbf{C}$ et n l'ensemble des entiers ≥ 1. La bornologie de ${}_m\mathbf{A}$ peut encore être définie par une suite de semi-normes, à savoir les jauges des ensembles $\Gamma(B^n)$.

Nous utilisons, pour étudier le problème de spectre relatif qui nous intéresse dans le cadre des algèbres complètes, le calcul symbolique de L. Waelbroeck et la terminologie relative à ce dernier est encore celle de [22], où [23].

Étant donnés une algèbre complète unité $\mathbf{A}$ et un élément a de $\mathbf{A}$, on dit qu'une partie Σ de $\mathbf{C}$ est spectrale pour a si $a - s$ est inversible pour tout s de $\complement\Sigma$ et son inverse borné dans $\mathbf{A}$ sur $\complement\Sigma$. On voit immédiatement que l'intérieur d'un ensemble spectral pour a est encore spectral pour a et que l'ensemble des ensembles spectraux pour $\mathbf{A}$ forme un filtre, appelé filtre spectral de a, et noté $\sigma(a; \mathbf{A})$ ou, plus simplement, $\sigma(a)$. Le spectre algébrique $\mathrm{Sp}(a)$ de a est l'intersection des ensembles de $\sigma(a)$. Le spectre bornologique est l'adhérence du filtre $\sigma(a)$.

Étant donnée une partie Σ de $\mathbf{C}$, on pose

$$\delta_\Sigma(s) = \inf\left((1 + |s|^2)^{-\frac{1}{2}}, d\left(s, \complement\Sigma\right)\right);$$

on pose également :

$$\delta_0 = \delta_{\mathbf{C}} = (1 + |\zeta|^2)^{-1}.$$

Pour toute fonction numérique positive δ sur $\mathbf{C}$, on définit une algèbre complète $\mathfrak{C}(\delta; \mathbf{A})$ (notée $\Theta(s; \delta; \mathbf{A})$ dans [22]) appelée algèbre des fonctions δ-tempérées à valeurs dans $\mathbf{A}$: un ensemble borné de $\mathfrak{C}(\delta; \mathbf{A})$ est un ensemble B de fonctions définies sur l'ensemble $\delta^{-1}(]0, \to[)$ et à valeurs dans $\mathbf{A}$ tel qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\delta^n(s) f(s)$ reste borné lorsque f varie dans B et s dans $\delta^{-1}(]0, \to[)$. Lorsque $\mathbf{A} = \mathbf{C}$, on note simplement $\mathcal{T}(\delta)$ l'algèbre des fonctions numériques δ-tempérées. Lorsque δ est lipschitzienne et telle que $\zeta\delta$ soit uniformément bornée (en particulier si $\delta = \delta_\Sigma$), $\mathcal{O}(\delta)$ (notée encore $\mathcal{O}(z, \delta)$ dans [23] et $\mathcal{O}(s; \delta)$ dans [22]) est l'algèbre complète des fonctions holomorphes δ-tempérées à valeurs dans $\mathbf{C}$, c'est-à-dire la sous-algèbre de $\mathcal{T}(\delta)$ des fonctions qui sont holomorphes dans l'ensemble ouvert $\delta^{-1}(]0, \to[)$.

On sait, d'après L. Waelbroeck, que pour qu'une partie Σ de $\mathbf{C}$ soit spectrale pour a, il faut et il suffit qu'il existe un morphisme d'algèbres bornologiques de $\mathcal{O}(\delta_\Sigma)$ dans $\mathbf{A}$, qui envoie unité sur unité et σ sur a, et qu'un tel morphisme, s'il existe, est unique.

Nous aurons besoin, non seulement de la notion d'ensemble spectral, mais encore de celle de fonction spectrale. Soit δ une fonction numérique positive sur $\mathbf{C}$; on dit que δ est spectrale pour a si l'idéal engendré par $a - \zeta$ et δ dans l'algèbre $\mathcal{T}(\delta_0; \mathbf{A})$ est impropre, c'est-à-dire égal à $\mathcal{T}(\delta_0; \mathbf{A})$.

Il revient au même de dire qu'il existe des fonctions u, y dans $\mathcal{T}(\delta_0, \mathbf{A})$ telles que l'on ait

$$(a - \zeta)u + \delta y = 1.$$

On note $\Delta(a; \mathbf{A})$ ou plus simplement $\Delta(a)$ l'ensemble des fonctions spectrales pour a. $\Delta(a)$ est un cône semi-réticulé inférieurement et stable par multiplication. De plus, pour toute fonction f de $\Delta(a)$, il existe une fonction g de $\Delta(a)$ qui minore f et soit lipschitzienne et telle que ζf soit uniformément bornée.

Enfin, pour tout ensemble spectral Σ, la fonction δ_Σ est spectrale.

Pour tout élément a du centre de $\mathbf{A}$ et toute fonction f de $\Delta(a)$, lipschitzienne et telle que ζf soit uniformément bornée, il existe un morphisme d'algèbres bornologiques de $\mathcal{O}(\delta)$ dans $\mathbf{A}$ qui envoie unité sur unité et σ [restriction de ζ à l'ensemble $\Sigma = \delta^{-1}(]0, \to[)$] sur a. Ce morphisme est le calcul symbolique individuel en a.

3. L'ensemble $S(a; \mathbf{A})$.

Pour des raisons techniques, nous considérons dans ce paragraphe une algèbre à unité $\mathbf{A}$ munie d'une bornologie de type convexe. Pour tout élément a de $\mathbf{A}$, nous notons $S(a; \mathbf{A})$ ou plus simplement $S(a)$ le complémentaire dans $\mathbf{C}$ de l'ensemble des points s tels que 0 adhère au sens de Mackey au sous-espace affine $(a - s)\mathbf{A} - 1$. Pour que s n'appartienne pas à $S(a)$, il faut et il suffit qu'il existe une suite a_n dans $\mathbf{A}$ telle que $(a - s)\, a_n - 1$ tende vers zéro au sens de Mackey. Il est clair que $S(a)$ est contenu dans $\mathrm{Sp}(a)$ car si s n'appartient pas à $\mathrm{Sp}(a)$, 0 appartient à $(a - s)\mathbf{A} - 1$. Réciproquement :

PROPOSITION 1. — *Soient* $\mathbf{A}$ *une algèbre complète à élément unité et* a *un élément de* $\mathbf{A}$; *pour qu'un point* s *de* $\mathbf{C}$ *soit dans* $\complement \mathrm{Sp}(a)$, *il faut et il suffit qu'il soit dans* $\complement S(a)$ *et que, pour l'application* $x \mapsto (a - s)x$, *l'image réciproque d'un ensemble borné soit bornée.*

Il est d'abord clair que si s est dans $\complement \mathrm{Sp}(a)$, l'image réciproque par l'application $x \mapsto (a - s)x$ d'un ensemble borné B, étant l'ensemble $(a - s)^{-1}B$, est bornée. Inversement, si on suppose que s est dans $\complement S(a)$, on sait qu'il existe un disque borné B de $\mathbf{A}$ et une suite a_n dans $\mathbf{A}$ de façon que

$$(a - s)a_n - 1 \in 2^{-n}B.$$

D'où

$$(a - s)(a_{n+p} - a_n) \in 2^{-n+1}B.$$

Si l'image réciproque par l'application $x \mapsto (a - s)x$ d'un ensemble borné dans $\mathbf{A}$ est bornée, il existe un disque borné B' que l'on peut supposer complétant, tel que

$$a_{n+p} - a_n \in 2^{-n}B',$$

ce qui montre que la suite a_n est de Cauchy dans E_B. Si $b = \lim_{n \to \infty} a_n$, on a

$$b - a_n \in 2^{-n}B',$$

d'où

$$(a - s)b - 1 \in 2^{-n}B + 2^{-n}(a - s)B'$$

pour tout n, et

$$(a - s)b - 1 = 0,$$

ce qui montre que s appartient à $\complement \mathrm{Sp}(a)$.

Nous aurons besoin par la suite d'une caractérisation de $S(a)$ lorsque $\mathbf{A} = \mathbf{C}(a)$. Nous disons qu'un ensemble E de fractions rationnelles est borné en un point a de $\mathbf{A}$ (resp. un point s de $\mathbf{C}$) si les fractions de E sont régulières sur $\mathrm{Sp}(a)$ (resp. en s) et si la famille $(r(a))_{r \in E}$ [resp. $(r(s))_{s \in E}$] est bornée dans $\mathbf{A}$ (resp. dans $\mathbf{C}$).

PROPOSITION 2. — *Soient* $\mathbf{A}$ *une algèbre à unité munie d'une bornologie de type convexe et* a *un élément de* $\mathbf{A}$. *Pour qu'un point* s *de* $\mathbf{C}$ *appartienne à* $S(a)$, *il faut que tout ensemble de fractions rationnelles borné en* a *le soit en* s, *et la condition est suffisante lorsque* $\mathbf{A} = \mathbf{C}(a)$.

Voyons d'abord que la condition est *nécessaire*, et supposons par l'absurde que, pour un point s que l'on peut supposer dans $\mathrm{Sp}(a)$, il existe un ensemble E de fractions rationnelles borné en a et non en s. On peut supposer E disqué, et il existe alors une suite r_n dans E telle que la suite $r_n(a)$ soit bornée et que $r_n(s) = - 2^n$. Posons :

$$r'_n = (r_n - r_n(s))(X - s)^{-1}.$$

r'_n est régulière sur $\mathrm{Sp}(a)$, et

$$(a - s)\, 2^{-n} r'_a(a) - 1 = 2^{-n} r_n(a),$$

ce qui montre que s appartient à $S(a)$.

Supposons maintenant que $\mathbf{A} = \mathbf{C}(a)$, et voyons que la condition est *suffisante* en considérant par l'absurde un point s de $\complement S(a)$. Il existe alors un ensemble borné B dans $\mathbf{A}$ et une suite r_n de fractions rationnelles régulières sur $\mathrm{Sp}(a)$, avec

$$(a - s) r_n(a) - 1 \in 2^{-n} B.$$

Si l'on pose :

$$r'_n = 2^n((X - s) r_n - 1),$$

on voit que la suite r'_n est bornée en a, alors que $r'_n(s) = - 2^n$.

Cette caractérisation va nous permettre de ramener le cas où $\mathbf{A}$ est munie d'une bornologie de type convexe à celui où $\mathbf{A}$ est une algèbre bornologique de type convexe. Si l'on considère l'algèbre bornologique de type convexe ${}_m\mathbf{A}$ associée à $\mathbf{A}$ définie au paragraphe 2, il est clair que $S(a; {}_m\mathbf{A})$ est contenu dans $S(a; \mathbf{A})$. Inversement :

PROPOSITION 3. — *Soient* $\mathbf{A}$ *une algèbre à unité munie d'une bornologie de type convexe et* a *un élément de* $\mathbf{A}$. *Si* $\mathbf{A} = \mathbf{C}(a)$, *alors* $S(a; {}_m\mathbf{A}) = S(a; \mathbf{A})$.

Il suffit de prouver que, pour tout s de $S(a; \mathbf{A})$, tout ensemble E de fractions rationnelles borné a dans ${}_m\mathbf{A}$ est borné en s. Or, d'après la définition de ${}_m\mathbf{A}$, E est contenu dans un ensemble $\Gamma(F^n)$, où n est un entier ≥ 1 et où F est un ensemble de fractions rationnelles borné en a dans $\mathbf{A}$. Comme F est borné en s, il en est de même de F^n et de $\Gamma(F^n)$, donc de E.

$\mathbf{A}$ étant toujours une algèbre à unité munie d'une bornologie de type convexe et a un élément de $\mathbf{A}$, désignons par $\mathbf{A}_a$ l'algèbre sous-jacente à $\mathbf{A}$ munie de la bornologie pour laquelle un ensemble B est borné si aB est borné dans $\mathbf{A}$.

PROPOSITION 4. — *Soient* $\mathbf{A}$ *une algèbre à unité munie d'une bornologie de type convexe,* a *un élément de* $\mathbf{A}$; *on suppose que* $\mathbf{A} = \mathbf{C}(a)$. *Si* $S(a; \mathbf{A})$ *contient un élément* s, $S(a; \mathbf{A}_{a-s})$ *est alors contenu dans* $S(a; \mathbf{A})$ *et contient* $S(a; \mathbf{A}) \cap \complement\{s\}$.

Soit t un point de $S(a;\ \mathbf{A}_{a-s})$. Pour voir que t est dans $S(a;\ \mathbf{A})$, on peut toujours supposer t distinct de s, et il suffit de voir que tout ensemble E de fractions rationnelles borné en a dans $\mathbf{A}$ est borné en t. On sait déjà que E est borné en s puisque $S(a;\ \mathbf{A})$ contient s. Posons, pour toute fraction r de E :

$$r' = (r - r(s))\,(X - s)^{-1},$$

r' est régulière sur $\mathrm{Sp}(a)$, et

$$(a - s)\,r'(a) = r(a) - r(s).$$

Par suite, l'ensemble E' des r' est borné en a dans $\mathbf{A}_{a-s}$, donc aussi en t. Enfin, E est borné en t, puisque

$$r(t) = r(s) + (t - s)\,r'(t).$$

Inversement, soit t un point distinct de s dans $S(a;\ \mathbf{A})$. Pour voir que t est dans $S(a;\ \mathbf{A}_{a-s})$, il suffit de voir que tout ensemble E de fractions rationnelles, borné en a dans $\mathbf{A}_{a-s}$, l'est en t. Or $(X - s)E$ est alors borné en a dans $\mathbf{A}$, donc en t, et E l'est aussi puisque t est distinct de s.

Proposition 5. — *Soient* $\mathbf{A}$ *une algèbre à unité munie d'une bornologie de type convexe,* a *un élément de* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$ *une sous-algèbre unitaire de* $\mathbf{A}$. *Pour qu'un point* s *de* $\complement\,\mathrm{Sp}(a;\ \mathbf{B})$ *soit dans* $\complement\, S(a;\ \mathbf{B})$, *il faut et il suffit que* $(a - s)^{-1}$ *n'adhère pas à* $\mathbf{B}$ *au sens de Mackey dans* $\mathbf{A}_{a-s}$.

En effet, dire que $(a - s)^{-1}$ adhère à $\mathbf{B}$ dans $\mathbf{A}_{a-s}$ revient à dire que 0 adhère à $(a - s)\,\mathbf{B} - 1$ dans $\mathbf{A}$, ou encore dans $\mathbf{B}$, donc que s n'appartient pas à $S(a;\ \mathbf{B})$.

4. Formes linéaires sur des algèbres de fractions rationnelles.

Posons d'abord la définition suivante :

Définition 1. — *Soient* E *un ensemble,* $\mathcal{E}$ *un espace vectoriel de fonctions numériques sur* E *et* π *une semi-norme sur* $\mathcal{E}$. *On dit que* π *est croissante, si l'on a* $\pi(f) \leqq \pi(g)$ *pour tout couple* $(f,\ g)$ *de fonctions de* $\mathcal{E}$ *tel que* $|f| \leqq |g|$.

Dans la suite, nous considérons deux parties Σ, T disjointes de $\mathbf{C}$, et l'algèbre $\mathbf{C}(\sigma;\ T)$ des fractions rationnelles en σ dont les pôles appartiennent à T. Nous étudions la question suivante : Étant données une semi-norme finie croissante π sur $\mathbf{C}(\sigma;\ T)$ et une forme linéaire φ continue pour π, existe-t-il une mesure de Radon μ sur $\overline{\Sigma}$ telle que l'on ait $\varphi(f) = \int f\,d\mu$ pour toute fonction f de $\mathbf{C}(\sigma;\ T)$? Nous ne pouvons pas utiliser ici directement les résultats sur les cônes adaptés du fait que le cône positif de $\mathbf{C}(\sigma;\ T)$ est en général réduit à $\{0\}$. Nous introduisons en revanche l'ensemble $\mathcal{C}(\mathbf{C}(\sigma; T))$ des fonctions numériques f sur Σ telles qu'il existe une fonction g dans $\mathbf{C}(\sigma; T)$, avec $|f| \leqq |g|$. Il est clair que $\mathcal{C}(\mathbf{C}(\sigma; T))$ est stable par homothétie et multiplication, mais aussi par addition, lorsque Σ n'est pas partout dense, grâce au lemme suivant :

LEMME 1. — *Si Σ, T sont deux parties disjointes de $\mathbf{C}$, Σ n'étant pas partout dense, $\mathcal{C}(\mathbf{C}(\sigma; T))$ est une algèbre.*

Nous devons seulement vérifier que, pour toute suite finie $f_1, \ldots, f_n$ de fonctions de $\mathbf{C}(\sigma; T)$, il existe une fonction g de $\mathbf{C}(\sigma; T)$ telle que $\sum_{i=1}^{n} |f_i| \leqq |g|$. Soient $s_1, \ldots, s_p$ les pôles intervenant dans les f_i, et considérons la fraction rationnelle

$$R = X - s_0 + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j (X - s_j)^{-1},$$

où s_0 et les λ_j sont des nombres complexes choisis de façon que R n'ait pas de zéro dans $\overline{\Sigma}$. Voyons qu'un tel choix est possible : les zéros de R sont ceux du numérateur qui est un polynôme de degré $p + 1$ et si nous trouvons s_0 et des λ_j de façon que R s'annule en $p + 1$ points $t_1, \ldots, t_{p+1}$ de $\complement \overline{\Sigma}$ distincts et distincts des s_j, le résultat cherché suivra. Or s_0 et les λ_j sont déterminés par le système d'équations linéaires :

$$t_k - s_0 + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j (t_k - s_j)^{-1} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, p + 1).$$

Comme il y a autant d'équations que d'inconnues, l'existence d'une solution est assurée par la non-nullité du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & (t_1 - s_1)^{-1} & \ldots & (t_1 - s_j)^{-1} & \ldots & (t_1 - s_p)^{-1} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 1 & (t_k - s_1)^{-1} & \ldots & (t_k - s_j)^{-1} & \ldots & (t_k - s_p)^{-1} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 1 & (t_{p+1} - s_1)^{-1} & \ldots & (t_{p+1} - s_j)^{-1} & \ldots & (t_{p+1} - s_p)^{-1} \end{vmatrix}.$$

Or ce déterminant est une fraction rationnelle dont le degré du numérateur est $p(p+1) - p = p^2$. Comme elle s'annule lorsque deux s_j ou deux t_k sont égaux, elle est divisible par

$$\prod_{j \neq 1} (s_j - s_1) \prod_{k \neq q} (t_k - t_q) \quad \text{qui est de degré } \frac{(p-1)p}{2} + \frac{p(p+1)}{2} = p^2.$$

Il résulte alors des hypothèses faites sur les s_j et les t_k que ce déterminant est non nul.

Choisissons alors un entier N majorant les ordres des pôles a_i et les degrés des parties entières. La fonction $\sum_{i=1}^{n} |f_i| \cdot |R(\sigma)|^{-N-1}$ tend vers zéro à l'infini et au voisinage des points a_i; elle se prolonge donc continûment à $\overline{\Sigma}$ et y est bornée par un nombre positif K. Par suite, la fonction $g = KR^{N+1}(\sigma)$ convient.

Toujours dans l'hypothèse où $\overline{\Sigma} \neq \mathbf{C}$, considérons une semi-norme π sur $\mathbf{C}(\sigma; T)$. Nous pouvons lui associer une semi-norme $\pi^\star$ sur $\mathcal{C}(\mathbf{C}(\sigma; T))$ en posant :

$$\pi^\star(f) = \inf_{\substack{g \in \mathbf{C}(\sigma; T) \\ |g| \geq f}} \pi(g).$$

On vérifie aussitôt que π est une semi-norme et que $\pi^\star$ est finie lorsque π l'est. De plus, $\pi^\star$ est croissante : c'est la plus grande semi-norme croissante sur $\mathcal{C}(\mathbf{C}(\sigma; T))$ dont la restriction à $\mathbf{C}(\sigma; T)$ est plus petite que π; lorsque π est elle-même croissante sur $\mathbf{C}(\sigma; T)$, $\pi^\star$ prolonge π.

LEMME 2. — *Soient Σ, T deux parties disjointes de $\mathbf{C}$, Σ n'étant pas partout dense, π une semi-norme finie croissante sur $\mathbf{C}(\sigma; T)$ et φ une forme linéaire sur $\mathbf{C}(\sigma; T)$ continue pour π. Dans ces conditions, il existe une mesure de Radon μ sur $\overline{\Sigma}$ telle que, si l'on identifie les fonctions de $\mathbf{C}(\sigma; T)$ à des fonctions sur $\overline{\Sigma}$ définies à un ensemble fini de $\overline{\Sigma} \cap T$ près, on ait les propriétés :*

(i) *μ ne charge aucun point de $\overline{\Sigma} \cap T$;*

(ii) *toute fonction f de $\mathbf{C}(\sigma; T)$ est μ-intégrable et $\int f(u)\, d\mu(u) = \mu(f)$;*

(iii) *pour toute fonction f de $\mathbf{C}(\sigma; T)$ la norme de $f\mu$ est inférieure à $\|\varphi\|_\pi \, \pi(f)$.*

On peut d'abord, par Hahn-Banach, prolonger φ à $\mathcal{C}(\mathbf{C}(\sigma; T))$ en une forme linéaire $\varphi^\star$ dont la norme pour $\pi^\star$ est celle de φ pour π. Par composition avec l'application $\mathcal{K}(\overline{\Sigma}) \to \mathcal{C}(\mathbf{C}(\sigma; T))$, $\varphi^\star$ définit une mesure de Radon μ sur $\overline{\Sigma}$. Il reste à vérifier que μ possède les propriétés (i) à (iii).

Remarquons que l'on peut se ramener au cas où $\varphi^\star$ est réelle en écrivant $\varphi^\star = \mathrm{Re}\,\varphi^\star + i\,\mathrm{Im}\,\varphi^\star$. [Rappelons que si $f = f_1 + if_2$ avec f_1, f_2 réelles,

$$(\mathrm{Re}\,\varphi^\star)(f) = \mathrm{Re}\,\varphi^\star(f_1) + i\,\mathrm{Re}\,\varphi^\star(f_2) \text{ et } \mathrm{Im}\,\varphi^\star = \mathrm{Re}(-i\,\varphi^\star).]$$

Il est immédiat que $\mathrm{Re}\,\varphi^\star$ et $\mathrm{Im}\,\varphi^\star$ sont continues pour $\pi^\star$. Ensuite, comme le cône positif de $\mathcal{C}(\mathbf{C}(\sigma; T))$ est réticulé et engendre l'espace et que $\mathrm{Re}\,\varphi^\star$ et $\mathrm{Im}\,\varphi^\star$ sont relativement bornées, on peut décomposer chacune de ces formes linéaires en différence de deux formes positives et supposer $\varphi^\star$ positive.

Lorsque Σ est fermé, le cône positif de l'algèbre $\mathcal{C}_0(\mathbf{C}(\sigma; T)$ des fonctions continues de $\mathcal{C}(\mathbf{C}(\sigma; T))$ est adapté au sens de G. CHOQUET (*voir* G. CHOQUET [6] ou encore G. MOKOBODZKI, D. SIBONY [15] ou [16]), de sorte que l'énoncé (ii) est vrai dans $\mathcal{C}_0(\mathbf{C}(\sigma; T))$ à condition de remplacer φ par $\varphi^\star$.

Pour un ensemble Σ quelconque, introduisons l'algèbre $\mathbf{A}$ des fonctions définies et continues sur le complémentaire dans $\overline{\Sigma}$ d'un ensemble fini de $\overline{\Sigma} \cap T$ et dont la restriction à Σ est dans $\mathcal{C}(\mathbf{C}(\sigma; T))$. $\mathbf{C}(\sigma; T)$ et $\mathcal{K}(\overline{\Sigma})$ s'identifient naturellement à des sous-algèbres de $\mathbf{A}$. Nous allons établir les énoncés du lemme pour les fonctions de $\mathbf{A}$, φ étant remplacée par $\varphi^\star$.

Remarquons d'abord que (iii) est une conséquence immédiate de (i) et (ii), car

$$\| f\mu \| = \sup_{\substack{g \in \mathcal{K}(X) \\ |g| \leq 1}} \left| \int f(u)\, g(u)\, d\mu(u) \right|,$$

$$\begin{aligned} \| f\mu \| &= \sup_{\substack{g \in \mathcal{K}(X) \\ |g| \leq 1}} | \varphi^\star(fg) | \\ &\leq \sup_{\substack{g \in \mathcal{K}(X) \\ |g| \leq 1}} \| \varphi^\star \|_{\pi^\star}\, \pi^\star(fg) \\ &\leq \| \varphi^\star \|_{\pi^\star}\, \pi^\star(f). \end{aligned}$$

D'autre part, le fait que μ ne charge aucun point de $\overline{\Sigma} \cap T$ résulte de ce que, si $s \in \overline{\Sigma} \cap T$ et si une fonction f de $\mathbf{C}(\sigma; T)$ a pour pôle s, on a

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{g \in \mathcal{K}(\overline{\Sigma}) \\ |g| \leq f}} \left| \int g(u)\, d\mu(u) \right| &= \sup_{\substack{g \in \mathcal{K}(\overline{\Sigma}) \\ |g| \leq f}} | \varphi^\star(g) | \\ &\leq \| \varphi^\star \|_{\pi^\star} \sup_{\substack{g \in \mathcal{K}(\overline{\Sigma}) \\ |g| \leq f}} | \varphi^\star(g) | \\ &\leq \| \varphi^\star \|_{\pi^\star} | \varphi^\star(f) |. \end{aligned}$$

Pour voir enfin (ii), on peut se contenter de considérer le cône positif $\mathbf{A}^+$ de $\mathbf{A}$. Or, pour ce dernier, le cône positif $\mathcal{K}^+(\overline{\Sigma})$ de $\mathcal{K}(\overline{\Sigma})$ réalise un module de domination au sens de M. ROGALSKI [20]. En effet, si f est une fonction de $\mathbf{A}^+$, il existe une fonction g de $\mathbf{C}(\sigma; T)$ telle que f soit définie, sauf peut-être aux pôles de g qui sont dans $\overline{\Sigma}$, et $f(s) + |s| \leq |g(s)|$ sur l'ensemble de définition de g dans $\overline{\Sigma}$. Par suite, $f.|g|^{-2}$ tend vers zéro à l'infini et aux pôles de g qui sont dans $\overline{\Sigma}$, et se prolonge continûment à $\overline{\Sigma}$. On peut donc trouver, pour tout $\varepsilon > 0$, h dans $\mathcal{K}^+(\overline{\Sigma})$, dont le support soit disjoint des pôles de g dans Σ, et telle que

$$0 \leq f.|g|^{-2} - h \leq \varepsilon.$$

$h.|g|^2$ se prolonge en une fonction k de $\mathcal{K}^+(\overline{\Sigma})$, et l'on a

$$0 \leqq f - k \leqq \varepsilon |g|^2.$$

Si l'on donne à ε la suite de valeurs 2^{-n}, on met en évidence une suite k_n, que l'on peut supposer croissante, de fonctions de $\mathcal{K}^+(\overline{\Sigma})$ vérifiant

$$0 \leqq f - k_n \leqq 2^{-n} |g|^2,$$

f_n converge simplement vers f μ-presque partout. De plus, comme φ^* est positive :

$$0 \leqq \varphi^*(f) - \varphi^*(k_n) \leqq 2^{-n} \varphi^*(|g|^2),$$

d'où

$$\varphi^*(f) = \sup_n \int k_n(u)\, d\mu(u).$$

Alors, par Beppo-Lévi, on sait que f est μ-intégrable et que

$$\int f(u)\, d\mu(u) = \sup_n \int k_n(u)\, d\mu(u),$$

ce qui achève la preuve de (ii).

Chapitre 2.

Approximation pondérée avec une semi-norme.

1. Semi-normes fondamentales.

Dans la théorie classique de l'approximation polynômiale pondérée sur un ensemble fermé Σ de $\mathbf{C}$, on considère une fonction numérique w appelée poids telle que $\mathbf{C}[\sigma]w \subset \mathcal{C}_0(\Sigma)$. Un poids w est dit fondamental si $\mathbf{C}(\sigma)w$ est dense dans $\mathcal{C}_0(\Sigma)$. Certains auteurs, comme H. Pollard [19], considèrent une fonction numérique w sur $\mathbf{R}$ telle que $\mathbf{C}[\xi]w \subset \mathcal{L}^p(\mathbf{R})$. Une telle fonction est appelée un poids au sens de $\mathcal{L}^p$. Un poids au sens de $\mathcal{L}^p$ est dit fondamental si, de même, $\mathbf{C}[\xi]w$ est dense dans $\mathcal{L}^p(\mathbf{R})$. D'autres notions sont encore envisagées et entrent comme cas particuliers dans la donnée plus générale d'une semi-norme finie croissante π sur $\mathcal{C}_p(\Sigma)$ (*voir* [8]). Dans ce qui suit, nous nous plaçons, plus généralement encore, dans la situation d'une partie de $\mathbf{C}$ non nécessairement fermée, et posons un problème d'approximation rationnelle avec pôles dans $\overline{\Sigma} \cap \complement \Sigma$; pour Σ fermé, on retrouve l'approximation polynômiale.

Définition 2. — *Soient Σ une partie de $\mathbf{C}$ et T l'ensemble $\Sigma \cup \complement \overline{\Sigma}$. On* *dit qu'une semi-norme finie croissante* π *sur* $\mathbf{C}(\sigma)$ *est fondamentale si l'image de* $\mathbf{C}(\tau)$ *dans* $\mathbf{C}(\sigma)$ *est dense pour* π.

Cette définition est justifiée par les énoncés qui suivent :

Proposition 1. — *Soient* Σ *un ensemble fermé de* $\mathbf{C}$ *et* π *une semi-norme finie croissante sur* $\mathcal{C}_p(\Sigma)$ *dont la restriction à* $\mathbf{C}(\sigma)$ *soit fondamentale. Si l'on suppose que* Σ *est de mesure nulle ou d'intérieur vide et de complémentaire réunion finie d'ensembles connexes, alors* $\mathbf{C}[\sigma]$ *est dense dans* $\mathcal{C}_p(\Sigma)$ *pour* π.

Il suffit de voir que $\mathbf{C}(\sigma)$ est dense dans $\mathcal{C}_p(\Sigma)$ pour toute semi-norme finie croissante π sur $\mathcal{C}_p(\Sigma)$. Or $\mathcal{K}(\Sigma)$ est dense dans $\mathcal{C}_p(\Sigma)$ pour π puisque, pour toute fonction f de $\mathcal{C}_p(\Sigma)$, il en existe une autre, g, qui la domine à l'infini. Étant donné $\varepsilon > 0$, soit en effet K un compact de Σ tel que l'on ait $|f(x)| \leqq \varepsilon g(x)$ pour tout x de $\Sigma \cap \complement K$; si h est une fonction continue à support compact, à valeurs dans $[0, 1]$ et égale à 1 sur K, on a

$$\pi(f - fh) \leqq \varepsilon\, \pi(g).$$

D'autre part, la convergence uniforme sur Σ entraîne la convergence pour π, puisque $|f| \leqq 1$ entraîne $\pi(f) \leqq \pi(1)$. Il suffit donc de prouver que l'on peut approcher uniformément sur Σ toute fonction de $\mathcal{K}(\Sigma)$ par des fractions rationnelles régulières sur Σ. Choisissons un point s de $\complement \Sigma$. La transformation homographique $\varphi = (\zeta - s)^{-1}$ envoie Σ, complété par le point à l'infini s'il n'est pas compact, sur un compact $\varphi(\Sigma)$, et l'on se ramène à prouver que toute fonction continue sur $\varphi(\Sigma)$ est uniformément approchable par des fractions rationnelles régulières sur $\varphi(\Sigma)$, ce qui, compte tenu des hypothèses faites sur Σ, est classique (*voir*, par exemple, [13]).

Proposition 2. — *Soient* Σ *un ensemble fermé de* $\mathbf{C}$ *de mesure nulle, ou d'intérieur vide et de complémentaire réunion finie d'ensembles connexes. Pour qu'un poids* w *sur* Σ *soit fondamental, il faut et il suffit qu'il ne s'annule pas et que la semi-norme* $\pi : r \mapsto \| rw \|_\Sigma$ *soit fondamentale.*

Il est d'abord clair que si w est un poids fondamental, il ne s'annule pas. D'autre part, la semi-norme π associée à w est fondamentale car, pour toute fonction r de $\mathbf{C}(\sigma)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme p en σ tel que $\| rw - pw \|_\Sigma \leqq \varepsilon$, soit $\pi(r - p) \leqq \varepsilon$. Inversement, comme π est finie croissante sur $\mathcal{C}_p(\Sigma)$ si elle est fondamentale, d'après la proposition 1 qui précède, $\mathbf{C}[\sigma]$ est alors dense dans $\mathcal{C}_p(\Sigma)$ pour π, de sorte que, si w ne s'annule pas, pour toute fonction f de $\mathcal{K}(\Sigma)$, il existe un polynôme p en σ tel que $\pi(fw^{-1} - p) \leqq \varepsilon$ soit $\| f - pw \|_\Sigma \leqq \varepsilon$. Enfin, $\mathcal{K}(\Sigma)$ est dense dans $\mathcal{C}_0(\Sigma)$ en norme uniforme.

Proposition 3. — *Pour qu'un poids w au sens de $\mathcal{L}^p (1 \leqq p < \infty)$ soit fondamental, il faut et il suffit qu'il soit presque partout non nul et que la semi-norme $\pi : r \mapsto \| rw \|_p$ soit fondamentale.*

Il est clair que si w est fondamental au sens de $\mathcal{L}^p$, il ne peut s'annuler sur un ensemble de mesure non nulle. De plus, pour toute fonction r de $\mathbf{C}(\xi)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme p en σ tel que $\| rw - pw \|_p \leqq \varepsilon$, soit $\pi(r - p) \leqq \varepsilon$, ce qui montre que π est fondamentale.

Inversement, supposons w presque partout non nul et π fondamentale. $\mathbf{C}[\xi]$ est alors dense dans $\mathcal{C}_p(\mathbf{R})$ pour π, ou, ce qui revient au même, pour la structure induite par $\mathcal{L}^p(| w(\xi) |^p d\xi)$. $\mathbf{C}[\xi]$ est dense dans cet espace. w sera fondamental si l'on peut approcher toute fonction f non nulle de $\mathcal{K}(\mathbf{R})$ par des éléments de $w\mathbf{C}[\xi]$. Soit donc $\varepsilon > 0$. Il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que l'ensemble E des points x du support de f tels que $| w(x) | \leqq \alpha$ soit de mesure inférieure à $\frac{\varepsilon}{\| f \|_\infty}$. Par suite, la fonction $g = f . w^{-1} . \chi_{\complement E}$ est mesurable bornée et à support borné, donc dans $\mathcal{L}^p(| w(\xi) |^p d\xi)$, de sorte qu'il existe un polynôme p en ξ tel que $\| gw - pw \|_p \leqq \varepsilon$. Or :

$$\| f - gw \|_p \leqq \| f \|_\infty \| \chi_E \|_p.$$

D'où

$$\| f - pw \|_p \leqq 2\varepsilon,$$

ce qui achève la démonstration.

Nous utiliserons la condition suivante, *a priori* plus faible que la définition, qui assure encore qu'une semi-norme finie croissante est fondamentale.

Proposition 4. — *Soient Σ une partie de $\mathbf{C}$ et π une semi-norme finie croissante sur $\mathbf{C}(\sigma)$. Pour que π soit fondamentale, il faut et il suffit que l'adhérence de l'image de $\mathbf{C}(\tau)$ dans $\mathbf{C}(\sigma)$ contienne les fractions $(\sigma - s)^{-1}$, où s varie dans $\complement \overline{\Sigma}$.*

Pour que π soit fondamentale, il suffit en effet que l'adhérence de l'image de $\mathbf{C}(\tau)$ dans $\mathbf{C}(\sigma)$ contienne les fractions $(\sigma - s)^{-n}$, où n est un entier $\geqq 1$ et s dans $\complement \overline{\Sigma}$, parce que, s'il en est ainsi, cette adhérence doit aussi contenir l'espace vectoriel, engendré par les $(\sigma - s)^{-n}$, où n est un entier $\geqq 1$ et s dans $\complement \Sigma$, et par $\mathbf{C}[\sigma]$, et ce dernier est $\mathbf{C}(\sigma)$. Il suffit donc de voir que l'on peut approcher, pour tout entier $n \geqq 1$ et tout point s de $\complement \overline{\Sigma}$, la fraction $(\sigma - s)^{-n}$ par des éléments de l'espace vectoriel engendré par les $(\sigma - s)^{-1}$, où s parcourt $\complement\overline{\Sigma}$, ce qui est vrai pour la convergence uniforme sur $\overline{\Sigma}$, donc aussi pour π.

On déduit aussitôt de cette proposition et de la proposition 5 du chapitre 1, § 3, le corollaire qui suit.

COROLLAIRE 1. — *Soient Σ une partie non partout dense de $\mathbf{C}$, s un point de $\complement\overline{\Sigma}$ et π une semi-norme finie croissante sur $\mathbf{C}(\sigma)$. Pour que la semi-norme $\rho : r \mapsto \pi((\sigma - s)r)$ soit fondamentale, il faut et il suffit que l'on ait $S\left(\sigma;\, \mathbf{C}\left(\sigma; \complement T\right)_\pi\right) \subset \Sigma$, où $\mathbf{C}\left(\sigma; \complement T\right)_\pi$ est l'image $\mathbf{C}\left(\sigma; \complement T\right)$ de $\mathbf{C}(\tau)$ dans $\mathbf{C}(\sigma)$ munie de la restriction de π.*

Remarquons que si l'on modifie s dans $\complement\overline{\Sigma}$, on obtient une semi-norme équivalente à ρ.

Dans le cas où $\Sigma = \mathbf{R}$, on remarque que toute semi-norme croissante sur $\mathbf{C}(\xi)$ est compatible avec l'involution de $\mathbf{C}(\xi)$, car elle ne dépend que du module.

Si l'on considère deux parties Σ, Σ' de $\mathbf{C}$, avec $\Sigma \subset \Sigma'$, et si π est une semi-norme finie sur $\mathbf{C}(\sigma)$, par restriction elle définit encore une semi-norme finie π' sur $\mathbf{C}(\sigma')$. On voit aussitôt que si π est croissante, π' l'est aussi. Lorsque de plus $T \supset T'$ (en particulier, lorsque Σ est fermé), si π est fondamentale, π' l'est aussi.

2. **Premier théorème d'approximation.**

Nous donnons, dans le cas d'un ensemble Σ non borné, d'adhérence convexe, une condition suffisante pour qu'une semi-norme finie croissante sur $\mathbf{C}(\sigma)$ soit fondamentale.

THÉORÈME 1. — *Soient Σ un ensemble non borné, d'adhérence convexe dans $\mathbf{C}$, T l'ensemble $\Sigma \cup \complement\overline{\Sigma}$, π une semi-norme croissante sur $\mathbf{C}(\sigma)$. Pour que π soit fondamentale, il suffit que, pour toute composante connexe Ω de $\complement\overline{\Sigma}$, il existe un nombre réel $p > 2$ tel que la condition qui suit soit vérifiée :*

(i)$_p$ *Il existe une suite r_n dans $\mathbf{C}(\tau)$ telle que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\pi(r_n \circ \sigma))^{1/p} < \infty,$$

et que, pour toute fonction surharmonique (resp. harmonique) positive f dans Ω, e^f ne majore pas la suite $\left|\sum_{n=0}^{m} r_n \circ \omega\right|$.

Preuve. — Il est d'abord clair que la condition, dans laquelle on a choisi l'épithète surharmonique, entraîne l'autre. Inversement, la réciproque est vraie, car si f est une fonction surharmonique positive dans Ω, telle que e^f majore une famille $|g_\iota|$, où g_ι est holomorphe dans Ω, f majore la famille $\log|g_\iota|$ de fonctions sous-harmoniques et

$R^{\Omega}_{\sup \log|g_\iota|}$ est harmonique dans Ω et majore aussi la famille $\log|g_\iota|$.

Supposons par l'absurde que π ne soit pas fondamentale. Σ ne peut être partout dense, sinon on aurait $\mathbf{C}(\tau) = \mathbf{C}(\sigma)$. Il existe alors, d'après la proposition 4 du paragraphe 1, un point s_0 de $\complement\overline{\Sigma}$ tel que $(\sigma - s_0)^{-1}$ n'adhère pas à l'image de $\mathbf{C}(\tau)$ dans $\mathbf{C}(\sigma)$, puis, d'après Hahn-Banach, une forme linéaire φ sur $\mathbf{C}(\sigma)$ continue pour π, nulle sur l'image de $\mathbf{C}(\tau)$ et non nulle en $(\sigma - s_0)^{-1}$. D'après le lemme 2 du chapitre 1, § 4, φ est l'intégrale associée à une mesure μ sur $\overline{\Sigma}$; de plus, si l'on suppose φ de norme 1 pour π, pour toute fonction r de $\mathbf{C}(\sigma)$, la mesure $r\mu$ est bornée et de norme $\leqq \pi(r)$.

Ω désignant la composante connexe de s_0 dans $\complement\overline{\Sigma}$, nous associons à toute mesure bornée ν sur $\overline{\Sigma}$ une fonction holomorphe h_ν dans Ω, en posant :

$$h_\nu(s) = \int \frac{d\nu(u)}{u - s}.$$

Pour toute fonction r de $\mathbf{C}(\tau)$, on a

$$(r \circ \omega) h_\mu = h_{(r \circ \sigma)\mu}.$$

Il nous faut en effet vérifier que, pour tout s de Ω, on a

$$r(s) \int \frac{d\mu(u)}{u - s} = \int \frac{r(u)\, d\mu(u)}{u - s}$$

ou encore :

$$\int \frac{r(u) - r(s)}{u - s}\, d\mu(u) = 0,$$

ce qui résulte de ce que $\dfrac{r - r(s)}{\tau - s}$ appartient à $\mathbf{C}(\tau)$, puisque ses pôles sont les mêmes que ceux de r.

Nous posons $h_\mu = h$; clairement $h(s_0) \neq 0$.

Il nous faut prouver que si p est un nombre réel > 2 et r_n une suite de $\mathbf{C}(\tau)$ telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\pi(r_n \circ \sigma))^{1/p} < \infty,$$

il existe une fonction surharmonique positive f dans Ω telle que e^f majore la suite $\left|\sum_{n=0}^{m} r_n \circ \omega\right|$. Nous utilisons l'inégalité suivante, dans laquelle $\log^+$ désigne $\sup(0, \log)$

$$(a) \qquad \log^+\left|\sum_{n=0}^{m} r_n \circ \omega\right| \leqq \sum_{n=0}^{m} \log(1 + |(r_m \circ \omega)h|) + \log(1 + |h|) - \log|h|.$$

Pour la vérifier, remarquons que le premier membre est majoré par $\log\left(1 + \left|\sum_{n=0}^{m} r_n \circ \omega\right|\right)$, tandis que, par la sous-additivité de la fonction $x \mapsto \log(1 + x)$ sur $\mathbf{R}_+$, le second membre est minoré par

$$\log\left(1 + \sum_{n=0}^{m}\left|(r_n \circ \omega)h\right|\right),$$

puis par $\log\left(1 + \left|\sum_{n=0}^{m}(r_n \circ \omega)h\right|\right)$. Tout revient donc à prouver l'inégalité entre nombre réels positifs :

$$\log(1 + x) \leqq \log(1 + xy) + \log(1 + y) - \log y,$$

laquelle se ramène immédiatement à

$$(1 + x)y \leqq (1 + xy)(1 + y).$$

De l'inégalité (a), en utilisant la majoration, pour x réel positif, de $\log(1 + x)$ par $x^{1/p}$, on déduit l'inégalité

$$(b) \qquad \log^+\left|\sum_{n=0}^{m} r_n \circ \omega\right| \leqq \sum_{n=0}^{m} |(r_n \circ \omega)h|^{1/p} + |h|^{1/p} - \log|h|.$$

La démonstration sera achevée lorsqu'on aura prouvé que le membre de droite est majoré indépendamment de m par une fonction surharmonique f; en effet, f majorera en particulier $\log^+|r_0 \circ \omega|$ et sera donc positive. Comme elle majorera $\log^+\left|\sum_{n=0}^{m} r_n \circ \omega\right|$, donc $\log\left|\sum_{n=0}^{m} r_n \circ \omega\right|$, e^φ majorera $\left|\sum_{n=0}^{m} r_n \circ \omega\right|$. De plus, Ω étant connexe et h holomorphe non nulle dans Ω, $-\log|h|$ est surharmonique, et il suffira de majorer par une fonction surharmonique l'expression

$$\sum_{n=0}^{m} |(r_n \circ \omega) h|^{1/p} + |h|^{1/p}$$

que l'on peut encore écrire

$$\sum_{n=0}^{m+1} |(r'_n \circ \omega) h|^{1/p}$$

si l'on a posé $r'_0 = 1$ et, pour tout $n \geqq 1$, $r'_n = r_{n-1}$. La suite r'_n vérifie encore

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\pi(r'_n \circ \sigma))^{1/p} < \infty.$$

On a vu que $(r'_n \circ \omega) h$ était encore $h_{(r'_n \circ \sigma)\mu}$ et que la norme de $(r'_n \circ \sigma)\mu$ était majorée par $\pi(r'_n \circ \sigma)$. Si l'on écrit la décomposition de $(r'_n \circ \sigma)\mu$ en quatre mesures positives :

$$(r'_n \circ \sigma) = (\mathrm{Re}(r'_n \circ \sigma)\mu)^+ - (\mathrm{Re}(r'_n \circ \sigma)\mu)^- + i(\mathrm{Im}(r'_n \circ \sigma)\mu)^+ - i(\mathrm{Im}(r'_n \circ \sigma)\mu)^-$$

on est ramené, par la sous-additivité de la fonction $x \mapsto x^{1/p}$ sur $\mathbf{R}_+$, à majorer une somme $\sum_{n=0}^{m} |h_{\nu_n}|^{1/p}$, où ν_n est une suite de mesures positives bornées sur Σ telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\nu_n\|^{1/p} < \infty.$$

Pour cela, nous allons démontrer au préalable qu'un ensemble fermé convexe non borné Σ possède, pour tout nombre réel $p > 2$, la propriété

(A_p) *Pour toute composante connexe Ω de $\complement\Sigma$, il existe un point s_0 de Ω et un nombre réel positif k tels que, pour toute mesure μ positive de masse totale* 1 *sur Σ, il existe une fonction harmonique positive l dans Ω vérifiant $l(s_0) \leqq k$ et $l \geqq |h_\mu|^{1/p}$.*

Remarquons toute de suite qu'il revient au même de dire que pour toute mesure μ positive, de masse totale inférieure à 1, sur Σ, il existe une fonction harmonique positive l dans Ω vérifiant $l(s_0) \leqq k \|\mu\|^{1/p}$ et $l \geqq |h_\mu|^{1/p}$.

Pour montrer la propriété (A_p), considérons une composante connexe Ω de $\complement\Sigma$ et une mesure μ positive, de masse totale 1 sur Σ. Remarquons que l'ensemble convexe non borné Σ possède une direction à l'infini correspondant à un argument α. h_μ ne prend pas l'argument $\beta = -\overline{\alpha}$. En effet, pour tout point s de Ω, il existe un demi-plan ouvert affine, P, contenant Σ et non s, et $\sigma - s$ prend ses valeurs dans le demi-plan ouvert P' translaté de P adhérant à l'origine. Par suite, $(\sigma - s)^{-1}$ prend ses valeurs dans le demi-plan P'' conjugué de P', et $h_\mu(s)$ est dans P''. Comme $\overline{P'}$ contient α, $\overline{P''}$ contient $\overline{\alpha}$ et P'' ne peut contenir $\overline{\beta}$, puisque $\overline{P''} \cap (-P'') = \{0\}$. Considérons la détermination de $Z^{1/p}$, définie pour Z non réel positif ayant un argument $e^{i\theta}$, avec $0 < \theta < 2\pi/p$, et posons

$$l = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{p}} \operatorname{Re}[\exp(-i\pi/p)(-\alpha h_\mu)^{1/p}].$$

On voit facilement que

l est harmonique positive, et que

$l \geqq |h_\mu|^{1/p}$.

D'autre part, si s est un point quelconque de Ω, on a

$$l(s) \leqq \frac{1}{\cos\frac{\pi}{p}} |h(s)|^{1/p}$$

et

$$|h(s)| \leqq \int \frac{d\mu(u)}{|u-s|} \leqq \frac{1}{d(s, \Sigma)}.$$

Voyons maintenant comment la démonstration s'achève, grâce à la propriété (A_p). Soit f_n une fonction harmonique positive dans Ω telle que

$$f_n \geqq |h_{\nu_n}|^{1/p} \qquad \text{et} \qquad f_n(s_0) \leqq k \| \nu_n \|^{1/p}.$$

La série f_n converge en s_0, donc dans Ω, et sa somme f est une fonction harmonique positive qui majore les sommes $\sum_{n=0}^{m} |h_{\nu_n}|^{1/p}$.

3. Second théorème d'approximation.

Nous essayons d'étendre les résultats du théorème 1 à des ensembles Σ plus généraux. Posons pour cela la définition technique suivante.

DÉFINITION 3. — *p étant un nombre $\geqq 1$, nous disons qu'une partie Σ de* $\mathbf{C}$ *est un ensemble d'approximation d'ordre p, si toute semi-norme croissante sur* $\mathbf{C}(\sigma)$, *qui vérifie pour toute composante connexe Ω de $\complement\overline{\Sigma}$ la condition* $(\mathrm{i})_p$, *est fondamentale.*

Il est clair que si $1 \leqq p \leqq q$, $(i)_p$ entraîne $(i)_q$, de sorte que tout ensemble d'approximation d'ordre q est un ensemble d'approximation d'ordre p. Nous dirons qu'une partie de $\mathbf{C}$ est un ensemble d'approximation si elle en est un d'ordre p pour un $p \geqq 1$.

On voit facilement que tout ensemble Σ, compact et simplement connexe, est un ensemble d'approximation, car $\mathbf{C}[\sigma]$ est dense dans $\mathbf{C}(\sigma)$ pour la norme uniforme sur Σ. Nous verrons qu'il y a des ensembles d'approximation compacts non simplement connexes, mais ces derniers sont sans intérêt, la condition $(i)_p$ ne pouvant être en général vérifiée.

Nous avons prouvé au cours de la démonstration du théorème 1 que tout ensemble Σ, tel que $\bar{\Sigma}$ vérifie la propriété (A_p), est un ensemble d'approximation d'ordre p et que tout ensemble fermé convexe et non borné vérifie la propriété (A_p) pour tout $p > 2$. L'intérêt de cette propriété est sa stabilité par réunions finies. De façon précise :

Proposition 5. — *Tout ensemble fermé Σ de $\mathbf{C}$ qui est réunion d'une famille finie $(\Sigma_i)_{i=1,\dots,n}$ d'ensembles fermés, vérifiant la propriété (A_p), vérifie lui-même la propriété (A_p).*

Remarquons d'abord que si les inégalités de la propriété (A_p) sont vérifiées pour un point s_0 d'une composante connexe Ω de $\complement\Sigma$, elles le sont encore pour un autre point de Ω, à condition de changer la constante k.

Considérons donc une composante connexe Ω de $\complement\Sigma$ et un point s_0 de Ω. Pour chaque i, soit Ω_i la composante connexe de $\complement\Sigma_i$ contenant Ω et k_i une constante relative au point s_0 pour Ω_i. Toute mesure positive μ de masse totale 1 sur Σ peut s'écrire $\sum_{i=1}^{n}\mu_i$, où μ_i est une mesure positive de masse totale $\leqq 1$ et de support contenu dans Σ_i. Pour chaque i, il existe une fonction harmonique positive l_i dans Ω_i vérifiant $l_i(s_0) \leqq k_i$ et

$$l_i(s) \geqq \left| \int \frac{d\mu_i(u)}{u-s} \right|^{1/p}$$

pour tout point s de Ω_i.

Si l'on pose alors, pour tout s de Ω,

$$l(s) = \sum_{i=1}^{n} l_i(s),$$

l est harmonique positive dans Ω et vérifie

$$l(s_0) \leqq \sum_{i=1}^{n} k_i \qquad \text{et} \qquad l(s) \geqq \left| \int \frac{d\mu(u)}{u-s} \right|^{1/p}$$

pour tout point s de Ω, puisque pour $p \geq 1$:

$$\left| \int \frac{d\mu(u)}{u-s} \right|^{1/p} \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \int \frac{d\mu_i(u)}{u-s} \right|^{1/p},$$

ce qui prouve que Σ possède la propriété (A_p).

Il faut noter que tout ensemble fermé de $\mathbf{C}$, qui est réunion finie d'ensembles convexes non bornés, et en particulier tout angle saillant ou non, est un ensemble d'approximation d'ordre p pour $p > 2$. Le théorème qui suit prouve que les ensembles suffisamment réguliers sont des ensembles d'approximation.

THÉORÈME 2. — *Soit Σ un ensemble fermé de $\mathbf{C}$ tel que sa frontière soit de classe $\mathcal{C}^2$ avec une courbure uniformément bornée et une direction de normale uniformément continue (pour la structure induite par $\mathbf{C}$). Alors, pour tout $p > 1$, Σ possède la propriété (A_p), et est donc un ensemble d'approximation d'ordre p.*

Soient, en effet, p un nombre réel > 1, Ω une composante connexe de $\complement \Sigma$, s_0 un point de Ω et μ une mesure positive de masse totale 1 sur Σ. Soit, d'autre part, K une constante strictement positive majorant la courbure de $\partial\Sigma$. Désignons par q un entier supérieur à $4p/(p-1)$ et pour tout entier n de l'intervalle $[1, 4q]$, désignons par Y_n l'ensemble des nombres de module 1 dont l'argument est dans l'intervalle $\left[\frac{\pi(n-1)}{2q}, \frac{\pi n}{2q}\right[$, puis par Σ_n l'ensemble des points de $\partial\Omega$, où la normale à $\partial\Omega$ orientée vers Ω a une direction dans Y_n. Soit $\alpha > 0$ tel que, pour tout couple (x, y) de points de $\partial\Omega$ tels que $d(x, y) < \alpha$, l'angle entre les normales à $\partial\Omega$ en x et y soit inférieur à $\frac{\pi}{2q}\cdot$ Désignons par Θ_n l'ensemble des points de Σ dont la distance à Σ_n soit inférieure ou égale à

$$\beta = \inf\left(\frac{\alpha}{4}, \frac{1}{2k}\right).$$

Désignons enfin par Θ_0 l'ensemble des points de Σ dont la distance à $\partial\Omega$ est supérieure ou égale à β. Les Θ_n, pour $0 \leq n \leq 4q$, forment un recouvrement fermé de Σ, et l'on peut décomposer μ en une somme $\sum_{n=0}^{4q} \mu_n$, où μ_n est une mesure positive portée par Θ_n. Il suffira de trouver, pour tout n, une fonction harmonique f_n dans Ω de façon que f_n majore $|h_{\mu_n}|^{1/p}$ et que $f_n(s_0) \leq k_n$, où k_n est une constante indépendante de μ. En effet, si l'on pose alors $f = \sum_{n=0}^{4q} f_n$, f majorera $\sum_{n=0}^{4q} |h_{\mu_n}|^{1/p}$, donc $|h_\mu|^{1/p}$ et l'on aura

$$f(s_0) \leqq \sum_{n=0}^{4q} k_n.$$

Pour $n = 0$, on a $|h_{\mu_0}| \leqq \beta^{-1}$, de sorte que l'on peut prendre $f_0 = \beta^{-1/p}$.

Étudions le cas $n \geqq 1$, et considérons un point s de Ω dont la distance à Θ_n soit inférieure à β, donc sa distance à Σ_n inférieure à 2β. Soit t un point de $\partial\Omega$ tel que $d(s, t) = d(s, \partial\Omega)$. Comme

$$d(t, \Sigma_n) \leqq d(t, s) + d(s, \Sigma_n),$$

on a $d(t, \Sigma_n) \leqq 4\beta \leqq \alpha$, ce qui montre que $s - t$ a un argument compris entre $\frac{\pi(n-2)}{2q}$ et $\frac{\pi(n+1)}{2q}$. Nous utilisons alors le lemme suivant :

LEMME 1. — *Soient Δ un disque ouvert de centre c, μ une mesure positive de masse totale $\leqq 1$, portée par $\complement\Delta$, t un point du cercle $\partial\Delta$ et s un point de Δ sur le rayon issu de t. Dans ces conditions, on a*

$$\operatorname{Re}(c-t)h_\mu(s) \leqq 1.$$

Remarquons que le problème est invariant par translation et rotation, et ramenons-nous au cas où $t = 0$ et où c est réel positif; on a alors $0 < s \leqq x$. Tout point $u = x + iy$ de $\complement\Delta$ vérifie

$$(x-c)^2 + y^2 - c^2 \geqq 0.$$

D'où, successivement :

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} h_\mu(s) &= \int \frac{x-s}{(x-s)^2+y^2}\,d\mu(u) \leqq \int \frac{x}{y^2}\,d\mu(u) \\ &\leqq \int \frac{x}{c^2-(x-c)^2}\,d\mu(u) = \int \frac{1}{2c-x}\,d\mu(u) \leqq \frac{1}{c},\end{aligned}$$

ce qui montre que l'on a $c h_\mu(s) \leqq 1$.

Voyons maintenant comment le lemme permet d'achever la démonstration. Il résulte des hypothèses faites sur $\partial\Sigma$ que le disque ouvert de rayon 2β, tangent en x à $\partial\Sigma$ et contenant s, est tout entier dans Ω. D'après le lemme, la composante de $h_{\mu_n}(s)$ suivant $\overline{s-t}$ est majorée par $\frac{1}{2\beta}$. Par suite, si l'on pose

$$f_n = \exp(i\pi n/2q) h_{\mu_n} + \frac{1}{\beta},$$

f_n a un argument compris entre $-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{q}$ et $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{q}\cdot$ En effet, c'est immédiat pour $d(s, \Theta_n) > \beta$, puisqu'alors $|h_{\mu_n}| \leqq \frac{1}{\beta}$ et pour $d(s, \Theta_n) \leqq \beta$, si l'argument de $f_n(s)$ était dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{q}, -\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{q}\right]$, on aurait

$$\operatorname{Re}(s-t)\exp(-i\pi n/2q) f_n(s) \leqq 0,$$

d'où

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(s-t)h_{\mu_n} &\leqq -\operatorname{Re}(s-t)\exp(-i\pi n/2q)\frac{1}{\beta}\\ &\leqq |s-t|\left(\beta\cos\frac{\pi}{q}\right)^{-1} \leqq |s-t|(2\beta)^{-1},\end{aligned}$$

ce qui est absurde.

Considérons alors la détermination de $Z^{1/p}$ qui, pour Z non réel négatif, a un argument compris entre $-\frac{\pi}{q}$ et $\frac{\pi}{q}$, et posons

$$g_n = \left(\sin\frac{\pi}{q}\right)^{-1} \operatorname{Re} f_n^{1/p}.$$

Il est immédiat, d'après ce qui précède, que g_n est une fonction harmonique positive majorant $|f_n|$. Par suite,

$$|h_{\mu_n}|^{1/p} \leqq |f_n|^{1/p} + \beta^{-1/p} \leqq g_n + \beta^{-1/p}.$$

4. Les bornologies surharmoniques et harmoniques.

Nous donnons aux énoncés des théorèmes 1 et 2 diverses formes moins techniques que la condition (i)$_p$. Tout d'abord :

Proposition 6. — *Soit Σ un ensemble d'approximation. Pour qu'une semi-norme finie croissante π sur $\mathbf{C}(\sigma)$ soit fondamentale, il suffit que, pour toute composante connexe Ω de $\complement\Sigma$, l'une des conditions qui suivent soit vérifiée :*

(ii, 1) *Il existe une suite r_n dans $\mathbf{C}(\tau)$ telle que $r_n \circ \sigma$ soit de Cauchy pour π et que, pour toute fonction surharmonique (resp. harmonique) positive f dans Ω, e^f ne majore qu'un nombre fini de termes de la suite $r_n \circ \omega$.*

(ii, 2) *Il existe une suite r_n dans $\mathbf{C}(\tau)$ telle que $r_n \circ \sigma$ tende vers zéro pour π et que, pour toute fonction surharmonique (resp. harmonique) positive f dans Ω, e^f ne majore qu'un nombre fini de termes de la suite $r_n \circ \omega$.*

D'abord, (ii, 2) entraîne clairement (ii, 1). D'autre part, pour tout $p \geqq 1$, (ii, 1) entraîne $(i)_p$ car, de toute suite r_n de $\mathbf{C}(\sigma)$ qui est de Cauchy pour π, on peut extraire une sous-suite r'_n telle que la suite $r''_n = r'_{n+1} - r'_n$ vérifie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\pi(r''_n))^{1/p} < \infty.$$

Remarque. — Pour établir cette proposition, ainsi que d'autres qui suivent, il n'est pas nécessaire de connaître les résultats des paragraphes 2 et 3 sous la forme $(\mathrm{i})_p$, mais il suffit de les connaître sous la forme un peu plus faible :

$(\mathrm{i}^\star)_p$ Il existe une suite r_n dans $\mathbf{C}(\tau)$ telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\pi(r_n \circ \sigma))^{1/p} < \infty$$

et que, pour toute fonction surharmonique (resp. harmonique) positive f dans Ω, e^f ne majore pas la suite $r_n \circ \omega$.

En effet, on peut montrer que (ii, 1) entraîne $(\mathrm{i}^\star)_p$. Raisonnons par l'absurde en supposant $(\mathrm{i}^\star)_p$ fausse, et soit r_n une suite de $\mathbf{C}(\tau)$ telle que $r_n \circ \sigma$ soit de Cauchy pour π. On peut extraire de r_n une sous-suite r'_n telle que

$$\pi(r'_{n+1} - r'_n) \leqq 4^{-n}.$$

Si l'on pose alors $s_0 = r_0$ et, pour $n \geqq 1$, $s_n = r'_n - r'_{n-1}$, il est clair que, pour tout $p \geqq 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\pi(s_n \circ \sigma))^{1/p} < \infty$$

et, par suite, il existe une fonction surharmonique (resp. harmonique) positive f dans Ω telle que e^f majore la suite $|s_n \circ \omega|$. Il en résulte $|r' \circ \omega| \leqq e^f$ et, pour tout $n \geqq 1$,

$$|r'_n \circ \omega - r'_{n-1} \circ \omega| \leqq 2^{-n} e^f,$$

d'où $|r'_n \circ \omega| \leqq 2e^f$, pour tout n, ce qui contredit (ii, 1).

Pour démontrer les énoncés des paragraphes 2 et 3 sous la forme faible $(\mathrm{i}^\star)_p$, on peut, au lieu de l'inégalité (a), utiliser l'inégalité plus simple :

$(a^\star)$ $$\log^+ |r_n \circ \omega| \leqq \log^+ |(r_n \circ \omega) h| + \log^+ |h| - \log |h|.$$

De plus, au lieu de la propriété (A_p), on peut utiliser la propriété :

$(\mathrm{A}^\star_p)$ Pour toute composante connexe Ω de $\complement\Sigma$, il existe un point s_0 de Ω et une constante positive k tels que pour toute mesure μ de masse totale inférieure à 1 sur Σ, il existe une fonction harmonique l dans Ω vérifiant

$$l(s_0) \leqq k \|\mu\|^{1/p} \qquad \text{et} \qquad l \geqq \log |h_\mu|.$$

Nous donnons maintenant des conditions voisines de (ii, 1) et (ii, 2) qui sont davantage exprimées en termes de bornologies. Il nous faut pour cela introduire de nouvelles notions. Ω étant un ouvert de $\mathbf{C}$, nous désignons par $S_+(\Omega)$, le cône des fonctions surharmoniques positives dans Ω. Pour toute fonction φ de $S_+(\Omega)$, soit A_φ l'ensemble des fonctions numériques f sur Ω telles que $|f| \leqq e^\varphi$.

Lorsque φ parcourt $S_+(\Omega)$, les ensembles A_φ constituent un système fondamental de parties bornées pour une algèbre bornologique de type convexe de fonctions numériques sur Ω, que nous notons $\mathcal{S}(\Omega)$; il suffit de vérifier que si φ_1, φ_2 sont deux fonctions de $S_+(\Omega)$ et λ un nombre réel positif, il existe une fonction φ dans $S_+(\Omega)$ telle que $\lambda e^{\varphi_1} \leqq e^\varphi$ (resp. $e^{\varphi_1} + e^{\varphi_2} \leqq e^\varphi$, $e^{\varphi_1} . e^{\varphi_2} \leqq e^\varphi$) : on peut choisir en effet $\varphi = \varphi_1 + \log^+ \lambda$ (resp. $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + 1$, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$). Nous appelons bornologie surharmonique dans Ω la bornologie de $\mathcal{S}(\Omega)$. En partant de même du cône des fonctions harmoniques positives dans Ω, on définirait une algèbre $\mathcal{H}(\Omega)$ et une bornologie harmonique. $\mathcal{O}(\Omega)$ étant l'espace des fonctions holomorphes dans Ω, il est facile de voir que les ensembles de $\mathcal{O}(\Omega)$, qui sont bornés pour la bornologie surharmonique, et ceux qui le sont pour la bornologie harmonique, sont les mêmes. Nous notons $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\Omega)$ l'algèbre $\mathcal{O}(\Omega) \cap \mathcal{S}(\Omega) = \mathcal{O}(\Omega) \cap \mathcal{H}(\Omega)$ munie de la structure induite par $\mathcal{S}(\Omega)$ ou $\mathcal{H}(\Omega)$. $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\Omega)$ est une algèbre complète : si φ est une fonction harmonique positive, le disque borné des fonctions h de $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\Omega)$ telles que $|h| \leqq e^\varphi$ est complétant; en effet, la convergence dans E_B entraîne la convergence compacte, puisque φ est continue.

Proposition 7. — *Soit Σ un ensemble d'approximation. Pour qu'une semi-norme finie croissante π sur $\mathbf{C}(\sigma)$ soit fondamentale, il suffit que, pour toute composante connexe Ω de $\complement \Sigma$, l'une des conditions qui suivent soit vérifiée :*

(iii, 1) *Il existe une suite r_n dans $\mathbf{C}(\tau)$ telle que $r_n \circ \sigma$ soit de Cauchy pour π et que de $r_n \circ \omega$ on ne puisse extraire aucune sous-suite de Cauchy-Machey dans $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\Omega)$.*

(iii, 2) *Il existe une suite r_n dans $\mathbf{C}(\tau)$ telle que $r_n \circ \sigma$ tende vers zéro pour π et que de $r_n \circ \omega$ on ne puisse extraire aucune sous-suite tendant vers zéro au sens de Mackey dans $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\Omega)$.*

Ces conditions sont moins restrictives que celles du type (ii), car (ii, 1) entraîne (iii, 1) et (ii, 2) entraîne (iii, 2), toute suite de Cauchy-Mackey ou tendant vers zéro au sens de Mackey étant bornée. Montrons d'abord que (iii, 2) entraîne (ii, 2). et supposons par l'absurde (ii, 2) fausse. Soit alors r_n une suite de $\mathbf{C}(\tau)$ telle que r_n tende vers zéro pour π. On peut extraire de r_n une suite r'_n de façon que $2^n(r'_n \circ \sigma)$ tende vers zéro pour π. Il existe alors une fonction surharmonique positive φ dans Ω telle que e^φ

majore $|2^{n_p}(r'_{n_p} \circ \omega)|$ pour une suite infinie n_p d'entiers; il en résulte que $r'_{n_p} \circ \omega$ tend vers zéro au sens de Mackey dans $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\Omega)$, ce qui montre que (iii, 2) ne peut avoir lieu. D'autre part, (iii, 1) entraîne $(\mathrm{i})_p$ [et même $(\mathrm{i}^*)_p$] pour tout $p \geqq 1$. Raisonnons encore par l'absurde en supposant $(\mathrm{i})_p$ fausse. Soit r_n une suite de $\mathbf{C}(\tau)$ telle que $r_n \circ \sigma$ soit de Cauchy pour π. On peut extraire de r_n une sous-suite r'_n telle que $\pi(r'_{n+1} - r'_n) \leqq 4^{-n}$. Posons alors $s_n = 2^n(r'_{n+1} - r'_n)$; il est clair que, pour tout $p \geqq 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\pi(s_n \circ \sigma))^{1/p} < \infty$$

et, par suite, il existe une fonction surharmonique positive φ dans Ω telle que e^{φ} majore la suite $|s_n \circ \omega|$. On a donc

$$|r'_{n+1} \circ \omega - r'_n \circ \omega| \leqq 2^{-n} e^{\varphi},$$

ce qui montre que $r'_n \circ \omega$ est de Cauchy-Mackey dans $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\Omega)$ et contredit (iii, 1).

On peut chercher si ω appartient à $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\Omega)$. C'est le cas lorsque Ω n'est pas partout dense, car si on choisit un point s de $\widehat{\complement \Omega}^{\circ}$, et si l'on pose $d(s, \Omega) = d$, la fonction $\varphi = \log|s - \omega| - d$ est harmonique positive dans Ω, et e^{φ} majore $\frac{1}{d}|s - \omega|$, donc $\frac{1}{d}(a - \omega)$ appartient à $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\Omega)$, donc aussi ω. C'est aussi le cas lorsque Ω est connexe et que $\complement \Omega$ contient un ensemble fermé non vide Σ qui possède, pour un $p \geqq 1$, la propriété (A_p) ou la propriété plus faible (A_p^*). En effet, si l'on considère un point u de Σ et la mesure $\mu = \varepsilon_\mu$, la fonction $\log|h_\mu| = \log|(u - \omega)^{-1}|$ est alors majorée par une fonction harmonique positive l, de sorte que $\varphi = \log|u - \omega| + l$ est une fonction harmonique positive majorant $\log|u - \omega|$, et l'on conclut comme précédemment.

Nous ajoutons enfin aux conditions qui précèdent une condition plus restrictive qui est celle annoncée dans l'introduction et qui généralise les conditions classiques, en particulier celle prouvée par H. Pollard [19] dans le cas où $\Sigma = \mathbf{R}$ et où π est associée à un poids.

Proposition 8. — *Soit Σ un ensemble d'approximation. Pour qu'une semi-norme finie croissante π sur $\mathbf{C}(\sigma)$ soit fondamentale, il suffit que, pour toute composante connexe Ω de $\complement \overline{\Sigma}$, $\complement \Omega$ soit non polaire et*

(iv) *Il existe un point s_0 de Ω tel que, $\mu_{s_0}^{\Omega}$, désignant la mesure harmonique relative au point s_0 dans Ω,*

$$\sup_{r \in \mathbf{C}(\tau),\, \pi(r \circ \sigma) \leqq 1} \int_{\partial\Omega} \log^+|r(u)|\, d\mu_{s_0}^{\Omega}(u) = \infty.$$

Montrons en effet que cette condition entraîne les autres; il suffit de voir que (iv) entraîne (ii, 2). En effet, si l'on a

$$\sup_{\pi(r\circ\sigma)\leqq 1} \log^+ |r(u)|\, d\mu_{s_0}^{\Omega}(u) = +\infty,$$

il existe une suite r_n dans $\mathbf{C}(\tau)$ telle que

$$\pi(r_n\circ\sigma)\leqq 1 \qquad \text{et} \qquad \log^+ |r_n(u)|\, d\mu_{s_0}^{\Omega}(u) \geqq 2n.$$

Si l'on pose $r'_n = 2^{-n} r_n$, r'_n vérifie alors les hypothèses de la condition (ii, 2). En effet, $\pi(r'_n\circ\sigma)$ tend vers zéro et s'il existait une fonction harmonique positive f dans Ω telle que e^f majore une sous-suite r'_{n_p} de r'_n, en posant, pour tout point u de $\partial\Omega$,

$$g(u) = \liminf_{\substack{s\to u\\ s\in\Omega}} f(s),$$

on obtiendrait, d'après la continuité de $\log^+|r'_{n_p}|$:

$$\log^+ |r'_{n_p}(u)| \leqq g(u)$$

pour tout point u de $\partial\Omega$, d'où

$$\log^+ |r'_{n_p}(u)|\, d\mu_{s_0}^{\Omega}(u) \leqq \int g(u)\, d\mu_{s_0}^{\Omega}(u) \leqq f(s_0).$$

Or,

$$\log^+ |r'_{n_p}(u)|\, d\mu_{s_0}^{\Omega}(u) \geqq \log^+ r_{n_p}(u)\, d\mu_{s_0}^{\Omega}(u) - n\log 2\, d\mu_{s_0}^{\Omega}(u)$$

et le membre de droite est encore minoré par $(2-\log 2)\, n_p$, d'où

$$f(s_0) \geqq (2-\log 2)\, n_p,$$

ce qui est absurbe.

On peut encore remplacer la condition (iv) par la condition

(iv*) *Il existe un ouvert $\Omega'\subset\Omega$ et un point s_0 de Ω' tels que*

$$\sup_{r\in\mathbf{C}(\tau),\,\pi(r\circ\sigma)\leqq 1} \int_{\partial\Omega'} \log^+ |r(u)|\, d\mu_{s_0}^{\Omega'}(u) = \infty.$$

En résumé, on a le diagramme d'implications qui suit :

$$\begin{array}{ccccccc} & & (\text{ii}, 2) & \Rightarrow & (\text{ii}, 1) & & \\ (\text{iv}^*) \Rightarrow (\text{iv}) & \nearrow & \Updownarrow & & \Updownarrow & \searrow & \Rightarrow (\text{i})_p \Rightarrow (\text{i})_p. \\ & & (\text{iii}, 2) & & (\text{iii}, 1) & & \end{array}$$

Donnons, pour terminer, un énoncé valable pour toute partie Σ de $\mathbf{C}$.

PROPOSITION 9. — *Soient Σ une partie de $\mathbf{C}$ et π une semi-norme finie croissante sur $\mathbf{C}(\sigma)$. Pour que π soit fondamentale, il suffit que, pour toute* *composante connexe* Ω *de* $\complement \overline{\Sigma}$, *il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que,* Ω_ε *désignant l'ensemble des points* s *de* Ω *tels que* $d\left(s, \complement \Omega\right) > \varepsilon$:

(ε) *La structure induite par* π *sur* $\mathbf{C}(\tau)$ *n'est pas plus fine que celle induite par* $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\Omega)$.

La vérification est aisée, étant donné que la fonction h_μ du paragraphe 2 est bornée sur tout Ω_ε.

5. **Le facteur** $(\sigma - s)$.

Nous relions, dans ce paragraphe, les résultats du chapitre 1, § 3 et ceux du chapitre 2.

PROPOSITION 10. — *Soient* Σ *une partie de* $\mathbf{C}$ *et* π *une semi-norme finie croissante sur l'image* $\mathbf{C}\left(\sigma; \complement T\right)$ *de* $\mathbf{C}(\tau)$ *dans* $\mathbf{C}(\sigma)$. *Posons* $S = S\left(\sigma; \mathbf{C}\left(\sigma; \complement T\right)_\pi\right)$. *Alors,* $S \cap \complement \overline{\Sigma}$ *est ouvert et fermé dans* $\complement \overline{\Sigma}$.

Nous pouvons toujours prolonger π à $\mathbf{C}(\sigma)$ en π^* par la méthode du chapitre 1, § 4. Supposons, par l'absurde, qu'il existe dans une même composante connexe Ω de $\complement \overline{\Sigma}$ un point s de S et un point t de $\complement S$. Il en résulte, d'après la proposition 4 du chapitre 1, § 3, que si ρ est la semi-norme $r \mapsto \pi^*((\sigma - s)\, r)$, t appartient à $S\left(\sigma; \mathbf{C}\left(\sigma; \complement T\right)_\rho\right)$, de sorte que, par la proposition 2 du chapitre 1, § 3, il existe une suite r_n dans $\mathbf{C}(\tau)$ telle que $r_n \circ \sigma$ soit bornée pour ρ et $r_n(t) = 2^n$. Pour tout $\varepsilon > 0$, la structure induite sur $\mathbf{C}(\tau)$ par ρ n'est pas moins fine que celle induite par $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\Omega_\varepsilon)$. Cela montre, pour la proposition 9 du paragraphe 4, que la restriction de ρ à $\mathbf{C}\left(\complement \omega\right)$ est fondamentale, donc, d'après la proposition 5 du chapitre 1, § 3, que $S \subset \complement \Omega$, ce qui contredit le fait de s dans $S \cap \Omega$.

On déduit aussitôt du résultat précédent que, pour toute semi-norme finie croissante π sur $\mathbf{C}(\sigma)$, l'ensemble des points s de $\complement \overline{\Sigma}$, tels que $(\sigma - s)^{-1}$ adhère à $\mathbf{C}\left(\sigma; \complement T\right)$, est ouvert et fermé dans $\complement \overline{\Sigma}$.

PROPOSITION 11. — *Soit* Σ *un ensemble d'approximation d'ordre* p, *et soit* π *une semi-norme finie croissante sur* $\mathbf{C}\left(\sigma; \complement T\right)$. *Pour que* Σ *contienne* $S\left(\sigma; \mathbf{C}\left(\sigma; \complement T\right)_\pi\right)$, *il suffit que, pour toute composante connexe* Ω *de* $\complement \overline{\Sigma}$, *l'une des conditions* $(\mathrm{i})_p$, $(\mathrm{i}^\star)_p$, (ii, 1), (ii, 2), (iii, 1), (iii, 2), (iv) *ou* (iv*) *soit vérifiée, et il est nécessaire que chacune des six premières le soit.*

Pour voir la *nécessité*, on peut se contenter de considérer (ii, 1). Or, si l'on a $S\left(\sigma;\, \mathbf{C}\left(\sigma;\, \complement T\right)_\pi\right) \subset \Sigma$, on sait, d'après la proposition 2 du chapitre 1, § 3, que, pour tout point s de $\complement \Sigma$, il existe une suite r_n de fonctions de $\mathbf{C}(\tau)$ telle que $r_n \circ \sigma$ soit bornée pour π et que $r_n(s) = 4^n$. La suite $2^{-n} r_n \circ \sigma$ tend vers zéro pour π, et aucune sous-suite extraite de $2^{-n} r_n$ n'est bornée en s et ne peut donc être majorée dans la composante connexe Ω de s par une fonction e^f où f est harmonique positive dans Ω.

Voyons maintenant la condition *suffisante*; il suffit cette fois de considérer $(\mathrm{i})_p$. On sait déjà que l'ensemble $S = S\left(\sigma;\, \mathbf{C}\left(\sigma;\, \complement T\right)_\pi\right)$ est contenu dans $\mathrm{Sp}\left(\sigma;\, \mathbf{C}\left(\sigma;\, \complement \mathrm{T}\right)\right)$, donc dans T, de sorte qu'il suffit de montrer que tout point s de $\complement \overline{\Sigma}$ est dans $\complement S$. Raisonnons par l'absurde, en supposant s dans $S \cap \complement \overline{\Sigma}$, et considérons une composante connexe quelconque Ω de $\complement \overline{\Sigma}$. Nous pouvons toujours supposer que ω appartient à $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\Omega)$. C'est, en effet, le cas lorsque Ω n'est pas partout dense, et si, pour Ω partout dense, ω n'appartient pas à $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\Omega)$, toute semi-norme finie sur $\mathbf{C}(\sigma)$ vérifie $(i)_p$ dans Ω, comme on le voit en considérant la suite $r_n = 2^{-n}\tau$. En particulier, la semi-norme $\rho : r \mapsto \pi^\star((\sigma - s) r)$ vérifie alors $(\mathrm{i})_p$ dans Ω, ce qui prouve, puisque $\overline{\Omega} = \mathbf{C}$, donc $\Omega = \complement \overline{\Sigma}$, que ρ est fondamentale, et donc, d'après la proposition 5 du chapitre 1, § 3, que S est contenu dans Σ. Sachant donc que ω appartient à $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\Omega)$, voyons que la semi-norme ρ vérifie aussi la condition $(\mathrm{i})_p$ dans Ω, ce qui entraînera, Ω décrivant l'ensemble des composantes connexes de $\complement \overline{\Sigma}$, que ρ est fondamentale et donc, comme précédemment, que S est contenu dans Σ. Raisonnons par l'absurde, en supposant que ρ ne vérifie pas $(\mathrm{i})_p$. Soit r_n une suite de $\mathbf{C}(\tau)$ telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\pi(r_n \circ \sigma))^{1/p} < +\infty.$$

Posons :

$$r'_n = (r_n - r_n(s))\,(\tau - s)^{-1}.$$

Comme s appartient à S, on a, d'après la proposition 2 du chapitre 1, § 3 puis par la sous-additivité de $x \longrightarrow x^{1/p}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\pi(r_n(s)))^{1/p} < +\infty \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (\rho(r'_n \circ \sigma))^{1/p} + \infty.$$

Par suite, il existe une fonction harmonique positive f dans Ω telle que e^f majore les sommes partielles

$$\left| \sum_{n=0}^{m} r'_n \circ \omega \right|.$$

Si l est une fonction harmonique positive dans Ω telle que e^l majore $|s - \omega|$, e^{f+l} majore

$$\left| \sum_{n=0}^{m} r_n \circ \omega - r_n(s) \right|$$

et e^{f+l+k} majore

$$\left| \sum_{n=0}^{m} r_n \circ \omega \right| \quad \text{pour tout } k \geqq \sum_{n=0}^{\infty} |r_n(s)|.$$

Le choix de k est rendu possible par le fait que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |r_n(s)|^{1/p} < +\infty,$$

ce qui résulte aussitôt de ce que s est dans S. L'hypothèse que π vérifie $(\text{i})_p$ est donc contredite.

Il résulte des énoncés qui précèdent que la notion intéressante, pour une semi-norme finie croissante π sur $\mathbf{C}(\sigma)$, n'est pas que π soit fondamentale, mais que, pour un point s de $\complement \Sigma$, la semi-norme $\rho : r \mapsto \pi((\sigma - s) r)$ le soit. Cette condition ne fait intervenir en réalité que la restriction de π à $\mathbf{C}\left(\sigma; \complement T\right)$, et équivaut, comme on l'a vu, à $\Sigma \supset S\left(\sigma; \mathbf{C}\left(\sigma; \complement T\right)_\pi\right)$.
Si l'on compare la proposition 11 aux résultats classiques de H. Pollard, on obtient immédiatement le corollaire qui suit :

Corollaire 2. — *Soit w un poids au sens classique (resp. au sens de $\mathcal{L}^p$, $1 \leqq p < \infty$) ne s'annulant pas (resp. presque partout non nul). Pour toute fonction f de $\mathcal{C}_p(\mathbf{R})$ ne s'annulant pas, les poids w et fw sont fondamentaux en même temps.*

On en déduit encore que tout poids fondamental au sens classique l'est encore au sens de $\mathcal{L}^p$, puisque

$$\| fw \|_p \leqq \| (1 + \xi^2)^{-1} \|_p \| f(1 + \xi^2) w \|_\infty.$$

Chapitre 3.

Classes quasi-analytiques généralisées.

On sait que certains résultats de la théorie des poids fondamentaux peuvent se déduire des théorèmes classiques sur les classes quasi-analytiques. Nous allons voir comment, inversement, les résultats précédents conduisent à des nouveaux théorèmes de quasi-analyticité. Nous disons qu'une fonction numérique f, indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$, possède la propriété (Q) si $f = 0$ ou s'il n'existe aucun point de $\mathbf{R}$, où f s'annule avec toutes ses dérivées. Nous disons de même qu'un sous-ensemble de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ possède la propriété (Q) si chacune de ses fonctions la possède. Dans les mémoires classiques, on étudie les sous-ensembles de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ définis par des inégalités du type

$$\| f^{(n)} \| \leq A_n, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Nous nous donnons plus généralement une semi-norme finie π sur $\mathbf{C}[X]$, et étudions le sous-ensemble de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ défini par les inégalités

$$\| D_p(f) \| \leq \pi(p), \qquad p \in \mathbf{C}[X],$$

où, pour des raisons techniques, D_p désigne l'opérateur différentiel $p\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dx}\right)$.

Le cas classique correspond évidemment à la semi-norme

$$\sum a_n X^n \mapsto \sum \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n a_n A_n.$$

Proposition 1. — *Soient π une semi-norme finie sur $\mathbf{C}[X]$ telle que $S(X; \mathbf{C}[X]_\pi) \subset \mathbf{R}$. L'ensemble des fonctions f de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ telles que $\| D_p(f) \|_2 \leq \pi(p)$ pour tout polynôme p, possède la propriété* (Q).

En effet, l'ensemble étudié étant invariant par translation, on peut supposer, par l'absurde, qu'il contient une fonction f non nulle et telle que $f^n(0) = 0$ pour tout entier n. Du fait que, π étant finie, f appartient à $\mathcal{O}\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$, le produit de la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f avec toute fonction de $\mathcal{C}_p(\mathbf{R})$ est dans $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$. Soient alors ρ la semi-norme sur $\mathcal{C}_p(\mathbf{R})$: $g \mapsto \| (\xi - i) g\hat{f} \|_2$, et φ la forme linéaire sur $\mathcal{C}_p(\mathbf{R})$:

$$g \mapsto \int_{\mathbf{R}} g(u) \hat{f}(u)\, du.$$

ρ est finie croissante, et φ est continue pour ρ puisque, par l'inégalité de Schwarz,

$$\| g\hat{f} \|_1 \leq \| (\xi - i)^{-1} \|_2 \, \| (\xi - i) g\hat{f} \|_2.$$

De plus, si λ est la semi-norme sur $\mathcal{C}_p(\mathbf{R}) : g \mapsto \| g\hat{f} \|_2$, on a, par Plancherel,

$$\lambda(p(\xi)) = \| D_p(f) \|_2,$$

d'où

$$\lambda(p(\xi)) \leqq \pi(p) \qquad \text{et} \qquad S(\xi;\ \mathbf{C}[\xi]_\lambda) \subset \mathbf{R},$$

ce qui assure, d'après la proposition 5 du chapitre 1, § 3, que la semi-norme ρ est fondamentale, donc, d'après la proposition 1 du chapitre 2, § 1, que $\mathbf{C}[\xi]$ est dense dans $\mathcal{C}_p(\mathbf{R})$ pour ρ. Or $f^{(n)}(0) = 0$, donc

$$\int_{\mathbf{R}} u^n f(u)\, du = 0,$$

ce qui montre que φ s'annule sur $\mathbf{C}[\xi]$. Par continuité, φ est aussi nulle sur $\mathcal{C}_p(\mathbf{R})$, d'où $\hat{f} = 0$, puisque $\mathcal{C}_p(\mathbf{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ est dense dans $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$, et finalement $f = 0$, ce qui est absurde.

Corollaire 1. — *Soit π une semi-norme finie sur $\mathbf{C}[X]$. Pour que l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$, telles que $\| D_p(f) \|_2 \leqq \pi(p)$ pour tout polynôme p, possède la propriété* (Q), *il suffit que l'on ait*

$$\sup_{p \in \mathbf{C}[X],\, \pi(p) \leqq 1} \int_{\mathbf{R}} \frac{\log^+ | p(u) |}{1 + u^2}\, du = +\infty.$$

Identifions pour simplifier $\mathbf{C}[X]$ et $\mathbf{C}[\xi]$. Si la condition ci-dessus est vérifiée pour π, elle l'est aussi pour la semi-norme croissante $\pi^\star$ associée à π, puisque, sur $\mathbf{C}[\xi]$, on a $\pi^\star \leqq \pi$. D'autre part, $\| D_p(f) \|_2 \leqq \pi(p)$ entraîne $\| D_p(f) \|_2 \leqq \pi^\star(p)$, puisque, par Plancherel, $\| D_p(f) \|_2 = \| p\hat{f} \|_2$ et que la semi-norme $p \mapsto \| p\hat{f} \|_2$ est croissante. Or, si la condition ci-dessus est vérifiée pour $\pi^\star$, d'après la proposition 11 du chapitre 2, § 5, $S(\xi;\ \mathbf{C}[\xi]_{\pi^\star}) \subset \mathbf{R}$, et l'on peut appliquer la proposition 1 qui précède.

Corollaire 2. — *Pour qu'une fonction f de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ possède la propriété* (Q) *il suffit qu'elle appartienne à $\mathcal{D}\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ et que*

$$\sup_{p \in \mathbf{C}[X],\, \| D_p(f) \|_2 \leqq 1} \int_{\mathbf{R}} \frac{\log^+ | p(u) |}{1 + u^2}\, du = +\infty.$$

Ce corollaire se déduit immédiatement du précédent, puisque si f est dans $\mathcal{D}\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ la semi-norme $p \mapsto \| D_p(f) \|_2$ est finie.

Corollaire 3. — *La transformée de Fourier d'un poids fondamental au sens classique ou au sens de $\mathcal{L}^p$, pour $2 \leqq p < \infty$, possède la propriété* (Q).

Soit en effet w un tel poids. On sait, d'après le corollaire 2 du chapitre 2, § 5, que $(\xi - i)\, w$ est un poids au sens de $\mathcal{L}^2$ et donc que la semi-norme $f \mapsto \| f(\xi - i)\, w \|_2$ est fondamentale. Si $\hat{w}$ est la transformée de Fourier de w, on a, par Plancherel, $\| D_p(\hat{w}) \|_2 = \| p(\xi)\, w \|_2$ pour tout polynôme p, et la proposition 1 permet de conclure.

Proposition 2. — *Soit π une semi-norme finie croissante sur $\mathbf{C}[X]$. Si l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$, qui vérifient $\| D_p(f) \|_\infty \leq \pi(p(\xi))$ pour tout polynôme p, possède la propriété* (Q), *alors π est fondamentale.*

En effet, si π n'est pas fondamentale, il existe une forme linéaire $\varphi \neq 0$ sur $\mathcal{C}_p(\mathbf{R})$, continue pour π et nulle sur $\mathbf{C}[\xi]$. On sait que φ est l'intégrale relative à une mesure bornée μ. Soit $\hat{\mu}$ la transformée de Fourier de μ. On a clairement $\hat{\mu}^{(n)}(0) = 0$, pour tout entier n, et

$$\| D_p(\hat{\mu}) \|_\infty = \left\| \widehat{p(\xi)\,\mu} \right\|_\infty \leq \| \varphi \|_\pi\, \pi(p(\xi)).$$

Par suite, $\dfrac{\hat{\mu}}{\| \varphi \|_\pi}$ appartient à l'ensemble étudié, et ne possède pas la propriété (Q).

Chapitre 4.

Un problème de spectre relatif.

1. Ensembles spectraux fondamentaux.

Nous abordons maintenant le problème qui est de donner des conditions pour que, étant donnés une algèbre complète à unité $\mathbf{A}$, une sous-algèbre unitaire fermée $\mathbf{B}$ de $\mathbf{A}$ et un élément a de $\mathbf{B}$, on ait l'égalité entre le spectre de a dans $\mathbf{A}$ et celui de a dans $\mathbf{B}$. Nous l'étudions dans ce paragraphe en termes d'ensembles spectraux, et posons la définition qui suit.

Définition 4. — *Soient $\mathbf{A}$ une algèbre complète à unité et a un élément de $\mathbf{A}$. Nous disons qu'un ensemble Σ spectral pour a est fondamental, s'il est spectral pour a dans toute sous-algèbre unitaire fermée de $\mathbf{A}$ contenant a.*

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant :

Théorème 3. — *Soient $\mathbf{A}$ une algèbre complète à unité, a un élément de $\mathbf{A}$ et Σ un ensemble spectral pour a tel que $\overset{\circ}{\Sigma} \subset \Sigma$. Pour que Σ soit fondamental, il suffit que, pour toute composante connexe Ω de $\complement \Sigma$, il existe un entier n tel que la structure définie sur $\mathbf{C}[\zeta]$ par la semi-norme $p \mapsto \| p\, \delta_\Sigma^n \|$ ne soit pas plus fine que celle induite pas $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\Omega)$.*

Preuve. — Supposons satisfaite la condition du théorème. Pour voir que Σ est fondamental, il suffit de voir qu'il est spectral pour a dans la sous-algèbre unitaire fermée **B** de **A** engendrée par a, ou encore que $\overset{\circ}{\Sigma}$ est spectral pour a dans **B**, puisque l'intérieur d'un ensemble spectral est spectral. On doit donc vérifier que $(a - s)^{-1}$ est dans **B** pour tout s de $\complement \overline{\Sigma}$. Par le calcul symbolique, on se ramène à prouver que, pour tout s de $\complement \overline{\Sigma}$, $(\sigma - s)^{-1}$ adhère à $\mathbf{C}[\sigma]$ dans l'algèbre $\mathcal{O}(\delta_\Sigma)$, ce qui a lieu en particulier lorsque $(\sigma - s)^{-1}$ adhère à $\mathbf{C}[\sigma]$ pour la semi-norme $\pi : f \mapsto \| f \delta_\Sigma^{n+2} \|$. Or, d'après Hahn-Banach, si $(\sigma - s_0)^{-1}$ n'adhère pas à $\mathbf{C}[\sigma]$ pour π, il existe une forme linéaire continue φ sur $\mathcal{C}(\overline{\Sigma})_\pi$, sous-espace de $\mathcal{C}(\overline{\Sigma})$ sur lequel π est finie, nulle sur $\mathbf{C}[\sigma]$ et non nulle en $(\sigma - s_0)^{-1}$. Si alors ρ est la semi-norme $f \mapsto \| f \delta_\Sigma^{n+1} \|$, la restriction de φ à $\mathcal{C}(\overline{\Sigma})_\rho$ est l'intégrale associée à une mesure μ sur $\overline{\Sigma}$ portée par $\overset{\circ}{\Sigma}$. Pour tout point s de $\complement \overline{\Sigma}$, la fonction $(\sigma - s)^{-1}$ est majorée par δ_Σ^{-1} qui est μ-intégrable. Nous pouvons donc considérer la fonction holomorphe h dans la composante connexe Ω de s_0 dans $\complement \overline{\Sigma}$, définie par

$$h(s) = \int \frac{d\mu(u)}{u - s}.$$

Écrivons, pour tout polynôme p en ζ, l'inégalité

$$(c) \qquad \log^+ | p \circ \omega | \leqq \log^+ | (p \circ \omega) h | + \log^+ | h | - \log | h |,$$

de laquelle on déduit aussitôt l'inégalité

$$(d) \qquad \log^+ | p \circ \omega | \leqq | (p \circ \omega) h | + | h | - \log | h |.$$

La démonstration sera achevée si on peut majorer $|(p \circ \omega) h|$ sur l'ensemble des polynômes p en ζ tels que $\| p \delta_\Sigma^n \| \leqq 1$ par une fonction surharmonique, la même majoration s'appliquant alors au terme $|h|$ et le terme $-\log |h|$ étant surharmonique puisque $h(s_0) \neq 0$. Or, pour tout point s de Ω et tout polynôme p en ζ tel que $\| p \delta_\Sigma^n \| \leqq 1$, la fonction $(\sigma - s)^{-1} p$ est majorée par δ_Σ^{1-n} qui est μ-intégrable, et

$$p(s) h(s) = \int \frac{p(u) \, d\mu(u)}{u - s},$$

d'où

$$| p(s) h | \leqq \int \delta_\Sigma^{1-n}(u) \, d |\mu| (u),$$

soit enfin :

$$| p(s) h(s) | \leqq \| \varphi \|_\pi.$$

La constante $\| \varphi \|_\pi$ convient donc.

Il faut remarquer que la condition sur la semi-norme $\pi : f \mapsto \| f \delta_{\Sigma}^{n} \|$, qui intervient dans le théorème 3, est entraînée par chacune des conditions du type (i) du chapitre 2.

2. Fonctions holomorphes tempérées dans une bande.

Nous essayons d'étendre aux fonctions spectrales les résultats du paragraphe précédent; posons donc la définition qui suit :

DÉFINITION 5. — *Soient* **A** *une algèbre complète à unité et a un élément de* **A**. *Nous disons qu'une fonction de* $\Delta(a; \mathbf{A})$ *est fondamentale si elle appartient à* $\Delta(a; \mathbf{B})$ *pour toute sous-algèbre unitaire fermée* **B** *de* **A** *contenant a.*

Indiquons tout d'abord une extension facile du théorème 3 :

THÉORÈME 3 *bis*. — *Soient* **A** *une algèbre complète à unité, a un élément du centre de* **A** *et* δ *une fonction spectrale pour a. Pour que le support de* δ *soit fondamental, il suffit que, pour chaque composante connexe* Ω *de son complémentaire, il existe un entier n tel que la structure définie sur* $\mathbf{C}[\zeta]$ *par la semi-norme* $p \mapsto \| p\, \delta^{n} \|$ *ne soit pas plus fine que celle induite par* $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\Omega)$.

La démonstration est exactement celle du théorème 3, compte tenu du fait qu'il existe une fonction $\delta_1 \leqq \delta$, spectrale pour a, qui soit lipschitzienne et telle que $\zeta\delta_1$ soit uniformément bornée, et un morphisme d'algèbres complètes de $\mathcal{O}(\delta_1)$ dans **A** qui envoie unité sur unité et ζ sur a. Enfin si la condition du théorème 3 *bis* est vérifiée par δ, elle l'est aussi par δ_1.

Il faut remarquer que le résultat qui précède est imparfait puisqu'il n'assure pas que δ est fondamentale. Nous allons étudier un cas particulier où cette propriété a lieu.

PROPOSITION 1. — *On suppose que* Σ *est l'ensemble des points s de* **C** *tels que* $-1 < \operatorname{Im}(s) < 1$ *et qu'une fonction spectrale* δ *relative à un élément central est de la forme* $\chi_{\Sigma}(w_0 \,|\, \zeta \,|)$, *où w est une fonction strictement positive et décroissante sur* $\mathbf{R}_+$ *vérifiant :*

(1) $w(x+y) \geqq w(x)\, w(y)$ *pour tout couple* (x, y) *de* $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$;

(2) $\displaystyle\int_{\mathbf{R}_+} \frac{\log^- w(u)}{1+u^2}\, du = +\infty$;

dans ces conditions, δ *est fondamentale.*

Nous allons d'abord voir qu'avec les hypothèses de la proposition l'ensemble spectral Σ est fondamental. C'est une conséquence du fait classique que, sous les hypothèses qui précèdent, $w \circ |\xi|$ est un poids fondamental sur **R**. En réalité, nous aurons besoin d'une régularisation de w, et faisons une démonstration qui la donne aussi.

Pour voir que Σ est fondamental, il suffit, d'après le théorème 3 *bis* et des énoncés classiques, de montrer que, si l'on a posé $A_n = \| \xi_+^n w \|$ et $a_n = A_n^{1/n}$, la suite a_n est croissante et la série $1/a_n$ divergente. Le fait que a_n est croissante résulte simplement du fait que $a_n = \| \xi_+ w^{1/n} \|$ et que $w(0) \leqq 1$, puisque $w(0+0) \geqq (w(0))^2$, donc $w \leqq 1$. Pour voir que $1/a_n$ est divergente, nous nous ramenons au cas où w est de classe $\mathcal{C}^1$.

Posons $v = -\log w$; v est positive, croissante, et

(1) $v(x+y) \leqq v(x) + v(y)$ pour tout couple (x, y) de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$;

(2) $\displaystyle\int_{\mathbf{R}_+} \frac{v(u)}{1+u^2}\, du = +\infty.$

Introduisons $v_1(x) = \displaystyle\int_0^1 v(x+u)\, du$; clairement v_1 est positive, croissante, sous-additive et telle que $v \leqq v_1 \leqq v+1$, de sorte que

$$\int_{\mathbf{R}_+} \frac{v_1(u)}{1+u^2}\, du = +\infty.$$

D'autre part, v_1 est lipschitzienne car, pour tout couple (x, y) de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$:

$$v_1(x+y) - v_1(x) = \int_0^y (v(x+1+u) - v(x+u))\, du.$$

D'où

$$v_1(x+y) - v_1(x) \leqq y \,.\, v(1).$$

Si v est continue, v_1 est de classe $\mathcal{C}^1$; en effet, pour x, y dans $\mathbf{R}_+$:

$$\begin{aligned} &v_1(x+y) - v_1(x) - y(v(x+1) - v(x)) \\ &\quad = \int_0^y (v(x+1+y) - v(x+1))\, du - \int_0^y (v(x+u) - v(x))\, du, \end{aligned}$$

et par suite, v_1 possède une dérivée à droite au point x égale à $v(x+1) - v(x)$; cette dérivée étant continue, v_1 est de classe $\mathcal{C}^1$. Si alors $w_1 = \exp(-v_1)$, $\mathrm{A}_{n,1} = \| \xi_+^n w_1 \|$ et $a_{n,1} = (\mathrm{A}_{n,1})^{1/n}$, on a $w_1 \geqq (1/e)\, w$, d'où $a_{n,1} \geqq (1/e)\, a_n$, ce qui montre que si $1/a_{n,1}$ diverge, il en est de même pour $1/a_n$; on peut donc se ramener au cas où w est lipschitzienne, donc continue, puis de classe $\mathcal{C}^1$. Désignons alors, par b_n, le plus petit u de $\mathbf{R}_+$ tel que $u^n w(u) = A_n$; on a $b_n \geqq a_n$ pour $n \neq 0$, puisque $a_n = b_n (w(b_n))^{1/n}$. Supposons, par l'absurde, que $1/a_n$ converge; a_n tend alors vers l'infini, donc aussi b_n. La suite b_n est strictement croissante, car dans l'intervalle $[0, b_n]$ la dérivée logarithmique de $\xi_+^{n+1} w$ est la somme de celle de $\xi_+^n w$ qui est positive et de celle de ξ_+ qui est strictement positive; il ne peut donc y avoir de maximum pour $\xi_+^{n+1} w$

dans l'intervalle $[0, b_n]$. De plus, la dérivée logarithmique en $x > 0$ de $\zeta_+^n w$ étant $1/x.(n - vx')$, on a $v'x \leqq n$ pour $x \leqq b_n$. D'où

$$\int_{b_{n-1}}^{b_n} \frac{v'(x)}{x} dx \leqq n(1/b_{n-1} - 1/b_n).$$

Puis :

$$\int_{b_1}^{b_n} \frac{v'(x)}{x} dx \leqq \sum_{p=2}^{n} p(1/b_{p-1} - 1/b_p) \leqq 1/b_1 + \sum_{p=1}^{n-1} 1/b_p$$

et le dernier terme est majoré par la somme de la série $1/a_n$. D'autre part, en intégrant par parties, il vient

$$\int_{b_1}^{b_n} \frac{v(x)}{x^2} dx = -\left[\frac{v(x)}{x}\right]_{b_1}^{b_n} + \int_{b_1}^{b_n} \frac{v'(x)}{x} dx.$$

Comme on a $v(n) \leqq nv(1)$, d'où $v(x) \leqq (x+1)v(1)$, le membre de droite est majoré indépendamment de n et, par suite,

$$\int_{b_1}^{\infty} \frac{v(x)}{x^2} dx < +\infty.$$

Soit

$$\int_{0}^{\infty} \frac{v(x)}{1+x^2} dx < +\infty,$$

ce qui est absurde.

Posons $\delta_1 = \chi_\Sigma(w_1 \circ |\zeta|)$; la fonction δ_1 est lipschitzienne sur Σ puisque v_1 l'est sur $\mathbf{R}_+$, donc aussi w_1; de plus, on a $(1/e)\delta \leqq \delta_1 \leqq \delta$. Si nous posons $\delta_2 = \inf(\delta_1, \delta_\Sigma)$, la fonction δ_2 est lipschitzienne et telle que $\zeta\delta_2$ soit uniformément bornée. Comme elle est spectrale pour a, il existe un morphisme d'algèbres complètes de $\mathcal{O}(\delta_2)$ dans $\mathbf{A}$ qui envoie unité sur unité et σ sur a. Pour voir que δ_2 est spectrale pour a dans la sous-algèbre unitaire fermée $\mathbf{B}$ de $\mathbf{A}$ engendrée par a, il suffit, comme σ est spectral pour a dans $\mathbf{B}$ et comme le montre le calcul symbolique, de voir que δ_2 est spectrale pour σ dans l'adhérence $\mathcal{R}(\delta_2)$ de $\mathbf{C}(\sigma)$ dans $\mathcal{O}(\delta_2)$. On se ramène à prouver que δ_1 est dans $\Delta(\sigma; \mathcal{R}(\delta_2))$, puisque δ_Σ y est et que $\Delta(\sigma; \mathcal{R}(\delta_2))$ est stable par enveloppes inférieures finies. Il suffit encore de montrer que $\delta_1^{1/M}$ appartient à $\Delta(\sigma; \mathcal{R}(\delta_2))$ pour un entier $M \geqq 1$, donc de voir qu'il existe un ensemble B borné dans $\mathcal{R}(\delta_2)$ tel que, pour tout point s de Σ, il existe une fonction r_s de $\mathbf{C}(\sigma)$ telle que $(\sigma - s)r_s - 1$ appartienne à l'ensemble $\delta_1^{1/M}B$; autrement dit, il existe un entier N tel qu'on puisse choisir r_s dans $\mathbf{C}(\sigma)$ de façon que

$$r_s(t)\,\delta_1^N(t) \quad \text{et} \quad ((t-s)r_s(t) - 1)\,\delta_1^N(t)\,\delta_1^{-1/M}(s)$$

soient bornés indépendamment du couple (s, t) de $\Sigma\times\Sigma$. Posons

$$r_s=(\sigma-s)^{n_s-1}((\sigma-s)^{n_s}+n_s^{n_s})^{-1},$$

où $n_s=2E(|s|/8+5)$, $E(x)$ désignant la partie entière de x. Voyons d'abord que r_s est régulière sur Σ et plus précisément que $(t-s)^{n_s}.n_s^{-n_s}+1$ y est minoré en module. Pour $|t-s|\leqq 9/10\,n_s$, on a une minoration évidente par $1-9/10$. On peut donc supposer qu'au contraire on a $|t-s|>9/10\,n_s$, et on peut se ramener au cas où s est dans $\mathbf{R}_+ + i\mathbf{R}_+$; l'argument de $t-s$ est alors majoré par $2(9/10\,n_s-2)^{-1}$, donc celui de $(t-s)^{n_s}$ par $20\,n_s(9n_s-20)^{-1}$ qui, puisque $n_s\geqq 10$, est inférieur à $20/7$. Par suite, on a une minoration par $\sin(\pi-20/7)$. On déduit de là que $(t-s)\,r_s(t)$ est uniformément borné sur $\Sigma\times\Sigma$, donc aussi $r_s(t)$, $r_s(t)\,\delta_1^N(t)$, et pour $|s|\leqq|Nt|$ ou $|s|\leqq 80$,

$$((t-s)\,r_s(t)-1)\,\delta_1^N(t)\,\delta_1^{-1/M}(s),$$

puisque pour $|s|\leqq|Nt|$ on a $\delta_1(s)\leqq\delta_1(Nt)\leqq\delta_1^N(t)$, donc

$$\delta_1^N(t)\,\delta_1^{-1/M}(s)\leqq 1$$

et que, pour $|s|\leqq 80$, on a

$$\delta_1^{-1/M}(s)\leqq w^{-1/M}(80).$$

Il reste donc seulement à envisager le cas où $|s|>4|t|$ et $|s|>80$. Prenons alors $N=4$ et $M\geqq 4v(1)/\log 2$; il en résulte $w^{1/M}(x)\geqq 2^{-(x+1)/4}$. Comme $|t-s|>3/4|s|$ et $|s|/4\leqq n_s\leqq 3/8|s|$, $(t-s)\,r_s(t)-1$ est majoré par $(2^{-|s|/4}-1)^{-1}$, donc par $2^{1-|s|/4}$ ou encore par $4\,\delta_1^{1/M}(s)$, ce qui achève la démonstration.

3. Fonctions holomorphes tempérées dans un angle.

Nous avons vu que, pour ramener le problème sur les fonctions spectrales à celui sur les ensembles spectraux, on était conduit à la question suivante : Étant donnée une fonction positive δ sur $\mathbf{C}$, lipschitzienne et telle que $\zeta\delta$ soit uniformément bornée, si on note $\mathcal{R}(\delta)$ l'adhérence dans $\mathcal{O}(\delta)$ de l'algèbre $\mathbf{C}(\sigma)$ des fractions rationnelles régulières sur l'ensemble $\Sigma=\delta^{-1}(]0,\to[)$, à quelle condition la fonction δ est-elle spectrale pour σ dans l'algèbre complète $\mathcal{R}(\delta)$? Nous avons vu, au paragraphe précédent, un exemple dans le cas où Σ est une bande. Nous étudions maintenant le cas où Σ est contenu dans un angle.

LEMME 1. — *Soient Σ un ensemble fermé de $\mathbf{C}$ contenu dans un angle (d'ouverture $<2\pi$), et w une fonction positive sur $\mathbf{R}$, lipschitzienne et non nulle. Nous faisons, en outre, l'hypothèse qu'il existe deux constantes positives α, β, avec $\alpha>1$, telles que $0\leqq x\leqq\alpha y$ entraîne $w(x)\geqq w^\beta(y)$. Posons* *alors* $\delta = \chi_\Sigma(w \circ |\zeta|)$ *et* $\delta_1 = \inf(\delta, \delta_\Sigma)$. *Dans ces conditions,* δ_1 *appartient à* $\Delta(\sigma; \mathcal{R}(\delta_1))$.

Les hypothèses faites sur w entraînent que w ne s'annule pas, car si $w(x) = 0$, on doit avoir $w(y) = 0$ pour tout y tel qu'il existe un entier n avec $x \leq \alpha^n y$, d'où $w(y) = 0$ pour tout $y > 0$, et enfin $w = 0$ par continuité; par suite, w est bornée inférieurement sur tout compact.

Pour voir que δ_1 appartient à $\Delta(\sigma; \mathcal{R}(\delta_1))$, il suffit que δ y appartienne, ou encore $\delta^{1/M}$ pour un certain $M \geq 1$, et pour cela qu'il existe un autre entier N tel qu'on puisse associer à tout point s de Σ une fraction r_s de $\mathbf{C}(\sigma)$ de façon que les fonctions

$$r_s(t)\,\delta_1^N(t) \quad \text{et} \quad ((t-s)\,r_s(t)-1)^{-1/M}(s)\,\delta_1^N(t)$$

soient uniformément bornées lorsque (s, t) parcourt $\Sigma \times \Sigma$. De plus, d'après ce qui a été vu, on peut se contenter de considérer les points s tels que $|s|$ soit assez grand. Du fait que Σ est contenu dans un angle, il existe un nombre $c \geq 1$ tel qu'à tout point s de Σ, tel que $|s| \geq c$, on puisse associer un point $a(s)$ de $\complement\Sigma$ tel que $|a(s)| = 5|s|$ et de façon que la fonction

$$\left|\frac{t}{t-a(s)}\right|$$

soit majorée par une constante d sur l'ensemble des couples (s, t) de $\Sigma \times \Sigma$ tels que $|s| \geq c$. On pourra aussi supposer, pour simplifier, que, pour $|s| \geq c$, on a $\delta(s) \leq 1$. Posons

$$r_s(t) = \frac{1}{a(s)-s} + \frac{a(s)}{s(s-a(s))}\sum_{n=0}^{n_s}\left(\frac{s-a(s)}{t-a(s)}\,\frac{t}{s}\right)^n.$$

avec $n_s = E(-\log(s))$.

On obtient, par un calcul immédiat,

$$(t-s)\,r_s(t)-1 = -\left(\frac{s-a(s)}{t-a(s)}\right)^{n_s}\left(\frac{t}{s}\right)^{n_s+1}.$$

Supposons d'abord que l'on ait $|t| \leq |s|/2$. Il en résulte

$$\left|\frac{s-a(s)}{t-a(s)}\right| \leq 4/3,$$

d'où

$$|r_s(t)| \leq 1/4 + 3.5/4 \quad \text{et} \quad (t-s)\,r_s(t)-1\,| \leq (2/3)^{n_s+1}.$$

Par suite, dans ce cas, $((t-s)\,r_s(t)-1)\,\delta^{-1/M}(s)$ sera uniformément borné dès que l'on aura choisi $M \geq 1/\log\frac{3}{2}$. Supposons maintenant que l'on ait $|t| \geqq s/2$. Soit P un entier plus grand que $\log 2/\log \alpha$; il résulte des hypothèses sur w que l'on a $\delta^P(t) \leqq \delta(s)$. De plus,

$$|r_s(t)| \leqq 1/4 + 5/4 \frac{(6\,d)^{n_s+1}}{6\,d - 1},$$

de sorte que $r_s(t)\,\delta^N(t)$ sera uniformément borné dès qu'on aura choisi N plus grand que $P\beta \log(6\,d)$. On a enfin

$$|(t-s)\,r_s(t) - 1| \leqq \left|\frac{t-a(s)}{s-a(s)}\right| (6\,d)^{n_s+1},$$

d'où

$$|(t-s)\,r_s(t) - 1|\,\delta^{-1/M}(s) \leqq \left|\frac{t-a(s)}{s-a(s)}\right| (6\,d)^{n_s+1}\,\delta^{-P\beta}(t).$$

Or,

$$\left|\frac{t-a(s)}{s-a(s)}\right| \leqq |t|/4 + 5/4.$$

Il suffira donc de choisir N plus grand que $1 + P\beta\log(6d) + P\beta$.

PROPOSITION 2. — *On suppose que* δ *est une fonction spectrale relative à un élément central et que* δ *est de la forme* $\chi_\Sigma.\left(w \circ |\zeta|^{\frac{\pi}{\varphi}}\right)$, *où* Σ *est une partie de* $\mathbf{C}$ *telle que* $\complement\Sigma$ *contienne un angle d'ouverture* φ ($\varphi > 0$) *et où* w *est une fonction strictement positive, décroissante sur* $\mathbf{R}_+$ *et vérifiant*

$$1^\circ \quad w(x+y) \geqq w(x)\,w(y);$$

$$2^\circ \quad \int_{\mathbf{R}_+} \frac{\log^- w(u)}{1+u^2}\,du = +\infty.$$

Dans ces conditions, la fonction δ *est fondamentale.*

Cet énoncé est une conséquence facile du lemme précédent.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] AHIEZER (N. I.). — *Theory of approximation.* Translated by C. J. Hyman. — New-York, F. Ungar publishing Company, 1956.

]2] BERNSTEIN [BERNŠTEJN] (S. N.). — Sur les fonctions poids [en russe], *Doklady Akad. Nauk*, t. 77, 1951, p. 549-552.

[3] BRELOT (M.). — *Éléments de la théorie classique du potentiel.* — Paris, Centre de Documentation universitaire, 1959.

[4] CARLEMAN (T.). — *Les fonctions quasi-analytiques.* — Paris, Gauthier-Villars, 1926 (*Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions*).

[5] CARLESON (L.). — On Bernstein's approximation problem, *Proc. Amer. math. Soc.*, t. 2, 1951, p. 953-961.

[6] CHOQUET (G.). — Le problème des moments, *Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse*, 1re année, 1962, n° 4, 10 pages.

[7] FERRIER (J.-P.). — Travaux récents de L. Nachbin sur l'approximation polynômiale pondérée, *Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse*, 2^e^ année, 1963, n° 3, 17 pages.

[8] FERRIER (J.-P.). — Approximation dans les algèbres bornologiques, *Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse*, 5^e^ année, 1965-1966, n° 1, 14 pages.

[9] FERRIER (J.-P.). — Ensembles spectraux et approximation polynômiale pondérée, *Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse*, 6^e^ année, 1966-1967, n° 14, 36 pages.

[10] HORVATH (J.). — *Aproximaciôn y funciones casi-analiticas*. — Madrid, universidad de Madrid, Publicaciónes de la Facultad de Ciencias, 1956.

[11] MALLIAVIN (P.). — L'approximation polynômiale pondérée sur un espace localement compact, *Amer. J. Math.*, t. 81, 1959, p. 605-612.

[12] MANDELBROJT (S.). — *Séries adhérentes, régularisation des suites, applications*. — Paris, Gauthier-Villars, 1952 (*Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions*).

[13] MERGELJAN (S. N.). — Uniform approximation to functions of a complex variable, *Series and approximation*, p. 294-391. — Providence, American mathematical Society, 1962 (*Translations*, Series 1, vol. 3).

[14] MERGELJAN (S. N.). — Weighted approximation by polynomials, *Amer. math. Soc., Translations*, Series 2, t. 10, 1958, p. 59-106.

[15] MOKOBODZKI (G.) et SIBONY (D.). — Cônes adaptés de fonctions continues et théorie du potentiel, *Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse*, 6^e^ année, 1966-1967, n° 5, 35 pages.

[16] MOKOBODZKI (G.) et SIBONY (D.). — Cônes de fonctions et théorie du potentiel, I., *Séminaire Choquet-Brelot-Deny : Théorie du potentiel*, 11^e^ année, 1966-1967, n° 8, 35 pages.

[17] NACHBIN (L.). — *Elements of approximation theory*. — Rio de Janeiro, Instituto de Matematica pura e applicada, 1965 (*Notas de Matematica*, 33).

[18] NACHBIN (L.). — Weighted approximation for algebras and modules of continuous functions : Real and self-adjoint complex cases, *Annals of Math.*, t. 81, 1965, p. 259-302.

[19] POLLARD (H.). — The Bernstein approximation problem, *Proc. Amer. math. Soc.*, t. 6, 1955, p. 402-411.

[20] ROGALSKI (M.). — Représentations fonctionnelles d'espaces vectoriels réticulés, *Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse*, 5^e^ année, 1965-1966, n° 2, 31 pages.

[21] Séminaire « BANACH ». — Paris, École Normale Supérieure, 1963 (non publié).

[22] WAELBROECK (L.). — Études spectrales des algèbres complètes, *Académie Royale de Belgique, Cl. Sc., Mém.*, Série 2, t. 31, 1960, n° 7, 142 pages.

[23] WAELBROECK (L.). — *Théories des algèbres de Banach et des algèbres localement convexes*. — Montréal, Université de Montréal, 1962 (*Séminaire de Mathématiques Supérieures*, été 1962, 2).

(Manuscrit reçu le 10 mai 1968.)

Jean-Pierre FERRIER,
16, square de Port-Royal,
75-Paris, 13e.