BULLETIN DE LA S. M. F.

HERMARY

# Solution simple d’un problème de géométrie descriptive élémentaire

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 7 (1879), p. 138-140
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1879__7__138_1>

*Solution simple d'un problème de Géométrie descriptive élémentaire;* par M. Hermary.

(Séance du 23 mai 1879.)

*Inscrire une sphère dans un tétraèdre.* (D'une manière plus générale : *Déterminer les sphères tangentes à quatre plans.*)

*Lemmes évidents.* — I. Une sphère étant inscrite dans un dièdre, si l'on vient à fermer le dièdre dans le sens convenable pour écraser la sphère, les points de contact viennent en coïncidence.

II. Si une sphère est inscrite dans un trièdre, les points de contact sont tous les trois à la même distance du sommet.

*Solution.* — Je rabats trois des faces du tétraèdre sur la quatrième prise pour base, toujours de manière à écraser la sphère que j'ai en vue. Après cette opération, tous les points de contact doivent être en coïncidence (lemme I) et les trois rabattements du sommet doivent être tous les trois à la même distance du point où la coïncidence a lieu (lemme II). Ce point est donc le centre du cercle qui passe par les trois rabattements.

*Discussion.* — Je donne un signe à chaque rabattement, ainsi qu'à la base, qui est son propre rabattement, et je conviens que deux rabattements seront de même signe si les triangles qui formaient les faces empiètent l'un sur l'autre; ils seront de signes contraires dans l'autre cas. On voit immédiatement qu'un changement de tous les signes ne change pas la solution. Il y a toujours huit solutions, savoir :

$++++$... 1 solution. — Sphère inscrite proprement dite;

$+++-$ et permutations... 4 solutions. — Sphères exinscrites analogues aux cercles exinscrits du triangle;

$++--$ et permutations... 3 solutions. — Sphères inscrites dans les *combles*.

J'ai fait la figure [1] pour l'un de ces derniers cas, qui sont les plus intéressants.

BCD est le triangle pris pour base; les rabattements du sommet A sont désignés par cette lettre affectée d'un indice qui rappelle le sommet opposé au triangle rabattu, et, en outre, d'un accent dans le cas du rabattement de signe contraire à la base.

Pour déterminer la sphère du comble BC, j'ai donc pris les rabattements $A_d$, $A'_b$ et $A'_c$. On voit immédiatement que les perpendiculaires aux milieux des côtés $A_d A'_c$ et $A_d A'_b$ sont les bissectrices des angles $A_d B A'_c$ et $A'_b C A_d$. La condition pour que la sphère soit dans le comble BC est

$$\mathrm{BCA} + \frac{\mathrm{BCD} + \mathrm{DCA} - \mathrm{BCA}}{2} + \mathrm{CBA} + \frac{\mathrm{CBD} + \mathrm{DBA} - \mathrm{CBA}}{2} > 2 \text{ droits}$$

ou

$$(\mathrm{BCA} + \mathrm{BCD} + \mathrm{DCA}) + (\mathrm{CBA} + \mathrm{CBD} + \mathrm{DBA}) > 4 \text{ droits}.$$

Si cette condition n'est pas satisfaite, son analogue l'est forcément pour le côté AD, et la sphère se trouve dans le comble dont ce côté est le faîte, etc.

*Scolie.* — Lorsqu'une sphère est inscrite dans un trièdre, le point de contact de l'une des faces est sur la bissectrice de l'angle formé par les rabattements du troisième côté autour des côtés de

---

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

ladite face. Cela résulte de la solution précédente, et cela peut s'établir directement sans la considération de la quatrième face du tétraèdre.

D'autre part, les distances de ce point de contact aux deux côtés sont proportionnelles aux cotangentes des demi-dièdres adjacents. Cette condition détermine également une droite qui passe par le point de contact de la sphère et qui doit nécessairement coïncider avec la bissectrice dont il a été question.

En exprimant que cette coïncidence a lieu, on trouve une série de formules de la Trigonométrie sphérique.