BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-PAUL PENOT

Sur le théorème de Frobenius

Bulletin de la S. M. F., tome 98 (1970), p. 47-80
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1970__98__47_0>

Bull. Soc. math. France,
98, 1970, p. 47 à 80.

SUR LE THÉORÈME DE FROBENIUS (*)

PAR

JEAN-PAUL PENOT.

La première partie de ce texte contient l'essentiel de ce travail : *grosso modo*, on y établit l'équivalence du théorème de Frobenius et du théorème des fonctions implicites. Cette relation entre ces deux piliers de la géométrie et de la topologie différentielles n'a rien pour surprendre : tous deux se déduisent de la méthode des approximations successives. Le théorème de Frobenius, qui peut être établi à partir de ce résultat de manière directe (*cf.* l'appendice, inspiré de NIKLIBORC [14]) est cependant généralement présenté comme une conséquence de l'équation aux variations d'une équation différentielle ordinaire dépendant d'un paramètre. Notre démarche provient aussi de cette voie : il suffit de remarquer que le procédé exposé par J. ROBBIN [20] peut être modifié pour obtenir précisément l'équation aux variations.

La seconde partie expose les diverses versions globales du théorème. Celle en termes de sous-fibré se trouve dans S. LANG [10], et celle en termes d'équations différentielles est exposée dans M. LAZARD [11]. Outre des compléments à ces présentations, on apporte, aux notions classiques de formes différentielles et de systèmes différentiels, le langage contemporain des fibrés.

La dernière partie est consacrée à quelques applications. Celles qui ont été choisies ici sont fort classiques en dimension finie. Bien que les résultats soient similaires dans le cadre banachique les méthodes habituelles ont dû souvent être réformées.

La terminologie et les notations sont conformes à celles de N. BOURBAKI [2]. En particulier, immersions, submersions, etc. sont directes. Les connaissances requises de théorie des connexions pourront être trouvées dans [7], [9], [12], [18] et [19].

(*) Travail dont l'auteur a été subventionné par le Conseil national de Recherches du Canada, n° A-7204.

1. Relations entre les théorèmes de Frobenius et des fonctions implicites.

(A) Théorème de Frobenius local.

A l'aide du théorème des fonctions implicites nous allons prouver l'énoncé suivant :

THÉORÈME 1.1. — *Soit O un ouvert du produit $E \times F$ de deux espaces de Banach E et F, et soit $f : O \to L(E, F)$ un C^r-morphisme ($r \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\} \cup \{\omega\}$) tel que, pour tous $(x, y) \in O$, a, $b \in E$, on ait la relation*

(Frob)
$$\begin{aligned} &D_1 f(x, y).a.b + D_2 f(x, y).f(x, y).a.b \\ &= D_1 f(x, y).b.a + D_2 f(x, y).f(x, y).b.a. \end{aligned}$$

Il existe, pour tout point $(x_0, y_0) \in O$, un voisinage $U \times V$ de ce point, contenu dans O, et un C^r-morphisme $\alpha : U \times V \to F$ tel que

$$\begin{cases} D_1 \alpha(x, y) = f(x, \alpha(x, y)) & \text{pour tout } (x, y) \in U \times V, \\ \alpha(x_0, y) = y & \text{pour tout } y \in V. \end{cases}$$

Nous pouvons évidemment supposer que (x_0, y_0) est le point $(0, 0)$ et que O est le produit de boules centrées en 0 et de rayon $2a$. Posons

$$I = [0, 1], \qquad G = C_0^1(I, F) = \{\gamma : I \to F, \gamma \in C^1, \gamma(0) = 0\},$$
$$H = C^0(I, F);$$

ce sont des espaces de Banach pour les normes

$$\|\gamma\| = \sup_{t \in I}(\|\gamma(t)\| + \|\dot{\gamma}(t)\|) \qquad \text{et} \qquad \|\eta\| = \sup_{t \in I}(\|\eta(t)\|),$$

respectivement. L'application de dérivation $\gamma \to \dot{\gamma}$ est un isomorphisme linéaire de G sur H. Désignons par $B_a(L)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon a d'un espace de Banach L. Définissons l'application

$$g : \quad B_a(E) \times B_a(F) \times B_a(G) \to H$$

par

$$g(x, y, \gamma)(t) = \dot{\gamma}(t) - f(tx, y + \gamma(t)).x.$$

Il est facile de voir que g est un C^r-morphisme, f étant un C^r-morphisme, et que

$$(D_3 g(x, y, \gamma).\beta)(t) = \dot{\beta}(t) - D_2 f(tx, y + \gamma(t)).\beta(t).x.$$

Comme $D_3 g(0, 0, 0).\beta = \dot{\beta}$, le théorème des fonctions implicites assure l'existence de boules ouvertes U, V, centrées en 0 dans $B_a(E)$ et $B_a(F)$ respectivement, et d'un C^r-morphisme $\varphi : U \times V \to B_a(G)$ tel que $\varphi(0, 0) = 0$ et $g(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ pour tout $(x, y) \in U \times V$. Nous pouvons supposer de plus que $D_3 g(x, y, \varphi(x, y))$ est inversible pour tout $(x, y) \in U \times V$.

Si nous posons $\alpha(x, y) = y + \varphi(x, y)(1)$, nous obtenons un C^r-morphisme α de $U \times V$ dans F, vérifiant $\alpha(0, y) = y$, car $\varphi(0, y)(0) = 0$ et $\frac{d}{dt}(\varphi(0, y)(t)) = 0$, d'après les définitions. Il reste à voir que, pour $z \in E$ arbitraire,

$$D_1 \alpha(x, y).z = f(x, \alpha(x, y)).z.$$

Si nous posons

$$h(t) = (D_1 \varphi(x, y).z)(t), \qquad l(t) = tf(tx, y + \varphi(x, y)(t)).z = tf(tx, y_t).z,$$

avec $y_t = y + \varphi(x, y)(t)$, il nous suffit d'établir que $h(t) = l(t)$ pour tout $t \in I$, ou encore que $D_3 g(x, y, \varphi(x, y)).(h - l) = 0$.

Le théorème des fonctions implicites nous assure que

$$D_3 g(x, y, \varphi(x, y)).D_1 \varphi(x, y).z = D_1 g(x, y, \varphi(x, y)).z,$$

soit

$$(D_3 g(x, y, \varphi(x, y)).h)(t) = tD_1 f(tx, y_t).z.x + f(tx, y_t).z.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}(D_3 g(x, y, \varphi(x, y)).l)(t) &= \dot{l}(t) - D_2 f(tx, y_t).l(t).x \\ &= f(tx, y_t).z + tD_1 f(tx, y_t).x.z + tD_2 f(tx, y_t).f(tx, y_t).x.z \\ &\quad - tD_2 f(tx, y_t) f(tx, y_t).z.x,\end{aligned}$$

en notant que

$$\frac{d}{dt} y_t = \frac{d}{dt}(y + \varphi(x, y)(t)) = f(tx, y_t)x,$$

d'après la définition implicite de φ. La relation (Frob) assure l'égalité

$$D_3 g(x, y, \varphi(x, y)).(l - h) = 0,$$

ce qui termine la démonstration.

REMARQUE 1. — La démonstration précédente vaut pour des espaces de Banach réels ou complexes.

REMARQUE 2. — Si L est un espace de Banach, et si f était définie sur un ouvert O du produit $E \times F \times L$, nous aurions prouvé, par une simple modification des notations, qu'il existe, pour tout $(x_0, y_0, \lambda_0) \in O$, un voisinage $U \times V \times W$ de ce point, contenu dans O, et un C^r-morphisme $R : U \times U \times V \times W \to F$ tel que

(1) $$\begin{cases} D_1 R(x, x', y, \lambda) = f(x, R(x, x', y, \lambda), \lambda) \\ \text{pour tout } (x, x', y, \lambda) \in U^2 \times V \times W, \end{cases}$$

(2) $$R(x', x', y, \lambda) = y \quad \text{pour tout } (x', y, \lambda) \in U \times V \times W.$$

REMARQUE 3. — L'unicité du morphisme α (resp. du morphisme R de la remarque précédente) provient de l'assertion correspondante dans le théorème des fonctions implicites : si β est une autre solution sur $U\times V$ (les données étant celles de la démonstration), on obtient une application $\psi : U\times V \to G$ en posant $\psi(x, y)(t) = \beta(tx, y) - y$ qui vérifie l'équation implicite $g(x, y, \psi(x, y)) = 0$. D'où l'égalité $\psi = \varphi$, et $\beta = \alpha$.

(B) **Théorème des fonctions inverses.**

Le théorème de Frobenius local nous permet d'établir le théorème des fonctions inverses sous la forme suivante (qui exclut le cas $r = 1$).

THÉORÈME 1.2. — *Soit $f : A \to F$ un C^r-morphisme ($2 \leq r \leq \omega$), A étant un ouvert d'un espace de Banach E. Si, pour $a \in A$, $Df(a)$ est un isomorphisme de E sur D, il existe des voisinages U et V de a et $b = f(a)$ dans A et F respectivement tel que f_U soit un C^r-isomorphisme de U sur V.*

Preuve. — Nous pouvons évidemment supposer $a = 0$, $b = 0$, et $Df(x)$ inversible pour tout $x \in A$. Si nous posons $u(x) = Df(x)$, $v(x) = u(x)^{-1}$, l'équation

$$\begin{cases} D_1\alpha(y, x) = v(\alpha(y, x)), \\ \alpha(0, x) = x \end{cases}$$

ayant un second membre de classe C^{r-1} qui vérifie la condition (Frob), car

$$\begin{aligned} Dv(x).(v(x)\xi).\eta &= -v(x)Du(x).(v(x)\xi).(v(x)\eta) \\ &= -v(x)D^2f(x)(v(x)\xi)(v(x)\eta) \end{aligned}$$

est symétrique en ξ et η, possède une solution α de classe C^{r-1}, définie sur un voisinage $V_1\times U_1$ de $(0, 0)$ dans $F\times E$. Posons $g(y) = \alpha(y, 0)$ pour $y \in V_1$. Comme nous pouvons prendre V_1 connexe, et comme $D(f\circ g)(y) = \mathrm{Id}_F$ pour tout $y \in V_1$, $f\circ g(0) = 0$, nous avons $f\circ g = \mathrm{Id}_{V_1}$. De plus, g est de classe C^r, Dg étant de classe C^{r-1}.

De la même façon, l'équation

$$\begin{cases} D_1\beta(x,y) = Dg(\beta(x, y))^{-1}, \\ \beta(0, y) = y \end{cases}$$

possède une solution de classe C^{r-1}, définie sur un voisinage $U_2\times V_2$ de $(0, 0)$ dans $E\times F$. Nous en déduisons un C^r-morphisme $h : U_2 \to V_1$ avec $h(0) = 0$ et $g\circ h = \mathrm{Id}_{U_2}$; nous prenons $U_2 \subset U_1$. Pour $x \in U_2$, $f(x) = (f\circ g\circ h)(x) = h(x)$, de sorte que $g\circ f_{U_2} = \mathrm{Id}_{U_2}$. Alors

$$V = f(U_2) = g^{-1}(U_2)$$

est ouvert dans V_1, donc dans F, et f est une bijection de $U = U_2$ sur V, d'inverse g de classe C^r.

2. Globalisation.

(A) Formulations en termes de fibrés.

Donnons tout d'abord les versions traditionnelles du théorème de Frobenius, dans une formulation utilisant le langage des espaces fibrés vectoriels. Dans ce paragraphe, X désigne une C^r-variété ($2 \leq r \leq \omega$).

Définition 2.1. — *Un C^s-sous-fibré $\alpha = (E, \alpha, X)$ ($s \leq r - 1$) de $\tau_X = (TX, \tau_X, X)$ pour un monomorphisme $j : E \to TX$ est dit intégrable si, pour tout $x_0 \in X$, il existe une carte feuilletante $(\varphi, U, E_0 \times F_0)$ de X en x_0, c'est-à-dire un C^1-isomorphisme φ d'un ouvert U de X contenant x_0 sur un ouvert d'un produit $E_0 \times F_0$ d'espaces de Banach, avec $\varphi(x_0) = (0, 0)$, tel que $(T\varphi \circ j, \varphi)$ soit un isomorphisme de (E_U, α_U, U) sur le fibré trivial $(\varphi(U) \times E_0 \times \{0\}, p_1, \varphi(U))$.*

Pour $y \in F_0$, $P = \varphi^{-1}(E_0 \times \{y\})$ est appelée une plaque du feuilletage défini par E[i. e. par (α, j)]. C'est une sous-variété de X, dont l'espace tangent est E_P. Si E est intégrable, les plaques forment une base d'une topologie sur X, dont les composantes connexes sont appelées les feuilles du feuillage défini par E.

La feuille d'un point $x_0 \in X$ est l'ensemble des points x_1 de X qui peuvent être joints à x_0 par une courbe intégrale x_t de E [c'est-à-dire $\dot{x}_t \in j(E_{x_t})$ pour tout t]. Les feuilles sont munies, par les restrictions aux plaques des cartes feuilletantes, d'une structure de C^{s+1}-variété immergée injectivement dans X.

Les deux propositions qui suivent s'avèrent d'une fréquente utilité. On comparera la seconde à la proposition 1, § 9, chap. III de [3].

Proposition 2.1. — *Soit X une C^r-variété feuilletée par un C^s-sous-fibré intégrable E ($1 \leq s \leq r - 1$), et soit Z une C^p-variété ($1 \leq p \leq s + 1$). Si $f : Z \to X$ est un C^p-morphisme tel que $Tf(TZ) \subset j(E)$, et si Z est connexe, il existe une feuille W telle que $f(Z) \subset W$ et que f soit un C^p-morphisme de Z dans W.*

Preuve. — Soient $a \in Z$, et W la feuille de $f(a)$; par raison de connexité, $f(Z) \subset W$, il nous suffit donc d'établir que f est, au voisinage de a, un C^p-morphisme à valeurs dans W. Choisissons une carte feuilletante $(\varphi, U, E_0 \times F_0)$ de X en $f(a)$, et prenons un voisinage ouvert A de a, connexe par arcs, et tel que $f(A) \subset U$. Pour tout $z \in A$ et pour tout chemin de classe C^1, $c : [0, 1] \to A$, vérifiant $c(0) = a$, $c(1) = z$, nous avons $\frac{d}{dt}(f \circ c)(t) \in j(E_{f(c(t))})$, donc

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ f \circ c)(t) \in E_0 \times \{0\}.$$

En désignant par p_2 la projection de $E_0 \times F_0$ sur F_0, nous obtenons

$$p_2 \circ \varphi \circ f(z) = p_2 \circ \varphi \circ f(a),$$

puisque $\frac{d}{dt}(p_2 \circ \varphi \circ f \circ c)(t) = 0$. Ainsi $f(z)$ appartient à la plaque $W \cap U = \varphi^{-1}(E_0 \times \{0\})$ et l'expression de f_A dans la carte induite par φ sur $W \cap U$ est de classe C^p.

PROPOSITION 2.2. — *Soient X, E, Z comme dans la proposition précédente, et soit $f : Z \to X$ un C^p-morphisme tel que $f(Z)$ soit contenu dans une feuille W. Si X est régulière et de type dénombrable (i. e. ses composantes connexes ont une base d'ouverts dénombrable), f est un C^p-morphisme de Z dans W.*

Preuve. — Sous les hypothèses de la proposition 2.2, X est paracompacte et, par suite, admet une structure de Finsler [16], donc est métrisable. Il en est de même de W, pour la structure de Finsler induite. Puisque X est de type dénombrable, donc localement de type dénombrable, W est localement de type dénombrable (pour tout $w \in W$, la plaque passant par w d'une carte feuilletante est de type dénombrable). Comme W est connexe et métrisable, W est de type dénombrable, d'après un résultat de SIERPINSKI [9].

Pour établir que f est un C^p-morphisme de Z dans W, choisissons un point $a \in Z$, une carte feuilletante $(\varphi, U, E_0 \times F_0)$ de X en $f(a)$, et un voisinage connexe A de a dans Z tel que $f(A) \subset U$. Soient f_1 et f_2 les composantes de $\varphi \circ f_A$ sur E_0 et F_0 respectivement. Les plaques de la carte φ qui sont dans W forment un ensemble au plus dénombrable, car elles sont disjointes et ouvertes dans W. L'ensemble $f_2(A)$, qui est connexe et dénombrable, est réduit à un point, comme l'assure le théorème de Hahn-Banach. Ainsi $f(A)$ est contenu dans la plaque de φ passant par $f(a)$, et f est un C^p-morphisme au voisinage de a.

DÉFINITION 2.2. — *Un C^s-fibré quotient $\eta = (F, \eta, X)$ de τ_X par un épimorphisme $\omega : TX \to F (s \leq r - 1)$ est dit intégrable si, pour tout point $x_0 \in X$, il existe une trivialisation $\theta : F_U \to U \times F_0$ de η au-dessus d'un ouvert U de X contenant x_0, et un C^1-morphisme $g : U \to F_0$ tel que la partie principale $p_2 \circ \theta \circ \omega_U$ de ω dans cette carte vectorielle soit la différentielle extérieure de g :*

$$p_2 \circ \theta \circ \omega_U = dg (= p_2 \circ Tg).$$

Ceci s'exprime encore par $\omega(u) = \theta^{-1}(x, dg(u))$ pour $u \in TU$, $x = \tau_X(u)$. Remarquons que g est nécessairement une submersion. Lorsque F est trivial et que l'on considère ω comme une forme différentielle à valeurs vectorielles, on dit aussi que ω admet un facteur intégrant [si $F = X \times F_0$, θ est donné par un C^s-morphisme $a : U \to GL(F_0)$, et la partie principale ω_0 de ω est de la forme adg].

Nous avons commis l'abus de confondre un sous-fibré et le monomorphisme associé, un fibré quotient et l'épimorphisme associé, et nous le commettrons encore s'il ne prête pas à confusion. Il est facile de vérifier à l'aide du théorème des fonctions inverses que si $\omega : \tau_X \to \eta$ est le conoyau d'un monomorphisme $j : \alpha \to \tau_X$, ω est intégrable si et seulement si j l'est.

DÉFINITION 2.3. — *Un C^s-projecteur $P : \tau_X \to \tau_X$ (C^s-section de $L(\tau_X, \tau_X)$, vérifiant $P \circ P = P$), avec $s \leqq r - 1$, est dit intégrable si, pour tout $x_0 \in X$, il existe une C^1-carte en x_0 dans laquelle l'expression de P soit constante.*

Autrement dit, pour tout $x_0 \in X$, il existe une carte $\varphi = (U, \varphi, E_0 \times F_0)$ telle que $T\varphi \circ P \circ T\varphi^{-1} = \mathrm{Id}_{\varphi(U)} \times p_1$, p_1 désignant la projection canonique de $E_0 \times F_0$ sur E_0.

THÉORÈME 2.1. — *Chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour qu'un C^s-sous-fibré $j : \alpha \to \tau_X (1 \leqq s \leqq r - 1)$ soit intégrable :*

(*a*) *le crochet de l'image par j de deux C^1-sections locales de α est l'image d'une section de α;*

(*b*) *pour toute 1-forme différentielle locale de classe C^1 sur X s'annulant sur $j(E)$, la 2-forme différentielle $d\omega$ s'annule sur $j(E) \times_X j(E)$;*

(*c*) (*dans le cas où X admet des C^{s-1}-partitions de l'unité*) *il existe une C^{s-1}-connexion symétrique sur X induisant une connexion sur α.*

Pour r, $s \in \{\infty, \omega\}$, les conditions (*a*) et (*b*) peuvent s'exprimer agréablement en termes de faisceaux. Ces assertions sont établies dans [10]. L'assertion (*c*) est due à WALKER [21]. Il est facile de voir qu'elle est *suffisante*. Soit ∇ la dérivation covariante associée à la connexion symétrique donnée sur τ_X; désignons par le même symbole la connexion induite sur α. Si $\sigma = j \circ s$, $\sigma' = j \circ s'$ sont deux C^1-sections locales de $j(E)$, nous avons

$$[\sigma, \sigma'] = \nabla_\sigma \sigma' - \nabla_{\sigma'} \sigma = j(\nabla_\sigma s') - j(\nabla_{\sigma'} s),$$

et la condition (*a*) est vérifiée. Montrons que l'assertion (*c*) est *nécessaire.* Soit $\varphi_i = (U_i, \varphi_i, E_i \times F_i)$, pour $i \in I$, une famille de cartes feuilletantes dont les domaines U_i recouvrent X; nous pouvons supposer que les φ_i sont de classe C^s. La connexion triviale sur $\varphi_i(U_i)$ se transporte en une connexion sur U_i qui induit sur α_{U_i} une connexion. En recollant ces connexions au moyen d'une C^{s-1}-partition de l'unité subordonnée au recouvrement de X par les U_i, nous obtenons une C^{s-1}-connexion symétrique sur X induisant sur α une connexion. Le critère (*c*) s'applique notamment pour un C^1-sous-fibré sur une variété banachique paracompacte de classe C^2. La démonstration de WALKER aboutit au résultat suivant, un peu moins général : Si X est une C^r-variété admettant des C^s-partitions de l'unité ($1 \leq s \leq r-1 \leq \infty$), un C^s-sous-fibré α de τ_X est intégrable si, et seulement si, X peut être munie d'une C^{s-1}-connexion symétrique induisant sur α une connexion. La preuve consiste à choisir un C^s-projecteur P de TX sur $j(E)$, une C^{s-1}-connexion symétrique arbitraire sur τ_X (dont la dérivation covariante associée est notée ∇), et à prendre sur τ_X la C^{s-1}-connexion dont la dérivation covariante ∇' est donnée par

$$\nabla'_\sigma \xi = \nabla_\sigma \xi - (I-P)(\nabla_\sigma P\xi + \nabla_\xi P\sigma) + \frac{1}{2}(I-P)(\nabla_{P\sigma} P\xi + \nabla_{P\xi} P\sigma),$$

σ et ξ étant des C^1-champs de vecteurs locaux sur X, et I l'application identique sur TX. Pour vérifier qu'on a bien là une C^{s-1}-connexion il suffit de trivialiser; c'est évidemment une connexion symétrique, et $\nabla'_\sigma P\xi = P\nabla'_0 P\xi$ pour tout champ de vecteurs local ξ, ce qui prouve que ∇' induit une connexion sur $j(E)$, donc sur E.

Donnons maintenant un énoncé dual. Rappelons tout d'abord que l'espace tangent $T_{\zeta(b)}F$ à l'espace total F d'un fibré vectoriel $\beta = (F, \beta, B)$ en un point $\zeta(b)$ de la section nulle se décompose canoniquement en $F_b \oplus T_b B$ à l'aide de la section nulle ζ et de l'isomorphisme entre un espace vectoriel et son espace tangent en un point. Notons ν le projecteur de $TF|_{\zeta(B)}$ sur F qui apparaît ainsi.

LEMME 2.1 (PORTEOUS). — *Soit* $f : (E, \alpha, B) \to (F, \beta, B)$ *un* B-*morphisme de* C^r-*fibrés vectoriels tel que* $E' = \operatorname{Ker} f$ *soit un sous-fibré vectoriel de* E. *Il existe un* C^{r-1}-*morphisme bilinéaire unique* $\delta f : TB \times_B E' \to F$, *appelé dérivée intrinsèque de* f, *tel que, pour* $v \in T_b B$, *et* s *une* C^r-*section locale de* E *avec* $s(b) = e' \in E'$, *on ait*

$$\delta f(v, e') = \nu(T(f \circ s)(v)).$$

Pour établir ce lemme, il suffit de trivialiser : Si φ et ψ sont deux cartes vectorielles de E et F respectivement, au-dessus d'une carte $\chi = (U, \chi, B_0)$ de B, avec $\varphi(E_U) = \chi(U) \times E_0$, $\psi(F_U) = \chi(U) \times F_0$, et si $a : \chi(U) \to L(E_0, F_0)$ est l'expression de f dans ces cartes, soit $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x, e) = (x, a(x)e)$ pour $(x, e) \in \chi(U) \times E_0$, l'expression de δf est donnée par

$$(x, y, e') \to (x, Da(x).ye') \quad \text{pour } (x, y) \in T\chi(U), \quad (x, e') \in \varphi(E').$$

Nous pouvions établir directement l'existence de δf en montrant l'invariance de cette expression par changement de cartes vectorielles. Nous pouvons maintenant énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME 2.2. — *Chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour qu'un* C^s*-épimorphisme* $\omega : \tau_X \to \eta (1 \leqq s \leqq r - 1)$ *soit intégrable :*

(*a*) *le crochet de deux* C^1*-champs de vecteurs locaux annulés par* ω *est annulé par* ω;

(*b*) *la différentielle extérieure de la partie principale de* ω *dans une trivialisation arbitraire de* η *s'annule sur tout couple de champs de vecteurs locaux annulés par* ω;

(*c*) *la dérivée intrinsèque* $\delta\omega$ *de* ω *induit une application bilinéaire symétrique du noyau* α *de* ω *dans* η ;

(*d*) (*dans le cas où X admet des* C^{s-1}*-partitions de l'unité*) *il existe une* C^{s-1}*-connexion symétrique sur* τ_X *induisant par* ω *une connexion sur* η.

Cette dernière condition peut encore s'exprimer par $\nabla\omega = 0$, ∇ désignant la dérivation covariante dans $L(\tau_X, \eta)$ associée aux connexions sur τ_X et η ([7], [19]), ou encore par l'égalité :

$$d^\nabla \omega(s, s') = 0 \text{ pour } s, s' \text{ sections locales du noyau } \alpha \text{ de } \omega,$$

la C^{s-1}-forme différentielle vectorielle de degré 2, $d^\nabla\omega \in C^{s-1}(\mathrm{Alt}^2(\tau_X; \eta))$, étant définie par

$$d^\nabla \omega(u, v) = \nabla_u \omega \circ v - \nabla_v \omega \circ u - \omega \circ [u, v]$$

pour u, v C^1-champs de vecteurs locaux sur X, ∇ désignant cette fois la dérivation covariante induite par la connexion sur η.

On retrouve, avec la condition (*b*), une condition bien classique d'intégrabilité dans le cas où F est un fibré trivial $X \times F_0$. Ces assertions peuvent être établies directement ou peuvent être déduites du théorème 2.1 en considérant le noyau α de ω. On peut aussi voir leur équivalence *a priori*. Optons pour la dernière méthode. Pour tout point $a \in X$, nous pouvons trouver une carte $\varphi = (U, \varphi, E_0 \times F_0)$ de X en a, et une trivialisation $\psi : F_U \to \varphi(U) \times F_0$ au-dessus de φ pour lesquelles ω s'exprime par

$$(x, y, u, v) \to (x, y, v - f(x, y)\, u) \quad \text{avec} \quad (x, y) \in \varphi(U), \quad (u, v) \in E_0 \times F_0.$$

Les conditions (*a*), (*b*), (*c*) ou (*d*) s'expriment dans ces cartes par la symétrie de l'application

$$(u, u') \to D_1 f(x, y).f(x, y)\, u.u' + D_2 f(x, y).u.u' \text{ de } E_0 \times E_0 \text{ dans } F_0.$$

Le théorème de Frobenius local assure alors l'existence d'un C^s-morphisme α d'un voisinage de $(0, 0)$ dans $\varphi(U)$ à valeurs dans F_0 avec $D_1 \alpha(x, y) = f(x, \alpha(x, y))$ et $\alpha(0, y) = y$. L'inverse $(x, z) \to (x, g(x, z))$ de l'application $(x, y) \to (x, \alpha(x, y))$ est définie sur un voisinage $U_0 \times V_0$ de $(0, 0)$ dans $E_0 \times F_0$, et nous avons

$$\begin{aligned} Dg(x, y)(u, v) &= D_2 g(x, z).[v - D_1\alpha(x, g(x, z)).u] \\ &= D_2 g(x, z).[v - f(x, z).u], \end{aligned}$$

$D_2 g(x, z)$ étant un isomorphisme de F_0 sur F_0 pour $(x, z) \in U_0 \times V_0$, nous avons établi les conditions *suffisantes*. Les conditions *nécessaires* sont immédiates.

Avant de donner des conditions d'intégrabilité pour un projecteur, énonçons un lemme, dû à NIJENHUIS, dont la démonstration est immédiate par trivialisation.

LEMME 2.2. — *Si A et B sont deux C^s-sections de $L(\tau_X, \tau_X)$ ($= C^s$-morphismes de fibrés vectoriels de τ_X dans τ_X), il existe une C^{s-1}-section unique de $L^2(\tau_X; \tau_X)$, notée $N_{A,B}(1 \leqq s \leqq r-1)$, telle que, pour tous champs de vecteurs locaux ξ, σ de classe C^1, on ait*

$$\begin{aligned} 2N_{A,B}(\xi, \sigma) = [A\xi, B\sigma] + [B\xi, A\sigma] + AB[\xi, \sigma] \\ + BA[\xi, \sigma] - A[\xi, B\sigma] - A[B\xi, \sigma] - B[\xi, A\sigma] - B[A\xi, \sigma]. \end{aligned}$$

En particulier, pour $A = B$, on a, en posant $N_A = N_{A,A}$,

$$N_A(\xi, \sigma) = [A\xi, A\sigma] + A^2[\xi, \sigma] - A[\xi, A\sigma] - A[A\xi, \sigma].$$

THÉORÈME 2.3. — *Chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour qu'un C^s-projecteur $P : \tau_X \to \tau_X (1 \leqq s \leqq r-1)$ soit intégrable*

(*a*) *pour tous C^1-champs de vecteurs locaux ξ, σ, on a*

$$P[P\xi, P\sigma] = [P\xi, P\sigma] \qquad et \qquad Q[Q\xi, Q\sigma] = [Q\xi, Q\sigma],$$

avec $Q = I - P$;

(*b*) $N_P = 0$;

(*c*) *l'image de P et le noyau de P sont des sous-fibrés intégrables de τ_X;*

(*d*) *(lorsque X admet des C^{s-1}-partitions de l'unité) il existe une C^{s-1}-connexion symétrique sur τ_X pour laquelle P soit un morphisme de fibrés à connexion.*

La dernière condition s'exprime encore en disant que P est parallèle pour la connexion considérée, c'est-à-dire que $\nabla P = 0$, ∇ désignant la dérivation covariante dans le fibré $L(\tau_X, \tau_X)$ associée à la connexion donnée ([7], [19]). Les conditions (*a*) et (*c*) sont *a priori* équivalentes, d'après la condition (*a*) du théorème 2.1. Comme

$$N_P(\xi, \sigma) = [P\xi, P\sigma] + P[\xi, \sigma] - P[\xi, P\sigma] - P[P\xi, \sigma],$$

nous avons

$$PN_P(\xi, \sigma) = P[(I - P)\xi, (I - P)\sigma] = P[Q\xi, Q\sigma],$$
$$QN_P(\xi, \sigma) = Q[P\xi, P\sigma],$$

de sorte que (*a*) équivaut aussi à (*b*). Remarquons que P est intégrable si, et seulement si, le projecteur supplémentaire $Q = I - P$ est intégrable. La condition (*d*) entraîne la condition (*a*) en vertu de la relation

$$[\xi, \sigma] = \nabla_\xi \sigma - \nabla_\sigma \xi,$$

de sorte que $\sigma = P\sigma$, $\xi = P\xi$ assurent

$$[P\xi, P\sigma] = P[P\xi, P\sigma]$$

et $P\sigma = P\xi = 0$ assurent

$$P[\xi, \sigma] = P(\nabla_\xi \sigma - \nabla_\sigma \xi) = \nabla_\xi P\sigma - \nabla_\sigma P\xi = 0.$$

La condition (*d*) est nécessaire, comme on le voit en recollant au moyen d'une partition de l'unité des connexions qui se transportent par des cartes du type de celle de la définition 2.3 en des connexions triviales. Il reste à voir que les conditions (*a*) ou (*b*) ou (*c*) sont *suffisantes*.

Notons E l'image de P, et F le noyau de P. D'après le théorème 2.1, la condition (*a*), (*b*) ou (*c*) assure que, pour tout $a \in X$, il existe des cartes feuilletantes $\varphi = (A, \varphi, E_0 \times F_0)$, $\psi = (A, \psi, E_0 \times F_0)$ en a pour E et F respectivement. Posons

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2), \qquad \psi = (\psi_1, \psi_2) \qquad \text{et} \qquad \chi = (\varphi_1, \psi_2).$$

Puisque, pour $b \in A$, $T_b\varphi$ est un isomorphisme de E_b sur $\{\varphi(b)\} \times E_0 \times \{0\}$ et $T_b\psi$ un isomorphisme de F_b sur $\{\psi(b)\} \times \{0\} \times F_0$, le morphisme χ est un isomorphisme local en a, et une carte feuilletante pour E et F à la fois. L'expression de P dans cette carte est le projecteur constant de $E_0 \times F_0$ sur E_0. C. Q. F. D.

Soit $\pi : E \to B$ une C^r-submersion surjective, avec $r = \infty$ ou ω, pour simplifier. Pour $k \in \mathbf{N}$, soit $\pi_k : J_k E \to B$ la submersion des k-jets de sections locales de π, avec $J_0 E = E$, $\pi_0 = \pi$. Pour $k \leq m$, notons $\pi_{k,m} : J_m E \to J_k E$ le morphisme fibré canonique au-dessus de B, et identifions $J_m E$ à son image canonique dans $J_{m-k} J_k E$.

Si R_k est un sous-ensemble de $J_k E$, notons $J_1 R_k$ le sous-ensemble de $J_1 J_k E$ formé des 1-jets de sections locales de π_k dont l'image soit contenue dans R_k. Le sous-ensemble $R_{k+1} = J_1 R_k \cap J_{k+1} E$ de $J_{k+1} E$ est appelé le premier prolongement de R_k.

Si $\eta : F \to E$ est une submersion, nous dirons qu'une sous-variété S de F est strictement transverse à η si, pour tout $s \in S$, $T_s F$ est somme directe (topologique) de $T_s S$ et de $(T_s \eta)^{-1}(0)$.

DÉFINITIONS 2.4. — *Un système différentiel (non linéaire) d'ordre k sur* π *est un sous-ensemble* R_k *de* J_kE. *Un tel système est dit régulier si* R_k *est une* C^r*-sous-variété de* J_kE; *il est dit explicitable s'il est régulier et si* R_k *est strictement transverse à* $\pi_{k-1,k}$. *Une solution du système* R_k *est une* C^r*-section locale de* π *dont le k-jet, là où il est défini, appartient à* R_k. *Le système* R_k *est dit intégrable si tout point de* R_k *est le k-jet d'une solution. Le système* R_k *est dit* 1*-formellement-intégrable si* $\pi_{k,k+1}$ *induit une surjection de* R_{k+1} *sur* R_k.

Exemple. — Soit $\eta : F \to B$ une autre submersion, et soit D un opérateur différentiel d'ordre k de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ (faisceaux des C^r-sections locales de π et η resp.) défini au moyen d'un morphisme fibré $\varphi : J_kE \to F$ par l'égalité $D(s) = \varphi \circ j_k s$ pour $s \in \mathcal{E}$. Pour toute section globale a de η, $R_k = \varphi^{-1}(a(B))$ est un système différentiel d'ordre k sur π, en général non régulier, même lorsque π et η sont des fibrés vectoriels, D un opérateur différentiel linéaire et a la section nulle de η. Dans ce cas, il est régulier, et même explicitable, si le symbole $\sigma(D)$ de D, considéré comme un morphisme de $L_s^k(\tau_B; \pi)$ dans η, est un isomorphisme.

Exemple. — Soit $\pi : B \times F \to B$ une fibration triviale; notons η la seconde projection $\eta : B \times F \to F$. Comme on a un isomorphisme canonique entre

$$(J_1(B \times F), \pi_{0,1}, B \times F) \quad \text{et} \quad (L(\pi^* TB, \eta^* TF), L(\pi^* \tau_B, \eta^* \tau_F), B \times F),$$

toute section de ce dernier fibré définit un système différentiel explicitable sur π. Ainsi une équation différentielle, telle qu'elle se trouve définie dans le paragraphe suivant, apparaît comme un cas particulier de système différentiel.

Remarque. La définition donnée est plus restrictive que les définitions habituelles qui définissent un système différentiel d'ordre k sur π comme un sous-faisceau $\mathcal{R}_k$ de $\mathcal{J}_kE$; mais la définition donnée sera plus commode pour notre propos. Il est immédiat de constater qu'un système différentiel intégrable est 1-formellement-intégrable. Une réciproque partielle peut ainsi être formulée.

THÉORÈME 2.4. — *Tout système différentiel d'ordre k explicitable et* 1*-formellement-intégrable est intégrable.*

Preuve. — Le problème étant local, nous pouvons supposer que B est un ouvert U d'un espace de Banach B, que $E = U \times V$, V étant un ouvert d'un espace de Banach F, π étant la première projection. Puisque le système différentiel R_k est explicitable, nous pouvons supposer, quitte à restreindre U et V, que R_k est le graphe dans

$$U \times V \times L(B_0; F) \times \ldots \times L_s^k(B_0; F)$$

d'un C^r-morphisme f de $U \times V \times L(B_0; F) \times \ldots \times L_s^{k-1}(B_0; F)$ dans $L_s^k(B_0; F)$. Cette observation termine la démonstration pour $k = 0$, cas que nous écarterons maintenant. Posons

$$F_k = F \times L(B_0; F) \times \ldots \times L_s^{k-1}(B; F).$$

Étant donnés $x_0 \in U$, $y_0 \in V$ et $z_0 = (y_0, y_0^1, \ldots, y_0^{k-1}) \in F_k$, donc un point $(x_0, z_0, f(x_0, z_0))$ de R_k, nous sommes ramenés à trouver une solution du système différentiel :

$$\begin{cases} Dy(x) = y^1(x), & y(x_0) = y_0, \\ Dy^1(x) = y^2(x), & y^1(x_0) = y_0^1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ Dy^{k-1}(x) = f(x, y(x), y^1(x), \ldots, y^{k-1}(x)), & y^{k-1}(x_0) = y_0^{k-1}. \end{cases}$$

Considérons ce système comme une équation différentielle de la forme $Dz(x) = g(x, z(x))$, $z(x_0) = z_0$, dont le second membre est défini sur un ouvert de $B_0 \times F_k$, et à valeurs dans $L(B_0; F_k)$. La condition d'intégrabilité formulée dans le théorème 1.1 s'exprime par la symétrie des applications bilinéaires :

$$\begin{aligned} &(a, b) \to y^2(x).a.b, \quad \ldots, \quad (a, b) \to y^{k-1}(x).a.b, \quad (a, b) \to f(x, z).a.b, \\ &(a, b) \to D_1 f(x, z).a.b + D_2 f(x, z).y^1(x).a.b + \ldots \\ &\qquad\qquad + D_k f(x, z).y^{k-1}(x).a.b + D_{k+1} f(x, z).f(x, z).a.b \end{aligned}$$

prenant leurs valeurs dans $F, \ldots, L^{k-3}(B_0; F), L^{k-2}(B_0; F)$ et $L^{k-1}(B_0; F)$ respectivement. Les premières sont symétriques par construction. La dernière l'est, car, pour tout $(x, z) \in U \times V \times \ldots \times L_s^{k-1}(B_0; F)$, il existe un point

$$(x, z, f(x, z), w) \in R_{k+1} \subset U \times F_k \times L_s^k(B_0; F) \times L_s^{k+1}(B_0; F),$$

l'élément $w \in L_s^{k+1}(B_0; F)$ étant de la forme

$$w = D_1 f(x, z) + D_2 f(x, z).y^1 + \ldots + D_k f(x, z).y^{k-1} + D_{k+1} f(x, z).f(x, z).$$

L'existence d'une solution découle donc du théorème 1.1.

(B) **Théorème de Frobenius et équations différentielles.**

Soient X, Y et L des C^r-variétés ($r \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\} \cup \{\omega\}$); désignons par p_X, p_Y, p_L les projections canoniques de $X \times Y \times L$ sur X, Y et L respectivement, et par π le fibré $L(p_X^\star \tau_X, p_Y^\star \tau_Y)$, de base $X \times Y \times L$ et de fibre $L(T_x X, T_y Y)$ en $(x, y, \lambda) \in X \times Y \times L$.

Définition 2.5. — *Une équation différentielle (du premier ordre) de X dans Y, dépendant d'un paramètre $\lambda \in L$ et de classe C^s $(0 \leqq s \leqq r - 1)$,* *est une C^s-section f du fibré π. Une solution pour un paramètre $\lambda \in L$ est un C^1-morphisme $u : U \to Y$ (U ouvert de X) tel que $T_x u = f(x, u(x), \lambda)$ pour tout $x \in U$.*

Pour $X = \mathbf{R}$, $L(T_x\mathbf{R}, T_y Y)$ s'identifiant à $T_y Y$, nous retrouvons la notion habituelle de champ de vecteurs sur Y, dépendant d'un paramètre $\lambda \in L$ et du temps. Dans ce cas, les résultats généraux d'existence et d'unicité des solutions peuvent être condensés en l'énoncé suivant [11].

SCHOLIE 2.1. — *Si f est une équation différentielle de classe C^s ($1 \leq s \leq r-1$) de $X = \mathbf{R}$ dans Y, dépendant d'un paramètre dans L, il existe une application unique, appelée résolvante, d'un ouvert D de $X \times X \times Y \times L$ dans Y, de classe C^s, vérifiant les propriétés suivantes:*

(a) pour tout $(x, y, \lambda) \in X \times Y \times L$, l'ensemble

$$I(x, y, \lambda) = \{ t \in X, (t, x, y, \lambda) \in D \}$$

est un ouvert connexe (= intervalle) de X contenant x, et $S(x, x, y, \lambda) = y$;

(b) pour tout $(x, y, \lambda) \in X \times Y \times L$, et pour tout $x' \in I(x, y, \lambda)$, on a $I(x', y', \lambda) = I(x, y, \lambda)$ pour $y' = S(x', x, y, \lambda)$, et, pour tout $t \in I(x, y, \lambda)$, on a $S(t, x, y, \lambda) = S(t, x', y', \lambda)$;

(c) pour tout $(x, y, \lambda) \in X \times Y \times L$, l'application $t \to S(t, x, y, \lambda)$ de $I(x, y, \lambda)$ dans Y est élément maximum de l'ensemble des solutions de l'équation f pour le paramètre λ, prenant la valeur y en x.

Dans la dernière assertion, l'ordre sur l'ensemble des solutions définies au voisinage de x est évidemment celui de la restriction, de sorte que cette assertion est une propriété d'unicité.

Lorsque X est une variété arbitraire, un tel énoncé n'est pas possible. Un premier obstacle à l'existence locale de solutions réside dans la condition d'intégrabilité déjà vue, que nous allons traduire dans ce contexte nouveau.

DÉFINITION 2.6. — *L'équation f de la définition 2.5 est dite intégrable si, pour tout $(x_0, y_0, \lambda_0) \in X \times Y \times L$, il existe des voisinages ouverts U_0, V_0, W_0 de x_0, y_0, λ_0 dans X, Y et L respectivement, et un C^s-morphisme $R : U_0 \times U_0 \times V_0 \times W_0 \to Y$ tel que, pour tout $(x, x', y, \lambda) \in U_0 \times U_0 \times V_0 \times W_0$,*

$$\begin{cases} T_1 R(x, x', y, \lambda) = f(x, R(x, x', y, \lambda), \lambda), \\ R(x, x, y, \lambda) = y. \end{cases}$$

Dans cette définition et dans ce qui suit, nous prenons $s \geq 1$. Si ξ est un champ de vecteurs de classe C^s sur un ouvert U de X, désignons par $\tilde{\xi}$ le champ de vecteurs sur $U \times Y$, dépendant d'un paramètre $\lambda \in L$, défini par

$$\tilde{\xi}(x, y, \lambda) = (\xi(x), f(x, y, \lambda)\, \xi(x)) \qquad \text{pour} \quad (x, y, \lambda) \in U \times Y \times L.$$

Il est facile de voir qu'il existe une C^{s-1}-section, notée Frob (f), du fibré $\mathrm{Alt}^2(p_X^*\tau_X; p_Y^*\tau_Y)$, de base $X\times Y\times L$, de fibre en (x, y, λ), l'ensemble des applications bilinéaires alternées de T_xX dans T_yY, telle que, pour deux champs de vecteurs ξ, η, définis sur un ouvert U de X, on ait

$$\mathrm{Frob}(f)(x, y, \lambda).\xi(x).\eta(x) = [\tilde{\xi}, \tilde{\eta}](x, y, \lambda) - [\widetilde{\xi, \eta}](x, y, \lambda).$$

Par trivialisation dans des cartes, nous déduisons immédiatement du théorème de Frobenius local l'énoncé suivant.

THÉORÈME 2.5. — *Pour que l'équation f de la définition 2.5, de classe $C^s(1\leq s\leq r-1)$, soit intégrable, il faut et il suffit qu'une des conditions suivantes soit vérifiée :*

(*a*) Frob (f) *est la section nulle de* $\mathrm{Alt}^2(p_X^*\tau_X; p_Y^*\tau_Y)$;

(*b*) (*dans le cas $s=\infty$ ou $s=\omega$*), *l'application $\xi\to\tilde{\xi}$ est un homomorphisme de préfaisceaux de Lie*;

(*c*) *pour tout $\lambda\in L$, le monomorphisme $j_\lambda = j\,|\,X\times Y\times\{\lambda\}$ est intégrable, $j: p_X^*\tau_X\to p_X^*\tau_X\oplus p_Y^*\tau_Y$ étant défini par $j(u)=(u, f(x, y, \lambda)\,u)$ pour $(x, y, \lambda)\in X\times Y\times L$, $u\in T_xX$*;

(*d*) (*dans le cas où X et Y sont paracompactes et modelées sur des espaces de Banach séparables possédant des C^{s-1}-partitions de l'unité*) *il existe une C^{s-1}-connexion symétrique sur $X\times Y$ telle que, ∇ désignant la dérivation covariante associée dans le fibré $L(p_X^*\tau_X\oplus p_Y^*\tau_Y,\ p_X^*\tau_X\oplus p_Y^*\tau_Y)$ et $\tilde{f}$ la section de ce fibré définie par $\tilde{f}(x, y, \lambda)(u, v)=(u, f(x, y, \lambda)\,u)$, on ait $\nabla\tilde{f}=0$.*

Remarquons que, dans les conditions d'application de l'assertion (*d*), la variété $X\times Y$ possède des C^{s-1}-partitions de l'unité, car elle est paracompacte puisque métrisable et modelée sur des espaces de Banach séparables C^{s-1}-complètement réguliers. Rappelons qu'un espace de Banach est dit C^k-complètement régulier si, pour tout voisinage V de l'origine, il existe une C^k-fonction de E dans $\mathbf{R}^+$, à support dans V, non nulle à l'origine.

Comme des exemples simples le montrent, les conditions précédentes d'intégrabilité ne suffisent pas à établir l'existence d'une résolvante globale, au sens de la scholie 2.1 [les intervalles $I(x, y, \lambda)$ étant remplacés par des ouverts connexes]. Pour énoncer un résultat global en ce sens, il faut avoir recours à une application « multivoque ».

SCHOLIE 2.2. — *Si f est une équation différentielle de classe $C^s(1\leq s\leq r-1)$ intégrable de X dans Y, dépendant d'un paramètre dans L, il existe une application S, unique, appelée résolvante multivoque, d'un ouvert D de $X\times X\times Y\times L$ dans $\mathfrak{P}(Y)$, de classe C^s au sens suivant :*

le graphe $G = \{(x, x', y, \lambda, z), (x, x', y, \lambda) \in D, z \in S(x, x', y, \lambda)\}$ *de* S *est une* C^s*-variété immergée dans* $X \times X \times Y \times L \times Y$, *se projetant sur* $X \times X \times Y \times L$ *par un difféomorphisme local*
et vérifiant les propriétés :

(*a*) *pour tout* $(x, y, \lambda) \in X \times Y \times L$, *l'ensemble*

$$I(x, y, \lambda) = \{t \in X, (t, x, y, \lambda) \in D\}$$

est un ouvert connexe de X *contenant* x, *et* $y \in S(x, x, y, \lambda)$;

(*b*) *pour tout* $(x, y, \lambda) \in X \times Y \times L$, *et pour tous* $x' \in I(x, y, \lambda)$, $y' \in S(x', x, y, \lambda)$, *on a* $I(x', y', \lambda) = I(x, y, \lambda)$ *et, pour tout* $x'' \in I(x, y, \lambda)$, *on a* $S(x'', x', y, \lambda) = S(x'', x, y, \lambda)$;

(*c*) *pour tout* $(x, y, \lambda) \in X \times Y \times L$, *et pour toute solution* $u : U \to Y$ *pour le paramètre* λ, *définie sur un ouvert connexe* U *de* X *contenant* x *avec* $u(x) = y$, *on a* $u(x') \in S(x', x, y, \lambda)$ *pour tout* $x' \in U$.

Pour $(x', x, y, \lambda) \in X \times X \times Y \times L$, on prend pour $S(x', x, y, \lambda)$ l'ensemble des points $z \in Y$ tels que (x', z) appartiennent à la feuille passant par (x, y) du feuilletage défini par j_λ sur $X \times Y$. Les assertions précédentes découlent facilement de la décomposition en feuilles de $X \times Y$ [3].

Si l'on écarte une telle résolvante multivoque, on ne dispose que de résultats partiels :

THÉORÈME 2.6. — *Étant donnée l'équation différentielle* f *de classe* $C^s (1 \leq s \leq r - 1)$ *intégrable, il existe un voisinage ouvert* V *de* $\Delta = \{(x, x, y, \lambda), x \in X, y \in Y, \lambda \in L\}$ *dans* $X \times X \times Y \times L$ *et un* C^s*-morphisme* $F : V \to Y$ *tel que, pour tout* $(x, y, \lambda) \in X \times Y \times L$ *l'application* $F(., x, y, \lambda) : I_V(x, y, \lambda) \to Y$ [*où* $I_V(x, y, \lambda) = \{x' \in X, (x', x, y, \lambda) \in V\}$] *soit une solution, et que* $F(x, x, y, \lambda) = y$. *De plus, deux tels morphismes* F *et* F' *ont même germe suivant* Δ.

La dernière phrase peut être ainsi précisée : si $F : V \to Y$, $F' : V' \to Y$ sont deux tels morphismes, F et F' coïncident sur un ouvert W contenant Δ tel que, pour tout $(x, y, \lambda) \in X \times Y \times L$, $I_W(x, y, \lambda)$ soit la composante connexe de x dans $I_V(x, y, \lambda) \cap I_{V'}(x, y, \lambda)$. Cette assertion, ainsi que la possibilité de choisir V de telle façon que les $I_V(x, y, \lambda)$ soient connexes, découle du lemme suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur (il faut utiliser la connexité par arcs).

LEMME 2.3. — *Soit* V *un voisinage ouvert de* Δ *dans* $X \times X \times Y \times L$. *L'ensemble* V^*, *réunion pour* $(x, y, \lambda) \in X \times Y \times L$ *des composantes connexes* $I^*(x, y, \lambda) \times \{(x, y, \lambda)\}$ *de* (x, x, y, λ) *dans* $I_V(x, y, \lambda) \times \{(x, y, \lambda)\}$, *est ouvert dans* V.

Le théorème 2.6 est une conséquence de la proposition suivante, qui est une simple adaptation d'un résultat classique de la théorie des faisceaux ([8], théorème 3.3.1).

PROPOSITION 2.3. — *Soient A et B des espaces topologiques, A étant paracompact, et soit C un fermé de A. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions d'un faisceau $\mathcal{F}$ de fonctions de A dans B : $f_i \in \mathcal{F}(O_i)$, telle que :*

1° $C \subseteqq \bigcup_{i\in I} O_i$;

2° *pour tout $(i, j) \in I\times I$ et pour tout $c\in C\cap O_i \cap O_j$, f_i et f_j ont même germe en c.*

Il existe alors un ouvert O de A contenant C, et une application $f\in\mathcal{F}(O)$ telle que, pour tout $i\in I$ et pour tout $x\in O_i\cap C$, on ait $f(x) = f_i(x)$.

En prenant $A = X\times X\times Y\times L$, $B = Y$, $C = \Delta$ et, si U est un ouvert de A, pour $\mathcal{F}(U)$ l'ensemble des C^s-morphismes de U dans Y dont la restriction à $U\cap X\times\{x, y, \lambda\}$ est solution de l'équation donnée pour tout $(x, y, \lambda)\in X\times Y\times L$, nous obtenons la conclusion du théorème 2.6 en choisissant pour fonctions f_i une famille d'applications du type de celle de la définition 2.6, dont les domaines de définition forment un recouvrement de Δ.

Si X est munie d'une C^s-gerbe, il est un autre moyen d'obtenir le théorème 2.6. Il consiste à se fixer un C^s-morphisme d'un voisinage de la diagonale de $X\times X$ dans $C^1(I, X)$ avec $I = [0, 1]$ [$C^1(I, X)$ étant une C^{r-1}-variété [17], ceci a un sens], $\gamma : U \to C^1(I, X)$ avec $\gamma_{xx'}(0) = x$, $\gamma_{xx'}(1) = x'$. Ce morphisme permet de définir un C^s-champ de vecteurs sur Y dépendant du paramètre $\mu = (x, x', \lambda)\in U\times L$ et du temps par $(t, y, x, x', \lambda) \to f(\gamma_{xx'}(t), y, \lambda)\dot\gamma_{xx'}(t)$. Si nous choisissons γ de telle façon que $\gamma_{xx'}$ soit le chemin constant en x pour tout $x\in X$ (ce qui est le cas pour une gerbe), nous avons un champ de vecteurs trivial pour $x = x'$. La résolvante S de ce champ de vecteurs est définie pour tous les points $(t, 0, y, x, x', \lambda)$, t parcourant $[0, 1]$ tels que (x, x', y, λ) soit dans un voisinage V de Δ. Il suffit de poser $F(x', x, y, \lambda) = S(1, 0, y, x, x', \lambda)$ pour obtenir l'application désirée qui est de classe C^s d'après les résultats classiques de dépendance des conditions initiales et des paramètres de l'intégrale d'un champ de vecteurs, ou encore d'après l'intégrabilité de f et l'unicité locale des solutions.

THÉORÈME 2.7. — *Avec les données du théorème 2.6, il est possible de trouver un ouvert W de $X\times X\times X\times Y\times L$ contenant l'ensemble des points (x, x, x, y, λ) pour $x\in X$, $y\in Y$, $\lambda\in L$ tel que, pour tout $(x'', x', x, y, \lambda)\in W$, l'égalité*

$$F(x'', x, y, \lambda) = F(x'', x', F(x', x, y, \lambda), \lambda)$$

ait un sens et ait lieu.

Pour simplifier l'écriture, omettons le paramètre λ dans la démonstration. Pour $(x, y)\in X\times Y$ fixé, le premier membre est défini pour

$x'' \in I_V(x, y)$. Si $x' \in I_V(x, y)$ et si $y' = F(x', x, y)$, le second membre est défini pour $x'' \in I_V(x', y')$. Les deux membres sont donc définis, et égaux à y', pour $x'' = x' \in I_V(x, y)$. Notons $I^*(x', x, y)$ la composante connexe de x' dans $I_V(x, y) \cap I_V(x', y')$, et W la réunion, pour $(x', x, y) \in V$, des coupes $I^*(x', x, y) \times \{ (x', x, y) \}$. Un argument similaire à celui du lemme 2.3 montre que W est ouvert [considérer les ouverts $W' = \{ (x'', x', x, y) : (x', x, y) \in V, (x'', x', F(x', x, y)) \in V \}$ et $W'' = \{ (x'', x', x, y) : (x', x, y) \in V, (x'', x, y) \in V \}$].

Soit x_t un C^1-chemin joignant x' à x'' dans $I^*(x', x, y)$. Les chemins $t \to F(x_t, x, y)$ et $t \to F(x_t, x', y')$ sont deux courbes intégrales issues de y' du champ de vecteurs $(t, y) \to f(x_t, y)\, \dot{x}_t$ sur Y, donc coïncident ce qui donne le résultat voulu pour $t = 1$.

Il est important d'avoir des critères d'existence de la résolvante au sens de la scholie 2.1 pour une équation différentielle intégrable. Le plus naturel est le suivant [11].

Critère 2.1. — *Si X est connexe, et si, par tout point*

$$(x, y, \lambda) \in X \times Y \times L,$$

passe une solution de l'équation f définie sur X tout entière, alors cette solution est unique, et, si nous la notons $x' \to S(x', x, y, \lambda)$, nous obtenons une C^s-résolvante S.

Un critère plus élaboré peut être donné en suivant les méthodes de [4].

Critère 2.2. — *Si X est connexe, et simplement connexe, si X et Y sont munies de structures de Finsler* [16], *une condition suffisante d'existence de la résolvante d'une C^s-équation différentielle intégrable f est la propriété suivante :*

(P) *pour tout $(x, y, \lambda) \in X \times Y \times L$, il existe $\varepsilon = \varepsilon(x, \lambda) > 0$, $\eta = \eta(x, y, \lambda) > 0$* et *$C = C(x, \lambda) > 0$ tels que la boule fermée $B'_\eta(y)$, de centre y et de rayon η dans Y, soit complète, et que $\| f(x', y', \lambda) \| < C\eta$ pour tout (x', y') dans $B'_\varepsilon(x) \times B'_\eta(y)$.*

On sait [18] que tout point d'une variété munie d'une structure de Finsler est centre d'une boule fermée complète de rayon positif, de sorte que la condition donnée est assez naturelle. On déduit immédiatement de ce critère les énoncés suivants (en faisant $\eta = 1$).

Critère 2.3. — *Si X et Y sont des variétés munies de structures de Finsler, X étant connexe et simplement connexe, Y étant complète, une condition suffisante d'existence de la résolvante de l'équation f est :*

(P') *pour tout $(x, \lambda) \in X \times L$, il existe $\varepsilon = \varepsilon(x, \lambda) > 0$ et $C = C(x, \lambda) > 0$ tels que $\| f(x', y, \lambda) \| < C$ pour tout $(x', y) \in B'_\varepsilon(x) \times Y$.*

CRITÈRE 2.4. — *Si X est connexe et simplement connexe, et si Y est une variété compacte, toute C^s-équation différentielle intégrable de X dans Y admet une résolvante.*

En effet, la condition (P′) est vérifiée pour toutes les structures de Finsler sur X et Y, et Y est complète pour les distances associées. Plus généralement, le corollaire aurait lieu pour toute équation f telle que $y \to f(x, y)$ soit à support compact pour tout $x \in X$.

Esquissons la démonstration du critère 2.2. Elle consiste à montrer que tout chemin $x_t \in C^1(I, X)$ peut être « relevé » en un chemin y_t de Y tel que $\dot{y}_t = f(x_t, y_t, \lambda).\dot{x}_t$. Le point terminal y_1 du chemin issu d'un point y_0 ne dépend que de y_0, x_0 et x_1, comme le montre l'équation aux variations et le fait que deux chemins de X joignant x_0 à x_1 sont C^1-homotopes. Soit donc $[0, t^+[$ l'intervalle de définition de la solution maximale de $\dot{y}_t = f(x_t, y_t, \lambda).\dot{x}_t$ prenant en $t = 0$ la valeur y_0, le chemin x_t étant donné. Montrons que $t^+ = 1$ en trouvant une contradiction à l'hypothèse $t^+ < 1$. Posons

$$M = \max_{t \in [0, 1]} \| \dot{x}_t \|, \qquad \varepsilon = \varepsilon(x_{t^+}, \lambda), \qquad C = C(x_{t^+}, \lambda).$$

Nous pouvons trouver $h \in [0, t^+[$ tel que $(t^+ - h)\, CM < 1$ et que $x_t \in B'_\varepsilon(x_{t^+})$ pour $t \in [h, t^+]$. Soit $\eta = \eta(x_{t^+}, y_h, \lambda)$ donné par l'assertion (P). Montrons que $y_t \in B'_\eta(y_h)$ pour $t \in [h, t^+[$. S'il n'en était pas ainsi, il existerait $k \in [h, t^+[$ avec $d(y_h, y_k) = \eta$ et $y_t \in B'_\eta(y_h)$ pour $t \in [h, k]$. Mais alors

$$d(y_h, y_k) \leqq \int_h^k \| f(x_t, y_t, \lambda).\dot{x}_t \| \, dt \leqq (k - h)\, C\eta M < \eta,$$

ce qui n'est pas possible. Puisque $(x_t, y_t) \in B'_\varepsilon(x_{t^+}) \times B'_\eta(y_h)$ pour $t \in [h, t^+[$, une majoration analogue montre que y_t converge dans $B'_\eta(y_h)$ car l'image par y_t du filtre des voisinages de t^+ dans $[h, t^+[$ est une base de filtre de Cauchy : $d(y_{t_1}, y_{t_2}) \leqq | t_2 - t_1 |\, C\eta M$ pour $t_1, t_2 \in [h, t^+[$. Il est facile de voir que y_t peut alors être prolongé en un chemin de classe C^1 de $[0, t^+]$ dans Y. Le théorème d'existence locale nous assure que y_t peut alors être défini pour $t > t^+$, en partant des données initiales (t^+, y_{t^+}), ce qui contredit l'hypothèse $t^+ < 1$ et termine la démonstration du critère 2.2 grâce à ce que nous avons indiqué en commençant.

3. Applications.

(A) Deuxième théorème de Lie.

Nous nous réferrons pour ce paragraphe à [15], dont nous gardons la terminologie (sauf en ce qui concerne les groupes locaux de transformations locales, que nous nommons tronçons de transformations) et les notations (à l'exception de l'algèbre de Lie $\mathbf{G}$ des champs de vecteurs invariants à droite d'un groupe différentiable G, identifiée à $T_e G$ en tant qu'espace vectoriel banachisable).

THÉORÈME 3.1. — *Soient, pour $r = \infty$ ou ω, M une C^r-variété, G un C^r-groupe, et $\mathfrak{X}(M)$ l'algèbre de Lie des C^r-champs de vecteurs sur M. Pour tout homomorphisme d'algèbres de Lie θ de $\mathbf{G}$ dans $\mathfrak{X}(M)$, continu pour la topologie de la convergence simple sur $\mathfrak{X}(M)$, il existe un tronçon de transformations φ dont le générateur infinitésimal est θ.*

LEMME 3.1. — *Soient B, E et F des espaces de Banach, U un ouvert de B, et $f: U \to L(E, F)$ une application telle que, pour tout $e \in E$, l'application $x \to f(x)e$ soit de classe C^r ($r = \infty$* ou ω). *Alors f est de classe C^r.*

Ce lemme utilise le théorème des accroissements finis et une récurrence pour $r = \infty$, le développement en série pour $r = \omega$ ainsi que le théorème de Banach-Steinhaus dans les deux cas. Une démonstration similaire est donnée dans [18], proposition 6.16. Ce lemme permet de montrer que θ provient d'une C^r-section de $L(\mu, \tau_M)$, μ étant le fibré trivial $\mu: M \times \mathbf{G} \to M$. Nous obtenons ainsi une équation différentielle de G dans M; il est facile de voir qu'elle est intégrable.

Soit $F: V \to M$, V ouvert de $G \times G \times M$, un C^r-morphisme vérifiant les propriétés énoncées dans le théorème 2.6. Soit B_0 un voisinage de O dans $\mathbf{G}$ tel que « exp » réalise un difféomorphisme de B_0 sur son image. Pour $m \in M$, soit B_m une boule ouverte centrée en O, contenue dans B_0, telle qu'il existe un voisinage U_m de m dans M avec

$$(\exp B_m . \exp B_m) \times \{e\} \times U_m \subset V.$$

Choisissons une boule ouverte A_m, centrée en O dans $\mathbf{G}$, telle que $\exp A_m . \exp A_m \subseteq \exp B_m$ et posons

$$D = \bigcup_{m \in M} \exp A_m \times U_m \subset G \times M.$$

C'est un domaine de tronçon de transformations. Posons, pour $(g, m) \in D$, $\varphi(g, m) = F(g, e, m)$.

Il nous suffit de montrer que, pour $(g, m) \in D$, $p = \varphi(g, m)$, $h \in G$ tels que $(h, p) \in D$ et $(hg, m) \in D$, nous avons $\varphi(h, p) = \varphi(hg, m)$. Par construction, il existe m', m'', p' dans M et u, v, w dans $A_{m'}$, $A_{p'}$ et $A_{m''}$ respectivement, tels que $g = \exp u$, $h = \exp v$, $hg = \exp w$ et $m \in U_{m'}$, $m \in U_{m''}$, $p \in U_{p'}$. Puisque

$$\exp v = h = (hg) g^{-1} = \exp w . \exp(-u) \in \exp A_{m''} . \exp A_{m'} \subset \exp B,$$

où B désigne la plus grande des deux boules $B_{m'}$ et $B_{m''}$, et puisque exp est injective sur B_0, $v \in B$. Par suite, pour $t \in [0, 1]$,

$$\exp tv \,.\, g = \exp tv \,.\, \exp u \in \exp B \,.\, \exp B$$

et

$$(\exp tv \,.\, g, e, m) \in (\exp B \,.\, \exp B) \times \{e\} \times (U_{m'} \cap U_{m''}) \subset V.$$

Nous pouvons considérer les applications $t \to F(\exp tv\,.\,g, e, m)$ et $t \to F(\exp tv, e, p)$, définies pour $0 \leq t \leq 1$. Ce sont deux courbes intégrales du même champ de vecteurs $\theta(v)$ sur M, qui ont même condition initiale p en $t = 0$. Elles coïncident donc, et, pour $t = 1$,

$$\varphi(hg, m) = F(\exp v\,.\,g, e, m) = F(\exp v, e, p) = \varphi(h, p).$$

La condition de continuité, donnée dans l'énoncé 3.1, est évidemment nécessaire.

(B) **Connexions plates.**

Rappelons ([9], [19]) qu'une connexion sur un C^r-fibré principal $\mu = (P, \pi, B, G)$, μ désignant l'opération $\mu : P \times G \to P$ et π la projection $\pi : P \to B = P/G$, est une C^{r-1}-scission de la suite exacte de G-fibrés vectoriels

$$0 \to \xi \xrightarrow{T_e^2 \mu} \tau_P \xrightarrow{T\pi^!} \pi^* \tau_B \to 0,$$

où, si $\mathbf{G}$ est l'algèbre de Lie de G, $\xi = (P \times \mathbf{G}, \xi, P)$, G opérant sur $P \times \mathbf{G}$ par $(p, u)\,.\,g = (pg, adg^{-1}(u))$ pour $(p, u, g) \in P \times G \times G$. Ainsi une connexion sur μ peut être donnée par un G-morphisme γ de $\pi^*\tau_B$ dans τ_P, vérifiant $T\pi^! \circ \gamma = \mathrm{Id}\, \pi^* \tau_B$, ou par un G-morphisme $\omega : \tau_P \to \xi$ vérifiant $\omega \circ T_e^2 \mu = \mathrm{Id}_\xi$, ou encore par un G-sous-fibré H de τ_P dont le supplémentaire est le fibré tangent vertical, ou encore par un G-projecteur de τ_P sur ce sous-fibré « horizontal ». Une connexion sur μ est dite *plate* si tout point de B possède un voisinage U tel qu'il existe un isomorphisme de $\mu_U = (\pi^{-1}(U), \pi_U, U, G)$ sur le fibré trivial $\theta_U = (U \times G, p_1, U, G)$ qui soit un isomorphisme de la connexion induite au-dessus de U sur la connexion triviale sur θ_U.

THÉORÈME 3.2. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que la connexion sur $\mu = (P, \pi, B, G)$ soit plate est que sa forme de courbure soit identiquement nulle.*

La condition est évidemment *nécessaire*, il suffit donc de montrer la condition *suffisante*. Dans l'ignorance d'une extension éventuelle du théorème d'Ambrose-Singer [1] aux fibrés principaux banachiques, il nous faut éviter l'emploi du théorème d'holonomie. L'ambivalence de la notion de connexion rappelée ci-dessus nous laisse le choix, et les diverses formes du théorème de Frobenius, données au paragraphe précédent, pourraient être comparées dans cette application.

Utilisons l'équation de structure sous la forme du corollaire 5.3. chapitre II de [9] qui nous assure que le sous-fibré horizontal est intégrable, En nous plaçant dans une trivialisation $(U\times G, p_1, U)$ de π au voisinage d'un point $x_0\in B$, nous pouvons trouver des voisinages ouverts connexes U_0 et V_0 de x_0 et e dans U et G respectivement, et une co-carte feuilletante φ de $U_0\times V_0$ dans $U\times G$, de la forme $\varphi(x, g) = (x, \alpha(x, g))$, avec $\alpha(x_0, g) = g$. Posons, pour $g\in V_0$ fixé, et pour x variant dans U_0,

$$h(x) = \alpha(x, g), \qquad k(x) = \alpha(x, e), \qquad g(x) = k(x)^{-1}h(x).$$

L'invariance du fibré horizontal par l'action de G se traduit par la relation

$$T_x h = T_{k(x)}R_{g(x)}\circ T_x k \qquad \text{pour} \quad x\in U_0,$$

$R_{g(x)}$ (resp. $L_{g(x)}$) désignant la translation à droite (resp. à gauche) par $g(x)$ sur G. Par ailleurs, la relation $h(x) = k(x)\,g(x)$ donne, par dérivation,

$$T_x h = T_{k(x)}R_{g(x)}\circ T_x k + T_{g(x)}L_{k(x)}\circ T_x g \qquad \text{pour} \quad x\in U_0.$$

En comparant ces deux relations, nous obtenons $T_x g = 0$ pour tout $x\in U_0$, ce qui montre que $g(x) = g$ pour tout $x\in U_0$. Nous pouvons donc prolonger φ en un isomorphisme de fibrés principaux de $(U_0\times G, p_1, U_0)$ sur $(U_0\times G, p_1, U_0)$ en posant

$$\varphi(x, g) = (x, k(x)\,g) \qquad \text{pour} \quad (x, g)\in U_0\times G.$$

Cet isomorphisme est aussi un isomorphisme de fibrés principaux à connexion, ce qui montre que la connexion sur μ est plate.

(C) **Réductibilité des variétés riemanniennes.**

Nous entendrons par variété riemannienne la donnée d'un couple (X, g) formé d'une C^r-variété ($r = \infty$ ou ω, pour simplifier) paracompacte modelée sur un espace de Hilbert séparable E et d'une métrique riemannienne g sur τ_X. Nous omettrons d'écrire g, le plus souvent. Nous supposerons X connexe dans ce qui suit. Soit a un point fixé de X, et soit $H(a)$ le groupe d'holonomie (linéaire) en a de l'unique connexion riemannienne associée à g. Nous disons que X est réductible ou irréductible selon que $H(a)$ opère de façon réductible ou irréductible sur T_aX, c'est-à-dire selon qu'il existe ou qu'il n'existe pas de sous-espace fermé, propre de T_aX, stable par $H(a)$.

Si X est réductible, et si T'_a est un sous-espace fermé propre, stable par $H(a)$, le transport par parallélisme de T'_a le long d'un chemin joignant a à un point $x \in X$ fournit un sous-espace T'_x de $T_x X$ qui est indépendant du chemin. Il est facile de voir que l'ensemble T' des T'_x pour $x \in X$ est un sous-fibré intégrable de TX. Le supplémentaire orthogonal T'' de T' dans TX jouit des mêmes propriétés. A l'aide du théorème 2.3, de la nullité de la torsion de la connexion et de l'invariance de g par parallélisme, on montre facilement :

PROPOSITION 3.1. — *Pour tout point $x \in M$, il existe une carte feuilletante pour les sous-fibrés T' et T'' de τ_X, $\varphi : U \to O' \times O''$ qui soit une isométrie, U étant muni de la métrique induite par g, et $O' \times O''$ de la métrique produit de métriques g' et g'' sur O' et O'' respectivement ($O' \times O''$ ouvert de $E = E' \times E''$).*

THÉORÈME 3.3. — *Soit (X, g) une variété riemannienne simplement connexe, et soit $a \in X$.*

(*a*) *Il existe une famille, unique à l'indexation près, $\{T^0_a, T^i_a, i \in I\}$ de sous-espaces fermés de $T_a X$, orthogonaux deux à deux, stables par le groupe d'holonomie $H(a)$, les T^i_a étant irréductibles, et T^0_a étant le sous-espace des vecteurs invariants par $H(a)$, dont la somme hilbertienne soit $T_a X$.*

(*b*) *Pour tout $i \in I$, il existe une décomposition de $H(a)$ en un produit direct de sous-groupes distingués $H(a) = H_0(a) \times H_i(a) \times K_i(a)$, $H_0(a)$ étant le sous-groupe formé des éléments opérant trivialement sur $T_a X$, $H_i(a)$ opérant trivialement sur T^j_a pour $j \neq i$, et de manière irréductible sur T^i_a, $K_i(a)$ opérant de manière triviale sur T^i_a. Cette décomposition est unique.*

La preuve de la partie (*a*) utilise le théorème de Zorn pour l'existence. La partie (*b*) peut alors être établie à l'aide du lemme de factorisation [12]. L'unicité affirmée dans la partie (*a*) peut enfin être montrée par une méthode analogue à celle utilisée pour la démonstration du théorème 5.4, chapitre IV de [9].

THÉORÈME 3.4. — *Soit (X, g) une variété riemannienne complète et simplement connexe, et soit $I_0 = I \cup \{0\}$ (réunion disjointe) l'ensemble d'indices introduit dans le théorème précédent. Il existe un système projectif $((X_J)(p_{JK}))$ de variétés riemanniennes complètes et simplement connexes relatif à l'ensemble des parties de I_0 et une famille de morphismes $p_J : X \to X_J$ pour $J \in \mathfrak{P}(I_0)$ tels que :*

1° *pour $K \subset J \subset I_0$, on ait $p_K = p_{KJ} \circ p_J$;*

2° *si $J_1, \ldots, J_n$ est une partition finie de I_0, $(p_{J_1}, \ldots, p_{J_n})$ soit une isométrie de X sur $X_{J_1} \times \ldots \times X_{J_n}$;*

3° *$X_{\{i\}}$ soit irréductible pour $i \in I$ et $X_{\{0\}}$ soit un espace de Hilbert.*

Si I est fini, on retrouve la décomposition de DE RHAM.

La démonstration de ce résultat peut être facilement calquée sur une des démonstrations en dimension finie. Les observations suivantes s'avèrent utiles. Dans une variété riemannienne complète (en tant qu'espace métrique), on peut toujours développer une courbe donnée dans un espace tangent en un point arbitraire. En particulier, la connexion riemannienne est pleine en ce sens que les géodésiques peuvent être définies sur tout $\mathbf{R}$. Une isométrie (au sens des distances) de variétés riemanniennes de classe C^r est de classe C^r. Enfin, la dernière assertion découle du lemme suivant.

LEMME 3.2. — *Une variété riemannienne connexe X_0, dont le groupe d'holonomie est trivial, est localement isométrique à un espace de Hilbert.*

Pour établir ce lemme, on peut faire usage de l'expression de la métrique « en coordonnées polaires ». Soient $x_0 \in X_0$, $\varphi = (U, \varphi, E)$ une carte normale en x_0, S la sphère unité de E, $\pi : \mathbf{R} \times S \to E$ l'application $(t, p) \to tp$ et $O = \pi^{-1}(\varphi(U))$. Notons $(\,|\,)$ le produit scalaire de E, et soit $(x, u) \to (g(x)\,u \mid u)$ la métrique transportée par φ sur $\varphi(U)$, $g : \varphi(U) \to L(E, E)$ étant un C^r-morphisme (à valeurs dans le cône des opérateurs symétriques définis positifs). Pour $(t, p) \in O$, nous pouvons écrire, comme il est bien connu,

$$(g(\pi(t, p))\,T_{(t,p)}\pi(s, q) \mid T_{(t,p)}\pi(s, q)) = s^2 + (h(t, p)\,q \mid h(t, p)\,q)$$

pour tout $(s, q) \in T_{(t,p)}\mathbf{R} \times S$, $h : O \to L(E, E)$ étant un C^r-morphisme vérifiant $h(0, p) = 0$ pour tout $p \in S$. D'autre part, pour $E' = \mathbf{R}p$, $E'' = E'^{\perp}$, la proposition 3.1 assure qu'il existe des C^r-morphismes $g' : O' \to L(E', E')$, $g'' : O'' \to L(E'', E'')$, O' et O'' étant des voisinages ouverts de O dans E' et E'' respectivement, tels que

$$(g(x)\,(sp + y'') \mid sp + y'') = (g'(tp)\,sp \mid sp) + (g''(x'')\,y'' \mid y'')$$

pour $x = x' + x''$ avec $x' = tp \in O'$, $x'' \in O''$, $s, t \in \mathbf{R}$, $y'' \in E''$. Prenons

$$x = \pi(t, p) = tp, \qquad sp + y'' = T_{(t,p)}\pi(s, q) = sp + tq,$$

et comparons les deux expressions obtenues. Nous trouvons $g'(tp) = \mathrm{Id}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ avec $tp \in O'$, et $(h(t, p)\,q \mid h(t, p)\,q) = (g''(0)\,tq \mid tq) = t^2 \|q\|^2$, la métrique en $\varphi(x_0) = 0$ étant le produit scalaire de E. Ainsi, sur $O' \times O''$, la métrique transportée par φ coïncide avec le produit scalaire de E :

$$(g(tp)\,(sp + tq) \mid sp + tq) = s^2 + t^2 \|q\|^2 = \|sp + tq\|^2.$$

(D) Variétés presque complexes.

Une C^s-structure presque-complexe sur une C^{r+1}-variété V $(0 \leq r \leq \omega$, $0 \leq s \leq r)$ est une C^s-section J de $L(\tau_V, \tau_V)$ telle que $J \circ J = -I$, I désignant l'application identique de TV.

Si V est une variété analytique complexe (nous dirons de classe C^h et conviendrons de $\omega < h$), la multiplication par i sur chaque espace tangent définit une structure presque-complexe sur V. L'expression de J dans une carte complexe est alors constante. Une structure presque-complexe J sur une C^{r+1}-variété V est dite intégrable s'il existe sur V une structure de classe C^h compatible avec la structure C^{r+1} de V telle que J dérive de la structure complexe.

PROPOSITION 3.2. — *Si $f : V \to V'$ est un C^r-morphisme ($0 < r < h$) de C^h-variétés et si f est un morphisme presque-complexe, i. e. $J' \circ TF = Tf \circ J$, pour les structures presque-complexes sous-jacentes, J et J' sur V et V', alors f est un C^h-morphisme.*

Cette assertion résulte simplement du fait que l'expression g de f dans des cartes complexes arbitraires φ, φ' de V et V' respectivement est un C^1-morphisme au sens réel, et vérifie $Dg(x)(iy) = i\,Dg(x)\,y$, donc est un C^h-morphisme.

Pour tout C^r-fibré vectoriel banachique réel $\pi = (E, \pi, V)$, il existe un C^r-fibré $\pi^c = (E^c, \pi^c, V)$, dit complexifié de π, à fibres des espaces banachisables complexes, et un V-morphisme $\gamma : \pi \to \pi^c$ de C^r-fibrés vectoriels réels, caractérisés à un isomorphisme près par la propriété universelle suivante : pour tout V-morphisme $f : \pi \to \eta$ dans un fibré vectoriel $\eta = (F, \eta, V)$ de fibres des espaces banachisables complexes, il existe un morphisme $f^c : \pi^c \to \eta$, $\mathbf{C}$-linéaire sur les fibres, et un seul, tel que $f = f^c \circ \gamma$.

Si V est réduit à un point, on retrouve la notion de complexifié d'un espace vectoriel banachisable réel. On peut prendre $\pi^c = \pi \oplus_V \pi$, la multiplication par i dans $E_x \oplus E_x$ étant définie par $i(a, b) = (-b, a)$, et le monomorphisme γ étant l'injection sur le premier facteur. L'espace des C^r-sections de π^c est le complexifié de l'espace des C^r-sections de π. C'est un module sur l'anneau $C^r(V)$ des C^r-fonctions de V dans $\mathbf{C}$. Dans le cas particulier du fibré tangent τ_V d'une C^{r+1}-variété V, le module $\mathfrak{Z}^r(V)$ des C^r-sections de τ_V^c fournit des dérivations de $C^{r+1}(V)$ dans $C^r(V)$: identifiant $\mathfrak{X}^r(V)$, ensemble des C^r-champs de vecteurs (réels) de V à son image par γ dans $\mathfrak{Z}^r(V)$, nous pouvons écrire, pour $Z \in \mathfrak{Z}^r(V)$, $Z = X + iY$, avec X, $Y \in \mathfrak{X}^r(V)$ et pour $f \in C^r(V)$, $Zf = Xf + iYf$. Le crochet $\mathfrak{X}^r(V) \times \mathfrak{X}^r(V) \to \mathfrak{X}^{r-1}(V)$ se prolonge en un crochet de $\mathfrak{Z}^r(V) \times \mathfrak{Z}^r(V) \to \mathfrak{Z}^{r-1}(V)$ qui coïncide avec le crochet des dérivations associées. On dit que $\mathfrak{Z}^r(V)$ est l'ensemble des C^r-champs de vecteurs complexes sur V.

Une forme différentielle complexe de degré p sur V est une section du fibré $\mathrm{Alt}^p_{\mathbf{C}}(\tau_V^c; \mathbf{C}_V)$, où $\mathbf{C}_V$ est le fibré trivial $\mathbf{C}_V = (V \times \mathbf{C}, p_1, V)$. La propriété universelle de τ_V^c permet de considérer une p-forme différentielle sur V à valeurs dans $\mathbf{C}$ comme une p-forme différentielle complexe sur V, dite complexifiée de la forme donnée. Si F est un V-morphisme de τ_V^c dans $\tau_{V'}^c$, et si ω est une forme différentielle complexe, nous écrivons $F^*\omega$ au lieu de $\omega \circ (F \times \ldots \times F)$. L'accouplement

$$\mathrm{Alt}^p_{\mathbf{C}}(\tau_V^c; \mathbf{C}_V) \times \mathrm{Alt}^q_{\mathbf{C}}(\tau_V^c; \mathbf{C}_V) \to \mathrm{Alt}^{p+q}_{\mathbf{C}}(\tau_V^c; \mathbf{C}_V)$$

induit naturellement un produit extérieur pour les formes différentielles complexes. Enfin, si ω est une p-forme différentielle complexe sur V, de classe C^r, nous définissons une $(p+1)$-forme différentielle complexe sur V de classe C^{r-1}, et une seule, $d\omega$ telle que, pour tous C^r-champs de vecteurs complexes locaux $Z_0, Z_1, \ldots, Z_p$ sur V, nous ayons

$$d\omega(Z_0, \ldots, Z_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i Z_i(\omega(Z_0, \ldots, \hat{Z}_i, \ldots, Z_p)) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} ([Z_i, Z_j], Z_0, \ldots, \hat{Z}_i, \ldots, \hat{Z}_j, \ldots, Z_p).$$

Ainsi, pour $f \in \mathcal{C}^r(V)$ et $Z \in \mathfrak{Z}^r(V)$, nous avons $df(Z) = Zf$. On vérifie aisément les propriétés usuelles de la différentiation extérieure, en particulier l'égalité $d \circ d = 0$.

Nous nous placerons dorénavant dans le cas $r = \omega$.

PROPOSITION 3.3. — *Les données suivantes sur V sont équivalentes :*

(*a*) *une structure presque complexe J;*

(*b*) *un sous-fibré M de τ_V^c tel que $M \cap \overline{M} = (0)$, $M + \overline{M} = TV^c$;*

(*c*) *un projecteur $P : TV^c \to TV^c$ tel que $\overline{P} = \tilde{I} - P$.*

Nous avons indiqué dans cette proposition la conjugaison de façon habituelle, en surlignant : pour $Z \in TV^c$, $Z = X + iY$, $\overline{Z} = X - iY$; pour $M \subset TV^c$, $\overline{M} = \{ \overline{Z}, Z \in M \}$; pour $P \in L(\tau_V^c, \tau_V^c)$ $\overline{P}(Z) = \overline{P(\overline{Z})}$.

La preuve de la proposition 3.3 est immédiate. Étant donnée la structure presque complexe J, il existe un unique morphisme $\tilde{J} : \tau_V^c \to \tau_V^c$ tel que $\gamma \circ J = \tilde{J} \circ \gamma$. Si l'on note $\tilde{I}$ l'application identique de TV^c, on a $\tilde{J} \circ \tilde{J} = -\tilde{I}$. Considérons maintenant l'application identique I de τ_V dans τ_V comme un morphisme à valeurs dans un fibré vectoriel complexe. Soit I^c le morphisme $\mathbf{C}$-linéaire de τ_V^c dans τ_V tel que $I^c \circ \gamma = I$. Le noyau M de I^c est un sous-fibré complexe de TV^c vérifiant $M \cap \overline{M} = (0)$, $M + \overline{M} = TV^c$, car

$$M = \{(X, Y), X + JY = 0\} = \{ Z \in TV^c, \tilde{J}Z = iZ \}.$$

La donnée d'un sous-fibré complexe M de TV^c, vérifiant $M + \overline{M} = TV^c$, $M \cap \overline{M} = (0)$, équivaut à la donnée de deux projecteurs P et Q de TV^c sur M et $\overline{M}$ respectivement, avec $Q = I - P$, $Q = \overline{P}$, comme on le voit immédiatement.

La donnée d'un projecteur P sur TV^c vérifiant $\overline{P} = \tilde{I} - P$ permet de définir un endomorphisme $\tilde{J}$ de TV^c, en posant $\tilde{J} = i(2P - \tilde{I})$. Puisque $P^2 = P$, nous avons $\tilde{J}^2 = -\tilde{I}$, et puisque $\overline{P} = \tilde{I} - P$, nous avons $\overline{\tilde{J}} = J$, de sorte que $\tilde{J}$ est le complexifié d'un endomorphisme J de TV, qui vérifie évidemment $J^2 = -I$.

Un champ de vecteurs complexe Z sur (V, J) est dit de type $(1, 0)$ s'il est inclus dans M, c'est-à-dire si $PZ = Z$ ou encore $\tilde{J}Z = iZ$ ou encore $QZ = 0$. Un champ de vecteurs complexes est dit de type $(0, 1)$ s'il est inclus dans $\overline{M}$. Tout champ de vecteurs complexe Z se décompose donc en la somme de champs de vecteurs PZ et QZ de type $(1, 0)$ et $(0, 1)$ respectivement.

Une 1-forme différentielle complexe ω sur (V, J) est dite de type $(1, 0)$ si $\tilde{J}^* \omega = i\omega$, ce qui équivaut encore à $Q^*\omega (= \omega \circ Q) = 0$ ou encore à $P^*\omega (= \omega \circ P) = \omega$. En particulier, la complexifiée d'une 1-forme différentielle α sur V, à valeur dans $\mathbf{C}$ vérifiant $\alpha(JX) = i\alpha(X)$ pour tout $X \in TV$ est une 1-forme différentielle complexe de type $(1, 0)$. Plus généralement, une n-forme différentielle complexe ω sur V est dite de type (p, q), avec $p + q = n$, si ω s'annule sur tout n-uplet de champs de vecteurs complexes formés de p' champs de type $(1, 0)$ et de q' champs de type $(0, 1)$ avec $p' \neq p$, $q' \neq q$. Il en est ainsi si, et seulement si, $\omega \circ P^{p'} \times Q^{q'} = 0$ pour $p' \neq p$, $q' \neq q$, $p' + q' = n$, ou encore, si, et seulement si, $\omega = \mathrm{Alt}\,(\omega \circ (P^p \times Q^q))$. Toute forme différentielle complexe de degré n se décompose en la somme de formes différentielles complexes de type (p, q), avec $p + q = n$, $0 \leq p \leq n$, $0 \leq q \leq n$. Les notions précédentes pourraient être définies pour des formes différentielles complexes à valeurs dans un fibré vectoriel complexe sur V.

Avant d'énoncer le résultat essentiel de ce paragraphe, introduisons, pour un endomorphisme $\mathbf{C}$-linéaire A de τ_V^c, la section $\tilde{N}_A$ de $L^2_{\mathbf{C}}(\tau_V^c; \tau_V^c)$ définie, pour tous champs de vecteurs complexes locaux Z, W sur V, par

$$\tilde{N}_A(Z, W) = [AZ, AW] + A^2[Z, W] - A[Z, AW] - A[AZ, W].$$

Si A est l'endomorphisme complexifié d'un endomorphisme B de τ_V, N_A est le morphisme bilinéaire complexifié du morphisme N_B défini dans la deuxième partie.

THÉORÈME 3.5. — *Pour une variété presque complexe (V, J) de classe C^ω, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *la structure presque complexe J est intégrable;*

(2) $N_J = 0$;

(3) *pour toute fonction f du faisceau des fonctions analytiques locales de V dans* $\mathbf{R}$, $dJ^* df = J^* dJ^* df$;

(4) $\tilde{N}_{\mathcal{J}} = 0$;

(5) $\tilde{N}_P = 0$;

(6) *le faisceau des champs de vecteurs complexes locaux de type* (1, 0) *est un faisceau en algèbres de Lie;*

(7) *pour toute forme différentielle complexe locale ω de type (p, q), $d\omega$ est somme de formes de type $(p+1, q)$ et de formes de type $(p, q+1)$*;

(8) *pour toute forme différentielle complexe locale ω de type* (1, 0), *$d\omega$ est somme d'une forme de type* (2, 0) *et d'une forme de type* (1, 1).

Nous avons omis d'écrire les assertions conjuguées :

($\bar{5}$) $\tilde{N}_Q = 0$;

($\bar{6}$) le faisceau des champs de vecteurs complexes locaux de type (0, 1) est un faisceau en algèbres de Lie;

($\bar{8}$) pour toute forme différentielle complexe ω de type (0, 1), $d\omega$ est somme d'une forme de type (1, 1) et d'une forme de type (0, 2).

Ces assertions sont encore équivalentes aux précédentes.

Preuve.

(1) $\Rightarrow$ (2). Pour vérifier que $N_J = 0$, il suffit, si J dérive d'une structure complexe sur V, de vérifier que $N_J(X, Y) = 0$ pour tous champs de vecteurs locaux de classe C^h. Or, pour de tels champs, on a $[JX, Y] = J[X, Y] = [X, JY]$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3). Il est facile de voir que, pour tous champs de vecteurs locaux (de classe C^ω) X et Y sur V, on a

$$(dJ^* df)(X, Y) - (J^* dJ^* df)(X, Y) = (JN_J(X, Y))f.$$

L'équivalence résulte alors du théorème de Hahn-Banach et de l'égalité $J^2 = -I$.

(2) $\Rightarrow$ (4). En effet $\tilde{N}_{\mathcal{J}}$ est le complexifié de N_J.

(4) $\Rightarrow$ (5). En substituant à $\tilde{J}$ sa valeur $i(2P - \tilde{I})$ dans la relation de définition de $\tilde{N}_{\mathcal{J}}$, nous trouvons, pour tous champs de vecteurs complexes locaux Z et W,

$$\begin{aligned}&\tilde{N}_{\mathcal{J}}(Z, W)\\ &\quad = -4([PZ, PY] + P[Z, W] - P[Z, PW] - P[PZ, W])\\ &\quad = -4\tilde{N}_P(Z, W).\end{aligned}$$

(5) $\Leftrightarrow$ ($\bar{5}$). En effet $\tilde{N}_Q(Z, W) = \tilde{N}_{\bar{P}}(Z, W) = \overline{\tilde{N}_P(\bar{Z}, \bar{W})}$.

$(5) \Rightarrow (6)$. Pour tous champs de vecteurs complexes locaux Z et W, nous avons $Q[PZ, PW] = Q\tilde{N}_P(Z, W)$, car $Q \circ P = 0$. Nous avons aussi $(5) \Rightarrow (\bar{6})$ en vertu de l'égalité

$$\begin{aligned} &P[QZ, QW] \\ &\quad = P[PZ, PW] + P[Z, W] - P[Z, PW] - P[PZ, W] \\ &\quad = P\tilde{N}_P(Z, W), \end{aligned}$$

obtenue en remplaçant Q par $\tilde{I} - P$. Mais ceci résulte aussi de l'équivalence directe de (6) et de $(\bar{6})$ par conjugaison.

$(6) \Rightarrow (7)$. Il suffit d'observer que le second membre de la formule

$$\begin{aligned} d\omega(Z_0, \ldots, Z_n) = &\sum_{i=1}^{n} (-1)^i Z_i \omega(Z_0, \ldots, \hat{Z}_i, \ldots, Z_n) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([Z_i, Z_j], Z_0, \ldots, \hat{Z}_i, \ldots, \hat{Z}_j, \ldots, Z_n) \end{aligned}$$

est nul dès que $(Z_0, \ldots, Z_n)$ est un $(n+1)$-uplet formé de p' (resp. q') champs de vecteurs complexes locaux de type $(1, 0)$ [resp. $(0, 1)$] avec $p' \neq p$ ou $p' \neq p + 1$. Ceci utilise le fait que $[Z_i, Z_j]$ est du type commun à Z_i et Z_j lorsque Z_i et Z_j sont du même type, c'est-à-dire les assertions (6) et $(\bar{6})$ à la fois.

$(7) \Rightarrow (8)$ et $(7) \Rightarrow (\bar{8})$ étant des implications évidentes, il nous suffit de montrer les implications $(8) \Rightarrow (\bar{6})$ et $(6) \Rightarrow (1)$ pour achever la démonstration.

$(8) \Rightarrow (\bar{6})$. Soient Z et W des champs de vecteurs complexes locaux de type $(0, 1)$: $Z = QZ$, $W = QW$. Pour montrer que $P[QZ, QW] = 0$, il suffit, d'après le théorème de Hahn-Banach, de prouver que, pour toute forme différentielle complexe locale ω, on a $\omega(P[QZ, QW]) = 0$. Il suffit même de le faire pour une forme de type $(1, 0)$. En vertu de l'assertion (8), pour une telle forme, on a $d\omega(QZ, QW) = 0$, donc

$$\omega(P[QZ, QW]) = \omega([QZ, QW]) = (QZ)(\omega(QW)) - (QW)(\omega(QZ)) = 0$$

puisque ω est de type $(1, 0)$. La preuve de $(\bar{8}) \Rightarrow (6)$ est similaire.

$(6) \Rightarrow (1)$. En vertu de la proposition 3.2, il nous suffit de montrer que, pour tout $x_0 \in V$, il existe une carte (φ, U, E_0) en x_0, E_0 étant un espace de Banach complexe, qui soit un morphisme presque-complexe. Nous pouvons donc nous ramener au cas où V est un ouvert d'un espace de Banach réel E, et $x_0 = 0$, J étant donné par un C^ω-morphisme $J : V \to L(E, E)$. Nous pouvons prolonger le complexifié $J^c : V \to L_{\mathbf{C}}(E^c, E^c)$ de J en un C^h-morphisme défini sur un voisinage ouvert connexe $V_1 \times V_2$ de $(0, 0)$ dans $E^c = E \times E$, morphisme que nous noterons F. Le principe du prolongement analytique nous assure que $F(x, y) \circ F(x, y) = -\tilde{I}$, application identique de E^c pour tout $(x, y) \in V_1 \times V_2$, et que le projecteur $\frac{1}{2}(\tilde{I} - iF)$ prolongeant P est intégrable sur $V_1 \times V_2$, les relations $P[QZ, QW] = 0$, $Q[PZ, PW] = 0$ étant vérifiées pour tous les champs de vecteurs complexes locaux Z et W sur V. En effet, il est facile de vérifier que si $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ sont deux champs de vecteurs de classe C^h sur $V_1 \times V_2$, et si les champs de vecteurs complexes A et B, définis par leur restriction à $V_1 \times \{0\}$, sont tels que $[A, B] = 0$, alors $[\tilde{A}, \tilde{B}] = 0$. Plus généralement, si G est un C^h-morphisme de $V_1 \times V_2$ dans $L_{\mathbf{C}}(E^c, E^c)$, et si $G[A, B] = 0$, sur $V_1 \times \{0\}$, alors $G[\tilde{A}, \tilde{B}] = 0$. C'est ce fait dont nous usons ici. Le théorème 2.3, dans le cas C^1 au sens complexe, assure qu'il existe un voisinage $U_1 \times U_2$ de $(0, 0)$ et un C^1-isomorphisme (au sens complexe) (f, g), de $U_1 \times U_2$ dans $E \times E$, appliquant $\frac{1}{2}(\tilde{I} - iF)$ sur le projecteur constant $\frac{1}{2}(\tilde{I} - iF(0, 0))$ et dont la différentielle en $(0, 0)$ soit $\tilde{I}$. En particulier, pour tout $x \in U_1$, nous avons

$$\begin{pmatrix} D_1 f(x, 0) & D_2 f(x, 0) \\ D_1 g(x, 0) & D_2 g(x, 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & J(x) \\ -J(x) & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & J(0) \\ -J(0) & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 f(x, 0) & D_2 f(x, 0) \\ D_1 g(x, 0) & D_2 g(x, 0) \end{pmatrix}$$

et l'égalité $D_1 g = -D_2 f$ entraîne que $D_1 f(x, 0) \circ J(x) = J(0) \circ D_1 f(x, 0)$. Puisque $D_1 f(0, 0) = I$, l'application $x \to f(x, 0)$ est un difféomorphisme d'un voisinage U de 0 dans U_1 sur son image dans E, appliquant J sur $J(0)$.

C. Q. F. D.

On trouvera dans [5], [12] et [23] d'autres résultats liant structures presque-complexes et connexions. En attendant un analogue du théorème de Newlander-Nirenberg [13] dans le cas banachique, on pourra, en suivant Lichnerowicz, appeler variétés quasi-complexes les variétés munies d'une structure presque-complexe intégrable dans le cas C^r, $0 < r < \omega$.

APPENDICE.

Cet appendice est consacré à une preuve directe d'un théorème de Frobenius, par la méthode des approximations successives d'une part, et par la méthode des séries majorantes d'autre part, dans le cas analytique. De façon précise, nous montrerons, sous les hypothèses du théorème 1.1, l'existence et la continuité de la solution α et de sa dérivée partielle $D_1 \alpha$, ainsi que l'appartenance à la classe C^r des applications partielles $x \to \alpha(x, y)$. Les données initiales et les paramètres jouant un rôle équivalent (les uns pouvant être transformés dans les autres par un changement d'équation), il revient au même d'établir l'énoncé suivant.

Soient E, F, G des espaces de Banach, O un ouvert de $F \times G$, $f : O \to L(E, F)$ un C^r-morphisme ($r \geq 1$) tel que, pour tous $(y, z) \in O$, $(a, b) \in E \times E$, on ait

$$\text{(Frob)}\ D_1 f(y, z).f(y, z).a.b = D_1 f(y, z).f(y, z).b.a.$$

Pour tous $x_0 \in E$, $(y_0, z_0) \in O$, il existe des voisinages U et W de x_0 et z_0 respectivement, et une application continue $\alpha : U \times W \to F$, telle que, pour tout $z \in W$, l'application α_z définie par $\alpha_z(x) = \alpha(x, z)$ soit de classe C^r et que

$$\begin{cases} D\alpha_z(x) = f(\alpha_z(x), z) & \text{pour tout } (x, z) \in U \times W, \\ \alpha_z(x_0) = y_0 & \text{pour tout } z \in W. \end{cases}$$

En fait, nous établirons que si f est de classe $C^{r,0}$, α est de classe $C^{r,0}$. Si $r < \omega$, ceci signifie que $D_1^p f$ existe et est continu sur O pour $p \in \mathbf{N}$, $p \leq r$; si $r = \omega$ ceci signifie que, pour tout $(y_0, z_0) \in o$, il existe des nombres $a > 0$, $M > 0$ et des applications continues

$$f_n : B(z_0, a) \to L_s^n(F, L(E, F))$$

avec

$$\sum_{n \geq 1} \| f_n(z) \| a^n \leq M \qquad \text{pour} \quad z \in B(z_0, a),$$

$$f(y, z) = \sum_{n \geq 1} f_n(z)(y)^n \qquad \text{pour} \quad (y, z) \in B(y_0, a) \times B(z_0, a).$$

Traitons d'abord le cas analytique (nous prenons $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ dans ce qui suit). S'il existe une solution $\alpha(x, z) = \sum_{n \geq 1} g_n(z)(x)^n$ de classe $C^{\omega,0}$ sur un voisinage de $(0, 0)$ dans $E \times G$, cette solution est unique, car le développement $(g_n(z))$, $n \geq 1$, est caractérisé par les relations $g_n(z) = p_n(0, z)$, où $p_n(y, z) \in L^n(E, F)$ est déterminé par

$$p_{n+1}(y, z).(a_0, a_1, \ldots, a_n) = D_1 p_n(y, z)(f(y, z).a_0).(a_1, \ldots, a_n)$$
$$\text{pour} \quad a_0, a_1, \ldots, a_n \in E \qquad \text{et} \qquad p_1(y, z) = f(y, z),$$

Il importe de montrer que $g_n(z)$ ainsi définie est une application n-linéaire symétrique, ce qui se fait par récurrence sur n, compte tenu de la relation (Frob), par passage de n à $n + 2$. D'autre part, $p_n(0, z)$ est une fonction polynomiale (combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de produits de composition) de $(f_0(z), \ldots, f_{n-1}(z))$. Par suite,

$\| g_n(z) \| = \| p_n(0, z) \|$ est majoré par la valeur en $(\| f_0(z) \|, \ldots, \| f_{n-1}(z) \|)$ du polynôme en n variables réelles correspondant. Cette valeur est elle-même majorée par la valeur prise en $\left(M, \frac{M}{a}, \ldots, \frac{M}{a^n}\right)$, puisque $\| f_k(z) \| \leq \frac{M}{a^k}$ pour $\| z \| \leq a$. Cette dernière valeur est le coefficient du terme de degré n dans le développement en série de la solution

$$Y = a(1 - \sqrt{1 - 2(MX/a)})$$

de l'équation différentielle ordinaire $DY(X) = M/(1 - (Y(X)/a))$ dont le second membre est une majorante de celui de l'équation donnée. Ainsi, pour $b < a/2M$, nous avons $\sum_{n \geq 1} \| g_n(z) \| b^n < \infty$, ce qui permet de définir la solution $\alpha(y, z) = \sum_{n \geq 1} g_n(z)(y)^n$. Cette méthode peut être aisément modifiée pour appréhender le cas C^ω au lieu du cas $C^{\omega,0}$.

Pour établir le résultat désiré dans le cas C^r, $r < \omega$, il suffit de le faire pour $r = 1$, une récurrence complétant la démonstration, de façon classique, pour $r > 1$. Nous utiliserons le lemme de contraction suivant, qui se réduit au lemme de contraction usuel lorsque $M_1 = M$, et que M' est constitué d'un seul point.

LEMME. — *Soient (M, d), (M', d') des espaces métriques complets, $T : M \rightarrow M$, $S : M \rightarrow M'$ des applications lipschitziennes de rapport K et L respectivement, avec $0 \leq K < 1$. Soit $D : M_1 \rightarrow M'$ une application définie sur une partie non vide M_1 de M telle que $T(M_1) \subseteq M_1$. Si :*

(a) le graphe de D est fermé dans $M \times M'$;

(b) $d'(DTy, Sy) \leq Kd'(Dy, Sy)$ pour tout $y \in M_1$,

il existe un point $y_\infty \in M_1$ tel que $Ty_\infty = y_\infty$ et $Dy_\infty = Sy_\infty$.

Preuve. — Prenons $y_0 \in M_1$, et posons $y_{n+1} = Ty_n$ pour $n \geq 0$. Pour $N = d(Ty_0, y_0)$ nous obtenons, par récurrence, $d(y_{n+1}, y_n) \leq NK^n$. Ainsi $(y_n)_{n \geq 0}$ converge vers un point $y_\infty \in M$, et $(Sy_n)_{n \geq 0}$ vers Sy_∞. Puisque $T(M_1) \subset M_1$, y_n est dans M_1 pour tout $n \geq 0$. De la relation

$$d'(Dy_{n+1}, Sy_n) \leq Kd'(Dy_n, Sy_n) \leq Kd'(Dy_n, Sy_{n-1}) + KLd(y_{n-1}, y_n),$$

nous déduisons par récurrence sur n que

$$d'(Dy_{n+1}, Sy_n) \leq K^n N' + nK^n LN, \qquad n \geq 0$$

avec $N' = d'(Dy_1, Sy_0)$. Ainsi (y_∞, Sy_∞) est la limite de (y_n, Dy_n), donc appartient au graphe de D. Puisque $Ty_\infty = y_\infty$, nous avons la conclusion cherchée.

Avant d'appliquer ce lemme, nous fixons des nombres $a \in]0, 1[$, $L \geq 1$, $b = a/L$, tels que $\| f(y, z) \| \leq L$ et $\| D_1 f(y, z) \| \leq L$ pour $\| y \| \leq a$, $\| z \| \leq b$, c'est-à-dire $(y, z) \in B'_a(F) \times B'_b(G)$. Prenons pour M

l'espace des applications continues de $B_b(E)\times B_a(G)$ dans $B'_a(F)$ qui s'annulent en o, muni de la métrique uniforme. Prenons pour M' l'espace des applications continues et bornées de $B_b(E)\times B_a(G)$ dans $L(E, F)$, muni de la métrique uniforme. Soit M_1 le sous-ensemble de M formé des applications γ ayant une dérivée partielle première continue et bornée dans $B_b(E)\times B_a(G)$, et soit D l'application $\gamma\to D_1\gamma$ de M_1 dans M'. Un corollaire du théorème de la moyenne assure que le graphe de D est fermé. Posons, pour $(x, z)\in B_b(E)\times B_a(G)$, $\gamma\in M$,

$$T\gamma(x, z) = \int_0^1 f(\gamma(tx, z), z).x\,dt,$$

$$S\gamma(x, z) = f(\gamma(x, z), z).$$

Nous vérifions immédiatement que $T\gamma\in M$ pour $\gamma\in M$, que $T\gamma\in M_1$ pour $\gamma\in M_1$, et que T et S sont lipschitziennes de rapports $K = bL=a < 1$ et L respectivement. Pour vérifier la condition (b) du lemme, prenons $\gamma\in M_1$, $(x, z)\in B_b(E)\times B_a(G)$, $h\in E$, et posons $u_t = (\gamma(tx, z), z)$ pour $t\in [0, 1]$. Nous avons

$$DT\gamma(x, z).h = \int_0^1 f(u_t).h\,dt + \int_0^1 D_1 f(u_t).D_1\gamma(tx, z).th.x\,dt,$$

$$S\gamma(x, z).h = f(u_1).h = \int_0^1 t\frac{d}{dt}(f(u_t).h)\,dt + \int_0^1 f(u_t).h\,dt,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} &DT\gamma(x, z).h - S\gamma(x, z).h \\ &= \int_0^1 [D_1 f(u_t) D_1\gamma(tx, z).h.x - D_1 f(u_t) D_1\gamma(tx, z).x.h]\,t\,dt \\ &= \int_0^1 [D_1 f(u_t).(D_1\gamma(tx, z).h - f(u_t).h).x \\ &\qquad - D_1 f(u_t).(D_1\gamma(tx, z).x - f(u_t).x).h]\,t\,dt \end{aligned}$$

en utilisant la relation (Frob). Par suite,

$$d'(DT\gamma, S\gamma) \leq Lb\, d'(D\gamma, S\gamma) = K\, d'(D\gamma, S\gamma).$$

La conclusion du lemme assure l'existence de $\alpha\in M_1$ avec

$$D_1\alpha(x, z) = f(\alpha(x, z), z),$$

ce qu'il fallait établir.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] AMBROSE (W.) and SINGER (I. M.). — A theorem on holonomy, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 75, 1953, p. 428-443.

[2] BOURBAKI (N.). — *Variétés différentielles et analytiques*, Fascicule de résultats, paragraphes 1 à 7. — Paris, Hermann, 1967 (*Act. scient. et ind.*, 1333; *Bourbaki*, 33).

[3] CHEVALLEY (C.). — *Theory of Lie groups*. Princeton, Princeton University Press, 1946 (*Princeton mathematical series*, 8).
[4] EARLE (C. J.) and EELLS (J., Jr). — Foliations and fibrations, *J. of diff. Geom.*, t. 1, 1967, p. 33-41.
[5] ECKMANN (B.). — Sur les structures complexes et presque complexes, *Colloques internationaux du C. N. R. S. : Géométrie différentielle* [52, 1953, Strasbourg], p. 151-159. — Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1953.
[6] ECKMANN (B.) et FRÖLICHER (A.). — Sur l'intégrabilité des structures presque complexes, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 232, 1951, p. 2284-2286.
[7] ELIASSON (H. I.). — Geometry of manifolds of maps, *J. of diff. Geom.*, t. 1, 1967, p. 169-174.
[8] GODEMENT (R.). — *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. — Paris, Hermann, 1958 (*Act. scient. et ind.*, 1252; *Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg*, 13).
[9] KOBAYASHI (S.) and NOMIZU (K.). — *Foundations of differential geometry*, I. — New-York, Interscience Publishers, 1963 (*Interscience Tracts in pure and applied mathematics*, 15-I).
[10] LANG (S.). — *Introduction aux variétés différentiables*. — Paris, Dunod, 1967.
[11] LAZARD (M.). — *Leçons de calcul différentiel et intégral* (à paraître).
[12] LICHNEROWICZ (A.). — *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*. — Paris, Dunod; Rome, Cremonese, 1955 (*Travaux et Recherches mathématiques*, 2; *Consiglio nazionale delle Ricerche, Monografie matematiche*, 2).
[13] NEWLANDER (A.) and NIRENBERG (L.). — Complex analytic coordinates in almost complex manifolds, *Annals of Math.*, t. 65, 1957, p. 391-404.
[14] NIKLIBORC (W.). — Sur les équations linéaires aux différentielles totales, *Studia Math.*, t. 1, 1929, p. 41-49.
[15] PALAIS (R. S.). — *A global formulation of the Lie theory of transformation groups*. — Providence, American mathematical Society, 1957 (*Memoirs of the American mathematical Society*, 22).
[16] PALAIS (R. S.). — Lusternik-Schnirelman theory on Banach manifolds, *Topology*, t. 5, 1966, p. 115-132.
[17] PENOT (J.-P.). — Variétés différentiables d'applications et de chemins, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 264, 1967, série A, p. 1066-1068.
[18] PENOT (J.-P.). — De submersions en fibrations, Exposé du *Séminaire de Géométrie différentielle de* Mlle P. Libermann, Paris (1967).
[19] PENOT (J.-P.). — Connexion linéaire déduite d'une famille de connexions linéaires par un foncteur vectoriel multilinéaire, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 268, 1969, série A, p. 100-103.
[20] ROBBIN (J. W.). — On the existence theorem for differential equations, *Proc. Amer. math. Soc.*, t. 19, 1968, p. 1005-1006.
[21] WALKER (A. G.). — Connexions for parallel distributions in the large, *Quart. J. of Math.*, Oxford Series (2), t. 6, 1955, p. 301-308.
[22] WEIL (A.). — *Introduction à l'étude des Variétés kählériennes*, Paris, Hermann, 1958 (*Act. scient. et ind.*, 1267; *Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg*, 6).
[23] YANO (K.). — *Differential geometry on complex and almost complex spaces*. New York, Mac Millan, 1965 (*International Series of Monographs in pure and applied Mathematics*, 49).

(Texte reçu le 13 octobre 1969.)

Jean-Paul PENOT,
Département de Mathématiques,
Université de Sherbrooke,
Sherbrooke. P. Q. (Canada).