BULLETIN DE LA S. M. F.

J. L. NICOLAS

Ordre maximal d'un élément du groupe S_n des permutations et « highly composite numbers »

Bulletin de la S. M. F., tome 97 (1969), p. 129-191

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1969__97__129_0>

Bull. Soc. math. France,
97, 1969, p. 129 à 191.
(*Thèse Sc. math.*, Paris, 1968).

ORDRE MAXIMAL D'UN ÉLÉMENT DU GROUPE S_n DES PERMUTATIONS ET « HIGHLY COMPOSITE NUMBERS » (*)

PAR

JEAN-LOUIS NICOLAS.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
INTRODUCTION	130
CHAPITRE 1 : Grandes différences entre deux termes consécutifs de certaines suites contenant les nombres premiers	131
CHAPITRE 2 : La fonction $g(n)$	137
CHAPITRE 3 : L'ensemble $G \subset g(N)$ et ses applications	150
CHAPITRE 4 : Highly composite et highly abundant numbers	174
Table numérique de la fonction $g(n)$	187
BIBLIOGRAPHIE	191

J'ai plaisir à remercier très vivement MM. les Professeurs C. PISOT, qui a dirigé mon travail, P. MALLIAVIN, qui a relu mon manuscrit et R. de POSSEL qui m'a permis d'utiliser les ordinateurs de l'Institut Blaise Pascal, et qui me font l'honneur de constituer le jury de thèse.

Qu'il me soit permis également de remercier MM. les Professeurs A. SCHINZEL de Varsovie et P. ERDÖS de Budapest, qui se sont intéressés à mes résultats et m'ont signalé de précieuses références, et H. DELANGE pour ses utiles conseils.

(*) *Thèse Sc. math.*, Paris, 1968.

Introduction.

La fonction $g(n)$, définie comme l'ordre maximal d'un élément du groupe S_n des permutations, fut étudiée par LANDAU, en 1903, qui précisa son comportement lorsque n tend vers l'infini. Il démontra : $\log g(n) \sim \sqrt{n \log n}$. Cette étude fut reprise par SHAH, en 1938, qui donna un développement asymptotique un peu plus long. Il ne semble pas y avoir d'autres articles concernant $g(n)$.

Nous nous intéresserons plus particulièrement à l'étude des éléments de $g(\mathbf{N})$ et à leur décomposition en facteurs premiers. Presque tous les résultats des chapitres 2 et 3 concerneront cette décomposition. Les autres résultats seront le théorème 3, qui exprime que $g(n)$ est constante sur des intervalles arbitrairement grands, et les théorèmes 5 et 6, qui sont des approches de problèmes encore irrésolus que nous évoquerons plus loin.

Étant donnée une fonction arithmétique f, on dit que f est « grande » en n si, pour tout $m < n$, on a $f(m) < f(n)$. On dit de même que f est « petite » en n si, pour tout $m > n$, $f(m) > f(n)$. Nous avons introduit la fonction arithmétique additive l définie par $l(p^\alpha) = p^\alpha$ pour p premier et $\alpha \geqq 1$, et montré que les nombres de $g(\mathbf{N})$ sont exactement les nombres où la fonction l est « petite ». Nous rattachons ainsi l'étude des nombres de $g(\mathbf{N})$ au problème des « grandes » ou « petites » valeurs de fonction additive ou multiplicative.

Ce problème fut étudié de façon assez approfondie par RAMANUJAN qui appelle « highly composite numbers » les nombres où est « grande » la fonction multiplicative $d(n) =$ nombre de diviseurs de n. En s'inspirant du travail de RAMANUJAN, ERDÖS et ALAOGLU ont étudié les « highly abundant numbers » et « superabundant numbers », nombres où sont « grandes » respectivement les fonctions $\sigma(n)$ et $\frac{\sigma(n)}{n}$, où $\sigma(n)$ est la fonction multiplicative somme des diviseurs de n. A la fin de leur article, ERDÖS et ALAOGLU font quelques remarques à propos d'autres fonctions dont on pourrait étudier les « grandes » et « petites » valeurs. Quelques autres types de fonctions se rapprochant de $d(n)$ et de $\sigma(n)$ ont aussi été étudiées sous cet angle par PILLAÏ.

RAMANUJAN introduit également les « superior highly composite numbers ». Ce sont des « highly composite numbers » particuliers pour lesquels on sait exactement déterminer la décomposition en facteurs premiers. Ils ont leur analogue pour $\sigma(n)$: ce sont les « colossally abundant numbers » et pour $l(n)$, on trouve l'ensemble G contenu dans $g(\mathbf{N})$. L'étude de ces nombres « supérieurs » s'arrêtait à leur définition et à leur décomposition en facteurs premiers.

C'est en précisant l'étude de l'ensemble G que nous obtiendrons les résultats du chapitre 3. En fait, on déterminera les nombres de $g(\mathbf{N})$ au « voisinage » de certains éléments de G.

Enfin, dans le dernier chapitre, on applique cette méthode aux « highly composite numbers » et surtout aux « highly abundant numbers ». Cela nous permet de répondre à deux questions posées par Erdös et Alaoglu : il existe une infinité de « highly abundant numbers » qui ne sont pas « superabundant » et : il existe une infinité de « highly abundant numbers » divisibles par P, non divisible par p, avec $p < P$, p et P premiers.

On sait que le quotient de deux « highly composite numbers » successifs, ou de deux « superabundant numbers » successifs, tend vers 1 quand ces nombres augmentent indéfiniment. Il semble plus difficile de montrer (ce qui est le problème équivalent) que $\frac{g(n+1)}{g(n)} \to 1$. C'est une question non résolue.

Soit $Q(x)$ le nombre de « highly composite numbers » inférieurs à x. On n'a pour $Q(x)$ qu'un encadrement très large :

$$(\log x)^{c_1} \leqq Q(x) \leqq (\log x)^{c_2 \log\log x} \quad \text{(Erdös)}.$$

Mais le problème, encore irrésolu, de trouver un équivalent de $Q(x)$ était qualifié de très difficile par Ramanujan. Pour les nombres de $g(\mathbf{N})$, nous trouvons un encadrement plus étroit, mais il semble aussi difficile de l'améliorer.

Enfin, dans le premier chapitre, nous sommes intéressés aux grandes différences entre deux nombres premiers consécutifs. Plus exactement, pour certaines suites contenant les nombres premiers (par exemple, les nombres p^m, p premier, m entier, $m \geqq 1$), on étudie les grandes différences entre deux termes consécutifs de ces suites. Les résultats obtenus nous seront utiles dans les chapitres suivants.

Chapitre 1.

Grandes différences entre deux termes consécutifs de certaines suites contenant les nombres premiers.

Soit p_n le $n^{\text{ième}}$ nombre premier. L'étude des « grandes différences » $p_{n+1} - p_n$ a donné lieu à de nombreux articles dont les plus récents sont de Rankin ([10] et [11]) et de Schönhage [12]. On trouvera d'autres références dans le livre de Prachar ([8], chap. V, § 5).

Remarquons d'abord que la valeur moyenne $\frac{1}{N}\sum_{n \leqq N} (p_{n+1} - p_n)$ est équivalente à $\log p_N$. Le résultat : il existe une infinité de nombres premiers pour lesquels $p_{n+1} - p_n \geqq (1 - \varepsilon) \log p_n$ est donc facile à obtenir, pour tout $\varepsilon > 0$.

Le meilleur résultat actuel est le suivant [11] : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles on a

$$p_{n+1} - p_n \geqq (e^{\gamma} - \varepsilon) \log p_n \frac{\log_2 p_n \log_4 p_n}{\log_3^2 p_n} \tag{1}$$

en désignant $\log \log p_n$ par $\log_2 p_n$, etc., et par γ la constante d'Euler.

On se propose d'améliorer ce résultat de la façon suivante : on se donne une suite croissante, contenant les nombres premiers, par exemple a_n la suite ordonnée de tous les nombres p^m, où p est premier et m entier $\geqq 1$. On va démontrer qu'il existe une constante c telle que, pour une infinité de valeurs de n, on ait

$$a_{n+1} - a_n \geqq c \log a_n \frac{\log_2 a_n \log_4 a_n}{\log_3^2 a_n}.$$

Pour cela, on va montrer qu'il y a suffisamment de nombres premiers $p_n \leqq x$ qui vérifient la relation (1), avec une constante plus petite que e^{γ}.

Rappelons d'abord un résultat utilisé pour démontrer (1) (*voir* [12] ou [8], chap. V, § 5) :

« Étant donnés les k premiers nombres premiers, $p_1, p_2, \ldots, p_k$, il existe des nombres entiers $a(p_1), a(p_2), \ldots, a(p_k)$, et un nombre U tels que, si z est un nombre entier satisfaisant aux congruences :

$$z \equiv a(p^i) \bmod p_i \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq k, \tag{2}$$

alors les nombres $z + 2, z + 3, \ldots, z + U$, sont divisibles par l'un des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_k$, et l'on a : $U \gtrsim e^{\gamma} p_k \dfrac{\log p_k \log_3 p_k}{\log_2^2 p_k}$. »

(La notation $A \gtrsim B$ signifie qu'il existe A' tel que $A \geqq A'$ et $A' \sim B$.)

Soit maintenant $\delta > 1$ un nombre réel fixé, et posons $x = \prod_{i=1}^{m} p_i$ avec $m = [\delta k] =$ partie entière de δk. Soit $N(x)$ le nombre de solutions $z \leqq x$ des congruences (2). On a

$$N(x) = \prod_{i=k+1}^{m} p_i.$$

Soit $\theta(x) = \sum_{p \leqq x} \log p$ la fonction de Čebyšev. On sait que $\theta(x) \sim x$ lorsque $x \to \infty$. On a

$$N(x) = e^{\theta(p_m) - \theta(p_k)} \qquad \text{et} \qquad x = e^{\theta(p_m)}.$$

Lorsque $x \to \infty$, on a $m \sim \delta k$ et

$$p_k \sim \frac{1}{\delta} p_m \sim \frac{1}{\delta} \log x, \tag{3}$$

donc

$$\theta(p_m) - \theta(p_k) \sim p_m - p_k \sim \frac{\delta - 1}{\delta} p_m \sim \frac{\delta - 1}{\delta} \log x,$$

et

$$N(x) \gtrsim x^{1-\frac{1}{\delta}}.$$

D'autre part, d'après (3), on a

$$U \gtrsim \frac{e^\gamma}{\delta} \log x \frac{\log_2 x \log_4 x}{\log_3^2 x}.$$

THÉORÈME 1. — *L'une des deux propositions suivantes a lieu :*

1° *Il existe $a > 0$ et une infinité de nombres premiers p_i pour lesquels*

$$p_{i+1} - p_i > p_i^a;$$

2° *Pour tout $\delta > 1$, on a lorsque $x \to \infty$:*

$$\text{Card}\left\{ p_i \leq x \mid p_{i+1} - p_i \geq \frac{1}{\delta} e^\gamma \log x \frac{\log_2 x \log_4 x}{\log_3^2 x} \right\} \gtrsim x^{1-\frac{1}{\delta}}.$$

Démonstration. — Soient z et z', $(z < z')$ deux solutions consécutives des congruences (2), inférieures à x. Supposons que, pour x assez grand, il y ait toujours, entre $z + 2$ et $z' + 2$, un nombre premier. Alors à z, on fait correspondre p_i, le plus grand nombre premier inférieur à $z + 1$. On a donc

$$p_i \leq z + 1 < z + U < p_{i+1} \leq z' + 1,$$

et l'on a établi une injection de l'ensemble des solutions $z \leq x$ des congruences (2) sur l'ensemble des nombres premiers inférieurs à $x + 1$. La deuxième proposition est alors vérifiée.

Supposons maintenant que, pour x arbitrairement grand, on trouve toujours deux solutions z et z' telles qu'entre $z + 2$ et $z' + 2$ il n'y ait pas de nombres premiers. On a

$$z' - z \geq \prod_{i=1}^{k} p_i = e^{\theta(p_k)}$$

et

$$\log(z' - z) \gtrsim p_k \gtrsim \frac{1}{\delta} \log x \gtrsim \frac{1}{\delta} \log z \quad \text{d'après (3).}$$

Soient p le nombre premier immédiatement inférieur à $z+2$, et p' le nombre premier suivant p. On a $p' > z'+2$, et

$$\log(p'-p) \geqq \log(z'-z) \gtrsim \frac{1}{\delta}\log z \geqq \frac{1}{\delta}\log p,$$

d'où $p'-p \gtrsim p^{1/\delta}$.

La proposition 1° est alors vérifiée, et le théorème est établi.

THÉORÈME 2. — *Soit b_n une suite croissante de nombres réels positifs, vérifiant les deux conditions :*

1° *Il existe $\beta < 1$ tel que* Card $\{ b_n \mid b_n \leqq x \} = O(x^\beta)$;

2° *Il existe une constante $b > 0$ telle que, quand $x \to \infty$,*

$$\text{Card}\{ b_n \mid x \leqq b_n \leqq x + x^b \} = o(x^\varepsilon) \quad \textit{pour tout } \varepsilon.$$

Alors la suite a_n obtenue en rangeant dans l'ordre croissant les nombres premiers et les nombres de la suite b_n, vérifie la relation : il existe une constante c et une infinité de n tels que

$$a_{n+1} - a_n \geqq c \log a_n \frac{\log_2 a_n \log_4 a_n}{\log_3^2 a_n}.$$

Démonstration. — Supposons que la première proposition du théorème 1 soit vérifiée, et posons $d = \min(a, b)$. Dans l'intervalle $]p, p+p^d[$, il n'y a pas de nombres premiers, et il y a au plus $o(p^{d/2})$ nombres de la suite b_n. Il y a donc au moins un intervalle de longueur $p^{d/2}$ dans lequel il n'y a pas de nombres de la suite b_n. La conclusion est alors largement vérifiée.

Supposons maintenant que ce soit la deuxième proposition du théorème 1 qui soit vérifiée. On choisit δ de telle sorte que $1-\frac{1}{\delta} > \beta' > \beta$. On aura alors pour x assez grand,

$$\text{Card}\left\{ p_i \leqq x \mid p_{i+1} - p_i > c \log x \frac{\log_2 x \log_4 x}{\log_3^2 x.} \right\} \geqq x^{\beta'}.$$

Parmi ces intervalles (p_i, p_{i+1}), il y en a au moins $x^{\frac{\beta'-\beta}{2}}$ qui ne contiennent pas de nombres de la suite b_n, d'après la condition 1°. En posant $a_n = p_i$, $a_{n+1} = p_{i+1}$, on obtient la conclusion.

COROLLAIRE 1. — *Soit a_n la suite ordonnée de tous les nombres p^m, p premier, m entier $\geqq 1$. Il existe une constante c telle que, pour une infinité de valeurs de n, on ait*

$$a_{n+1} - a_n \geqq c \log a_n \frac{\log_2 a_n \log_4 a_n}{\log_3^2 a_n}.$$

Remarque. — On peut prendre $c = \frac{1}{2} e^{\gamma} - \varepsilon$.

Démonstration. — On prend pour suite b_n, la suite des nombres p^m, p premier et $m \geqq 2$. Si l'on désigne par $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x, on a

$$\mathrm{Card}\{ b_n \leqq x \} = \pi(\sqrt{x}) + \pi(x^{1/3}) + \ldots + \pi(x^{1/m}),$$

avec m tel que : $x^{1/m} > 2 > x^{1/m+1}$, donc $m < \frac{\log x}{\log 2}$ et

$$\mathrm{Card}\{ b_n \leqq x \} \leqq \pi(\sqrt{x}) + \frac{\log x}{\log 2} \pi(x^{1/3}) = O(\sqrt{x}).$$

La deuxième condition du théorème 2 sera vérifiée avec $b = 1/4$. Entre x et $x + x^{1/4}$, il ne peut y avoir qu'un seul carré de nombre entier. Supposons qu'il y en ait deux, λ^2 et $(\lambda + 1)^2$. On aurait

$$(\lambda + 1)^2 - \lambda^2 \geqq 2\lambda \geqq 2\sqrt{x} > x^{1/4}.$$

De même, il ne peut y avoir qu'un seul cube, etc., donc

$$\mathrm{Card}\{ b_n \mid x \leqq b_n \leqq x + x^{1/4} \} \leqq m < \frac{\log(x + x^{1/4})}{\log 2} = o(x^{\varepsilon}).$$

Les hypothèses du théorème 2 étant vérifiées, le corollaire est démontré.

COROLLAIRE 2. — *Soit* $[1, 2, \ldots, n] = e^{\psi(n)}$ *le plus petit commun multiple des nombres* $1, 2, \ldots, n$. *Cette fonction est constante sur des intervalles arbitrairement grands et même l'équation* $e^{\psi(k+f(k))} = e^{\psi(k)}$ *a une infinité de solutions avec* $f(k) = c \log k \frac{\log_2 k \log_4 k}{\log_3^2 k}$ *(c a la même valeur que dans le corollaire* 1).

Démonstration. — La suite a_n du corollaire 1 est exactement la suite des nombres où la fonction $e^{\psi(n)}$ augmente. On a donc

$$e^{\psi(a_n)} = e^{\psi(a_{n+1}-1)}.$$

On peut donc prendre pour solution de l'équation $k = a_n$,

$$f(k) = a_{n+1} - a_n - 1.$$

La première partie de ce corollaire redonne un résultat de SIERPINSKI [14].

COROLLAIRE 3. — *Soit $f(x)$ une fonction définie pour $x \geqq 2$ et croissante sur l'intervalle $(x_0 + \infty)$. Soit $y_0 = f(x_0)$ et $y_1 = f(\infty)$. On suppose que f est dérivable et que, pour $x_1 \sim x$, $f'(x_1) \sim f'(x)$ quand $x \to \infty$.*

On considère une suite v_n de nombres de (y_0, y_1). On suppose qu'il existe $\beta < 1$ tel que $\operatorname{Card}\{ v_n | v_n \leqq f(x) \} = O(x^\beta)$, *et qu'il existe $b > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, on ait :*

$$\operatorname{Card}\{ f(x) \leqq v_n \leqq f(x) + x^b f'(x) \} = o(x^\varepsilon).$$

Alors la suite u_n, définie en rangeant par ordre croissant les nombres $f(p)$, où p est premier, et les nombres v_n, vérifie : il existe une constante $c > 0$ et une infinité de n pour lesquels on a

$$u_{n+1} - u_n \geqq c f'(a_n) \log a_n \frac{\log_2 a_n \log_4 a_n}{\log_3^2 a_n} \qquad \text{avec} \quad u_n = f(a_n).$$

Démonstration. — On applique le théorème 2 avec $b_n = f^{-1}(v_n)$; on a alors $u_{n+1} = f(a_{n+1})$ et $u_n = f(a_n)$ et, par le théorème des accroissements finis,

$$u_{n+1} - u_n \sim f'(a_n)(a_{n+1} - a_n),$$

parce que, a_n étant une suite contenant les nombres premiers, on a $a_n \sim a_{n+1}$.

On a de même pour une fonction décroissante :

COROLLAIRE 4. — *Soit $f(x)$ une fonction définie et décroissante sur l'intervalle $(2, \infty)$. Soit $y_0 = f(2)$ et l'on suppose que $f(\infty) = 0$, que f est dérivable et que, pour $x \sim x_1$, $f'(x) \sim f'(x_1)$ quand x tend vers l'infini.*

On considère une suite v_n de $(0, y_0)$. On suppose qu'il existe β tel que

$$\operatorname{Card}\{ v_n | v_n \geqq f(x) \} = O(x^\beta)$$

et qu'il existe $b > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, on ait

$$\operatorname{Card}\{ v_n | f(x) \geqq v_n \geqq f(x) + x^b f'(x) \} = o(x^\varepsilon).$$

Alors la suite u_n, définie en rangeant par ordre décroissant les nombres $f(p)$, où p est premier, et les nombres v_n, vérifie : il existe une constante $c > 0$ et une infinité de n pour lesquels on a

$$u_n - u_{n+1} \geqq c(-f'(a_n)) \log a_n \frac{\log_2 a_n \log_4 a_n}{\log_3^2 a_n} \qquad \text{avec} \quad u_n = f(a_n).$$

CHAPITRE 2.

La fonction $g(n)$.

Soit S_n le groupe des permutations de n éléments; on a la définition suivante :

DÉFINITION. — $g(n) = \sup\limits_{\sigma \in S_n} [\text{ordre de } \sigma]$.

On rappelle qu'un élément σ du groupe S_n des permutations de n objets se décompose en cycle de façon unique. Par exemple, pour $n = 9$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (1 \quad 9 \quad 5)(2 \quad 8 \quad 4 \quad 6)(3 \quad 7),$$

L'ordre d'un élément (le plus petit entier $m \geqq 1$ tel que σ^m soit la permutation identique) est donc le p. p. c. m. des longueurs de ses cycles. Dans l'exemple ci-dessus, l'ordre est donc 12.

Si $\sigma \in S_n$, soient $n_1, n_2, \ldots, n_k$ les longueurs de ses cycles; on a

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k,$$
$$\text{ordre de } \sigma = \text{p. p. c. m.}(n_1, n_2, \ldots, n_k).$$

D'autre part, une partition de n est un système quelconque d'entiers $\geqq 1$ $(n_1\ n_2, \ldots, n_k)$ tels que $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$. Par exemple, le nombre $n = 5$ a sept partitions :

$$\begin{aligned} 5 &= 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 \\ &= 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1. \end{aligned}$$

Il est facile de construire une permutation de n objets ayant k cycles de longueur $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$. A $5 = 2 + 2 + 1$, on associe, par exemple,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Si $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ est une partition quelconque de n, il existe donc un élément de S_n dont l'ordre est : p. p. c. m. $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$. On a donc :

$$(1) \qquad g(n) = \sup_{\mathfrak{T}(n)} [\text{p. p. c. m.}(n_1, n_2, \ldots, n_k)],$$

$\mathfrak{T}(n)$ désignant l'ensemble des partitions de n.

On a les propriétés suivantes (*voir* [3], § 61) :

— $g(n)$ divise $n\,!$;

— $g(n)$ est croissante (soit $\sigma \in S_n$; l'élément $\sigma' \in S_{n+1}$, qui laisse invariant $(n+1)$ et coïncide ailleurs avec σ, a même ordre que σ).

— Tableau des valeurs (une table plus longue sera donnée à la fin) :

n	3	4	5	6	7	8
$g(n)$	3	4	6	6	12	15
$\mathfrak{P}$	3	4	2, 3	1, 2, 3 6	3, 4	3, 5

n	9	10	11	12	13
$g(n)$	20	30	30	60	60
$\mathfrak{P}$	4, 5	2, 3, 5	1, 2, 3, 5 5, 6	3, 4, 5	1, 3, 4, 5

La troisième ligne indique la (ou les) partition(s) de n d'ordre $g(n)$.

— $g(n)$ n'est pas strictement croissante : $g(12) = g(13)$.

— Pour $n = 6$, $n = 11$, on constate que plusieurs partitions sont d'ordre $g(n)$ (on appelle ordre d'une partition, l'ordre d'un élément σ de S_n associé).

— Parmi les partitions d'ordre $g(n)$ il en existe une, telle que les $(n_i)_{1 \leq i \leq k}$ soient des puissances de nombres premiers ou des 1. En effet, si

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

et si $n_1 = ab$, avec $a > 1$, $b > 1$, $(a, b) = 1$, a, $b \in \mathbf{N}$, on a

$$ab - (a+b) = (a-1)(b-1) - 1 \geq 0,$$

et les partitions

$$n = a + b + n_2 + \ldots + n_k + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{ab-(a+b)} = ab + n_2 + \ldots + n_k$$

ont même ordre, les multiples de ab étant les mêmes que ceux de a et b puisque $(a, b) = 1$.

Dans la formule (1), on peut se restreindre au cas où $n_i = p^r$:

$$g(n) = \sup_{\sum p^r \leq n} \Pi p^r, \tag{2}$$

le « sup » s'étendant à tous les systèmes de couples p, r (p premier, $r \in \mathbf{N}$) de somme $\sum p^r \leq n$.

— Lorsque n tend vers l'infini, LANDAU a montré que

$$\log g(n) \sim \sqrt{n \log n},$$

et SHAH [13] a amélioré ce résultat :

$$\log g(n) = \sqrt{n \log n}\left[1 + \frac{\log\log n}{2\log n} - \frac{1+o(1)}{2\log n}\right].$$

Nous allons maintenant définir une fonction additive l à laquelle $g(n)$ est attachée de façon simple :

DÉFINITION. — Soit $l : \mathbf{N}^{\star} \to \mathbf{N}$:

$$l(1) = 0,$$

$$l\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}\right) = \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}, \quad \text{avec } p_i \text{ premier et } \alpha_i \in \mathbf{N}^{\star}.$$

l est une fonction arithmétique additive :

$$(m, n) = 1 \quad \Rightarrow \quad l(mn) = l(m) + l(n),$$

et sa restriction aux nombres p^{α} (p premier, $\alpha \in \mathbf{N}^{\star}$) est l'application identique. On a $l(k) \leq k$ pour tout k, et $l(k) = k$ entraîne $k = p^{\alpha}$.

Remarque. — Si $\alpha = 0$, $l(p^{\alpha}) = 0 \neq p^{\alpha} = 1$. Nous serons ainsi amenés à séparer les cas $\alpha = 0$ et $\alpha \neq 0$, ce qui allongera les démonstrations.

La formule (2) devient alors

$$g(n) = \sup_{l(k) \leq n} k. \tag{3}$$

Ce qui équivaut à

$$l(g(n)) \leq n; \tag{4}$$

$$M > g(n) \quad \Rightarrow \quad l(M) > n. \tag{5}$$

Remarquons que (5) est équivalent à (5′) :

$$M > g(n-1) \quad \Rightarrow \quad l(M) \geq n. \tag{5′}$$

1. Propriété caractéristique.

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(*a*) $m \in g(\mathbf{N})$,

(*b*) $M > m \quad \Rightarrow \quad l(M) > l(m)$.

Démonstration.

$(a) \Rightarrow (b)$. Soit $m \in g(\mathbf{N})$, et soit $M > m$, (5) et (4) donnent

$$l(M) > n \geqq l(g(n)) = l(m).$$

$(b) \Rightarrow (a)$. Soit m vérifiant (b). Si $m \notin g(\mathbf{N})$, comme g est croissante et non bornée, il existe n tel que

$$g(n-1) < m < g(n).$$

(5′) et (4) donnent

$$l(m) \geqq n \geqq l(g(n)).$$

On a construit $M = g(n)$, $M > m$ et $l(M) \leqq l(m)$, ce qui contredit l'hypothèse.

COROLLAIRE. — *Si* $M \neq g(n)$ *et si* $l(M) \leqq l(g(n))$, *alors* $M < g(n)$.

C'est une autre façon d'écrire : $(a) \Rightarrow (b)$.

Remarque. — Soit $f : \mathbf{N}^\star \to \mathbf{R}$ une fonction arithmétique.

On dit que f est grande en n, *si* $m < n \Rightarrow f(m) < f(n)$;

On dit que f est petite en n, si $m > n \Rightarrow f(m) > f(n)$.

La propriété caractéristique s'écrit alors :

L'ensemble des nombres $n \in \mathbf{N}^\star$, où l est petite, est exactement $g(\mathbf{N})$.

Relation entre l *et* g.

1° Calcul de $l(g(n))$: On définit sur $\mathbf{N}$ la relation d'équivalence

$$n \sim n' \iff g(n) = g(n').$$

Soit $\hat{n}$ le plus petit élément de la classe de n. On a

$$g(\hat{n}) = g(n); \qquad \hat{n} \leqq n; \qquad g(\hat{n}-1) < g(\hat{n}).$$

(5′) donne $l(g(\hat{n})) \geqq \hat{n}$, et (4) donne $l(g(\hat{n})) \leqq \hat{n}$, donc

$$l(g(n)) = l(g(\hat{n})) = \hat{n}.$$

On a, en fait, démontré les équivalences :

$$n = \hat{n} \iff l(g(n)) = n \iff g(n) > g(n-1) \iff n \in l \circ g(\mathbf{N}).$$

2° l est strictement croissante sur $g(\mathbf{N})$. Soit $g(m) < g(n)$, alors $g(m) < g(\hat{n})$, donc $m < \hat{n}$ (g est croissante) et, avec (4),

$$l(g(m)) \leqq m < \hat{n} = l(g(n)).$$

3° $g(l(N)) \geqq N$ pour tout $N \in \mathbf{N}^*$. L'égalité a lieu si, et seulement si, $N \in g(\mathbf{N})$. Puisque $g(l(N)) = \sup\limits_{l(k) \leqq l(N)} k$, N est une valeur possible de k, et $g(l(N)) \geqq N$.

Si $N \notin g(\mathbf{N})$, il ne peut y avoir égalité, car $g(l(N)) \in g(\mathbf{N})$.

Si $N = g(n)$, $g(l(g(n))) = g(\hat{n}) = g(n)$.

4° Soient $A \in g(\mathbf{N})$, et A^* le suivant de A dans $g(\mathbf{N})$; alors

$$l(A) \leqq n < l(A^*) \quad \text{entraîne} \quad g(n) = A. \tag{6}$$

On a $g(n) \leqq g[l(A^*) - 1] < g(l(A^*)) = A^*$, car $l(A^*) \in l(g(\mathbf{N}))$. D'autre part, $g(n) \geqq g(l(A)) = A$, donc $g(n) = A$.

5° On a

$$A < N \leqq A^* \quad \Rightarrow \quad l(N) \geqq l(A^*), \tag{7}$$

$g(l(N)) \geqq N$, donc $g(l(N)) \geqq A^*$.

Or, si $l(N) < l(A^*)$, on aurait $g(l(N)) \leqq A$ d'après (6), d'où contradiction.

Finalement, la restriction de l à $g(\mathbf{N})$ est une bijection croissante sur $l(g(\mathbf{N}))$, et l'application réciproque est g. (6) nous permet de calculer $g(n)$ si $n \notin l(g(\mathbf{N}))$, et (7) nous donne une minoration pour $l(N)$ si $N \notin g(\mathbf{N})$.

2. Étude de la décomposition en facteurs premiers de $g(n)$.

Pour cela, on va utiliser systématiquement la propriété caractéristique. On rappelle que $v_p(N)$ désigne le plus grand exposant α tel que p^α divise N.

Propriété 1. — *Soient p, q deux nombres premiers, $p < q$. Si*

$$\alpha = v_p(g(n)) \qquad \text{et} \qquad \beta = v_q(g(n)),$$

alors $\beta \leqq \alpha + 1$.

Les théorèmes 4 et 7 montreront que l'on peut avoir $\beta = \alpha + 1$.

Démonstration. — On peut supposer $\beta \geqq 2$ (si $\beta = 0$ ou 1, c'est évident). Soit $M = \dfrac{p^k}{q} g(n)$, avec k défini par $pq > p^k > q$.

On a $M > g(n)$, donc $l(M) > l(g(n))$, donc, si $\alpha \neq 0$,

$$p^{\alpha+k} + q^{\beta-1} > p^\alpha + q^\beta,$$

ce qui entraîne

$$p^{\alpha+1}q + q^{\beta-1} > p^{\alpha} + q^{\beta},$$
$$p^{\alpha}(pq-1) > q^{\beta-1}(q-1) \geqq pq^{\beta-1},$$
$$(8) \qquad p^{\alpha}q > p^{\alpha-1}(pq-1) > q^{\beta-1},$$
$$q^{\alpha} > p^{\alpha} \geqq q^{\beta-2},$$

$\alpha > \beta - 2$, donc $\beta \leqq \alpha + 1$.

Si $\alpha = 0$, $l(M) > l(g(n))$ s'écrit

$$p^k + q^{\beta-1} > q^{\beta},$$

Les calculs sont les mêmes, la majoration (8) $pq - 1 < pq$ n'ayant pas à être faite.

Propriété 2. — *Soit p le plus grand nombre premier divisant $g(n)$. On a $v_p(g(n)) = 1$, sauf pour $n = 4$.*

On désigne par q le nombre premier suivant p.

Si $\alpha = v_p(g(n)) \geqq 2$, on pose $M = \frac{q}{p} g(n) > g(n)$; alors

$$l(M) - l(g(n)) = q + p^{\alpha-1} - p^{\alpha}.$$

D'après le postulat de Bertrand ([3], § 22), $q < 2p$, donc

$$q + p^{\alpha-1} - p^{\alpha} < 2p + p^{\alpha-1} - p^{\alpha} \leqq 2p + p - p^2 = p(3-p),$$

car la fonction $\alpha \mapsto p^{\alpha-1} - p^{\alpha}$ est décroissante.

Si $p \geqq 3$, $l(M) - l(g(n)) \leqq 0$, il y a contradiction.

Si $p = 2$, il reste à résoudre $g(n) = 2^{\alpha}$.

Si $\alpha \geqq 3$,

$$M = 2^{\alpha-1}3 > g(n) \qquad \text{et} \qquad l(M) - l(g(n)) = 3 - 2^{\alpha-1} < 0;$$

les seules solutions sont $g(2) = 2$ et $g(4) = 4$. Seule cette dernière est exception.

Propriété 3. — *$g(n)$ est pair pour $n \neq 3, 8, 15$.*

Lemme. — *Si deux nombres premiers distincts p et p' ne divisent pas $g(n)$, tout nombre premier $q \geqq p + p'$ ne divise pas $g(n)$.*

Démonstration du lemme. — Soit $p < p'$, et supposons que $q \geqq p + p'$ divise $g(n)$. Soit $k \geqq 1$, défini par

$$p^k + p' \leqq q \leqq p^{k+1} + p' - 1;$$

en posant $M = \frac{p^k p'}{q} g(n)$, on a

$$l(M) - l(g(n)) = p^k + p' - q \leqq 0.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} p^k p' - q &\geqq p^k p' - p^{k+1} - p' + 1 \\ &= p^k(p' - p) - p' + 1 \geqq p(p' - p) - p' + 1, \end{aligned}$$

et

$$p(p' - p) - p' + 1 = (p - 1)(p' - p - 1) \geqq 0,$$

donc $M \geqq g(n)$, il y a contradiction.

Démonstration de la propriété 3. — Si 2 ne divise pas $g(n)$, $g(n)$ n'est divisible par aucun carré (propriété 1), et 11 ne divise pas $g(n)$. Sinon, en effet, soit

$$M = \frac{12}{11} g(n),\ M > g(n), \qquad \text{et} \qquad l(M) - l(g(n)) \leqq 4 + 6 - 11 < 0.$$

D'après le lemme, tout nombre premier supérieur ou égal à 13 ne divise pas $g(n)$. Donc $g(n)$ divise $3.5.7 = 105$. En examinant les valeurs de $g(n)$, on trouve comme seule exception $n = 3, 8, 15$, où $g(n)$ vaut 3, 15, 105.

COROLLAIRE. — *Pour tout* $n \in \mathbf{N}^\star$, $\frac{g(n+1)}{g(n)} \leqq 2$ *ou, ce qui est équivalent, pour tout* $A \in g(\mathbf{N})$, $\frac{A^\star}{A} \leqq 2$, *où* $A^\star$ *désigne le suivant de* A *dans* $g(N)$.

Effectivement, si $g(n+1) \neq g(n)$, en posant $g(n) = A$, on a $g(n+1) = A^\star$.

Supposons que $A^\star$ soit pair et que $\frac{A^\star}{A} > 2$, on aurait $A < \frac{A^\star}{2} < A^\star$, donc, d'après (7), $l\left(\frac{A^\star}{2}\right) \geqq l(A^\star)$, ce qui est faux. Si $A^\star = 3, 15, 105$, on trouve $A = 2, 12, 84$, la relation est encore vérifiée.

PROPRIÉTÉ 4. — *Soient* λ, μ *deux nombres premiers,* $\alpha = v_\lambda(g(n))$ *et* $\beta = v_\mu(g(n))$, *on a*

$$\frac{1}{\lambda\mu} \leqq \frac{\lambda^\alpha}{\mu^\beta} \leqq \lambda\mu.$$

Il suffit de vérifier l'une des inégalités, par exemple $\frac{1}{\lambda\mu} \leqq \frac{\lambda^\alpha}{\mu^\beta}$. Soit k défini par $\mu - 1 < \lambda^k \leqq \lambda(\mu - 1)$. On a donc $k \geqq 2$ si $\lambda < \mu$, et $k = 1$ si $\lambda > \mu$. Posons $M = \frac{\lambda^k}{\mu} g(n)$; on a

$$M \geqq g(n) \qquad \text{et} \qquad l(M) - l(g(n)) > 0,$$

donc

$$\lambda^{\alpha+k} - \lambda^{\alpha} + \mu^{\beta-1} - \mu^{\beta} > 0. \tag{9}$$

Posons $x = \dfrac{\lambda^{\alpha}}{\mu^{\beta}}$; on obtient

$$x > \frac{1 - \frac{1}{\mu}}{\lambda^{k} - 1} > \frac{1 - \frac{1}{\mu}}{\lambda(\mu - 1)} = \frac{1}{\lambda\mu}.$$

Ce raisonnement ne vaut que pour $\alpha \geqq 1$ et $\beta \geqq 2$.

Pour $\beta = 1$, l'inégalité (9) est encore vérifiée.

Si $\beta = 0$, on a toujours $\lambda^{\alpha} \geqq \dfrac{1}{\lambda\mu}$.

Si $\alpha = 0$:

— si $\lambda < \mu$, d'après la propriété 1, $\beta \leqq 1$ et $\dfrac{1}{\lambda\mu} \leqq \dfrac{1}{\mu}$;

— si $\lambda > \mu$: si $\beta = 1$, on a bien $\dfrac{1}{\lambda\mu} \leqq \dfrac{1}{\mu}$; si $\beta \geqq 2$, l'inégalité (9) devient $\lambda + \mu^{\beta-1} - \mu^{\beta} > 0$. Posons $x = \dfrac{1}{\mu^{\beta}}$,

$$x > \frac{1 - \frac{1}{\mu}}{\lambda} = \frac{\mu - 1}{\lambda\mu} \geqq \frac{1}{\lambda\mu}.$$

Propriété 5. — *Soit p le plus grand nombre premier divisant $g(n)$; soit q le nombre premier suivant p; soit λ un nombre premier tel que $\alpha = v_{\lambda}(g(n)) \geqq 2$, alors,*

$$\lambda^{\alpha} - \lambda^{\alpha-1} < q \qquad \text{et} \qquad \lambda < q^{1/\alpha} + 1.$$

On pose $M = \dfrac{q}{\lambda}\, g(n)$, $M > g(n)$, donc

$$l(M) - l(g(n)) = q + \lambda^{\alpha-1} - \lambda^{\alpha} > 0,$$

donc $\lambda^{\alpha} - \lambda^{\alpha-1} < q$. D'autre part, les solutions de cette inéquation en λ vérifient $\lambda < q^{1/\alpha} + 1$.

Propriété 6. — *Soient A et A^{*} deux éléments consécutifs de $g(\mathbf{N})$, p le plus grand nombre premier divisant A, q son suivant. On a*

$$l(A^{*}) - l(A) \leqq q - p.$$

Soit A_1 le plus petit nombre de $g(\mathbf{N})$ vérifiant $A_1 \geqq \frac{Aq}{p}\cdot$ On a d'après (7),

$$l\left(\frac{Aq}{p}\right) = l(A) + q - p \geqq l(A_1)$$

et

$$l(A^*) - l(A) \leqq l(A_1) - l(A) \leqq q - p.$$

PROPRIÉTÉ 7. — *Soit $k = \omega(g(n))$ le nombre de nombres premiers divisant $g(n)$. On a, lorsque n tend vers l'infini, $\omega(g(n)) \sim 2\sqrt{\frac{n}{\log n}}\cdot$*

On désigne par p_h le $h^{\text{ième}}$ nombre premier, et l'on pose

$$P_j = \sum_{h=1}^{j} p_h.$$

Étant donné n, on définit j comme fonction de n par $P_j \leqq n < P_{j+1}$. On a $k \leqq j$ (si $k > j$, on aurait $n \geqq l(g(n)) \geqq P_k \geqq P_{j+1}$). Et l'on a : $g(n) \leqq \left(\frac{n}{k}\right)^k$, $g(n)$ étant un produit de k nombres de somme au plus n. Ce qui entraîne :

$$\sqrt{n \log n} \sim \log g(n) \leqq k \log \frac{n}{k}\cdot \tag{10}$$

D'autre part, on a

$$n \sim P_j \sim \frac{j^2}{2} \log j, \qquad \text{d'où} \qquad j \sim 2\sqrt{\frac{n}{\log n}}\cdot$$

Maintenant, la fonction $k \mapsto \left(\frac{n}{k}\right)^k$ est croissante pour $k < \frac{n}{e}\cdot$ ce qui est assuré puisque $k \leqq j$. S'il existait une constante $c < 1$ telle que $k < 2c\sqrt{\frac{n}{\log n}}$, $k \log \frac{n}{k}$ serait au plus égal à $(c + \varepsilon)\sqrt{n \log n}$. Ceci est impossible d'après (10). Comme, d'autre part, on a

$$k \leqq j \sim 2\sqrt{\frac{n}{\log n}},$$

on en déduit $k = \omega(g(n)) \sim 2\sqrt{\frac{n}{\log n}}\cdot$

COROLLAIRE. — *Le plus grand nombre premier p divisant $g(n)$ tend vers l'infini avec n.*

Avec les notations précédentes, on a

$$p \geqq p_k \sim k \log k \sim \sqrt{n \log n}.$$

PROPRIÉTÉ 8. — *Soit* $k \in \mathbf{N}$; *soient* 2, 3, ..., p_k *les* k *premiers nombres premiers. On suppose que* $p_k < p$, p *étant toujours le plus grand nombre premier divisant* $g(n)$. *On pose*

$$\alpha_i = v_{p_i}(g(n)) \qquad pour \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

et

$$m = \sum_{i=1}^{k} l(p_i^{\alpha_i}).$$

Alors il existe une constante c_k *indépendante de* p *telle que*

$$m > \frac{1}{c_k} p^{1-(1/k)}.$$

D'autre part, soit μ *un nombre premier ne divisant pas* $g(n)$ *et tel que* $\mu > e^{\theta(p_k)}$, *alors*

$$m < \mu \frac{\mu^{1/k}}{\mu^{1/k} - c_k}.$$

Démonstration. — Soit $\gamma : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}$, la fonction définie par

$$\gamma(j) = \sup_{\sum_{i=1}^{k} l(p_i^{a_i}) \leq j} \left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i} \right) = \sup_{\substack{l(h) \leq j \\ h \in K}} h,$$

où K est l'ensemble des nombres qui n'ont pas d'autres diviseurs premiers que $p_1, p_2, \ldots, p_k$. On a, pour tout j,

$$\gamma(j) \leq \left(\frac{j}{k}\right)^k,$$

$\gamma(j)$ étant un produit de k nombres de somme au plus j. D'autre part, si l'on fait

$$a_i = \left[\frac{\log \frac{j}{k}}{\log p_i} \right],$$

on voit que

$$\gamma(j) \geq \left(\frac{j}{k}\right)^k \frac{1}{e^{\theta(p_k)}},$$

où θ est la fonction de Ĉebyŝev. D'autre part, on a

$$l(\gamma(j)) \leq j, \qquad \gamma(m) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} \qquad \text{et} \qquad l(\gamma(m)) = m.$$

Considérons maintenant $M = \dfrac{\gamma(m+p)}{p\gamma(m)} g(n)$,

$$l(M) - l(g(n)) \leq m + p - p - m = 0,$$

donc $M < g(n)$,

$$\frac{(m+p)^k}{k^k}\,\frac{1}{e^{\theta(pk)}} \leqq \gamma(m+p) < p\,\gamma(m) \leqq p\left(\frac{m}{k}\right)^k.$$

On en déduit

$$m > \frac{p}{p^{1/k}c_k - 1} > \frac{1}{c_k}\,p^{1-(1/k)}, \qquad \text{avec} \quad c_k = e^{\theta(pk)}/_k.$$

De même, on pose $M = \mu\,\dfrac{\gamma(m-\mu)}{\gamma(m)}\,g(n)$. Si $m < \mu$, le résultat est acquis, sinon on a $l(M) - l(g(n)) \leqq 0$, donc $M < g(n)$,

$$\mu\gamma(m-\mu) < \gamma(m),$$
$$\mu(m-\mu)^k < m^k\,e^{\theta(pk)}.$$

Comme $\mu^{1/k} > c_k$,

$$m < \mu\,\frac{\mu^{1/k}}{\mu^{1/k} - c_k}.$$

Propriété 9. — *Soit λ un nombre premier fixé; soit $\alpha_\lambda = v_\lambda(g(n))$, Quand $n \to \infty$, on a*

$$\alpha_\lambda \log\lambda = \log p + O(\log\log p),$$

p étant le plus grand nombre premier divisant $g(n)$.

Démonstration. — Étudions d'abord le cas $\lambda = 2$. Pour une autre valeur de λ, le résultat découlera de la propriété 4.

Utilisant les notations de la propriété 8, pour k donné,

$$\frac{m}{2^{\alpha_2}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{l\left(p_i^{\alpha_{p_i}}\right)}{2^{\alpha_2}} \leqq \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i^{\alpha_{p_i}}}{2^{\alpha_2}} \leqq 2\sum_{i=1}^{k} p_i = 2P_k,$$

à l'aide de la propriété 4. P_k est défini comme étant la somme des k premiers nombres premiers. On a donc

$$2^{\alpha_2} \geqq \frac{1}{2P_k c_k}\,p^{1-(1/k)}.$$

La propriété 4 nous donne ($\mu = p$, $\beta = 1$, $\lambda = 2$) : $2^{\alpha_2} \leqq 2p$, donc

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right)\log p - \log 2P_k c_k \leqq \alpha_2 \log 2 \leqq \log p + \log 2.$$

On en déduit $\alpha_2 \log 2 \sim \log p$.

On peut même préciser : si l'on fait $k = [\log p] =$ partie entière de $(\log p)$, on a

$$P_k \sim \frac{k^2}{2} \log k,$$

$$\log P_k \sim 2 \log k \sim 2 \log \log p,$$

$$\log c_k = \frac{\theta(p_k)}{k} \sim \log k \sim \log \log p.$$

Donc,

$$\alpha_2 \log 2 = \log p + O(\log \log p).$$

PROPRIÉTÉ 10. — *Avec les mêmes notations qu'à la proposition* 8, *on a*

$$\frac{2^{\alpha_2}}{p} = O\left(\frac{1}{\log \log \log p}\right).$$

Soit toujours k fixé et, pour $1 \leq i \leq k$, $\alpha_i = v_{p_i}(g(n))$. D'après la propriété précédente, pour n assez grand, on a $\alpha_i \neq 0$ et

$$\frac{m}{2^{\alpha_2}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i^{\alpha_{p_i}}}{2^{\alpha_2}} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} = \omega_k \quad \text{(définition de } \omega_k).$$

Pour n assez grand, on peut appliquer la propriété 8, avec $\mu = q$, q étant le nombre premier suivant p,

$$\frac{q}{2^{\alpha_2}} \geq \frac{q^{1/k} - c_k}{q^{1/k}} \omega_k.$$

En faisant tendre q vers l'infini, on voit que $\frac{q}{2^{\alpha_2}} \geq \omega_k$. Or ω_k est équivalent à $\frac{1}{2} \log \log k$, quand k tend vers l'infini, donc $\frac{q}{2^{\alpha_2}}$ tend vers l'infini avec n.

On peut même préciser : faisant $k = [\sqrt{\log q}]$, on a

$$\log c_k \sim \log k \sim \frac{1}{2} \log \log q,$$

$$\log q^{1/k} = \frac{1}{k} \log q \sim \sqrt{\log q},$$

on a bien $q^{1/k} > c_k$, et l'on obtient

$$\frac{2^{\alpha_2}}{q} = O\left(\frac{1}{\log \log \log q}\right),$$

d'où la propriété puisque $q \sim p$.

PROPRIÉTÉ 11. — *Soit p le plus grand nombre premier divisant $g(n)$, soit μ le plus petit nombre premier ne divisant pas $g(n)$. On pose $a_n = \frac{p}{\mu}$. Alors,*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 1.$$

La propriété 9 montre que μ tend vers l'infini avec n.

La démonstration de la propriété 11 se fait en deux temps.

Premier temps : On a $\overline{\lim}\, a_n < +\infty$, et plus précisément $\overline{\lim}\, a_n \leqq 6$. Reprenant les notations de la propriété 8, on fait $k = 2$, et l'on étudie

$$M = \frac{\mu}{p} \frac{\gamma(m + p - \mu)}{\gamma(m)} g(n).$$

On a $l(M) \leqq l(g(n))$, donc $M < g(n)$.

Soit $\gamma(m + p - \mu) < a_n \gamma(m)$,

$$[m + (a_n - 1)\mu]^2 < 6 a_n m^2,$$

car $\exp \theta(p_2) = 6$. Donc,

$$m > \mu \frac{a_n - 1}{\sqrt{6 a_n} - 1}.$$

Mais, d'après la propriété 8,

$$\mu \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu} - \sqrt{6}} > m.$$

S'il existait une sous-suite a_{n_j} de a_n dont la limite soit > 6, en faisant tendre j vers l'infini, on ne pourrait réaliser simultanément ces deux inégalités.

Deuxième temps : Supposons que $\overline{\lim}\, a_n > 1$; il existerait alors $\varepsilon > 0$ tel que, pour une infinité de n, on ait $1 + \varepsilon < a_n < 7$. Posons $M = \frac{8\mu}{p} g(n)$. Pour les n vérifiant $1 + \varepsilon < a_n < 7$, $M > g(n)$ et en utilisant la propriété 10,

$$l(M) - l(g(n)) = 7 \cdot 2^{\alpha_2} + \mu - p < 7 \cdot 2^{\alpha_2} - \frac{\varepsilon p}{1 + \varepsilon} \sim -\varepsilon p.$$

Pour p assez grand, $l(M) - l(g(n)) < 0$, il y aurait contradiction.

Si $a_n < 1$, alors μ est le nombre premier suivant p, et l'on a $\lim a_n = 1$. La propriété est démontrée.

COROLLAIRE. — *Soit p le plus grand nombre premier divisant $g(n)$ on a $p \sim \log g(n) \sim \sqrt{n \log n}$.*

Avec les notations précédentes, on a

$$g(n) \geqq \prod_{\substack{\lambda < \mu \\ \lambda \text{ premier}}} \lambda.$$

Soit $\log g(n) \geqq \theta(\mu) - \log \mu \sim \mu \sim p$.

Le corollaire de la propriété 7 nous donne l'inégalité en sens inverse. On en déduit

$$p \sim \log g(n) \sim \sqrt{n \log n}.$$

Chapitre 3.

L'ensemble $G \subset g(\mathbf{N})$ et ses applications.

Définition (*voir* Ramanujan [9], § 32). — On dit que N appartient à G s'il existe un nombre réel strictement positif ρ tel que, pour tout entier strictement positif A, on ait

$$l(A) - l(N) \geqq \rho \log \frac{A}{N}.$$

Propriétés.

1° $G \subset g(\mathbf{N})$ (propriété caractéristique).

2° Supposons $N \neq 4$, et soit p le plus grand nombre premier divisant N. On sait (propriété 2) que $v_p(N) = 1$. En faisant $A = N/p$, on obtient $\rho \geqq \frac{p}{\log p}$.

Si q est le plus petit nombre premier ne divisant pas N, on pose $A = Nq$, et l'on obtient $\rho \leqq \frac{q}{\log q}$.

Or la fonction $x \mapsto \frac{x}{\log x}$ est croissante pour $x > e$. On a donc $q > p$, la seule exception possible étant $p = 3$, $q = 2$. On constatera que $3 \in G$, en prenant $\rho = 2{,}8$ par exemple.

3° Soit $\lambda < p$ un nombre premier, et soit $\alpha = v_\lambda(N)$. Étudions $A = N\lambda$ et $A = N/\lambda$; on trouve :

— pour $\alpha = 1$: $\frac{\lambda}{\log \lambda} \leqq \rho \leqq \frac{\lambda^2 - \lambda}{\log \lambda}$;

— pour $\alpha \geqq 2$: $\frac{\lambda^\alpha - \lambda^{\alpha-1}}{\log \lambda} \leqq \rho \leqq \frac{\lambda^{\alpha+1} - \lambda^\alpha}{\log \lambda}$.

Pour tout λ premier, considérons l'ensemble $E_\lambda \subset \mathbf{R}$:

$$E_\lambda = \left\{ \frac{\lambda}{\log \lambda}, \frac{\lambda^2 - \lambda}{\log \lambda}, \dots, \frac{\lambda^{\alpha+1} - \lambda^\alpha}{\log \lambda}, \dots \right\}.$$

Pour tout $\lambda \neq 2$, la suite constituant E_λ est strictement croissante. Pour $\lambda = 2$, les deux premiers termes sont confondus.

Si l'on se donne $\rho \notin E_\lambda$, la valeur de $\alpha = v_\lambda(N)$ est donc déterminée :

— si $\rho > \dfrac{\lambda^2 - \lambda}{\log \lambda}$, par

$$\frac{\lambda^\alpha - \lambda^{\alpha-1}}{\log \lambda} < \rho < \frac{\lambda^{\alpha+1} - \lambda^\alpha}{\log \lambda}, \qquad \text{soit} \quad \frac{\rho \log \lambda}{\lambda - 1} < \lambda^\alpha < \lambda \frac{\rho \log \lambda}{\lambda - 1};$$

— si $\dfrac{\lambda}{\log \lambda} < \rho < \dfrac{\lambda^2 - \lambda}{\log \lambda}$, par $\alpha = 1$;

— si $\rho < \dfrac{\lambda}{\log \lambda}$, par $\alpha = 0$.

4° Soit $E = \bigcup\limits_{\lambda \text{ premier}} E_\lambda$. E est un ensemble discret de $\mathbf{R}$ (la quantité de tels nombres inférieurs à x est majorable et donc finie). D'autre part, deux éléments de E sont distincts : si l'on avait $\dfrac{a}{\log \mu} = \dfrac{b}{\log \lambda}$, $\dfrac{\log \mu}{\log \lambda}$ serait rationnel, ce qui est faux.

Enfin, le plus petit élément de E est $\dfrac{3}{\log 3} = 2,73, \dots$.

Pour chaque valeur de $\rho > \dfrac{3}{\log 3}$, n'appartenant pas à E, il existe donc un nombre associé à ρ, N_ρ, et un seul déterminé par sa décomposition en facteurs premiers. Inversement, un nombre N étant ainsi construit, l'ensemble des ρ tels que N soit associé à ρ est un intervalle $(\rho^-(N), \rho^+(N))$, où ρ^- et ρ^+ sont deux nombres consécutifs de E. Enfin, si $\rho \in E$, il existe deux nombres associés à ρ : l'un pour lequel $\rho^-(N) = \rho$ et l'autre pour lequel $\rho^+(N) = \rho$.

5° Cette famille de nombres N_ρ a les propriétés suivantes :

— si $\rho \leqq \rho'$, N_ρ divise $N_{\rho'}$;

— si I et I' sont deux intervalles contigus de $\mathbf{R} - E$ séparés par un élément de E_λ, si $\rho \in I$ et si $\rho' \in I'$, alors $N_{\rho'} = \lambda N_\rho$;

— Pour $N \neq 3$, $v_\lambda(N_\rho)$ est une fonction décroissante du nombre premier λ, car la fonction $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1} - x^\alpha}{\log x}$ est croissante pour $x \geqq 2$, quelle que soit la valeur du paramètre $\alpha \geqq 1$.

6° Table des valeurs :

ρ.	ρ.	N.	N.	$l(N)$.
$\frac{3}{\log 3}$	2,73			
		3	3	3
$\frac{2}{\log 2} = \frac{4-2}{\log 2}$	2,89			
		4.3	12	7
$\frac{5}{\log 5}$	3,11			
		4.3.5	60	12
$\frac{7}{\log 7}$	3,60			
		4.3.5.7	420	19
$\frac{11}{\log 11}$	4,59			
		4.3.5.7.11	4 620	30
$\frac{13}{\log 13}$	5,07			
		4.3.5.7.11.13	60 060	43
$\frac{9-3}{\log 3}$	5,46			
		4.9.5.7.11.13	180 180	49
$\frac{8-4}{\log 2}$	5,77			
		8.9.5.7.11.13	360 360	53
$\frac{17}{\log 17}$	6,00			
		8.9.5.7.11.13.17	6 126 120	70
$\frac{19}{\log 19}$	6,45			
		8.9.5.7.11.13.17.19	116 396 280	89
$\frac{23}{\log 23}$	7,34			

Il reste à montrer la réciproque, c'est-à-dire que les nombres N ainsi construits vérifient bien la propriété demandée.

PROPOSITION 1. — *Soient $N = N_\rho$ et $\alpha_\lambda = v_\lambda(N)$. On désigne par h_λ^- et $h_\lambda^+ (h_\lambda^- < h_\lambda^+)$ les deux nombres consécutifs de E_λ encadrant ρ. Soit r/s une fraction irréductible telle que s divise N. On a alors :*

$$l\left(\frac{r}{s}N\right) - l(N) = \rho \log\frac{r}{s} + \sum_{\lambda \mid r} v_\lambda(r)\,(h_\lambda^+ - \rho)\log\lambda + \sum_{\mu \mid s} v_\mu(s)\,(\rho - h_\mu^-)\log\mu$$
$$+ \sum_{\lambda \mid r} U_\lambda + \sum_{\mu \mid s} V_\mu,$$

avec

$$U_\lambda = \lambda^{\alpha_\lambda}\left(\lambda^{v_\lambda(r)} - 1 - v_\lambda(r)\,(\lambda - 1)\right) \qquad \textit{si } \lambda \textit{ divise } N,$$
$$U_\lambda = \lambda^{v_\lambda(r)} - v_\lambda(r)\,\lambda \qquad \textit{si } \lambda \textit{ ne divise pas } N,$$
$$V_\mu = \mu^{\alpha_\mu}\left[\left(1 - \frac{1}{\mu}v_\mu(s) - \left(1 - \frac{1}{\mu^{v_\mu(s)}}\right)\right)\right] \qquad \textit{si } v_\mu(s) < \alpha_\mu,$$
$$V_\mu = \mu^{\alpha_\mu}\left[\alpha_\mu\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) - 1\right] \qquad \textit{si } v_\mu(s) = \alpha_\mu > 1,$$
$$V_\mu = 0 \qquad \textit{si } v_\mu(s) = 1.$$

Démonstration. — Il suffit de le vérifier pour $r = \lambda^k$, $s = 1$, puis pour $r = 1$, $s = \mu^k$, en raison de l'additivité.

1° $r = \lambda^k$, $s = 1$, λ divise N. Alors

$$\alpha = \alpha_\lambda \geqq 1, \qquad h_\lambda^+ = \frac{\lambda^{\alpha+1} - \lambda^\alpha}{\log \lambda},$$

la formule devient

$$\lambda^{\alpha+k} - \lambda^\alpha = \rho \log \lambda^k + k\left(\frac{\lambda^{\alpha+1} - \lambda^\alpha}{\log \lambda} - \rho\right)\log \lambda + U_\lambda$$

qui permet de calculer $U_\lambda = \lambda^\alpha(\lambda^k - 1 - k(\lambda - 1))$.

2° $r = \lambda^k$, $s = 1$, λ ne divise pas N, alors

$$\alpha = \alpha_\lambda = 0 \qquad \text{et} \qquad h_\lambda^+ = \frac{\lambda}{\log \lambda}.$$

On a

$$\lambda^k = \rho \log \lambda^k + k\left(\frac{\lambda}{\log \lambda} - \rho\right)\log \lambda + U_\lambda \qquad \text{avec} \quad U_\lambda = \lambda^k - k\lambda.$$

3° $r = 1$, $s = \mu^k$, $\alpha_\mu = 1$, ce qui entraîne

$$k = 1 \qquad \text{et} \qquad h_\mu^- = \frac{\mu}{\log \mu}.$$

On a alors

$$V_\mu = 0 \qquad \text{et} \qquad -\mu = \rho \log \frac{1}{\mu} + \left(\rho - \frac{\mu}{\log \mu}\right)\log \mu.$$

4° $r = 1$, $s = \mu^k$, $\alpha_\mu \geqq 2$ et $k \neq \alpha_\mu$, alors

$$h_\mu^- = \frac{\mu^\alpha - \mu^{\alpha-1}}{\log \mu},$$

$$\mu^{\alpha-k} - \mu^\alpha = \rho \log \frac{1}{\mu^k} + k\left(\rho - \frac{\mu^\alpha - \mu^{\alpha-1}}{\log \mu}\right)\log \mu + V_\mu,$$

ce qui donne

$$V_\mu = \mu^\alpha\left[k\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) - \left(1 - \frac{1}{\mu^k}\right)\right].$$

5° $r = 1$, $s = \mu^k$, $\alpha_\mu \geqq 2$, $k = \alpha_\mu$,

$$-\mu^\alpha = \rho \log \frac{1}{\mu^\alpha} + \alpha\left(\rho - \frac{\mu^\alpha - \mu^{\alpha-1}}{\log \mu}\right)\log \mu + V_\mu,$$

soit $V_\mu = \mu^\alpha\left(\alpha - \frac{\alpha}{\mu} - 1\right)$.

COROLLAIRE 1. — *Les nombres N_ρ appartiennent à G.*

En effet, $l\left(\frac{r}{s}N\right) - l(N) \geqq \rho \log \frac{r}{s}$, car les termes suivants sont tous positifs dans la formule de la proposition 1 :

1° On a choisi $h_\lambda^+ > \rho$ et $\rho > h_\mu^-$.

2° $\lambda^k - 1 - k(\lambda - 1)$ est une fonction croissante de k, nulle pour $k = 1$. Il en est de même pour $\lambda^k - k\lambda$ et l'on a

$$\lambda^2 - 1 - 2(\lambda - 1) \geqq \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2) \geqq 0 \qquad \text{pour} \quad \lambda \geqq 2.$$

3° De même, $\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)k - \left(1 - \frac{1}{\mu^k}\right)$ et $\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)k - 1$ sont des fonctions croissantes de k, nulles pour $k = 1$, et l'on a

$$2\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) - \left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right) \geqq 2\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) - 1 = 1 - \frac{2}{\mu} \geqq 0 \qquad \text{pour} \quad \mu \geqq 2.$$

On en conclut que, pour tout A, $l(A) - l(N) \geqq \rho \log \frac{A}{N}$.

Corollaire 2. — *Si r et s ne sont divisibles par aucun carré,*

$$l\left(\frac{r}{s}N\right) - l(N) = \rho \log \frac{r}{s} + \sum_{\lambda \mid r} (h_\lambda^+ - \rho) \log \lambda + \sum_{\mu \mid s} (\rho - h_\mu^-) \log \mu.$$

En effet, on constate que $U_\lambda = 0$ pour $v_\lambda(r) = 1$ et $V_\mu = 0$ pour $v_\mu(s) = 1$.

Corollaire 3. $\quad l\left(\frac{r}{s}N\right) - l(N) \geqq \rho^- \log \frac{r}{s} + (\rho^+ - \rho^-) \log r.$

On écrit la proposition 1 avec $\rho = \rho^-$, on ne garde que les deux premiers morceaux, et l'on minore h_λ^+ par ρ^+. On a, en effet :

$$\rho^+ = \inf_\lambda h_\lambda^+ \qquad \text{et} \qquad \rho^- = \sup_{\lambda \mid N} h_\lambda^-.$$

Corollaire 4. — *Soient $\rho_1^-(N)$ et $\rho_1^+(N)$ définis par*

$$\rho_1^-(N) = \sup_{\lambda^2 \mid N} h_\lambda^- \qquad \textit{et} \qquad \rho_1^+(N) = \inf_{\lambda \mid N} h_\lambda^+.$$

On a donc : $\rho_1^- \leqq \rho^- < \rho^+ \leqq \rho_1^+$. Soient maintenant r et s deux nombres premiers entre eux. On écrit $r = r'r''$ et $s = s's''$, avec

$$r' = \prod_{\substack{\lambda \mid r \\ \lambda \mid N}} \lambda^{v_\lambda(r)}; \qquad r'' = \prod_{\substack{\lambda \mid r \\ \lambda \nmid N}} \lambda^{v_\lambda(r)}; \qquad s' = \prod_{\substack{\mu \mid s \\ \mu^2 \mid N}} \mu^{v_\mu(s)}; \qquad s'' = \prod_{\substack{\mu \mid s \\ \mu^2 \nmid N}} \mu^{v_\mu(s)}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} l\left(\frac{r}{s}N\right) - l(N) &\geqq \rho \log \frac{r}{s} + (\rho^+ - \rho) \log r + (\rho - \rho^-) \log s \\ &\quad + (\rho_1^+ - \rho^+) \log r' + (\rho^- - \rho_1^-) \log s' \\ &\geqq \rho \log \frac{r}{s} + (\rho_1^+ - \rho) \log r' + (\rho - \rho_1^-) \log s'. \end{aligned}$$

Démonstration. — On ne garde que les trois premiers morceaux de la formule de la proposition 1. On minore h_λ^+ par ρ^+ ou par ρ_1^+, et l'on majore h_λ^- par ρ^- ou par ρ_1^-.

COROLLAIRE 5. — *Soit $N_\rho \in G$ et soit $A \in g(\mathbf{N})$ tel que $\frac{N}{2} \leqq A \leqq 2N$. On pose $A = \frac{r}{s}N$. Alors r n'est divisible par aucun carré de nombre premier $\geqq 3$ et s n'est divisible par aucun carré de nombre premier $\geqq 7$.*

Démonstration. — Supposons le contraire; nous utiliserons la proposition 1 pour montrer que

$$l\left(\frac{r}{s}N\right) - l(N) \geqq \rho \log\frac{r}{s} + 2\rho\log 2. \tag{1}$$

Alors si $\frac{1}{2} \leqq \frac{r}{s} < 1$, $l(A) - l(N) \geqq -\rho\log 2 + 2\rho\log 2 > 0$, et l'on aurait: $A \in g(\mathbf{N})$, $N > A$ et $l(N) < l(A)$; c'est impossible.

De même, si $1 < \frac{r}{s} \leqq 2$,

$$l(A) - l(N) > 2\rho\log 2 \geqq 2^{\alpha_2} = l(2N) - l(N).$$

On aurait $A \leqq 2N$ et $l(2N) < l(A)$, ce qui est impossible.

Pour démontrer l'inégalité (1), supposons que λ^2 divise r, et calculons le « bénéfice » que cela donne dans la proposition 1.

Si λ divise N, on a

$$U_\lambda \geqq \lambda^{\alpha_\lambda}(\lambda^2 - 1 - 2(\lambda - 1)) = h_\lambda^+(\lambda - 1)\log\lambda \geqq \rho(\lambda - 1)\log\lambda > 2\rho\log 2,$$

pour $\lambda \geqq 3$.

Si λ ne divise pas N et $\lambda \geqq 3$, alors $\lambda \geqq 5$. On a alors

$$U_\lambda \geqq \lambda^2 - 2\lambda = h_\lambda^+(\lambda - 2)\log\lambda \geqq 3\rho\log 5 > 2\rho\log 2.$$

Si μ^2 divise s, le « bénéfice » est, dans tous les cas,

$$\begin{aligned} ben(\mu) &\geqq V_\mu + 2(\rho - h_\mu^-)\log\mu \geqq \mu^\alpha\left[2\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) - 1\right] + 2(\rho - h_\mu^-)\log\mu \\ &= h_\mu^-\left(1 - \frac{1}{\mu - 1}\right)\log\mu + 2(\rho - h_\mu^-)\log\mu \geqq \frac{\mu - 2}{\mu - 1}\rho\log\mu > 2\rho\log 2 \end{aligned}$$

pour $\mu \geqq 7$.

Nous allons maintenant utiliser la proposition 1 et ses corollaires pour étudier les nombres A de $g(\mathbf{N})$ au « voisinage » de certains nombres $N \in G$, pour lesquels nous pourrons avoir des minorations des quantités $\rho^+ - \rho^-$, $\rho_1^+ - \rho^+$, etc. Nous aurons besoin pour cela de quelques lemmes.

LEMME 1. — *Soit x un nombre $\geqq 2$. On définit y et z par*

$$\frac{x}{\log x}=\frac{y^2-y}{\log y}=\frac{z^3-z^2}{\log z}.$$

Alors, lorsque x tend vers l'infini,

$$z\sim\sqrt[3]{\frac{x}{3}}\qquad et \qquad y\sim\sqrt{\frac{x}{2}}$$

et même

$$y=\sqrt{\frac{x}{2}}\left(1-\frac{\log 2}{2\log x}+o\left(\frac{1}{\log x}\right)\right)$$

$$et \qquad y^2-y=\frac{x}{2}\left(1-\frac{\log 2}{\log x}+o\left(\frac{1}{\log x}\right)\right).$$

Démonstration. — La fonction $y\mapsto\dfrac{y^2-y}{\log y}$ est croissante pour $y>1$, et elle vaut 1 pour $y=1$. Il en est de même pour $z\mapsto\dfrac{z^3-z^2}{\log z}$. Quand $x\to\infty$, on a

$$\log x\sim 2\log y\sim 3\log z$$

et

$$y^2\sim x\frac{\log y}{\log x}\sim\frac{x}{2}\qquad\text{et}\qquad z^3\sim x\frac{\log z}{\log x}\sim\frac{x}{3}.$$

Posons maintenant $y=\sqrt{\dfrac{x}{2}}(1+t)$, avec $t=o(1)$. On a

$$\frac{y^2-y}{\log y}=\frac{\dfrac{x}{2}\left(1+2t+t^2-\sqrt{\dfrac{2}{x}}(1+t)\right)}{\dfrac{\log x}{2}-\dfrac{\log 2}{2}+\log(1+t)}=\frac{x}{\log x}\,\frac{1+2t+t^2-\sqrt{\dfrac{2}{x}}(1+t)}{1-\dfrac{\log 2}{\log x}+2\dfrac{\log(1+t)}{\log x}}.$$

On doit avoir

$$2t+t^2-\sqrt{\frac{2}{x}}(1+t)=-\frac{\log 2}{\log x}+2\frac{\log(1+t)}{\log x},$$

soit $t\sim-\dfrac{\log 2}{2\log x}$, ce qui nous donne le résultat.

LEMME 2. — *Il existe une constante c et une suite infinie de $N\in G$ pour lesquels $\rho^+-\rho^-\geqq c\dfrac{\log_2 p\log_4 p}{\log_3^2 p}$, où p désigne le plus grand nombre premier divisant N.*

Démonstration. — Nous allons utiliser le corollaire 3 du théorème 2 du chapitre 1, avec les mêmes notations. La fonction $f(x)=\dfrac{x}{\log x}$ est croissante pour $x \geqq e$ et $f(e)=e$ et l'on a $f'(x) \sim \frac{1}{\log x}$. On prend pour suite v_n les nombres $\frac{\lambda^{\alpha+1}-\lambda^\alpha}{\log \lambda}$, où λ est premier et α entier $\geqq 1$. Le plus petit des v_n est $\frac{4-2}{\log 2}=2,89,\ldots > e$. On pose pour $\alpha \geqq 1$:

$$F_\alpha = \left\{ \frac{\lambda^{\alpha+1}-\lambda^\alpha}{\log\lambda}, \ \lambda \text{ premier} \right\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}_\alpha = \bigcup_{\alpha' \geqq \alpha} F_{\alpha'}.$$

On a ainsi $(v_n)=\mathcal{F}_1$.

Nous avons à évaluer la quantité

$$V = \operatorname{Card}\left\{ v_n \mid v_n \leqq \frac{x}{\log x} \right\} = V_1 + V_2 + \ldots + V_m + \ldots,$$

avec, pour $\alpha \geqq 1$,

$$V_\alpha = \operatorname{Card}\left\{ v_n \in F_\alpha \mid v_n \leqq \frac{x}{\log x} \right\}.$$

Or la fonction $(\lambda, \alpha) \mapsto \frac{\lambda^{\alpha+1}-\lambda^\alpha}{\log\lambda}$ est croissante en λ et en α pour $\lambda > 1$ et $\alpha \geqq 1$. On a donc : $V_1 \geqq V_2 \geqq \ldots \geqq V_m$.

D'autre part, pour $m > m_0$, $V_m = 0$. On prend $m_0 = \frac{\log x}{\log 2}$ et alors $\frac{2^{m_0+1}-2^{m_0}}{\log 2} > \frac{x}{\log x}$. Ensuite en désignant par $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x, on a

$$V_1 = \pi(y), \qquad \text{avec} \quad \frac{y^2-y}{\log y} = \frac{x}{\log x},$$

$$V_2 = \pi(z), \qquad \text{avec} \quad \frac{z^3-z^2}{\log z} = \frac{x}{\log x}$$

et l'on a

$$\pi(y) \leqq V \leqq \pi(y) + m_0\pi(z).$$

On a vu que $y \sim \sqrt{\frac{x}{2}}$ et $z \sim \sqrt[3]{\frac{x}{3}}$, donc $V = O(x^{1/2})$.

Maintenant montrons que

$$\operatorname{Card}\left\{ v^n \mid \frac{x}{\log x} \leqq v_n \leqq \frac{x}{\log x} + \frac{x^{1/4}}{\log x} \right\} = o(x^\varepsilon).$$

Or, entre $\frac{x}{\log x}$ et $\frac{x+x^{1/4}}{\log x}$ il y a au plus un élément de F_1. En effet,

$$\frac{(\lambda+2)^2-(\lambda+2)}{\log(\lambda+2)} - \frac{\lambda^2-\lambda}{\log\lambda} \sim \frac{4\lambda}{\log\lambda} \sim 8\frac{\sqrt{\frac{x}{2}}}{\log x}.$$

De même, il y a au plus un élément de F_2, un de F_3, etc., soit $m_0 = \log\left(\frac{x + x^{1/4}}{\log x}\right)$ en tout. Comme $m_0 = o(x^\varepsilon)$, on peut conclure.

Les u_n du corollaire 3 parcourent E en entier, et il existe $N \in G$ tel que $\rho^-(N) = u_n$ et $\rho^+(N) = u_{n+1}$,

$$u_{n+1} - u_n = \rho^+ - \rho^- \geqq c f'(a_n) \log a_n \frac{\log_2 a_n \log_4 a_n}{\log_3^2 a_n},$$

Comme $u_n = f(a_n)$, $a_n \sim u_n \log u_n$ et comme $\rho^- \geqq \frac{p}{\log p}$,

$$\rho^+ - \rho^- \geqq c_1 \frac{\log_2 \rho^- \log_4 \rho^-}{\log_3^2 \rho^-} \geqq c_2 \frac{\log_2 p \log_4 p}{\log_3^2 p}.$$

THÉORÈME 3. — *Il existe des intervalles aussi grands que l'on veut sur lesquels $g(n)$ est constante; et même il existe $c > 0$ tel que l'équation $g(n + f(n)) = g(n)$ a une infinité de solutions pour*

$$f(n) = c \log n \frac{\log_2 n \log_4 n}{\log_3^2 n}.$$

Remarque. — On peut prendre pour c toute valeur inférieure à $\frac{1}{4} e^\gamma$.

Démonstration. — Il existe, d'après le lemme 2, une infinité de $N \in G$ pour lesquels

$$\rho^+ - \rho^- \geqq c_1 \frac{\log_2 p \log_4 p}{\log_3^2 p}.$$

Soit N^* le suivant de N dans $g(\mathbf{N})$. On pose $\frac{N^*}{N} = \frac{r}{s}$, avec r et s premiers entre eux. On a alors (corollaire 3 de la proposition 1)

$$l(N^*) - l(N) \geqq \rho^- \log \frac{r}{s} + (\rho^+ - \rho^-) \log r.$$

Or $\rho^- \geqq \frac{p}{\log p}$, et comme $\frac{r}{s} > 1$, $\frac{r}{s} \geqq \frac{r}{r-1}$ et $\log \frac{r}{r-1} \geqq \frac{1}{r}$ pour $r \geqq 2$. On a alors

$$l(N^*) - l(N) \geqq \frac{p}{\log p} \frac{1}{r} + (\rho^+ - \rho^-) \log r.$$

Étudions la fonction $y = \frac{a}{r} + b \log r$. Elle admet pour $r = \frac{a}{b}$ un minimum qui vaut $y = b + b \log \frac{a}{b}$. On a donc

$$l(N^*) - l(N) \geqq (\rho^+ - \rho^-) \left[1 + \log \frac{p}{\log p} - \log (\rho^+ - \rho^-) \right]$$
$$\geqq c_2 \log p \frac{\log_2 p \log_4 p}{\log_3^2 p}.$$

Posons $n = l(N)$. On a (corollaire de la propriété 11) :

$$p \sim \log N \sim \sqrt{n \log n}$$

et

$$l(N^\star) - l(N) \geq c_3 \log n \frac{\log_2 n \log_4 n}{\log_3^2 n}$$

et sur l'intervalle $[l(N), l(N^\star) - 1]$, g est constante, ce qui établit le théorème 3.

Remarque. — Soit P le nombre premier suivant p. On sait que (propriété 6) : $l(N^\star) - l(N) \leq P - p$. Le théorème idéal, qui est probablement vrai, est que : $N^\star = \frac{P}{p} N$. Or, il semble assez difficile à démontrer, car on ne connaît pas avec assez de précision la répartition des nombres de E. Nous allons démontrer que ce théorème idéal est vrai pour beaucoup de nombres de G. Pour cela, et pour d'autres théorèmes, nous avons besoin de trois lemmes.

LEMME 3. — *Soient $p_1, p_2, \ldots, p_k, P_1, P_2, \ldots, P_k$ des nombres positifs tels que $p_i \leq P_i$ pour tout i. Soit P_1* (resp. p_1) *le plus petit des P_i* (resp. p_i) *et posons $S = \sum_{i=1}^{k} P_i - p_i$. Alors le produit $\prod_{i=1}^{k} \frac{P_i}{p_i}$ est majoré par* $\exp S/p_1$ *et si $S < P_1$, il est majoré par $\frac{P_1}{P_1 - S}$.*

Démonstration. — On a, pour tout i,

$$P_i/p_i \leq \exp((P_i - p_i)/p_i) \leq \exp((P_i - p_i)/p_1)$$

puisque $e^x \geq 1 + x$. Donc

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{P_i}{p_i} \leq \exp\left(\sum_{i=1}^{k} (P_i - p_i)/p_1\right) = \exp S/p_1.$$

La deuxième majoration se fait par récurrence.

Pour $k = 1$, $S = P_1 - p_1$ et $\frac{P_1}{p_1} = \frac{P_1}{P_1 - S}$.

Supposons cette majoration vraie pour $k - 1$. On choisit pour P_k le plus grand des P_i. On a alors

$$\prod_{i=1}^{k-1} \frac{P_i}{p_i} \leq \frac{P_1}{P_1 - S_{k-1}}, \qquad \text{avec} \quad S_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} P_i - p_i.$$

Il faut montrer que $\frac{P_1}{P_1 - S_{k-1}} \frac{P_k}{p_k} \leqq \frac{P_1}{P_1 - S_k}$, ce qui est équivalent à $P_k(P_1 - S_k) \leqq p_k(P_1 - S_{k-1})$, soit

$$P_1(P_k - p_k) \leqq P_k S_k - p_k S_{k-1} = (P_k - p_k) S_{k-1} + P_k(P_k - p_k),$$
$$P_1 \leqq P_k + S_{k-1}.$$

Ce qui est vrai.

LEMME 4. — *Soient* $15 < p_l < \ldots < p_1 < P_1 < \ldots < P_k$ *des nombres entiers. On suppose que*

$$S' = \sum_{i=1}^{k} P_i - \sum_{j=1}^{l} p_j < p_l$$

et que le nombre $\frac{r}{s} = \frac{P_1 \ldots P_k}{p_1 \ldots p_l}$ *vérifie* $\frac{1}{2} \leqq \frac{r}{s} \leqq 2$. *Alors on a* $k = l$.

Démonstration. — Supposons $k > l$. On aurait alors $\frac{r}{s} \geqq P_1 > 15$. Si maintenant on a $k < l$, on applique le lemme précédent aux nombres $p_1, p_2, \ldots, p_k, P_1, \ldots, P_k$, avec $S = S' + p_{k+1} + \ldots + p_l$. On a alors

$$\frac{r}{s} \leqq (\exp S/p_k) \frac{1}{p_{k+1} \ldots p_l} = (\exp S'/p_k) \frac{e}{p_{k+1}} \frac{e}{p_{k+2}} \cdots \frac{e}{p_l} \leqq \frac{e^2}{p_{k+1}} \leqq \frac{e^2}{15} < \frac{1}{2}.$$

LEMME 5. — *Soit* $\mathfrak{X}$ *un ensemble fini de nombres réels de cardinal* X. *Supposons que la distance de deux points de* $\mathfrak{X}$ *est supérieure ou égale à* δ. *Soit* $\mathcal{Y}$ *un ensemble fini de nombres réels de cardinal* Y. *Soit* $R = R(u)$ *le nombre de nombres* $x \in \mathfrak{X}$ *tels que* $d(x, \mathcal{Y}) \geqq u$, d *étant la distance métrique.*

Alors : $R \geqq X - Y\left(\frac{2u}{\delta} + 1\right)$.

Démonstration. — Autour de chaque $y \in \mathcal{Y}$, considérons l'intervalle $]y - u, y + u[$. Le nombre de points de $\mathfrak{X}$ qui peuvent tomber dans cet intervalle est au plus $\frac{2u}{\delta} + 1$. Le nombre total de points de $\mathfrak{X}$ qui peuvent tomber dans la réunion $\bigcup_{y \in \mathcal{Y}}]y - u, y + u[$ est, au plus, $Y\left(\frac{2u}{\delta} + 1\right)$. Si X est supérieur à ce nombre, il en reste

$$R \geqq X - Y\left(\frac{2u}{\delta} + 1\right)$$

pour lesquels $d(x, \mathcal{Y}) \geqq u$.

THÉORÈME 4. — *Il existe une infinité de $N \in G$ tels que le suivant de N dans $g(\mathbf{N})$ soit $N^* = \frac{P}{p} N$, où p désigne le plus grand nombre premier divisant N et P le nombre premier suivant p.*

Démonstration. — Soit $N \in G$ vérifiant les conditions

$$(1) \qquad \rho^- - \rho_1^- \geqq \frac{P-p}{\log 2} \qquad \text{et} \qquad \rho_1^+ - \rho^- \geqq \frac{P-p}{\log 2}.$$

Soit N^* le suivant de N dans $g(\mathbf{N})$. On note $N^* = \frac{r}{s} N$ avec r et s premiers entre eux. On sait que $1 < \frac{r}{s} \leqq 2$ (corollaire de la propriété 3) et $l(N^*) - l(N) \leqq P - p$ (propriété 6). Nous allons appliquer le corollaire 4 de la proposition 1 en utilisant la même décomposition $\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'} \frac{r''}{s''}$ et en faisant $\rho = \rho^-$,

$$l(N^*) - l(N) \geqq \rho^- \log \frac{r}{s} + (\rho_1^+ - \rho^-) \log r' + (\rho^- - \rho_1^-) \log s'.$$

On a alors $r' = s' = 1$. En effet, si $r' \neq 1$, alors $r' \geqq 2$ et

$$l(N^*) - l(N) \geqq \rho^- \log \frac{r}{s} + P - p > P - p$$

et de même pour s' à cause des conditions (1).

On a donc $\frac{r}{s} = \frac{r''}{s''} = \frac{P_1 \ldots P_k}{p_1 \ldots p_l}$ (à cause du corollaire 5 de la proposition 1, pour N assez grand, r et s ne sont divisibles par aucun carré), avec

$$p_l < \ldots < p_1 \leqq p < P \leqq P_1 < \ldots < P_k.$$

Tous ces nombres étant premiers et équivalents (propriété 11) lorsque $N \to \infty$. Nous appliquons le lemme 4 avec $S' = P - p < p_l$, ce qui donne $k = l$.

Maintenant k doit être égal à 1; sinon

$$l(N^*) - l(N) = \sum_{i=1}^{k} P_i - p_i \geqq k(P-p) > P - p;$$

et enfin $P_1 = P$ et $p_1 = p$, sinon

$$l(N^*) - l(N) \geqq P - p + (P_1 - P) + (p - p_1) > P - p.$$

On voit finalement que la seule solution des inéquations

$$l(N^*) - l(N) \leqq P - p, \qquad N < N^* \leqq 2N$$

est $N' = \frac{P}{p} N$, pour N assez grand.

Montrons maintenant qu'une infinité de nombres vérifient les conditions (1). On utilise le lemme 5. On met dans $\mathcal{X}$ les nombres $\frac{p}{\log p}$, où p est premier, inférieur ou égal à x et tel que $P-p \leq 2\log x$, si P est le nombre premier suivant p. On sait [8], chap. V, § 4, p. 154) que $X \geq \left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\frac{x}{\log x}$. On a $\delta = \frac{2-\varepsilon}{\log x}$. On prend $u = \frac{2\log x}{\log 2}$.

Avec les notations du lemme 2, on prend pour $\mathcal{Y}$ les nombres de $\mathcal{F}_1$ majorés par $\frac{x}{\log x}+u \sim \frac{x}{\log x}$. On a vu, dans le lemme 2, que $Y = V_1 \sim \frac{\sqrt{2x}}{\log x}$. Comme $Y\left(\frac{2u}{\delta}+1\right) = o\left(\frac{x}{\log x}\right)$, on a

$$R \geq \left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\frac{x}{\log x}.$$

Soit maintenant $x \in \mathcal{X}$ l'un des R nombres qui vérifient $d(x, \mathcal{Y}) \geq u$. Soit $N \in G$ tel que $x = \rho^-(N)$. On a

$$\rho^- - \rho_1^- \geq d(\rho^-, \mathcal{Y}) \geq u \geq \frac{2\log x}{\log 2} \geq \frac{P-p}{\log 2}$$

et, de même, $\rho_1^+ - \rho^- \geq \frac{P-p}{\log 2}$. Comme R tend vers l'infini avec x, le théorème est démontré.

Théorème 5. — *Soit* $\gamma(n) = \operatorname{Card}\{m \leq n;\ g(m) > g(m-1)\}$. *Il existe une constante c telle que* $\gamma(n) \leq n - c\frac{n^{3/4}}{\sqrt{\log n}}$.

La fonction $\gamma(n)$ indexe les nombres de $g(\mathbf{N})$. Lorsque $g(n) = g(n')$ avec $n < n'$, on a $\gamma(n) = \gamma(n')$ et la fonction $n-\gamma(n)$ augmente de $n'-n$. Si le théorème 4 était vrai pour tout $N \in G$, on aurait, en désignant par p le plus grand nombre premier divisant $g(n)$ et par λ' le nombre premier précédant λ,

$$n-\gamma(n) \geq \sum_{\substack{\lambda \text{ premier} \\ \lambda \leq p}} (\lambda - \lambda' - 1) = p - \pi(p) \sim \sqrt{n\log n}.$$

En fait, on pourrait démontrer par ce procédé $n-\gamma(n) \geq c\sqrt{n\log n}$, mais en utilisant un autre procédé, on va démontrer un peu mieux.

Démonstration du théorème 5. — On applique le lemme 5 avec $\mathcal{X} = \left\{\frac{p}{\log p};\ \frac{x}{2} \leq p \leq x\right\}$. On a

$$X = \pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) \sim \frac{x}{2\log x}.$$

On prend : $\mathcal{Y}=\left\{y\in\mathcal{F}_1 \mid y\leqq \dfrac{x}{\log x}\right\}$ avec les notations du lemme 2.

On sait que $Y\leqq\dfrac{\sqrt{2x}}{\log x}$. On a $\delta=\dfrac{2-\varepsilon}{\log x}$ et l'on prend $u=\dfrac{\sqrt{x}}{4\sqrt{2}\log x}$.

Alors

$$R\geqq(1-\varepsilon)\left[\frac{x}{2\log x}-\frac{\sqrt{2x}}{\log x}\left(\frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{2}}\right)\right]\geqq c_1\frac{x}{\log x}.$$

Maintenant, soit $x\in\mathcal{X}$ tel que $d(x,\mathcal{Y})\geqq u$.

Soit $N\in G$ tel que $x=\rho^-(N)$. Pour cet N, on a

$$\rho_1^+-\rho^-\geqq u \qquad \text{et} \qquad \rho^--\rho_1^-\geqq u.$$

On applique le corollaire 4 de la proposition 1 avec la même décomposition $\dfrac{r}{s}=\dfrac{r'}{s'}\dfrac{r''}{s''}$ en faisant $\rho=\rho^-$,

$$\begin{aligned} l\left(\frac{r}{s}N\right)-l(N) &\geqq \rho^-\log\frac{r}{s}+(\rho_1^+-\rho^-)\log r'+(\rho^--\rho_1^-)\log s' \\ &\geqq \rho^-\log\frac{r}{s}+u\log r's'. \end{aligned}$$

Soit n tel que : $l(N)\leqq n\leqq l(N)+u\log 2$. Alors $g(n)=\dfrac{r}{s}N$, avec $1<\dfrac{r}{s}$ et l'on doit avoir $r'=1$ et $s'=1$, donc

$$\frac{g(n)}{N}=\frac{r}{s}=\frac{P_1\ldots P_k}{p_1\ldots p_l}, \qquad \text{avec} \quad p_l<\ldots<p_1\leqq p<P\leqq P_1<\ldots<P_k,$$

tous ces nombres étant premiers et équivalents lorsque $x\to\infty$. On applique le lemme 4 avec $S'=u\log 2=o\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\log x}\right)<p_l$, car $p_l\sim p\geqq\dfrac{x}{2}$. Il faut montrer que $\dfrac{r}{s}\leqq 2$. Si l'on avait $\dfrac{r}{s}>2$, alors

$$n-l(N)\geqq l\left(\frac{r}{s}N\right)-l(N)\geqq\rho\log 2>u\log 2.$$

On a donc $k=l$, et alors $l(g(n))-l(N)$ est un nombre pair. On a donc un bénéfice pour $n-\gamma(n)$ qui est $\left[\dfrac{u\log 2}{2}\right]$ en notant $[x]$ la partie entière de x.

Comme il y a R nombres de ce type, nous gagnons en tout

$$R\left[\frac{u\log 2}{2}\right]\geqq c_2\frac{x}{\log x}\frac{\sqrt{x}}{\log x}=c_2\frac{x^{3/2}}{\log^2 x}.$$

Comme $p \leqq x$, tous ces nombres $N = g(n)$ vérifient $\sqrt{n \log n} \leqq c_3 x$ et nous obtenons le résultat annoncé :

$$n - \gamma(n) \geqq c_4 \frac{n^{3/4}}{\sqrt{\log n}}.$$

Remarque. — Il est sans doute possible d'améliorer ce résultat. Ce procédé permettrait au mieux d'avoir $\gamma(n) \leqq \frac{n}{2}$. On peut minorer $\gamma(n)$ à l'aide de la propriété 6 et du résultat : $p_{i+1} - p_i \leqq p_i^{\tau}$ pour $\tau = 5/8$ et même actuellement un peu moins. On trouve $\gamma(n) \geqq n^{1-\tau/2} \geqq n^{11/16}$.

On peut relier $\gamma(n)$ à $Q(x) = \operatorname{Card}\{N \in g(\mathbf{N});\ N \leqq x\}$. On remarque que $Q(g(n)) = \gamma(n)$ et l'on a

$$(\log x)^{11/8} \leqq (\log x)^{2-\tau} \leqq Q(x) \leqq (2 + \varepsilon) \frac{\log^2 x}{\log \log x}.$$

Le problème d'un équivalent de $\gamma(n)$ ne semble pas facile.

THÉORÈME 6. — *Pour toute constante c, il existe une infinité de $N \in g(\mathbf{N})$ tels que le suivant N^* de N dans $g(\mathbf{N})$ vérifie* $\frac{N^*}{N} \geqq 1 + \frac{c \log \log N}{\sqrt{\log N}}$.

Démonstration. — Nous avons d'abord besoin d'un résultat analogue au lemme 2 : Pour toute constante c, il existe une infinité de nombres consécutifs ρ_1^- et ρ_1^+ de $\mathcal{F}_1$ pour lesquels on a

$$\rho_1^+ - \rho_1^- \geqq c \sqrt{\rho_1^- \log \rho_1^-}.$$

Nous utiliserons le corollaire 3 du théorème 2 (chap. 1) avec les mêmes notations. On a $f(x) = \frac{x^2 - x}{\log x}$ croissante pour $x \geqq 1$ et $f(1) = 1$; $f'(x) \sim \frac{2x}{\log x}$. On prend pour suite v_n l'ensemble $\mathcal{F}_2$ défini au lemme 2. Nous avons à évaluer

$$V = \operatorname{Card}\left\{ v_n \mid v_n \leqq \frac{x^2 - x}{\log x} \right\} = V_2 + \ldots + V_m,$$

avec $V_\alpha = \operatorname{Card}\left\{ v_n \mid v_n \in F_\alpha,\ v_n \leqq \frac{x^2 - x}{\log x} \right\}$.

On a $V_2 = \pi(z)$ avec $\frac{z^3 - z^2}{\log z} = \frac{x^2 - x}{\log x}$, et donc $z = O(x^{2/3})$.

Pour $m > m_0$, $V_m = 0$ et m_0 est déterminé par $\frac{2^{m_0+1} - 2^{m_0}}{\log 2} = \frac{x^2 - x}{\log x}$, donc $m_0 \leqq \frac{2 \log x}{\log 2}$. On a finalement $V \leqq m_0 \pi(z) = O(x^{2/3})$.

Il faut maintenant évaluer, avec $b = 1/4$,

$$\mathrm{Card}\left\{ v_n \,\middle|\, \frac{x^2-x}{\log x} \leqq v_n \leqq \frac{x^2-x}{\log x} + \frac{2x^{5/4}}{\log x} \right\}.$$

Or, dans cet ensemble, il y a au plus un élément de F_2. L'écart entre deux éléments de F_2 est en effet supérieur à

$$\frac{(\lambda+2)^3-(\lambda+2)^2}{\log(\lambda+2)} - \frac{\lambda^3-\lambda^2}{\log\lambda} \sim \frac{6\lambda^2}{\log\lambda} \geqq c\frac{x^{4/3}}{\log x} > \frac{2x^{5/4}}{\log x}.$$

Il y a donc au plus m éléments, et m est $o(x^\varepsilon)$. On peut donc appliquer le corollaire 3. Pour toute constante c, on aura

$$u_{n+1} - u_n \geqq c\frac{2a_n}{\log a_n}\log a_n = 2c\,a_n.$$

Or u_{n+1} et u_n sont deux éléments consécutifs ρ_1^- et ρ_1^+ de $\mathcal{F}_1$ et, comme $u_n \sim \dfrac{a_n^2}{\log a_n}$, on a

$$a_n \sim \sqrt{\frac{1}{2}u_n\log u_n} \qquad \text{et} \qquad \rho_1^+ - \rho_1^- \geqq c\sqrt{\rho_1^-\log\rho_1^-}.$$

Ensuite on considère $N = N_\rho \in G$ avec $\rho = \dfrac{\rho_1^+ + \rho_1^-}{2}$. Soit A le précédent de N dans $g(\mathbf{N})$. On pose $A = \dfrac{r}{s}N$, avec $\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{r}{s} < 1$ et, d'après le corollaire 4 de la proposition 1, on a

$$l\left(\frac{r}{s}N\right) - l(N) \geqq \rho\log\frac{r}{s} + (\rho_1^+ - \rho)\log r's'.$$

Supposons maintenant que $r's'$ soit égal à 1. Alors

$$\frac{r}{s} = \frac{P_1P_2\ldots P_k}{p_1\ldots p_l}.$$

On a $k < l$ puisque $\dfrac{r}{s} < 1$ et, d'après le lemme 3 appliqué aux nombres p_1, $p_2, \ldots, p_k, P_1, P_2, \ldots, P_k$ avec $S < p_{k+1} + \ldots + p_l$, on obtient (par un calcul analogue à celui du lemme 4)

$$\frac{r}{s} < \frac{e}{p_l} < \frac{1}{2}.$$

On doit donc avoir $r's' \geqq 2$ et alors

$$0 > l(A) - l(N) \geqq \rho\log\frac{r}{s} + c\sqrt{\rho\log\rho},$$

soit

$$\log \frac{s}{r} = \log \frac{N}{A} \geqq c\,\frac{\sqrt{\log \rho}}{\rho} \geqq c\,\frac{\log p}{\sqrt{p}} \geqq c\,\frac{\log\log N}{\sqrt{\log N}}$$

et

$$\frac{N}{A} \geqq 1 + \frac{c \log\log A}{\sqrt{\log A}}.$$

Le problème de la limite supérieure de $\frac{N^*}{N}$, c'est-à-dire de $\frac{g(n+1)}{g(n)}$ n'est pas encore résolu. On sait seulement qu'elle est inférieure ou égale à 2.

Nous allons maintenant démontrer un théorème qui, avec le théorème 4, précise la propriété 1 du chapitre 2.

THÉORÈME 7. — *Il y a une infinité de nombres $A \in g(\mathbf{N})$ pour lesquels il existe deux nombres premiers q et Q avec $q < Q$, $v_q(A) = 1$ et $v_Q(A) = 2$.*

Soit $N \in G$. On notera :

q'	le plus	petit	nombre	premier tel	que	$v_{q'}(N) = 2$,
q	»	grand	»	»	»	$v_q(N) = 2$,
Q	»	petit	»	»	»	$v_Q(N) = 1$,
p	»	grand	»	»	»	$v_p(N) = 1$,
P	»	petit	»	»	»	$v_P(N) = 0$.

Pour certaines valeurs de $N \in G$, on va construire la table de $g(n)$ entre $l(N)$ et $n = l(N) + \Delta$, avec $\Delta = Q^2 - Q - (q^2 - q)$ et montrer que $g(l(N) + \Delta) = \frac{Q}{q} N$, ce qui démontrera le théorème. Nous allons imposer à N les conditions suivantes :

1° $\rho^+ = \rho_1^+ = \frac{Q^2 - Q}{\log Q}$ ou, ce qui est équivalent, le suivant de N dans G est QN;

2° $Q - q \leqq 2 \log Q$, ce qui entraîne $\Delta = (Q - q)(Q + q - 1) \leqq 4 Q \log Q$,

3° $\rho_2^+ - \rho_1^+ > \frac{\Delta}{\log 2}$ et $\rho_1^+ - \rho_2^- > \frac{\Delta}{\log 2}$, avec

$$\rho_2^+ = \rho_2^+(N) = \inf_{\lambda^2 \mid N} h_\lambda^+ \qquad \text{et} \qquad \rho_2^- = \rho_2^-(N) = \sup_{\lambda^3 \mid N} h_\lambda^-.$$

LEMME 6. — *Il existe une infinité de $N \in G$ vérifiant les trois conditions ci-dessus.*

Démonstration. — Nous allons appliquer le lemme 5. Soit x un nombre que l'on fera tendre vers l'infini. On définit Q_0 et Q_1 par

$$\frac{Q_0^2 - Q_0}{\log Q_0} = \frac{x}{\log x} \qquad \text{et} \qquad \frac{Q_1^2 - Q_1}{\log Q_1} = \frac{2x}{\log x}.$$

On sait que (lemme 1) $Q_0 \sim \sqrt{\frac{x}{2}}$ et $Q_1 \sim \sqrt{x}$. On prend pour $\mathscr{X}$ l'ensemble des nombres $\frac{Q^2 - Q}{\log Q}$, où Q est premier, compris entre Q_0 et Q_1 et tel que, si q est le nombre premier qui précède Q, $Q - q \leqq 2 \log Q$. On aura

$$\begin{aligned} X &= \operatorname{Card} \{ Q \text{ premier} \mid Q_0 < Q \leqq Q_1;\ Q - q \leqq 2 \log Q \} \\ &\geqq \operatorname{Card} \{ Q \text{ premier} \mid Q_0 < Q \leqq Q_1;\ Q - q \leqq 2 \log Q_0 \}. \end{aligned}$$

Or

$$\operatorname{Card} \{ Q \text{ premier} \mid Q_0 < Q \leqq Q_1 \} = \pi(Q_1) - \pi(Q_0)$$

et

$$\operatorname{Card} \{ Q \text{ premier} \mid Q_0 < Q \leqq Q_1;\ Q - q \geqq 2 \log Q_0 \} \leqq \frac{Q_1 - Q_0}{2 \log Q_0}$$

(*voir*, par exemple [8], chap. V, § 4, p. 154); donc

$$X \geqq \pi(Q_1) - \pi(Q_0) - \frac{Q_1 - Q_0}{2 \log Q_0} \sim \frac{\sqrt{x}}{\log x} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

On a $\delta \sim 4 \frac{Q_0}{\log Q_0} \sim 4 \sqrt{2} \frac{\sqrt{x}}{\log x}$. On prend pour $\mathscr{Y}$ les éléments de $\mathscr{F}_2$ compris entre $\frac{x}{\log x}$ et $\frac{2x}{\log x}$. On a vu, dans le lemme 2, que

$$Y \leqq V_2 = O(x^{1/3}),$$

et l'on prend $u = 4 Q_1 \log Q_1 \sim 2 \sqrt{x} \log x$. On a alors

$$Y \left(\frac{2u}{\delta} + 1 \right) = O(x^{1/3} \log^2 x) = o(X) \qquad \text{et} \qquad R \sim X.$$

Il existe donc des $x \in \mathscr{X}$ pour lesquels $d(x, \mathscr{Y}) > u$. A un tel x, on fait correspondre $N \in G$ tel que $\rho^+(N) = \rho_1^+(N) = x$. On constate que N vérifie bien les conditions 1°, 2°, 3° puisque ρ_2^+ et ρ_2^- sont dans $\mathscr{Y}$.

Nous allons maintenant montrer que les conditions 1°, 2°, 3° entraînent que $g(l(N) + \Delta) = \frac{Q}{q} N$ pour N assez grand. On considère donc les nombres $A \in g(\mathbf{N})$, vérifiant :

$$l(N) < l(A) \leqq l(N) + \Delta.$$

On pose $A = \frac{r}{s} N$. Comme

$$\Delta \geqq l(A) - l(N) \geqq \rho \log \frac{r}{s},$$

on a $1 < \frac{r}{s} \leqq e^{\Delta/\rho} \leqq 2$ pour N assez grand.

D'abord la condition 3° dit que r n'est divisible par aucun nombre $\leqq q$ et que s n'est divisible par aucun nombre $< q'$. Sinon, d'après la proposition 1, par exemple pour $\lambda \mid r$, $\lambda \leqq q$, c'est-à-dire $\lambda^2 \mid N$, on aurait

$$l\left(\frac{r}{s}N\right) - l(N) \geqq (h_\lambda^+ - \rho)\log\lambda \geqq (\rho_2^+ - \rho)\log 2 > \Delta.$$

Ici, comme par la suite, on emploie la proposition 1 avec

$$\rho = \rho^+ = \rho_1^+ = \frac{Q^2 - Q}{\log Q}.$$

On écrit maintenant la décomposition du corollaire 4 de la proposition 1 : $r = r'r''$ et $s = s's''$, avec

$$r' = \prod_{\substack{\lambda \mid r \\ Q \leqq \lambda \leqq p}} \lambda; \qquad r'' = \prod_{\substack{\lambda \mid r \\ \lambda \geqq P}} \lambda; \qquad s' = \prod_{\substack{\mu \mid s \\ q' \leqq \mu \leqq q}} \mu \qquad \text{et} \qquad s'' = \prod_{\substack{\mu \mid s \\ Q \leqq \mu \leqq p}} \mu.$$

Car on sait, d'après le corollaire 5 de la proposition 1, que pour N assez grand, r', r'', s' et s'' ne sont divisibles par aucun carré.

On va maintenant préciser les valeurs possibles de r' et de s'. On notera ben (λ) le « bénéfice » de λ dans la proposition 1, c'est-à-dire

$$\operatorname{ben}(\lambda) = (h_\lambda^+ - \rho)\log\lambda$$

et

$$\operatorname{ben}(\mu) = (\rho - h_\mu^-)\log\mu, \qquad \text{avec} \quad \rho = \frac{Q^2 - Q}{\log Q}.$$

LEMME 7. — *Avec les notations précédentes, on a* $s' = 1$ *ou* $s' = q$.

Démonstration. — Soit q_1 le nombre premier précédant q et soit q_2 un autre nombre premier, $q' \leqq q_2 < q_1$; on va montrer que si q_2 divisait s' on aurait

$$\operatorname{ben}(q_2) > \operatorname{ben}(q_1) > \Delta.$$

Ce qui démontrera le lemme.

Or

$$\operatorname{ben}(q_2) - \operatorname{ben}(q_1) = y(q_2) - y(q_1), \qquad \text{avec} \quad y(x) = \rho\log x - (x^2 - x).$$

La dérivée $y'(x) = \frac{\rho}{x} - 2x + 1$ s'annule pour $x_0 = \frac{1 + \sqrt{1 + 8\rho}}{4}$ et l'on a la variation :

$$\begin{array}{c|cccc} x & 1 & e & x_0 & q_1 \\ \hline y & 0 \nearrow & \rho - e^2 + e \nearrow & & \searrow \end{array}$$

Comme $y(e) > \Delta$, il suffit de vérifier que $\operatorname{ben}(q_1) > \Delta$.

Or

$$\operatorname{ben}(q_1) - \operatorname{ben}(q) = \rho \log \frac{q_1}{q} + q^2 - q - (q_1^2 - q_1)$$

et

$$\rho \log \frac{q_1}{q} \sim \rho \frac{q_1 - q}{q} \sim \frac{Q}{\log Q}(q_1 - q),$$

car $q \sim Q$ et $\rho \sim \dfrac{Q^2}{\log Q}$, et

$$q^2 - q - (q_1^2 - q_1) = (q - q_1)(q + q_1 - 1) \sim 2Q(q - q_1),$$

donc

$$\operatorname{ben}(q_1) - \operatorname{ben}(q) \sim 2Q(q - q_1) \geqq 4Q.$$

D'autre part, $\Delta - \operatorname{ben}(q) = \rho \log \dfrac{Q}{q}$ (corollaire 2 de la proposition 1) et

$$\rho \log \frac{Q}{q} \leqq \rho \frac{Q - q}{q} \leqq \frac{Q^2 - Q}{\log Q} \frac{2 \log Q}{q} \sim 2Q.$$

On a donc

$$\operatorname{ben}(q_1) - \operatorname{ben}(q) \geqq (4 - \varepsilon) Q > (2 + \varepsilon) Q \geqq \Delta - \operatorname{ben}(q),$$

ce qui entraîne $\operatorname{ben}(q_1) > \Delta$, et le lemme 7 est démontré.

LEMME 8. — *Si $s' = q$, on a $r' = Q$ ou $r' = 1$.*

La démonstration est analogue. Soient Q_1 le nombre premier suivant Q et Q_2 un nombre premier compris entre Q_1 et p. On a

$$\operatorname{ben}(Q_2) = (h_{Q_2}^{+} - \rho) \log Q_2 > (h_{Q_1}^{+} - \rho) \log Q_1 = \operatorname{ben} Q_1.$$

Il suffit donc de vérifier que $\operatorname{ben}(Q_1) + \operatorname{ben}(q) > \Delta$.

Calculons

$$\operatorname{ben}(Q_1) = \left(\frac{Q_1^2 - Q_1}{\log Q_1} - \frac{Q^2 - Q}{\log Q} \right) \log Q_1 \geqq (Q_1 - Q) z'(Q) \log Q,$$

avec $z(x) = \dfrac{x^2 - x}{\log x}$, car $z'(x)$ est une fonction croissante de x. Comme $z'(Q) \sim \dfrac{2Q}{\log Q}$, on obtient

$$\operatorname{ben}(Q_1) \geqq (4 - \varepsilon) Q \quad \text{et} \quad \operatorname{ben}(Q_1) \geqq (4 - \varepsilon) Q > (2 + \varepsilon) Q \geqq \Delta - \operatorname{ben}(q)$$

comme dans le lemme précédent.

LEMME 9. — *$s' = 1$ entraîne $r' = 1$.*

Supposons en effet $r' \neq 1$. Alors $r' = Q_1 Q_2 \ldots Q_h$; $\frac{r}{s}$ s'écrit donc

$$\frac{r}{s} = Q_1 Q_2 \ldots Q_h \frac{P_1 \ldots P_k}{p_1 \ldots p_l}.$$

1° Nous allons démontrer d'abord que $h \leqq c\sqrt{\log p}$, et en déduire que, si $h = 2j$, $j + k \leqq l$ et, si $h = 2j + 1$, $j + k < l$. On doit avoir

$$\Delta \geqq \sum_{i=1}^{h} \operatorname{ben}(Q_i) = \sum_{i=1}^{h} (h_{Q_i}^{+} - \rho) \log Q_i$$

$$\geqq \sum_{i=1}^{h} (Q_i - Q)\, z'(Q) \log Q \geqq c_1 Q_1 \sum_{i=1}^{h} Q_i - Q_1,$$

avec, comme dans le lemme 8, $z(x) = \frac{x^2 - x}{\log x}$. On obtient alors

$$\Delta \geqq c_1 Q_1 \sum_{i=1}^{h} 2i = c_1 Q_1 h(h+1) \geqq c_1 h^2 Q_1.$$

Cela entraîne

$$c_1 h^2 Q_1 \leqq \Delta \leqq 4 Q_1 \log Q_1 \sim 2 Q_1 \log p, \qquad \text{d'où} \qquad h \leqq c_2 \sqrt{\log p}.$$

Maintenant on doit avoir

$$l\left(\frac{r}{s} N\right) - l(N) = \sum_{i=1}^{h} (Q_i^2 - Q_i) + \sum_{i=1}^{k} P_i - \sum_{i=1}^{l} p_i \leqq \Delta.$$

Et l'on a $\frac{p}{\log p} < \rho = \frac{Q^2 - Q}{\log Q}$. Or, d'après le lemme 1, soit y tel que $\frac{p}{\log p} = \frac{y^2 - y}{\log y}$. On a

$$y^2 - y \geqq \frac{p}{2}\left(1 - \frac{c_3}{\log p}\right)$$

pour $c_3 > \log 2$ et p assez grand. Comme $Q > y$, $Q^2 - Q \geqq \frac{p}{2}\left(1 - \frac{c_3}{\log p}\right)$.

On a donc

$$\Delta \geqq \sum_{i=1}^{h} (Q_i^2 - Q_i) + \sum_{i=1}^{k} P_i - \sum_{i=1}^{l} p_i \geqq \frac{hp}{2} - \frac{c_4 p}{\sqrt{\log p}} + kp - lp.$$

Le deuxième membre est équivalent à $\left(\frac{h}{2} + k - l\right) p$, et l'on doit avoir $\frac{h}{2} + k - l \leqq 0$, ce qui entraîne :

— si $h = 2j$: $\quad j + k \leqq l$;

— si $h = 2j + 1$: $\quad j + k \leqq l - 1$.

2° Remarquons maintenant que, si Q_1 et Q_2 sont des nombres positifs supérieurs à $2a$, on a

$$Q_1 Q_2 \leq \frac{Q_1^2 - Q_1 + Q_2^2 - Q_1}{2 - 1/a}.$$

En effet, supposons $Q_1 \geq Q_2$, on aura $\frac{Q_2}{a} \geq 2$ et

$$Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2 - Q_1 - Q_2 + \frac{Q_1Q_2}{a} \geq (Q_1 - Q_2)^2 + 2Q_1 - Q_1 - Q_2 \geq 0.$$

3° On suppose maintenant $h = 2j$. On pose, pour $1 \leq i \leq j$,

$$\lambda_i = Q_{2i-1}^2 - Q_{2i-1} + Q_{2i}^2 - Q_{2i}.$$

On sait que l'on a

$$\lambda_i \geq p\left(1 - \frac{c_3}{\log p}\right)$$

et

$$\frac{r}{s} \leq \frac{1}{\left(2 - \frac{1}{a}\right)^j} \frac{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_j P_1 P_2 \ldots P_k}{p_1 p_2 \ldots p_{j+k} p_{j+k+1} \ldots p_l},$$

où les λ_i et les P_i sont rangés par ordre croissant, les p_i par ordre décroissant. Parmi les $\frac{\lambda_i}{p_i}$ pour $1 \leq i \leq j$, certains sont inférieurs ou égaux à 1, En réindexant au besoin, on les met à part avec indice de 1 à j' :

$$\frac{r}{s} \leq \frac{1}{\left(2 - \frac{1}{a}\right)^j} \frac{\lambda_1 \ldots \lambda_{j'} \lambda_{j'+1} \ldots \lambda_j P_1 \ldots P_k}{p_1 \ldots p_{j'} p_{j'+1} \ldots p_{j+k} \ldots p_l}.$$

Nous appliquons maintenant le lemme 3 au nombre

$$B = \frac{\lambda_{j'+1} \ldots \lambda_j P_1 \ldots P_k}{p_{j'+1} \ldots p_{j+k}},$$

avec, pour S,

$$S = \sum_{i=j'+1}^{j} \lambda_i + \sum_{i=1}^{k} P_i - \sum_{i=j'+1}^{j+k} p_i \leq \Delta + \sum_{i=j+k+1}^{l} p_i - \sum_{i=1}^{j'} \lambda_i + \sum_{i=1}^{j'} p_i$$

$$\leq \Delta + \sum_{i=j+k+1}^{l} p_i - j'p\left(1 - \frac{c_3}{\log p}\right) + j'p \leq \Delta + \sum_{i=j+k+1}^{l} p_i + \frac{c_4 p}{\sqrt{\log p}}.$$

Nous avons alors

$$B \leqq \exp S/p_{j+k} \leqq (\exp \Delta/p_{j+k}) \left(\prod_{i=j+k+1}^{l} \exp\left(\frac{p_i}{p_{j+k}}\right)\right) \exp\left(\frac{c_4 p}{\sqrt{\log p}\, p_{j+k}}\right)$$

$$\leqq \exp\left(\frac{1}{p_{j+k}}\left(\Delta + c_4 \frac{p}{\sqrt{\log p}}\right)\right) e^{l-j-k}$$

et

$$\frac{r}{s} \leqq \frac{1}{\left(2-\frac{1}{a}\right)^j} \frac{B}{p_{j+k+1}\dots p_l} \leqq \frac{1}{\left(2-\frac{1}{a}\right)^j} \exp\left(\frac{1}{p_{j+k}}\left(\Delta + \frac{c_4 p}{\sqrt{\log p}}\right)\right) \prod_{l=j+k+1}^{l} \frac{e}{p_i}.$$

On sait que, pour $A \in g(\mathbf{N})$ avec $l(A) - l(N) \leqq \Delta$, on a $\log A \sim \log N$ et si p_{j+k} ne divise pas A, $p_{j+k} \sim \log A \sim \log N \sim p$. Comme $j \geqq 1$, et que $a \to \infty$, on voit que, pour p assez grand, $\frac{r}{s} < 1$.

4° Si maintenant $h = 2_{j+1}$, on écrit de la même façon

$$\frac{r}{s} \leqq \frac{1}{\left(2-\frac{1}{a}\right)^j} \frac{\lambda_1 \dots \lambda_j P_1 \dots P_k Q_h}{p_1 \dots p_{j+k} \dots p_l}.$$

On applique le même lemme 3 au même nombre B avec une nouvelle somme $S' = S + (Q_h^2 - Q_h)$. Nous avons alors

$$\frac{r}{s} \leqq \frac{1}{\left(2-\frac{1}{a}\right)^j} \exp\left(\frac{\Delta + \frac{c_4 p}{\sqrt{\log p}}}{p_{j+k}}\right) \left(\prod_{i=j+k+2}^{l} \frac{e}{p_i}\right) \frac{Q_h}{p_{j+k+1}} \exp\left(\frac{Q_h^2 - Q_h}{p_{j+k}}\right)$$

même si $j = 0$, $\frac{Q_h}{p_{j+k+1}}$ est petit et $\frac{r}{s} < 1$.

Finalement $h = 0$ et $r' = 1$.

LEMME 10. — *$r' = 1$ entraîne $s' = 1$.*

Il faut montrer que $r' = 1$ et $s' = q$ ne donnent pas de valeurs possibles pour $\frac{r}{s}$. Par une démonstration analogue à la précédente, mais plus facile, on écrit

$$\frac{r}{s} = \frac{1}{q} \frac{P_1 \dots P_k}{p_1 \dots p_l}, \qquad \text{avec } k \leqq l, \qquad \text{sinon } \frac{r}{s} \geqq \frac{P}{q}.$$

On applique le lemme 3 au nombre $B = \frac{P_1 \dots P_k}{p_1 \dots p_k}$, et

$$S = \sum_{i=1}^{k} (P_i - p_i) \leqq \Delta + q^2 - q + \sum_{i=k+1}^{l} p_i,$$

d'où

$$B \leqq \exp S/p_k \leqq \exp \Delta/p_k \exp((q^2 - q)/p_k) \exp(l - k)$$

et

$$\frac{r}{s} \leqq \frac{1}{q} \exp \Delta/p_k \exp((q^2 - q)/p_k)) \prod_{i=k+1}^{l} \frac{e}{p_i} < 1.$$

En conclusion des lemmes 7, 8, 9, 10, nous voyons que, pour assurer $\frac{r}{s} > 1$ et $l\left(\frac{r}{s}N\right) - l(N) \leqq \Delta$, les seules valeurs possibles de $\frac{r'}{s'}$ sont $\frac{Q}{q}$ et 1. Si $\frac{r'}{s'} = \frac{Q}{q}$, alors $\frac{q}{Q} < \frac{r''}{s''} \leqq 1$ puisque $l\left(\frac{Q}{q}N\right) - l(N) = \Delta$.

On a donc $\frac{r''}{s''} = \frac{P_1 \ldots P_k}{p_1 \ldots p_l}$ avec $S' = \sum_{i=1}^{k} P_i - \sum_{i=1}^{l} p_i \leqq 0$.

D'après le lemme 4, on devrait avoir $k = l$ et cela entraînerait $\frac{r''}{s''} > 1$. On a donc $\frac{r''}{s''} = 1$.

Il reste à étudier les valeurs de $\frac{r''}{s''}$ lorsque $\frac{r'}{s'} = 1$.

Lemme 11. — *Soit $r = P_1 P_2 \ldots P_k$ un produit de nombres premiers supérieurs ou égaux à p; soit $s = p_1 p_2 \ldots p_l$ un produit de nombres premiers compris entre Q et p. Si $A = \frac{r}{s} N \in g(\mathbf{N})$, si $A > N$ et si $l(A) - l(N) \leqq \Delta$, alors $A < \frac{Q}{q} N$.*

On applique le lemme 4 à $\frac{r}{s}$ avec $S' \leqq \Delta < p_l$. On a donc $k = l$. On applique ensuite le lemme 3 qui nous donne $\frac{r}{s} \leqq \frac{P}{P - \Delta}$. Or

$$\frac{Q}{q} = \frac{Q^2 - Q + qQ}{q^2 - q + qQ} = \frac{Q^2 - Q + qQ}{Q^2 - Q + qQ - \Delta}.$$

Mais quand deux fractions supérieures à 1 ont même différence entre le numérateur et le dénominateur, la plus grande est celle qui a le plus petit numérateur. Or

$$Q^2 - Q + qQ < 2Q^2 < \mathrm{P} \quad \text{à cause du lemme 1,}$$

car $\frac{Q^2 - Q}{\log Q} < \frac{P}{\log P}$. Le lemme 11 est ainsi démontré, et également le théorème 7.

Ce raisonnement peut servir pour calculer une valeur effective de $g(n)$. Si l'on fait $Q = 19$, $q = 17$, on trouve $p = 761$, $P = 769$, $N = g(47\,856)$ $\Delta = 70$ et $\frac{19}{17} N = g(47\,926)$. Connaissant cela, on peut faire la table de $g(n)$ entre $47\,856$ et $47\,926$, car tous les $A \in g(\mathbf{N})$ de cet intervalle sont de la forme $\frac{P_1 \ldots P_k}{p_1 \ldots p_k} N$.

Chapitre 4.

« Highly composite » et « highly abundant numbers ».

1. « Highly composite numbers ».

Rappelons d'abord la définition de Ramanujan : On dit que N est « highly composite » si, pour tout $N' < N$, on a

$$d(N') < d(N),$$

avec

$$d(N) = \text{nombre de diviseurs de } N = \prod_{p \mid N} (v_p(N) + 1).$$

Ramanujan a fait une étude très complète de ces nombres, et l'on peut trouver d'autres renseignements dans les articles de Erdös ([1] et [2]). Dans son article [2], Erdös démontre que, si N et N^* sont deux « highly composite numbers » consécutifs et assez grands, on a

$$\frac{N^*}{N} \leqq 1 + \frac{1}{(\log N)^{3/32}}.$$

Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant :

Théorème 8. — *Pour tout nombre c, il existe une infinité de « highly composite numbers » N dont le suivant N^* vérifie*

$$\frac{N^*}{N} \geqq 1 + \frac{c \log\log N}{(\log N)^{\alpha}}, \qquad \textit{avec} \quad \alpha = \frac{\log 3/2}{\log 2} = 0{,}585\ldots.$$

En regroupant ces deux résultats, si l'on pose

$$\frac{N^*}{N} = 1 + \frac{1}{(\log N)^{c_N}}$$

ce qui définit $c_N = \dfrac{\log \dfrac{N}{N^* - N}}{\log\log N}$, on a

$$\frac{3}{32} \leqq \liminf c_N \leqq \alpha.$$

Pour démontrer le théorème 8 nous allons utiliser des méthodes analogues à celles du chapitre précédent en utilisant les « superior highly composite numbers » introduits par RAMANUJAN, et dont nous allons rappeler brièvement les propriétés.

DÉFINITION. — *On dit que N est « superior highly composite », s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout N', on ait*

$$\frac{d(N')}{d(N)} \leq \left(\frac{N'}{N}\right)^{\varepsilon}.$$

On pose

$$E = \left\{ \frac{\log \frac{k+1}{k}}{\log \lambda};\ k \text{ entier} \geq 1,\ \lambda \text{ premier} \right\}.$$

Pour tout $\varepsilon < 1$ et $\varepsilon \notin E$, il existe un, et un seul, « superior highly composite number » dont la décomposition en facteurs premiers est

$$N = \prod \lambda^{a_\lambda}, \qquad \text{avec} \quad a_\lambda = \text{partie entière de} \left(\frac{1}{\lambda^{\varepsilon} - 1}\right).$$

Le plus grand nombre premier p qui divise N vérifie $\varepsilon < \dfrac{\log 2}{\log p}$. Si $\varepsilon \in E$, il existe au moins deux « superior highly composite numbers » associés à ε. Comme on ne sait pas démontrer que les éléments de E sont distincts, il peut en exister au plus trois (*voir* [1], théor. 10).

Inversement, à tout N ainsi construit, on associe deux éléments consécutifs de E : ε^- et ε^+ ($\varepsilon^- < \varepsilon^+$), tels que N soit associé à tout $\varepsilon \in (\varepsilon^-, \varepsilon^+)$. De même, on définit h_λ^- et $h_\lambda^+(N)$ par

$$h_\lambda^- = \frac{\log \frac{a_\lambda + 2}{a_\lambda + 1}}{\log \lambda} \qquad \text{et} \qquad h_\lambda^+ = \frac{\log \frac{a_\lambda + 1}{a_\lambda}}{\log \lambda} \quad (\text{pour } \lambda \leq p)$$

pour tout λ premier avec $a_\lambda = v_\lambda(N)$. On a alors

$$\varepsilon^- = \sup_{\lambda \text{ premier}} h_\lambda^- \qquad \text{et} \qquad \varepsilon^+ = \inf_{\lambda \mid N} h_\lambda^+,$$

et l'on définit

$$\varepsilon_2^- = \sup_{\lambda \mid N} h_\lambda^- \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_2^+ = \inf_{\lambda^2 \mid N} h_\lambda^+.$$

Enfin, on pose pour $k \geq 1$:

$$F_k = \left\{ \frac{\log \frac{k+1}{k}}{\log \lambda};\ \lambda \text{ premier} \right\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}_k = \bigcup_{j \geq k} F_j.$$

On a $E = \mathcal{F}_1$ et, pour tout N, $\varepsilon_2^- \in \mathcal{F}_2$ et $\varepsilon_2^+ \in \mathcal{F}_2$.

PROPOSITION 2. — *Soit $N = N_\varepsilon$ un « superior highly composite number », soit $\frac{r}{s}$ une fraction irréductible telle que s divise N; on a alors*

$$d\left(\frac{r}{s}N\right)\Big/d(N) = \left(\frac{r}{s}\right)^{\varepsilon} \prod_{\lambda \mid r} \frac{1}{\lambda^{(\varepsilon - h_\lambda^-)v_\lambda(r)}} \prod_{\mu \mid s} \frac{1}{\mu^{(h_\mu^+ - \varepsilon)v_\mu(s)}} \prod_{\lambda \mid r} \frac{1}{U_\lambda} \prod_{\mu \mid s} \frac{1}{V_\mu},$$

avec

$$U_\lambda = \frac{a_\lambda + 1}{a_\lambda + 1 + v_\lambda(r)} \left(\frac{a_\lambda + 2}{a_\lambda + 1}\right)^{v_\lambda(r)}$$

et

$$V_\mu = \frac{a_\mu + 1}{a_\mu + 1 - v_\mu(s)} \left(\frac{a_\mu}{a_\mu + 1}\right)^{v_\mu(s)}.$$

De plus, on a $U_\lambda \geqq 1$ et $V_\mu \geqq 1$ avec égalité lorsque $v_\lambda(r) = 1$ et $v_\mu(s) = 1$.

Démonstration. — Comme dans la proposition 1, on fait $r = \lambda^k$, $s = 1$, et l'on calcule U_λ en posant $a_\lambda = a$:

$$d(\lambda^k N)/d(N) = \frac{a + k + 1}{a + 1} = \lambda^{k\varepsilon} \frac{\lambda^{h_\lambda^- k}}{\lambda^{k\varepsilon}} \frac{1}{U_\lambda},$$

d'où

$$U_\lambda = \frac{a + 1}{a + k + 1} \left(\frac{a + 2}{a + 1}\right)^k = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{a + i}{a + i + 1}\right) \left(\frac{a + 2}{a + 1}\right).$$

Pour $k = 1$, on a $U_\lambda = 1$ et, pour $i \geqq 2$, $\dfrac{a + i + 1}{a + i} < \dfrac{a + 2}{a + 1}$.

On calcule de même V_μ.

Pour démontrer le théorème 8, nous aurons besoin d'un lemme.

LEMME 12. — *Pour toute constante c, il existe une infinité de « superior highly composite numbers » N_ε pour lesquels*

$$\varepsilon_2^+ - \varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_2^- \geqq \frac{c}{p^\alpha \log p},$$

où p désigne le plus grand nombre premier divisant N_ε et $\alpha = \dfrac{\log 3/2}{\log 2}$.

On utilise le corollaire 4 du théorème 2 (chap. 1). On prend

$$f(x) = \frac{\log 3/2}{\log x}, \qquad f'(x) = -\frac{\log 3/2}{x \log^2 x},$$

et l'on prend comme suite v_n l'ensemble $\mathcal{F}_3$. On doit évaluer

$$V = \operatorname{Card}\{v_n \mid f(x) \leqq v_n\} = V_3 + V_4 + \ldots + V_m + \ldots,$$

avec

$$V_k = \operatorname{Card}\{v_n \in F_k,\ f(x) \leqq v_n\}.$$

Comme $\dfrac{\log\dfrac{k+1}{k}}{\log\lambda}$ est une fonction décroissante de k et de λ, on a

$$V_3 \geq V_4 \geq \ldots \geq V_m \geq \ldots.$$

D'autre part, soit m_0 tel que

$$\frac{\log\dfrac{m_0+1}{m_0}}{\log 2} = \frac{\log 3/2}{\log x}.$$

On a $m_0 \sim \dfrac{\log x}{\log 2 \log 3/2}$ et, pour $m > m_0$, $V_m = 0$.

Enfin, $V_3 = \pi(y)$, avec $\dfrac{\log 4/3}{\log y} = \dfrac{\log 3/2}{\log x}$, d'où $y = x^\beta$ avec

$$\beta = \frac{\log 4/3}{\log 3/2} = 0{,}71\ldots \qquad \text{et, finalement,} \qquad V = O(x^\beta).$$

On doit ensuite évaluer, pour $b = \dfrac{1}{4}$,

$$V' = \operatorname{Card}\left\{ v_n \,|\, f(x) - \frac{x^b \log 3/2}{x \log^2 x} \leq v_n \leq f(x) \right\}.$$

Or, dans cet intervalle, il ne peut y avoir qu'un seul élément de F_k pour $k \geq 3$. En effet, pour $k = 3$,

$$\frac{\log 4/3}{\log\lambda} - \frac{\log 4/3}{\log(\lambda+2)} \sim \frac{2\log 4/3}{\lambda \log^2\lambda} \geq c\,\frac{x^{1-\beta}}{x\log^2 x},$$

car $\lambda \sim x^\beta$ et $1-\beta > \dfrac{1}{4}\cdot$ On a donc $V' \leq m_0 = O(\log x)$ et l'on peut appliquer le corollaire 4 : Pour toute constante $c > 0$, il existe une infinité de n pour lesquels

$$u_n - u_{n+1} \geq c(-f'(a_n)) \log a_n.$$

Or u_n et u_{n+1} sont deux éléments consécutifs de $\mathcal{F}_2$. On choisit N_ε avec $\varepsilon = \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2}\cdot$ Alors $\varepsilon_2^-(N) = u_{n+1}$ et $\varepsilon_2^+(N) = u_n$. D'autre part, nous avons $u_n = f(a_n)$, $u_{n+1} = f(a_{n+1})$, et soit x tel que $\varepsilon = f(x) = \dfrac{\log 3/2}{\log x}\cdot$ Alors $a_n < x < a_{n+1}$ et $a_n \sim a_{n+1}$ (c'est une suite comprenant les nombres premiers). Comme $\dfrac{\log 2}{\log P} < \varepsilon < \dfrac{\log 2}{\log p}$ (où P est le nombre premier suivant p), on a $x \sim p^\alpha$, et l'on obtient

$$\varepsilon_2^+ - \varepsilon_2^- \geq c\,\frac{1}{x\log^2 x}\log x \geq \frac{c_1}{p^\alpha \log p}\cdot$$

Démonstration du théorème 8. — Soit $N = N_\varepsilon$ vérifiant le lemme 12, et soit $N^\star$ le « highly composite number » suivant N. On pose

$$N^\star = \frac{r}{s} N, \qquad \text{avec} \quad 1 < \frac{r}{s} \quad \text{et} \quad \frac{r}{s} = 1 + t.$$

Soient p le plus grand nombre premier divisant N, P son suivant, Q le plus petit nombre premier pour lequel $v_Q(N) = 1$. On a alors :

— Ou bien r n'est divisible par aucun nombre premier $\geq P$,

— Ou bien s n'est divisible par aucun nombre premier $\geq Q$.

Sinon il y aurait un « trou » dans la décomposition en facteurs premiers de $N^\star$, ce qui est impossible ([9], § 8). On en déduit :

— Ou bien, pour tout λ divisant r,

$$h_\lambda^- \leq \varepsilon_2^- \qquad \text{et} \qquad \prod_{\lambda \mid r} \frac{1}{\lambda^{(\varepsilon - h_\lambda^-)\nu_\lambda(r)}} \leq \frac{1}{r^{\varepsilon - \varepsilon_2^-}};$$

— ou bien, pour tout μ divisant s,

$$h_\mu^+ \geq \varepsilon_2^+ \qquad \text{et} \qquad \prod_{\mu \mid s} \frac{1}{\mu^{(h_\mu^+ - \varepsilon)\nu_\mu(s)}} \leq \frac{1}{s^{\varepsilon - \varepsilon_2^-}}.$$

Comme $r > s$ et $\varepsilon - \varepsilon_2^- = \varepsilon_2^+ - \varepsilon$, la proposition 2 nous dit que

$$1 < d(N^\star)/d(N) \leq \left(\frac{r}{s}\right)^\varepsilon \frac{1}{s^{\varepsilon_2^+ - \varepsilon}}.$$

Or $1 + t = \dfrac{r}{s} \geq \dfrac{s+1}{s} = 1 + \dfrac{1}{s}$, donc $\dfrac{1}{s} \leq t$. En passant aux logarithmes,

$$0 \leq \varepsilon \log(1 + t) + (\varepsilon_2^+ - \varepsilon) \log \frac{1}{s} \leq \frac{\log 2}{\log p} t + \frac{c}{p^\alpha \log p} \log t,$$

soit $t + \dfrac{c \log t}{p^\alpha} \geq 0$ pour toute constante c. Cela entraîne

$$t \geq \frac{c \log p}{p^\alpha} \quad \text{pour toute constante } c.$$

On obtient le théorème en remarquant que $c_1 \log N \leq p \leq c_3 \log N$ (*voir* [9], § 27; on a d'ailleurs, pour tout « highly composite number », $p \sim \log N$).

2. **Highly abundant numbers.**

Rappel de définitions. — On pose $\sigma(n) =$ somme des diviseurs de n. On sait que σ est multiplicative et que $\sigma(p^\alpha) = \dfrac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1}$.

On dit que N est un « highly abundant number » si, pour tout $N' < N$, on a

$$\sigma(N') < \sigma(N).$$

On dit que N est un « superabundant number » si, pour tout $N' < N$, on a

$$\frac{\sigma(N')}{N'} < \frac{\sigma(N)}{N}.$$

On dit que N est un « colossally abundant number » s'il existe ε tel que, pour tout N', on ait

$$\frac{\sigma(N')}{\sigma(N)} \leqq \left(\frac{N'}{N}\right)^{1+\varepsilon}.$$

Pour ces définitions, et les propriétés de ces nombres, *voir* [1]. Nous allons faire quelques rappels : Un « colossally abundant number » est « superabundant » et un « superabundant number » est « highly abundant ».

Pour les « colossally abundant numbers », on définit

$$E = \left\{ \frac{\log \dfrac{p^k - 1}{p^k - p}}{\log p} \,\middle|\, k \text{ entier} \geqq 2,\ p \text{ premier} \right\}.$$

A tout $\varepsilon < \dfrac{\log 3/2}{\log 2}$, $\varepsilon \notin E$, il existe un « colossally abundant number », et un seul, dont la décomposition en facteurs premiers est donnée par

$$N = \prod \lambda^{a_\lambda}, \qquad \text{avec} \quad a_\lambda = \left[\frac{\log \dfrac{\lambda^{1+\varepsilon} - 1}{\lambda^\varepsilon - 1}}{\log \lambda} \right] - 1.$$

Soit p le plus grand nombre premier divisant N, on a

$$\varepsilon < \frac{\log\left(1 + \dfrac{1}{p}\right)}{\log p} < \frac{1}{p \log p}.$$

Inversement, à tout N ainsi construit, on associe, pour tout λ premier,

$$h_\lambda^- = \frac{\log \dfrac{\lambda^{a_\lambda+2} - 1}{\lambda^{a_\lambda+2} - \lambda}}{\log \lambda} \qquad \text{et} \qquad h_\lambda^+ = \frac{\log \dfrac{\lambda^{a_\lambda+1} - 1}{\lambda^{a_\lambda+1} - \lambda}}{\log \lambda} \quad (\text{si } \lambda \leqq p).$$

On pose

$$\varepsilon^- = \sup_{\lambda \text{ premier}} h_\lambda^- \qquad \text{et} \qquad \varepsilon^+ = \inf_{\lambda \mid N} h_\lambda^+.$$

On a $\varepsilon^- < \varepsilon^+$ et, pour tout $\varepsilon \in (\varepsilon^-, \varepsilon^+)$, N est associé à ε. On définit

$$\varepsilon_3^- = \sup_{\lambda \mid N} h_\lambda^- \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_3^+ = \inf_{\lambda^2 \mid N} h_\lambda^+$$

et, pour $k \geq 2$,

$$F_k = \left\{ \frac{\log \frac{\lambda^k - 1}{\lambda^k - \lambda}}{\log \lambda};\ \lambda \text{ premier} \right\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}_k = \bigcup_{j \geq k} F_j.$$

On a $E = \mathcal{F}_2$ et, pour tout N, $\varepsilon_3^-(N) \in \mathcal{F}_3$ et $\varepsilon_3^+(N) \in \mathcal{F}_3$.

PROPOSITION 3. — *Soit $N = N_\varepsilon$ un « colossally abundant number », soit $\frac{r}{s}$ une fraction irréductible telle que s divise N, on a alors*

$$\frac{\sigma\left(\frac{r}{s}N\right)}{\frac{r}{s}N} \Big/ \frac{\sigma(N)}{N} = \left(\frac{r}{s}\right)^\varepsilon \prod_{\lambda \mid r} \frac{1}{\lambda^{(\varepsilon - h_\lambda^-)\nu_\lambda(r)}} \prod_{\mu \mid s} \frac{1}{\mu^{(h_\mu^+ - \varepsilon)\nu_\mu(s)}} \prod_{\lambda \mid r} \frac{1}{U_\lambda} \prod_{\mu \mid s} \frac{1}{V_\mu},$$

avec

$$U_\lambda = \left(\frac{\lambda^{a_\lambda + 2} - 1}{\lambda^{a_\lambda + 1} - 1}\right)^{\nu_\lambda(r)} \frac{\lambda^{a_\lambda + 1} - 1}{\lambda^{a_\lambda + \nu_\lambda(r) + 1} - 1}$$

et

$$V_\mu = \left(\frac{\mu^{a_\mu} - 1}{\mu^{a_\mu + 1} - 1}\right)^{\nu_\mu(s)} \frac{\mu^{a_\mu + 1} - 1}{\mu^{a_\mu + 1 - \nu_\mu(s)} - 1}.$$

De plus, on a $U_\lambda \geq 1$ et $V_\mu \geq 1$ avec égalité lorsque $v_\lambda(r) = 1$ et $v_\mu(s) = 1$.

Démonstration. — Comme dans la proposition 2, on calcule U_λ en faisant $r = \lambda^k$, $s = 1$. On obtient, en posant $a_\lambda = a$,

$$\frac{\lambda^{a+k+1} - 1}{\lambda^{a+k}(\lambda - 1)} \frac{\lambda^a(\lambda - 1)}{\lambda^{a+1} - 1} = \lambda^{k\varepsilon} \frac{\left(\frac{\lambda^{a+2} - 1}{\lambda^{a+2} - \lambda}\right)^k}{\lambda^{k\varepsilon}} \frac{1}{U_\lambda},$$

d'où

$$U_\lambda = \left(\frac{\lambda^{a+2} - 1}{\lambda^{a+1} - 1}\right)^k \frac{\lambda^{a+1} - 1}{\lambda^{a+k+1} - 1} = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{\lambda^{a+i} - 1}{\lambda^{a+i+1} - 1}\right)\left(\frac{\lambda^{a+2} - 1}{\lambda^{a+1} - 1}\right).$$

Si l'on pose $f(x) = \frac{x - 1}{\lambda x - 1}$, $f(x)$ est une fonction croissante, et

$$U_\lambda = \prod_{i=1}^{k} f(\lambda^{a+i})/f(\lambda^{a+1}) > 1 \qquad \text{si} \quad k > 1.$$

Et de même pour V_μ, avec $f_1(x) = \frac{\mu x - 1}{x - 1}$ qui décroît :

$$V_\mu = \prod_{i=1}^{k} f_1(\mu^{a+1-i})/f_1(\mu^a) > 1 \qquad \text{si} \quad k > 1.$$

LEMME 13. — *Pour toute constante c, il existe une infinité de « colossally abundant numbers » N_ε pour lesquels $\varepsilon_3^+ - \varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_3^- \geqq \frac{c}{p^{3/2}}$, où p désigne le plus grand nombre premier divisant N.*

La démonstration est la même que celle du lemme 12. On prend

$$f(x) = \frac{\log \frac{x^3-1}{x^3-x}}{\log x}.$$

C'est une fonction décroissante. On a

$$f(x) \sim \frac{1}{x^2 \log x} \qquad \text{et} \qquad f'(x) \sim \frac{-2}{x^3 \log x}.$$

On prend, pour v_n, l'ensemble $\mathcal{F}_4$. On doit évaluer

$$V = \operatorname{Card}\{v_n \mid f(x) \leqq v_n\} = V_4 + V_5 + \ldots + V_{m_0},$$

avec $V_k = \operatorname{Card}\{v_n \in F_k \mid f(x) \leqq v_n\}$.

Comme $\dfrac{\log \frac{x^k-1}{x^k-x}}{\log x}$ est une fonction décroissante de k et de x, on a $V_4 \geqq V_5 \geqq \ldots \geqq V_m$. On définit m_0 par

$$\frac{\log \frac{2^{m_0}-1}{2^{m_0}-2}}{\log 2} = \frac{\log \frac{x^3-1}{x^3-x}}{\log x},$$

soit $m_0 \sim \dfrac{2 \log x}{\log 2}$. Enfin $V_4 = \pi(y)$, avec

$$\frac{1}{y^3 \log y} \sim \frac{\log \frac{y^4-1}{y^4-y}}{\log y} = \frac{\log \frac{x^3-1}{x^3-x}}{\log x} \sim \frac{1}{x^2 \log x},$$

d'où

$$y \sim c_1 x^{2/3}$$

et finalement $V = O(x^{2/3})$.

On doit ensuite évaluer

$$V' = \operatorname{Card}\left\{ v_n \mid f(x) - \frac{2x^b}{x^3 \log x} \leqq v_n \leqq f(x) \right\}.$$

Or, dans cet intervalle, il n'y a qu'un seul élément de F_k pour $k \geqq 4$, soit m_0 en tout. En effet, pour $k = 4$, posons

$$f_4(x) = \frac{\log \frac{x^4-1}{x^4-x}}{\log x}.$$

Si $f_4(\lambda)$ est dans l'intervalle, $\lambda \sim c_1 x^{2/3}$, et

$$f_4(\lambda) - f_4(\lambda + 2) \geq \frac{6-\varepsilon}{\lambda^4 \log \lambda} \geq \frac{c_2}{x^{8/3} \log x},$$

avec $b = \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$, la propriété est démontrée, et l'on peut appliquer le corollaire 4 du théorème 2. Pour toute constante c, il y a une infinité de n pour lesquels $u_n - u_{n+1} \geq c(-f'(a_n)) \log a_n$. Or u_n et u_{n+1} sont deux éléments consécutifs de $\mathcal{F}_3$. On choisit N_ε avec $\varepsilon = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$. Alors $\varepsilon_3^-(N) = u_{n+1}$ et $\varepsilon_3^+(N) = u_n$. Maintenant

$$u_n = f(a_n) \sim \frac{1}{a_n^2 \log a_n} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon \sim u_n \sim \frac{1}{p \log p},$$

d'où $a_n \sim \sqrt{\frac{p}{2}}$ et $-f'(a_n) \sim \frac{c}{p^{3/2} \log p}$, ce qui démontre le lemme 13.

THÉORÈME 9. — *Pour toute constante c, il existe une infinité de « colossally abundant numbers » N dont le « superabundant number » suivant A est tel que*

$$\frac{A}{N} \geq 1 + \frac{c(\log\log N)^2}{\sqrt{\log N}}.$$

Démonstration. — On choisit N vérifiant le lemme 13. Comme pour le théorème 8, on pose $A = \frac{r}{s} N$ et $\frac{r}{s} = 1 + t$ et alors

$$1 < \frac{\sigma(A)}{A} \Big/ \frac{\sigma(N)}{N} \leq \left(\frac{r}{s}\right)^\varepsilon \frac{1}{s^{\varepsilon - \varepsilon_3^-}}$$

et, en logarithme,

$$0 \leq \frac{1}{p \log p} t + \frac{c}{p^{3/2}} \log t,$$

ce qui entraîne $t \geq c \frac{\log^2 p}{\sqrt{p}}$ pour toute constante c. Comme $p \sim \log N$ ([1], théor. 7), le théorème est démontré.

THÉORÈME 10. — *Il existe une infinité de « highly abundant numbers » qui ne sont pas « superabundant » et même le nombre de « highly abundant numbers », compris entre deux « superabundant numbers » consécutifs, n'est pas borné.*

Démonstration. — On sait que le quotient de deux « highly abundant numbers » consécutifs N et N^* est majoré par

$$\frac{N^*}{N} \leq 1 + \frac{1}{(1-\varepsilon)\log N} \quad (\textit{voir } [1], \text{ théor. } 18).$$

Si l'on choisit N vérifiant le théorème 9, on trouve qu'il y a plus de $c(\log\log N)^2\sqrt{\log N}$ « highly abundant numbers » compris entre N et A.

THÉORÈME 11. — *Soit $Q(x)$ le nombre de « highly abundant numbers » inférieurs à x qui ne sont pas « superabundant ». Il existe une constante c pour laquelle on a $Q(x) \geqq c(\log x)^{3/2}$.*

Démonstration. — Nous appliquons d'abord le lemme 5. On choisit pour $\mathcal{X}$ une partie de F_2, c'est-à-dire les nombres $\dfrac{\log\left(1+\frac{1}{p}\right)}{\log p}$, avec $\frac{\xi}{2} \leqq p \leqq \xi$, ξ étant un nombre que l'on fera tendre vers l'infini. On a

$$X \sim \frac{\xi}{2\log\xi} \qquad \text{et} \qquad \delta \sim \frac{1}{p^2 \log p} \geqq \frac{c_1}{\xi^2 \log \xi}.$$

On choisit pour $\mathcal{Y}$ les nombres de $\mathcal{F}_3$ supérieurs à $\dfrac{\log\left(1+\frac{1}{\xi}\right)}{\log\xi}$. On a $Y = Y_3 + Y_4 + \ldots + Y_m$. Par un calcul déjà fait au lemme 13, on sait que $Y \sim Y_3$, avec $Y_3 = \pi(\eta)$, et

$$\frac{\log\dfrac{\eta^3-1}{\eta^3-\eta}}{\log\eta} = \frac{\log\left(1+\frac{1}{\xi}\right)}{\log\xi},$$

soit $\dfrac{1}{\eta^2\log\eta} \sim \dfrac{1}{\xi\log\xi}$, soit $\eta \sim \sqrt{2\xi}$, et finalement $Y \leqq c_2 \dfrac{\sqrt{\xi}}{\log\xi}$.

On choisit $u = \dfrac{c_3}{\xi^{3/2}\log\xi}$ de telle façon que $Y\left(\dfrac{2u}{\delta}+1\right) \leqq \dfrac{\xi}{4\log\xi}$. $\left(\text{Il faut prendre } c_3 \leqq \dfrac{c_1}{8c_2}\right)$. On a alors $R \geqq \dfrac{\xi}{4\log\xi}$.

Considérons maintenant un nombre ε de $\mathcal{X}$ pour lequel $d(\varepsilon, \mathcal{Y}) \geqq u$, et associons à ε le « colossally abundant number » N tel que $\varepsilon^-(N) = \varepsilon$. On aura $\varepsilon_3^+ - \varepsilon^- \geqq u$ et $\varepsilon^- - \varepsilon_3^- \geqq u$. Soit Γ l'ensemble des « colossally abundant numbers » ainsi construits. On a

$$R = \operatorname{Card}\Gamma \geqq \frac{\xi}{4\log\xi}.$$

Soit $N \in \Gamma$, et soit A le « superabundant number » suivant N. On pose $A = \frac{r}{s}N$, $\frac{r}{s} = 1 + t$ et, de même que dans le théorème 9,

$$1 < \frac{\sigma(A)}{A}\Big/\frac{\sigma(N)}{N} \leqq \left(\frac{r}{s}\right)^{\varepsilon^-}\frac{1}{s^u},$$

avec

$$\frac{1}{s} \leq t \qquad \text{et} \qquad \varepsilon^- \geq \frac{1}{p \log p} \geq \frac{c_4}{\xi \log \xi}.$$

En logarithme, on obtient

$$0 \leq \frac{c_4}{\xi \log \xi} t + \frac{c_3}{\xi^{3/2} \log \xi} \log t,$$

ce qui entraîne

$$t \geq \frac{c_5 \log \xi}{\sqrt{\xi}} \qquad \text{et} \qquad \frac{A}{N} \geq 1 + \frac{c_5 \log \xi}{\sqrt{\xi}}.$$

Or le quotient de deux « highly abundant numbers » consécutifs est $\frac{N^*}{N} \leq 1 + \frac{1}{(1-\varepsilon) \log N} \leq 1 + \frac{1}{(1-\varepsilon) \log N_0}$ en désignant par N_0 le plus petit nombre de Γ. On a, si p_0 est le plus grand nombre premier divisant N_0, $\log N_0 \sim p_0 \geq \frac{\xi}{2}$, et finalement $\frac{N^*}{N} \leq 1 + \frac{c_6}{\xi}$. Entre N et A, il y a donc au moins $c_7 \sqrt{\xi} \log \xi$ « highly abundant numbers ». Comme il y a R nombres dans Γ, on obtient finalement $c_8\, \xi^{3/2}$ « highly abundant numbers » qui ne sont pas « superabundant ».

Soit x un nombre assez grand. On pose $\xi = (1-\varepsilon) \log x$. Alors tous les nombres $N \in \Gamma$, pour lesquels $\log N \sim p \leq \xi$ sont inférieurs à x, et tous les « highly abundant numbers » construits plus haut, sont aussi inférieurs à x. Il y en a $c_8 \xi^{3/2} = c_9 (\log x)^{3/2}$.

Théorème 12. — *Il existe une infinité de « colossally abundant numbers » N tels que $\frac{P}{p} N$ soit « highly abundant », où p désigne le plus grand nombre premier divisant N et P son suivant.*

Le théorème résultera de deux lemmes.

Lemme 14. — *Soit un « colossally abundant number » N vérifiant les propriétés :*

1° $\varepsilon^- = \dfrac{\log\left(1 + \frac{1}{P}\right)}{\log P}$ *et* $\varepsilon^+ = \dfrac{\log\left(1 + \frac{1}{p}\right)}{\log p}$, *c'est-à-dire N/p et NP sont « colossally abundant »;*

2° $P - p < 2 \log p$;

3° $\varepsilon^- - \varepsilon_3^- > \dfrac{5 \log \log p}{p^2 \log p}$.

Alors $n = \frac{P}{p} N$ est « highly abundant » pour N assez grand.

Lemme 15. — *Il existe une infinité de « colossally abundant numbers » vérifiant les propriétés* 1°, 2°, 3° *du lemme* 14.

Démonstration du lemme 14. — Soit $M < n = \frac{P}{p} N$, il faut démontrer que $\sigma(M) < \sigma(n)$.

Si $M \leqq N$, $\sigma(M) \leqq \sigma(N) = \frac{p+1}{P+1}\sigma(n) < \sigma(n)$.

Si $M > N$, alors on écrit $M = \frac{r}{s} N$ avec $1 < \frac{r}{s} < \frac{P}{p}\cdot$ La proposition 3° donne, avec $\varepsilon = \varepsilon^-$,

$$\frac{\sigma\left(\frac{r}{s}N\right)}{\sigma(N)} \leqq \left(\frac{r}{s}\right)^{1+\varepsilon^-} \frac{1}{s^{\varepsilon^+ - \varepsilon^-}}$$

et

$$\frac{\sigma\left(\frac{P}{p}N\right)}{\sigma(N)} = \left(\frac{P}{p}\right)^{1+\varepsilon^-} \frac{1}{p^{\varepsilon^+ - \varepsilon^-}} \quad \text{à cause de la propriété } 1°.$$

Supposons $s \geqq p + 1$, alors :

$$\frac{\sigma(M)}{\sigma(N)} = \frac{\sigma\left(\frac{r}{s}N\right)}{\sigma(N)} \leqq \left(\frac{P}{p}\right)^{1+\varepsilon^-} \frac{1}{(p+1)^{\varepsilon^+ - \varepsilon^-}} < \frac{\sigma\left(\frac{P}{p}N\right)}{\sigma(N)},$$

soit $\sigma(M) < \sigma(n)$.

Reste le cas $s \leqq p$. Mais comme $r < \frac{P}{p} s$, on a alors $r < P$. Soit λ un nombre premier divisant r, on a $\lambda < P$, et donc $\lambda \mid N$ et $h_\lambda^- \leqq \varepsilon_3^-$, donc

$$\frac{\sigma(M)}{\sigma(N)} \leqq \left(\frac{r}{s}\right)^{1+\varepsilon^-} \frac{1}{s^{\varepsilon^+ - \varepsilon^-}} \frac{1}{r^{\varepsilon^- - \varepsilon_3^-}}.$$

Maintenant, comme $\frac{r}{s} < \frac{P}{p}$, on a

$$r > s > \frac{p}{P-p}$$

$\left(\text{si } s \leqq \frac{p}{P-p}, \text{ alors } \frac{r}{s} \geqq \frac{s+1}{s} = 1 + \frac{1}{s} \geqq 1 + \frac{P-p}{p} = \frac{P}{p}\right)$, donc

$$\frac{\sigma(M)}{\sigma(N)} \leqq \left(\frac{P}{p}\right)^{1+\varepsilon^-} \left(\frac{P-p}{p}\right)^{\varepsilon^+ - \varepsilon_3^-}.$$

Il reste donc à vérifier que les conditions 2° et 3° entraînent

$$\left(\frac{P-p}{p}\right)^{\varepsilon^+ - \varepsilon_3^-} < \frac{1}{p^{\varepsilon^+ - \varepsilon^-}};$$

soit

$$(\varepsilon^+ - \varepsilon_3^-)\log(P-p) < (\varepsilon^- - \varepsilon_2^-)\log p.$$

Soit $y(x) = \dfrac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\log x}$, on a

$$y'(x) \sim \frac{-1}{x^2 \log x} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon^+ - \varepsilon^- = y(p) - y(P) \leqq 2\log p \, \frac{3/2}{p^2 \log p} = \frac{3}{p^2}.$$

Maintenant

$$\varepsilon^+ - \varepsilon_3^- = \varepsilon^+ - \varepsilon^- + \varepsilon^- - \varepsilon_3^- \leqq \frac{3}{p^2} + \frac{5 \log\log p}{p^2 \log p} \leqq \frac{4}{p^2}$$

et

$$(\varepsilon^+ - \varepsilon_3^-) \log(P - p) \leqq \frac{4}{p^2} \log(2\log p) < \frac{5 \log\log p}{p^2} < (\varepsilon^- - \varepsilon_3^-) \log p,$$

d'après la condition 3.

Démonstration du lemme 15. — On applique le lemme 5 presque dans les mêmes conditions que pour le théorème 11. On prend pour $\mathfrak{X}$ une partie de F_2, c'est-à-dire les $\dfrac{\log\left(1 + \frac{1}{p}\right)}{\log p}$, avec $\xi \leqq p \leqq 2\xi$ et $P - p < 2\log\xi$. On sait alors (*voir* lemme 6) que $X \geqq (1 - \varepsilon) \dfrac{\xi}{2\log\xi}$. On prend pour $\mathcal{Y}$ les éléments de $\mathcal{F}_3$ supérieurs à $\dfrac{\log\left(1 + \frac{1}{2\xi}\right)}{\log 2\xi}$. On a vu (théor. 11) que $Y = O\left(\dfrac{\sqrt{\xi}}{\log\xi}\right)$ et que $\delta \geqq \dfrac{c_1}{\xi^2 \log\xi}$. On prend

$$u = \frac{5 \log\log(2\xi)}{(2\xi)^2 \log 2\xi} = c_2 \frac{\log\log\xi}{\xi^2 \log\xi}.$$

On a alors

$$Y\left(\frac{2u}{\delta} + 1\right) = o\left(\sqrt{\xi}\right) \qquad \text{et} \qquad R \geqq c_3 \frac{\xi}{\log\xi}.$$

Soit $\varepsilon \in \mathfrak{X}$ pour lequel $d(\varepsilon, \mathcal{Y}) \geqq u$, on considère le « colossally abundant number » pour lequel $\varepsilon^-(N) = \varepsilon$. Ce nombre vérifie les propriétés 1°, 2°, 3° et, puisque $R \geqq c_3 \dfrac{\xi}{\log\xi}$, on peut en construire une infinité.

Remarque. — On pourrait démontrer un théorème analogue au théorème 9 : Il existe une infinité de « colossally abundant numbers » N, tel que le « highly abundant number » suivant, N^*, vérifie

$$\frac{N^*}{N} \geqq 1 + \frac{c \log\log N}{(\log N)^2}.$$

Les « highly abundant numbers » se rapprochent assez des nombres de g (**N**). Il doit être possible de leur appliquer les méthodes des théorèmes 6 et 7.

Table numérique.

Soit p_k le $k^{\text{ième}}$ nombre premier. En utilisant une définition déjà donnée en tête de la démonstration de la propriété 8 (chap. 2), on pose :

$$g_{p_k}(n) = \sup_{\substack{l(j) \leq n \\ j \in H_k}} j$$

où H_k est l'ensemble des nombres qui n'ont pas d'autres diviseurs premiers que $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

Pour $2^a \leq n \leq 2^{a+1} - 1$, on a ainsi $g_2(p) = 2^a$.

On peut calculer de proche en proche g_{p_k} par la formule (en posant $p_k = q$ et $p_{k-1} = p$)

$$g_q(n) = \sup(g_p(n),\ q\, g_p(n-q),\ \ldots,\ q^m\, g_p(n-q^m)).$$

Les quantités dont on prend le « sup » sont en nombre fini, car on doit avoir $q^m \leq n$.

Enfin, on constate que $g(n) = g_p(n)$, pour $n \leq p$, et même pour $c\sqrt{n \log n} \leq p$ (*voir* chap. 2, corollaire de la propriété 11), où c est une constante que l'on peut encadrer.

La table numérique suivante, pour $n \leq 301$, a été calculée par l'ordinateur CDC 3600 de l'Institut d'analyse numérique Blaise Pascal de la Faculté des Sciences de Paris. En fait, la table a été construite jusqu'à $n = 8\,000$.

Si n n'est pas dans la table, si $n_0 \leq n' < n_1$, avec n_0 et n_1 consécutifs dans la table, $g(n) = g(n_0)$.

Un astérisque signale les nombres de G (*voir* les propriétés en tête du chapitre 3).

n.	*g*(*n*).	Facteurs de *g*(*n*).					
1	1						
2	2	2					
*3	3		3				
4	4	4					
5	6	2	3				
*7	12	4	3				
8	15		3	5			
9	20	4		5			
10	30	2	3	5			
*12	60	4	3	5			
14	84	4	3		7		
15	105		3	5	7		
16	140	4		5	7		
17	210	2	3	5	7		
*19	420	4	3	5	7		
23	840	8	3	5	7		
25	1 260	4	9	5	7		
27	1 540	4		5	7	11	
28	2 310	2	3	5	7	11	
29	2 520	8	9	5	7		
*30	4 620	4	3	5	7	11	
32	5 460	4	3	5	7		13
34	9 240	8	3	5	7	11	
36	13 860	4	9	5	7	11	
38	16 380	4	9	5	7		13
40	27 720	8	9	5	7	11	
41	30 030	2	3	5	7	11	13
42	32 760	8	9	5	7		13
*43	60 060	4	3	5	7	11	13
47	120 120	8	3	5	7	11	13
*49	180 180	4	9	5	7	11	13
*53	360 360	8	9	5	7	11	13

n.	$g(n)$.	Facteurs premiers de $g(n)$.										
57	471 240	8	9	5	7	11		17				
58	510 510	2	3	5	7	11	13	17				
59	556 920	8	9	5	7		13	17				
60	1 021 020	4	3	5	7	11	13	17				
62	1 141 140	4	3	5	7	11	13		19			
64	2 042 040	8	3	5	7	11	13	17				
66	3 063 060	4	9	5	7	11	13	17				
68	3 423 420	4	9	5	7	11	13		19			
*70	6 126 120	8	9	5	7	11	13	17				
72	6 846 840	8	9	5	7	11	13		19			
76	8 953 560	8	9	5	7	11		17	19			
77	9 699 690	2	3	5	7	11	13	17	19			
78	12 252 240	16	9	5	7	11	13	17				
79	19 399 380	4	3	5	7	11	13	17	19			
83	38 798 760	8	3	5	7	11	13	17	19			
85	58 198 140	4	9	5	7	11	13	17	19			
*89	116 396 280	8	9	5	7	11	13	17	19			
93	140 900 760	8	9	5	7	11	13	17		23		
95	157 477 320	8	9	5	7	11	13		19	23		
97	232 792 560	16	9	5	7	11	13	17	19			
101	281 801 520	16	9	5	7	11	13	17		23		
102	446 185 740	4	3	5	7	11	13	17	19	23		
106	892 371 480	8	3	5	7	11	13	17	19	23		
108	1 338 557 220	4	9	5	7	11	13	17	19	23		
*112	2 677 114 440	8	9	5	7	11	13	17	19	23		
118	3 375 492 120	8	9	5	7	11	13	17	19		29	
120	5 354 228 880	16	9	5	7	11	13	17	19	23		
126	6 750 984 240	16	9	5	7	11	13	17	19		29	
128	7 216 569 360	16	9	5	7	11	13	17	19			31
130	8 172 244 080	16	9	5	7	11	13	17		23	29	
131	12 939 386 460	4	3	5	7	11	13	17	19	23	29	
132	13 385 572 200	8	9	25	7	11	13	17	19	23		
133	13 831 757 940	4	3	5	7	11	13	17	19	23		31
135	25 878 772 920	8	3	5	7	11	13	17	19	23	29	
137	38 818 159 380	4	9	5	7	11	13	17	19	23	29	
139	41 495 273 820	4	9	5	7	11	13	17	19	23		31
*141	77 636 318 760	8	9	5	7	11	13	17	19	23	29	
143	82 990 547 640	8	9	5	7	11	13	17	19	23		31
149	155 272 637 520	16	9	5	7	11	13	17	19	23	29	
151	165 981 095 280	16	9	5	7	11	13	17	19	23		31
157	209 280 511 440	16	9	5	7	11	13	17	19		29	31
159	232 908 956 280	8	27	5	7	11	13	17	19	23	29	
161	388 181 593 800	8	9	25	7	11	13	17	19	23	29	

n.	g(n).	Facteurs premiers de g(n).													
162	401 120 980 260	4	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31			
163	414 952 738 200	8	9	2	5	7	11	13	17	19	23	31			
166	802 241 960 520	8	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31			
168	1 203 362 940 780	4	9	5	7	11	13	17	19	23	29	31			
*172	2 406 725 881 560	8	9	5	7	11	13	17	19	23	29	31			
178	2 872 543 794 120	8	9	5	7	11	13	17	19	23	29		37		
180	4 813 451 763 120	16	9	5	7	11	13	17	19	23	29	31			
186	5 745 087 588 240	16	9	5	7	11	13	17	19	23	29		37		
188	6 141 300 525 360	16	9	5	7	11	13	17	19	23		31	37		
190	7 220 177 644 680	8	27	5	7	11	13	17	19	23	29	31			
192	12 033 629 407 800	8	9	25	7	11	13	17	19	23	29	31			
198	14 440 355 289 360	16	27	5	7	11	13	17	19	23	29	31			
199	14 841 476 269 620	4	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37		
200	24 067 258 815 600	16	9	25	7	11	13	17	19	23	29	31			
203	29 682 952 539 240	8	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37		
205	44 524 428 808 860	4	9	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37		
*209	89 048 857 617 720	8	9	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37		
213	98 675 761 143 960	8	9	5	7	11	13	17	19	23	29	31		41	
215	103 489 212 907 080	8	9	5	7	11	13	17	19	23	29	31			43
217	178 097 715 235 440	16	9	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37		
221	197 351 522 287 920	16	9	5	7	11	13	17	19	23	29	31		41	
223	206 978 425 814 160	16	9	5	7	11	13	17	19	23	29	31			43
225	222 622 144 044 300	4	9	25	7	11	13	17	19	23	29	31	37		
227	267 146 572 853 160	8	27	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37		
229	445 244 288 088 600	8	9	25	7	11	13	17	19	23	29	31	37		
233	493 378 805 719 800	8	9	25	7	11	13	17	19	23	29	31		41	
235	534 293 145 706 320	16	27	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37		

n.	g(n).	Facteurs premiers de g(n).														
237	890 488 576 177 200	16	9	25	7	11	13	17	19	23	29	31	37			
241	986 757 611 439 600	16	9	25	7	11	13	17	19	23	29	31		41		
243	1 034 892 129 070 800	16	9	25	7	11	13	17	19	23	29	31			43	
244	1 217 001 054 108 840	8	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41		
246	1 825 501 581 163 260	4	9	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41		
248	1 914 550 438 780 980	4	9	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37		43	
*250	3 651 003 162 326 520	8	9	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41		
252	3 829 100 877 561 960	8	9	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37		43	
256	4 243 057 729 190 280	8	9	5	7	11	13	17	19	23	29	31		41	43	
258	7 302 006 324 653 040	16	9	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41		
260	7 658 201 755 123 920	16	9	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37		43	
264	8 486 115 458 380 560	16	9	5	7	11	13	17	19	23	29	31		41	43	
266	9 127 507 905 816 300	4	9	25	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41		
268	10 953 009 486 979 560	8	27	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41		
270	18 255 015 811 632 600	8	9	25	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41		
272	19 145 504 387 809 800	8	9	25	7	11	13	17	19	23	29	31	37		43	
276	21 906 018 973 959 120	16	27	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41		
278	36 510 031 623 265 200	16	9	25	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41		
280	38 291 008 775 619 600	16	9	25	7	11	13	17	19	23	29	31	37		43	
284	42 430 577 291 902 800	16	9	25	7	11	13	17	19	23	29	31		41	43	
287	52 331 045 326 680 120	8	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	
288	54 765 047 434 897 800	8	27	25	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41		
289	78 496 567 990 020 180	4	9	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	
*293	156 993 135 980 040 360	8	9	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	
297	171 597 148 629 346 440	8	9	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41		47
299	179 967 741 245 412 120	8	9	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37		43	47
*301	313 986 271 960 080 720	16	9	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Erdös (P.) and Alaoglu (L.). — On highly composite and similar numbers, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 56, 1944, p. 448-469.

[2] Erdös (P.). — On highly composite numbers, *J. London. math. Soc.*, t. 19, 1944, p. 130-133.

[3] Landau (E.). — *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen.* — Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1909.

[4] Nicolas (J.-L.). Ordre maximal d'un élément du groupe des permutations et nombres très hautement abondants, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 266, 1968, Série A, p. 513-515.

[5] Nicolas (J.-L.). — Sur l'ordre maximum d'un élément dans le groupe S_n des permutations, *Acta Arithmetica*, t. 14, 1968, p. 315-332.

[6] Pillaï (S.). — Highly abundant number, *Bull. Calcutta math. Soc.*, t. 35, 1943, p. 141-156.

[7] Pillaï (S.). — Highly composite number, *J. Indian. math. Soc.*, t. 8, 1944, p. 61-74.

[8] Prachar (K.). — *Primzahlverteilung.* — Berlin, Springer-Verlag, 1957 (*Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaft*, 91).

[9] Ramanujan (S.). — Highly composite numbers, *Proc. London math. Soc.*, Séries 2, t. 14, 1915, p. 347-400; and *Collected papers.* — Cambridge, at the University Press, 1927, p. 78-128.

[10] Rankin (R. A.). — The difference between consecutive prime numbers, *J. London math. Soc.*, t. 13, 1938, p. 242-247.

[11] Rankin (R. A.). — The difference between consecutive prime numbers, V, *Proc. Edimburgh math. Soc.*, t. 13, 1963, p. 331-332.

[12] Schönhage (A.). — Eine Bemerkung zur construction grosser Primzahllucken, *Arch. der Math.*, t. 14, 1963, p. 29-30.

[13] Shah (S. M.). — An inequality for the arithmetical function $g(x)$, *J. Indian math. Soc.*, t. 3, 1939, p. 316-318.

[14] Sierpinski (W.). — O liczbach (1, 2, ..., n) [en polonais], *Wiadom Math.*, 2, (9), 1966, p. 9-10.

(Manuscrit reçu le 10 septembre 1968.)

Jean-Louis Nicolas,
Département de Mathématiques,
Université de Sherbrooke,
Sherbroocke, Québec (Canada).