MICHELE VERGNE

Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l'étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes

Bulletin de la S. M. F., tome 98 (1970), p. 81-116
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1970__98__81_0>

Bull. Soc. math. France,
98, 1970, p. 81 à 116.

COHOMOLOGIE DES ALGÈBRES DE LIE NILPOTENTES. APPLICATION A L'ÉTUDE DE LA VARIÉTÉ DES ALGÈBRES DE LIE NILPOTENTES

PAR

MICHÈLE VERGNE.

Introduction.

A la suite de M. GERSTENHABER, plusieurs auteurs ont publié des articles consacrés à l'étude de la variété des structures algébriques d'un certain type (structure d'algèbres associatives, d'algèbres de Lie, etc.) portées par un espace vectoriel fixe V. Il est apparu qu'il y avait un rapport étroit entre l'espace tangent à cette variété en un de ses points $\mathfrak{g}$, et l'espace de 2-cohomologie $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ associé à la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$. Citons les deux théorèmes suivants, pour la variété des algèbres de Lie (démontrés par des méthodes élémentaires de géométrie algébrique) :

THÉORÈME 1. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur* V *telle que* $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0$. *Alors l'orbite de* $\mathfrak{g}$, *relativement à l'action de* $GL(V)$ *dans la variété des algèbres de Lie sur* V, *est ouverte dans cette variété.*

Le théorème s'applique évidemment aux algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ semi-simples. Signalons qu'un exemple de RICHARDSON montre que la réciproque de ce théorème est fausse.

THÉORÈME 2. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur* V, *telle que* $H^3(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0$. *Alors* $\mathfrak{g}$ *est un point simple de la variété des algèbres de Lie, et l'espace tangent en* $\mathfrak{g}$ *à cette variété, modulo l'espace tangent en* $\mathfrak{g}$ *à l'orbite de* $\mathfrak{g}$, *est exactement l'espace* $H^2(\mathfrak{g}; \mathfrak{g})$.

Ceci suggère la question suivante : S étant une partie fermée de la variété des algèbres de Lie (par exemple, celle constituée par les structures d'algèbres de Lie nilpotentes, résolubles, etc.), peut-on définir une cohomologie restreinte pour laquelle l'espace de 2-cohomologie restreinte de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$, soit l'espace tangent à S en $\mathfrak{g}$?

Ce travail répond d'une certaine façon à cette question lorsque S est la variété des algèbres de Lie nilpotentes. A l'aide de la notion d'algèbre de Lie filtrée, notion utilisable pour une algèbre de Lie nilpotente, on introduit une filtration dans l'espace de 2-cohomologie de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$. Cette filtration correspond intuitivement à celle de l'espace tangent en $\mathfrak{g}$, à la variété des algèbres de Lie, en espaces tangents aux sous-variétés emboîtées d'algèbres de Lie nilpotentes, d'indice de nilpotence inférieur ou égal à un entier donné. (En fait, on définira la filtration des espaces de cohomologie pour tout $\mathfrak{g}$-module M, et en toutes dimensions et on montrera que cette filtration est associée à une suite spectrale.)

D'autre part, l'étude des algèbres de Lie filiformes (c'est-à-dire des algèbres de Lie nilpotentes qui sont les « moins-nilpotentes » parmi les algèbres de Lie nilpotentes) et de leurs espaces de 2-cohomologie nilpotente permet d'obtenir des résultats sur les dimensions des composantes irréductibles de la variété des algèbres de Lie nilpotentes. On montrera qu'il existe au moins deux telles composantes irréductibles distinctes de dimensions relativement petites ($\leqq 5\,n^2/4$ si $n = \dim V$).

Compte tenu des résultats obtenus précédemment [6], où la considération des algèbres de Lie nilpotentes, « les plus » nilpotentes parmi les algèbres nilpotentes (two-step nilpotent Lie algebras), montrait l'existence d'une composante irréductible de grande dimension ($\geqq 2n^3/27$), on voit que la variété des algèbres de Lie nilpotentes admet au moins trois composantes irréductibles, dès que n est assez grand.

Enfin, on construira de manière purement homologique de nouveaux espaces de cohomologie p-nilpotente, qui sont reliés aux sous-espaces définis par la filtration des espaces de cohomologie ordinaire par une suite exacte.

Résumons le contenu de chaque chapitre.

Chapitre 0 : *Préliminaires.* — On reprend les définitions des opérations algébriques : cup-*produit* et *produit intérieur* sur les applications multilinéaires alternées d'un espace V dans un autre, introduites par M. Gerstenhaber.

Ces opérations permettent d'écrire simplement les équations algébriques, définissant la variété des algèbres de Lie, ou la variété des représentations d'une algèbre de Lie dans un espace vectoriel, et l'opérateur cobord du complexe de cohomologie d'une algèbre de Lie.

Chapitre 1 : *Algèbres de Lie filtrées.* — Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie filtrée, on peut alors filtrer l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, les représentations de $\mathfrak{g}$, les résolutions cohomologiques de K dans la catégorie des $\mathfrak{g}$-modules; on établit l'existence de sous-complexes acycliques de la résolution de Koszul et de la résolution normalisée standard.

Ce résultat sera utilisé dans le chapitre 5. Enfin, on déterminera la structure des algèbres filiformes graduées : le résultat sera constamment utilisé dans le chapitre 4.

CHAPITRE 2 : *Algèbres de Lie filtrées. Suite spectrale.* — Le complexe de cohomologie de Koszul d'une algèbre de Lie filtrée, dans un module filtré M, est naturellement filtré, et cette filtration donne naissance à une suite spectrale.

On donnera une interprétation des deux premiers termes de cette suite spectrale en fonction :

— des espaces de cohomologie de l'algèbre de Lie $\mathrm{gr}\,\mathfrak{g}$ associée à la filtration de $\mathfrak{g}$, à valeurs dans le module gradué $\mathrm{gr}\,M$, associé au module filtré M;

— de la 2-classe de cohomologie $\xi \in H^{1,1}(\mathrm{gr}\,\mathfrak{g}, \mathrm{gr}\,\mathfrak{g})$, définie par la filtration de $\mathfrak{g}$;

— et d'un autre objet e, défini par les filtrations de M et de $\mathfrak{g}$.

CHAPITRE 3 : *Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes.* — Dans le cas de la filtration canonique d'une algèbre de Lie nilpotente, on donne une interprétation de la filtration définie au chapitre 2 sur l'espace $H^2(\mathfrak{g}, M)$, où M est un $\mathfrak{g}$-module nilpotent.

On montre que $H^2(\mathfrak{g}, M)_{-p}$ coïncide avec les classes de cohomologie p-nilpotentes, c'est-à-dire avec les classes de cohomologie définissant des extensions p-nilpotentes (c'est-à-dire d'indice de nilpotence inférieur ou égal à p) de $\mathfrak{g}/\mathcal{C}^p(\mathfrak{g})$ par $M^{\mathfrak{g}^p} = \{ m \in M \text{ tel que } \mathfrak{g}^p.m = 0 \}$. Si β est un cocycle quelconque représentant h, on donne une condition de p-nilpotence nécessaire et suffisante, que doit vérifier β pour que h soit p-nilpotente.

CHAPITRE 4 : *Applications géométriques.* — Les équations définissant la variété des algèbres de Lie nilpotentes montrent que l'espace tangent en un point $\mathfrak{g}$ à la variété des algèbres de Lie nilpotentes, modulo l'espace tangent à l'orbite de $\mathfrak{g}$, est un sous-espace de l'espace de cohomologie des classes $(n-1)$-nilpotentes de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$. On obtient alors le corollaire 3 qui est l'analogue du théorème 1 cité dans l'introduction (on peut donner des exemples d'algèbres de Lie nilpotentes dont l'orbite est ouverte dans la variété des algèbres de Lie nilpotentes. Toutefois il ne semble pas possible, si V est de dimension $\geqq 7$, de trouver une algèbre de Lie dont l'orbite soit ouverte dans la variété des algèbres de Lie nilpotentes).

L'essentiel du chapitre est alors consacré à l'étude du sous-espace des classes de cohomologie $(n-1)$-nilpotentes des algèbres de Lie filiformes. On obtient ainsi des résultats assez précis sur les dimensions des composantes irréductibles de la variété des algèbres de Lie nilpotentes, rencontrant l'ouvert des filiformes.

CHAPITRE 5 : *Cohomologie p-nilpotente.* — En s'inspirant de la définition des espaces de cohomologie ordinaire d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ à valeurs dans un $\mathfrak{g}$-module M, comme foncteurs dérivés du foncteur qui à M associe l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}\text{-module}}(K, M)$, on définit, si M est un $\mathfrak{g}$-module p-nilpotent (c'est-à-dire tel que $\mathfrak{g}^p.M = 0$), les espaces de cohomologie $N_p^n(\mathfrak{g}, M)$. On obtient ainsi de nouveaux espaces de cohomologie p-nilpotente. Les cocycles pour ces espaces sont en gros les cocycles $\beta : \Lambda^n V \to M$ qui, étendus à l'espace $\overset{n}{\bigotimes} I$, se factorisent en fait par $\overset{n}{\bigotimes} I/I^p$ (I désigne l'idéal engendré par $\mathfrak{g}$ dans son algèbre enveloppante). On montre que l'image canonique de l'espace $N_p^2(\mathfrak{g}, M)$ dans $H^2(\mathfrak{g}, M)$ n'est autre que le sous-espace des classes de cohomologie p-nilpotentes.

0. Préliminaires et notations.

1. Cup-produit et produit intérieur.

Rappelons quelques définitions ([2]).

Soit K un corps commutatif, et soient V, M, N, P des espaces vectoriels sur K. Supposons donnée une application bilinéaire φ de $M \times N$ dans P.

Notons $C^n(V, M)$ l'espace $\mathrm{Hom}_K(\Lambda^n V, M)$ des applications n-multilinéaires alternées de V dans M. Alors on peut définir une application bilinéaire de $C(V, M) = \sum C^n(V, M) \times C(V, N)$ dans $C(V, P)$ appelée cup-*produit.*

Rappelons sa définition :

Soient $f \in C^n(V, M)$ et $g \in C^m(V, N)$, alors le cup-produit de f et g, noté $f \smile g$, appartient à $C^{n+m}(V, P)$, et est défini de la manière suivante :

Soit $S[1, n+m]$ le groupe des permutations de l'ensemble des $n+m$ éléments $\{1, 2, \ldots, n+m\}$.

Soit $S[1, n] \times S[n+1, n+m]$ le sous-groupe de $S[1, n+m]$ formé des permutations laissant invariant chacun des sous-ensembles $\{1, \ldots, n\}$ et $\{n+1, \ldots, n+m\}$, et soit $\sigma_\alpha (\alpha \in A)$ un système de représentants des classes à gauche de $S[1, n+m]$ suivant le sous-groupe

$$S[1, n] \times S[n+1, n+m] :$$

alors on pose

$$f \smile g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n+m})$$
$$= \sum_{\alpha \in A} \varepsilon(\sigma_\alpha)\, \varphi(f(x_{\sigma_\alpha(1)}, \ldots, x_{\sigma_\alpha(n)}) \otimes g(x_{\sigma_\alpha(n+1)}, \ldots, x_{\sigma_\alpha(n+m)})),$$

où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ.

En particulier, soit A une algèbre sur K, alors, grâce à l'application produit de $A \otimes A$ dans A, on peut munir $C(V, A)$ d'une structure d'algèbre graduée; si A est associative, le cup-produit est associatif, et si M est un A-module, alors $C(V, M)$ est muni d'une structure de module gradué sur $C(V, A)$.

D'autre part, on peut définir une loi de composition sur l'espace $C(V, V)$ appelée *produit intérieur*. Si $f \in C^n(V, V)$ et $g \in C^m(V, V)$, alors $f.g \in C^{n+m-1}(V, V)$, et est défini par la formule suivante : Si $\sigma_\alpha (\alpha \in A)$ est un système de représentants des classes à gauche de $S[1, n+m-1]$ suivant le sous-groupe $S[1, m] \times S[m+1, m+n-1]$, alors

$$f.g(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m-1})$$
$$= \sum_{\alpha \in A} \varepsilon(\sigma_\alpha)\, f(g(x_{\sigma_\alpha(1)}, \ldots, x_{\sigma_\alpha(m)}), x_{\sigma_\alpha(m+1)}, \ldots, x_{\sigma_\alpha(n+m-1)}).$$

De même, si W est un espace vectoriel sur K, on peut définir par la formule précédente, si $\mu \in C^n(V, V)$ et $f \in C^m(V, W)$, un produit à droite de f par μ, $f.\mu$, qui appartient à $C^{n+m-1}(V, W)$. Le produit bilinéaire ainsi défini n'est pas associatif. Toutefois, on a les relations suivantes (*voir* [2]).

LEMME 1. — *Si* $f \in C^n(V, W)$, $\mu_1 \in C^p(V, V)$, $\mu_2 \in C^q(V, V)$,

$$(f.\mu_1).\mu_2 - f.(\mu_1.\mu_2) = (-1)^{(p-1)(q-1)}((f.\mu_2).\mu_1 - f.(\mu_2.\mu_1)).$$

Les structures de cup-produit et de produit intérieur sont reliées par la relation suivante ([2]).

LEMME 2. — *Soient* $f \in C^n(V, M)$, $g \in C^p(V, N)$ et $\mu \in C^q(V, V)$, *alors*

$$(f \smile g).\mu = (f.\mu) \smile g + (-1)^{n(q-1)} f \smile g.\mu$$

2. Application à l'étude des algèbres de Lie.

Soit $\mu \in C^2(V, V)$, μ est donc une application bilinéaire alternée de $V \times V$ dans V.

Calculons $\mu.\mu \in C^3(V, V)$,

$$\mu.\mu(x, y, z) = \mu(\mu(x, y), z) - \mu(\mu(x, z), y) + \mu(\mu(y, z), x).$$

Donc μ est une structure d'algèbre de Lie sur V, si et seulement si $\mu.\mu = 0$.

On désignera alors par (V, μ) l'espace V muni de la structure d'algèbre de Lie μ (on omettra, dans les notations, parfois V, parfois μ).

Soit ρ une représentation de l'algèbre de Lie (V, μ) dans l'espace vectoriel M; ρ est donc un élément de $C^1(V, \text{End}\, M)$. On a alors

$$\rho \smile \rho(x, y) = [\rho(x), \rho(y)] = \rho([x, y]).$$

Donc la condition nécessaire et suffisante, pour qu'une application $\rho : V \to \text{End}\, M$ fasse de M un μ-module, est que

$$\rho \smile \rho = \rho.\mu$$

Soit alors (V, μ) une algèbre de Lie, et soit (M, ρ) une représentation de cette algèbre de Lie.

Considérons alors le complexe de cohomologie de Koszul de l'algèbre de Lie (V, μ), à valeurs dans le module (M, ρ); soit $\delta(\mu, \rho)$ l'opérateur cobord de ce complexe

$$\delta^n(\mu, \rho) : \quad C^n(V, M) \to C^{n+1}(V, M).$$

Cet opérateur cobord peut s'exprimer à l'aide des opérations de cup-produit et de produit intérieur.

Par définition même, $\delta(\rho, \mu) f = \rho \smile f - f.\mu$

[On peut vérifier alors aisément à l'aide des lemmes 1 et 2 et des relations $\mu.\mu = 0$, $\rho \smile \rho = \rho.\mu$, que $\delta(\rho, \mu) \circ \delta(\rho, \mu) = 0$.]

En particulier, si V est considéré comme un (V, μ)-module par la représentation adjointe, on a alors, si $f \in C^n(V, V)$,

$$\delta(\mu)(f) = (-1)^{n-1}(\mu.f - f.\mu)$$

Si V est un espace vectoriel sur K, on notera $L(V)$ le sous-ensemble algébrique de $\text{Hom}(\Lambda^2 V, V)$ des structures d'algèbres de Lie μ sur $V : L(V) = \{\mu \in \text{Hom}(\Lambda^2 V, V) \text{ telles que } \mu.\mu = 0\}$. On dira que $L(V)$ est la variété des algèbres de Lie sur V.

Soit $GL(V)$ le groupe des automorphismes de V. Alors $GL(V)$ a une représentation canonique dans les espaces $C^n(V, V)$, en particulier si δ est une structure d'algèbre de Lie sur V, alors

$$(g \star \delta)(x, y) = g\delta(g^{-1}x, g^{-1}y)$$

est une algèbre de Lie sur V isomorphe à δ.

On notera $O(\delta)$ l'ensemble des algèbres de Lie sur V isomorphes à δ, c'est-à-dire $O(\delta) = GL(V) \star \delta$.

1. Algèbres de Lie filtrées. Classification des algèbres filiformes.

1. Définitions.

Soit V un espace vectoriel sur K. Supposons donnée sur V une filtration décroissante $V \supset \ldots \supset V_i \supset V_{i+1} \supset \ldots (i \in Z)$.

On supposera ici que la filtration est finie, c'est-à-dire qu'il existe

$$n \in Z \quad \text{tel que} \quad V_i = V \quad \text{si } i \leqq n,$$
$$N \in Z \quad \text{tel que} \quad V_i = 0 \quad \text{si } i \geqq N.$$

On dira que cette filtration de V est compatible avec la structure μ d'algèbre de Lie sur V, si $\mu(V_i, V_j) \subset V_{i+j}$; alors on peut définir sur l'espace vectoriel

$$\operatorname{gr} V = \sum_{i \in Z} \frac{V_i}{V_{i+1}} = \sum W_i$$

une structure d'algèbre de Lie graduée $\operatorname{gr} \mu$ telle que $\operatorname{gr} \mu(W_i, W_j) \subset W_{i+j}$.

EXEMPLES :

(*a*) Si (V, μ) est une algèbre de Lie nilpotente, alors on peut définir sur V une filtration canonique par la série centrale descendante de l'algèbre de Lie μ. On pose $V_i(\mu) = \mathcal{C}^{i-1}(\mu)$ [les $\mathcal{C}^i(\mu)$ sont définis par récurrence de la façon suivante : $\mathcal{C}^0 \mu = V$, $\mathcal{C}^i(\mu) = \mu(V, \mathcal{C}^{i-1}\mu)$]. On a alors

$$\mu(V_i(\mu), V_j(\mu)) \subset V_{i+j}(\mu).$$

(*b*) Soit (V, μ) une algèbre de Lie sur V, et soit W un sous-espace vectoriel de V qui est une sous-algèbre de (V, μ). Considérons alors la filtration de V définie par $V_{-1} = V$, $V_0 = W$, $V_1 = \{0\}$. Alors l'algèbre de Lie graduée $\operatorname{gr} \mu$ sur $(V/W) + W$, associée à cette filtration, est l'algèbre produit semi-direct de l'algèbre de Lie $(W, \mu \mid W)$ par l'idéal abélien V/W muni de la représentation adjointe de $(W, \mu \mid W)$ dans V/W.

2. Filtration de l'algèbre enveloppante associée à une filtration d'une algèbre de Lie (V, μ).

Soit $(V_i)_{i \in Z}$ une filtration de l'algèbre de Lie (V, μ), et soit $U(\mu)$ l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie μ. On considère alors la filtration suivante sur $U(\mu)$:

$$U_p(\mu) = \sum_{\sum \alpha_i \geqq p} V_{\alpha_1} V_{\alpha_2} \ldots V_{\alpha_n}.$$

On a alors

$$U_p(\mu) . U_q(\mu) \subseteq U_{p+q}(\mu), \qquad U_p(\mu) \supset U_{p+1}(\mu).$$

On peut donc former l'algèbre associative graduée

$$\operatorname{gr} U(\mu) = \sum \frac{U_p(\mu)}{U_{p+1}(\mu)}.$$

PROPOSITION 1. — *L'algèbre* gr $U(\mu)$ *est canoniquement isomorphe à l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie* gr μ.

Démonstration. — Pour définir un homomorphisme α de l'algèbre $U(\operatorname{gr}\mu)$ dans gr $U(\mu)$, il suffit, d'après la propriété universelle des algèbres de Lie, de démontrer qu'il existe une application K-linéaire α de gr μ dans gr $U(\mu)$, telle que $\alpha[x, y] = \alpha(x)\,\alpha(y) - \alpha(y)\,\alpha(x)$. Si x_i est un élément homogène de degré i de gr $V = \sum V_i/V_{i+1}$, et si $X_i \in V_i$ est un représentant de x_i, on définit $\alpha(x_i)$ comme étant la classe de X_i dans $U_i(\mu)/U_{i+1}(\mu)$.

Démontrons que α est un isomorphisme :

Soit $(x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \ldots, x_n^{\alpha_n})$ une base homogène de l'espace vectoriel gr V, l'indice α_i désigne le degré d'homogénéité que nous appellerons le *poids*. Choisissons des représentants $X_i^{\alpha_i}$ de chacun des $x_i^{\alpha_i}$ dans l'espace V_{α_i}.

Nous obtenons ainsi une base de V.

Soit $M = \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$ une suite d'indices compris entre 1 et n.

On notera M^* la suite composée des mêmes indices, mais réordonnée dans l'ordre croissant. On dira que M est de longueur $l(M) = r$ et de poids $p(M) = \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \ldots + \alpha_{i_r}$; on pose

$$X_M = X_{i_1}^{\alpha_{i_1}} . X_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \ldots X_{i_r}^{\alpha_{i_r}},$$

$$x_M = x_{i_1}^{\alpha_{i_1}} . x_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \ldots x_{i_r}^{\alpha_{i_r}}.$$

Nous savons que, pour toutes les suites ordonnées M^* d'indices, les éléments $\{X_{M^*}\}$ et $\{x_{M^*}\}$ forment respectivement une base de $U(\mu)$ et de $U(\operatorname{gr}\mu)$. On démontre alors que α est un isomorphisme grâce au lemme suivant :

LEMME 3. — *Soit M une suite d'indices, alors*

$$X_M = X_{M^*} + \sum C_A X_{A^*} \qquad \textit{avec} \quad l(A^*) < l(M), \qquad p(A^*) \geq p(M).$$

Démonstration. — Elle se fait par récurrence sur la longueur de la uite M.

REMARQUE. — Si (V, μ) est une algèbre de Lie nilpotente, et si la filtration de V est la filtration $V_i(\mu)$ définie au paragraphe 1, alors

$U_p(\mu) = I^p(\mu)$ où $I^p(\mu)$ désigne la $p^{\text{ième}}$ puissance de l'idéal d'augmentation de $U(\mu)$.

3. Filtration des résolutions standards.

Considérons les deux résolutions suivantes de K dans la catégorie des $U(\mu)$-modules ([1]) :

(*a*) *Résolution de Koszul* $(E(\mu), d)$, *où* $E^n(\mu) = U(\mu) \otimes_K \Lambda^n V$. Considérons alors la filtration suivante de ce complexe

$$E^{p,n}(\mu) = \sum U_{\alpha_0} \otimes V_{\alpha_1} \wedge V_{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge V_{\alpha_n} \qquad (\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \geqq p),$$

$E^{p,n}(\mu)$ a alors comme base sur K les éléments

$$\{ X_{M^\star} \otimes X_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \wedge X_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \wedge \ldots \wedge X_{i_n}^{\alpha_{i_n}} \}, \qquad \text{avec} \left\{ \begin{array}{l} i_1 < i_2 < \ldots < i_n, \\ p(M^\star) + \alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_n} \geqq p. \end{array} \right.$$

On vérifie que $E^p(\mu) = \sum_n E^{p,n}(\mu)$ est un sous-complexe de $E(\mu)$.

PROPOSITION 2. — *$E^p(\mu)$ est un sous-complexe acyclique du complexe $E(\mu)$.*

Démonstration. — On considère la filtration suivante de $E(\mu)$:

$$E_q^n(\mu) = \sum K X_M \otimes X_{i_1} \wedge \ldots \wedge X_{i_n} [\text{avec } l(M) \leqq q - n].$$

Posons alors $E_q^n(\mu) \cap E^{n,p}(\mu) = E_q^{n,p}(\mu)$.

$E_q^{n,p}(\mu)$ a comme base sur K l'ensemble des éléments

$$\{ X_{M^\star} \otimes X_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \wedge \ldots \wedge X_{i_n}^{\alpha_{i_n}} \}, \qquad \text{avec} \left\{ \begin{array}{l} p(M^\star) + \alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_n} \geqq p, \\ l(M^\star) + n \leqq q. \end{array} \right.$$

Le sous-complexe $E_q^p(\mu) = \sum E_q^{n,p}(\mu)$ est acyclique, car on remarque que $E_q^p(\mu)/E_{q-1}^p(\mu)$ est isomorphe au sous-complexe acyclique de $E(o) = S(V) \underset{K}{\otimes} \Lambda V$, où

$S(V)$ désigne l'algèbre symétrique de V,
ΛV désigne l'algèbre extérieure de V,

formé des éléments de longueur q et de poids supérieur ou égal à p.

(*b*) *Résolution normalisée standard* $(N(\mu), d')$ ([2]), *où*

$$N^n(\mu) = U(\mu) \otimes \left(\overset{n}{\otimes} I(\mu) \right),$$

$I(\mu)$ désigne l'idéal d'augmentation de $U(\mu)$. — Filtrons $N(\mu)$ par le sous-complexe $N^p(\mu)=\sum N^{p,n}(\mu)$,

$$\text{où}\quad N^{p,n}(\mu)=\sum K X_M\otimes X_{A_1}\otimes\ldots\otimes X_{A_n},$$

$$\text{où}\quad p(M)+p(A_1)+\ldots+p(A_n)\geqq p \qquad \text{et} \qquad l(A_i)\geqq 1.$$

PROPOSITION 3. — *$N^p(\mu)$ est un sous-complexe acyclique du complexe $N(\mu)$.*

Démonstration. — L'opérateur d'homotopie ([1]),

$$s^n:\quad U(\mu)\otimes\Big(\overset{n-1}{\bigotimes} I(\mu)\Big)\to U(\mu)\otimes\Big(\overset{n}{\bigotimes} I(\mu)\Big),$$

défini par

$$s^n(X_A\otimes X_{A_1}\otimes\ldots\otimes X_{A_n})=1\otimes X_A^+\otimes X_{A_1}\otimes\ldots\otimes X_{A_n},$$

laisse stable $N^p(\mu)$.

Les complexes $N(\mu)$ et $E(\mu)$ sont deux résolutions acycliques libres de K dans la catégorie des $U(\mu)$-modules. On sait d'autre part ([1]) que l'application définie par

$$\lambda^n:\quad U\otimes(\Lambda^n V)\to U\otimes\Big(\overset{n}{\bigotimes} I\Big),$$

$$\lambda^n(1\otimes(x_1\wedge x_2\wedge\ldots\wedge x_n))=1\otimes\sum_{\sigma\in S[1,\,n]}(\varepsilon(\sigma)x_{\sigma(1)}\otimes x_{\sigma(2)}\otimes\ldots\otimes x_{\sigma(n)}),$$

est un morphisme du complexe $E(\mu)$ dans le complexe $N(\mu)$.

Par conséquent, il existe un morphisme Ψ du complexe $N(\mu)$ dans le complexe $E(\mu)$, et des applications $U(\mu)$-linéaires s et s' de degré $+1$,

$$s':\quad N(\mu)\to N(\mu),$$
$$s:\quad E(\mu)\to E(\mu)$$

telles que

$$\Psi\circ\lambda-\mathrm{Id}=d\circ s+s\circ d,$$
$$\lambda\circ\Psi-\mathrm{Id}=d'\circ s'+s'\circ d'.$$

D'autre part, λ applique le sous-complexe $E^p(\mu)$ dans le sous-complexe $N^p(\mu)$. On déduit alors des propositions 2 et 3, la proposition suivante :

PROPOSITION 4. — *Il existe Ψ, morphisme du complexe $N(\mu)$ dans $E(\mu)$, s et s', applications $U(\mu)$-linéaires de degré $+1$, s' de $N(\mu)$ dans $N(\mu)$ et s de $E(\mu)$ dans $E(\mu)$, telles que*

$$\Psi(N^p\mu)\subset E^p(\mu),$$
$$s'(N^p\mu)\subset N^p(\mu),$$
$$s(E^p\mu)\subset E^p(\mu)$$

et telles que

$$\Psi \circ \lambda - \mathrm{Id} = d \circ s + s \circ d,$$
$$\lambda \circ \Psi - \mathrm{Id} = d' \circ s' + s' \circ d'.$$

Démonstration. — On construit Ψ, s et s' par récurrence, vérifiant les propriétés cherchées, en utilisant les propositions 2 et 3.

4. Modules filtrés. Filtration des représentations d'une algèbre de Lie filtrée.

Définition. — Soit (M, ρ) un (V, μ)-module. Si μ est filtrée, M est dit un μ-module filtré, si l'espace vectoriel M est muni d'une filtration $M \supset \ldots \supset M_j \supset M_{j+1} \supset \ldots (j \in Z)$, telle que $\rho(V_j).M_i \subset M_{i+j}$.

Si M est un (V, μ)-module quelconque, on peut toujours introduire les filtrations suivantes sur M.

1° $M_i = U_i(\mu).M$. — On a $M_0 = M$. On s'intéressera ici particulièrement aux filtrations finies, c'est-à-dire aux filtrations $\{M_i\}_{i \in Z}$ telles qu'il existe n et $N \in Z$ avec

$$M_i = M \quad \text{si} \quad i \leqq n,$$
$$M_i = 0 \quad \text{si} \quad i \geqq N.$$

La filtration précédente ne sera donc intéressante que s'il existe un i tel que $U_i(\mu).M = 0$.

Exemple. — Si nous reprenons les exemples (*a*) et (*b*) du paragraphe 1, on trouve dans le cas (*a*) : $M_p = \rho(V)^p.M$.

La filtration s'annule pour p assez grand si M est un (V, μ)-module nilpotent.

Dans le cas (*b*), on trouve comme filtration de M; $M_0 = M$, $M_1 = \{0\}$.

2° Dans la suite, on considère surtout la filtration suivante de M : $M_i = \{m$ tel que $U_{-i+1}(\mu).m = 0\}$.

Exemple (*a*). — Si (V, μ) est une algèbre de Lie nilpotente, on trouve

$$M_i = 0 \quad \text{si} \quad i \geqq 1,$$

$$M_0 = \{m \text{ tel que } \rho(V).m = 0\} = \text{l'espace des invariants de } M,$$

$$M_{-i} = \{m \text{ tel que } \rho(V)^{i+1}.m = 0\}.$$

Exemple (*b*). — On retrouve $M_0 = M$, $M_1 = 0$.

5. Algèbres de Lie filiformes. Classification des algèbres filiformes graduées.

Soit (V, μ) une algèbre de Lie nilpotente. (V, μ) est naturellement filtrée par les $V_i(\mu) = \mathcal{C}^{i-1}(\mu)$. On peut donc associer à (V, μ) une algèbre de Lie graduée $(\operatorname{gr} V, \operatorname{gr}\mu)$. On dit que (V, μ) est de type $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ si $\dim V_i(\mu)/V_{i+1}(\mu) = p_i$.

Si (V, μ) est de type $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$, l'algèbre de Lie $(\operatorname{gr} V, \operatorname{gr}\mu)$ est de même type.

On sait que $\dim V_1(\mu)/V_2(\mu) \geqq 2$ pour toute algèbre de Lie nilpotente. On dira qu'une algèbre de Lie est filiforme, si μ est de type $\{2, 1, 1, \ldots, 1\}$. Si donc μ est une algèbre filiforme, l'algèbre de Lie $\operatorname{gr}\mu$ est une algèbre filiforme graduée.

Nous allons déterminer la structure des algèbres filiformes graduées de dimension $n+1$.

Soit (V, μ) une algèbre de Lie filiforme graduée de dimension $n+1$. On a $V = W_1 + W_2 + \ldots + W_n$, où $\dim W_1 = 2$, $\dim W_i = 1$, $2 \leqq i \leqq n$, et $\mu(W_i, W_j) \subset W_{i+j}$.

Supposons de plus que le corps de base K ait une infinité d'éléments. Alors (V, μ) vérifie la proposition suivante :

Proposition 5.

(a) Il existe une base homogène $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ de V, où $y_0, y_1 \in W_1$ et $y_i \in W_i$, telle que

$$\begin{aligned} &\mu(y_0, y_i) = y_{i+1} \qquad (1 \leqq i \leqq n-1),\\ &\mu(y_0, y_n) = 0,\\ &\mu(y_1, y_2) = 0. \end{aligned}$$

On dit alors que si $(y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ vérifient les conditions précédentes, les vecteurs $(y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ forment une base adaptée de (V, μ).

(b) Si $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ est une base adaptée de (V, μ), on a alors nécessairement

$$\begin{aligned} &\mu(y_i, y_j) = 0 && \text{si } i \text{ et } j \geqq 1 \text{ et } i+j \neq n,\\ &\mu(y_i, y_{n-i}) = (-1)^i \alpha y_n && \text{où } \alpha = 0 \text{ si } n \text{ est pair.} \end{aligned}$$

Démonstration.

(a) Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ des éléments quelconques non nuls dans W_i $(1 \leqq i \leqq n)$, alors, si $w \in W_1$,

$$\mu(w, z_i) = \lambda_i(w) z_{i+1},$$

les applications $w \to \lambda_i(w)$ sont des formes linéaires sur W_1, non identiquement nulles, car $\mu(W_1, W_i) = W_{i+1}$.

Le corps de base K, ayant une infinité d'éléments, il existe y_0 tel que $\lambda_i(y_0) \neq 0$ pour $1 \leqq i \leqq n-1$, alors on voit qu'en choisissant les y_i multiples convenables des z_i, on peut trouver une base adaptée de (V, μ).

(*b*) Démontrons (*b*) par récurrence sur la dimension de V. Soit $(y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ une base adaptée de (V, μ). Alors $(y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ est une base adaptée de $(V/Ky_n, \mu)$.

Supposons n impair. On a donc

$$\mu(y_i, y_j) = 0 \qquad \text{si } i + j < n - 1.$$

Posons alors $\mu(y_i, y_{n-i}) = \alpha_i y_n$. L'équation

$$\mu . \mu(y_0, y_i, y_{n-i}) = 0$$

montre que $\alpha_i = -\alpha_{i+1}$, on a donc $\alpha_i = (-1)^i \alpha$, ce qu'il fallait démontrer.

Si n est pair, on a

$$\begin{aligned} \mu(y_i, y_{n-1-i}) &= (-1)^i \alpha y_{n-1}, \\ \mu(y_i, y_{n-i}) &= \alpha_i y_n. \end{aligned}$$

L'équation

$$\mu . \mu(y_0, y_i, y_{n-1-i}) = 0$$

montre que $(-1)^i \alpha = \alpha_{i+1} + \alpha_i$, c'est-à-dire $\alpha_i = (-1)^{i+1}(\alpha_1 + (i-1)\alpha)$, mais $\alpha_{n/2} = 0$, donc

$$\alpha_1 = \left(1 - \frac{n}{2}\right)\alpha,$$

$$\alpha_i = (-1)^{i+1}\left(i - \frac{n}{2}\right)\alpha.$$

Mais l'équation $\mu . \mu(y_1, y_{n/2} - 1, y_{n/2}) = 0$ montre alors que $\alpha = 0$, et par conséquent $\alpha_i = 0$.

COROLLAIRE 1. — *Si n est impair, il existe deux structures μ_0^n et μ_1^n, non isomorphes, d'algèbres de Lie filiformes graduées de dimensions $n + 1$, sur un corps K, ayant une infinité d'éléments, où μ_0^n est définie par*

$$\begin{aligned} \mu_0^n(y_0, y_i) &= y_{i+1} && (1 \leqq i \leqq n-1), \\ \mu_0^n(y_0, y_n) &= 0, \\ \mu_0^n(y_i, y_j) &= 0 && \textit{si } i, j \geqq 1 \end{aligned}$$

et μ_1^n, définie par

$$\begin{aligned} \mu_1^n(y_0, y_i) &= y_{i+1} && (1 \leqq i \leqq n-1), \\ \mu_1^n(y_0, y_n) &= 0, \\ \mu_1^n(y_i, y_j) &= 0 && (i + j \neq n, i \text{ et } j \geqq 1), \\ \mu_1^n(y_i, y_{n-i}) &= (-1)^i y_n && (i \geqq 1). \end{aligned}$$

Si n est pair, il n'y a qu'une seule structure μ_0^n d'algèbre de Lie filiforme graduée de dimension $n + 1$.

Démonstration. — On vérifie aisément que les applications μ_0^n et μ_1^n, pour n impair, définissent des structures d'algèbres de Lie filiformes graduées non isomorphes.

2. Algèbres de Lie filtrées. Suite spectrale associée à une algèbre de Lie filtrée à valeurs dans un module filtré.

1. Conditions d'intégrabilité définies par une algèbre de Lie filtrée.

Soit (V, μ) une algèbre de Lie filtrée (à filtration finie).

Choisissons un isomorphisme α, K-linéaire de l'espace vectoriel V filtré avec l'espace vectoriel $\operatorname{gr} V$, α étant tel que $\operatorname{gr}\alpha =$ identité de $\operatorname{gr} V$. Transportons par l'isomorphisme α la structure d'algèbre de Lie μ sur l'espace $\operatorname{gr} V$.

$\alpha \bigstar \mu$ est donc un élément de l'espace vectoriel gradué

$$\operatorname{Hom}(\Lambda^2 \operatorname{gr} V, \operatorname{gr} V).$$

Décomposons $\alpha \bigstar \mu$ en somme de ses composantes homogènes.

$$\alpha \bigstar \mu = \mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_p, \qquad \text{où} \quad \mu_r(W_i, W_j) \subset W_{i+j+r}.$$

Écrivons que $\alpha \bigstar \mu$ est une structure d'algèbre de Lie, c'est-à-dire que $(\alpha \bigstar \mu).(\alpha \bigstar \mu) = 0$.

Ceci équivaut au système de relations

$$\sum_{i+j=r} \mu_i . \mu_j = 0, \quad \forall\, r \geq 0.$$

En particulier, $\mu_0 . \mu_0 = 0$, et μ_0 est une structure d'algèbre de Lie sur V qui n'est autre que $\operatorname{gr}\mu$. A l'ordre 1, la condition s'écrit :

$$\mu_0 . \mu_1 + \mu_1 . \mu_0 = 0,$$

ce qui signifie que μ_1 est un cocycle de l'algèbre de Lie $\mu_0 = \operatorname{gr}\mu$ pour la représentation adjointe.

D'autre part, si on choisit un autre isomorphisme α' de V sur $\operatorname{gr} V$ et si

$$\alpha' \bigstar \mu = \mu_0 + \mu'_1 + \mu'_2 + \ldots + \mu'_r,$$

en écrivant que $\alpha \circ \alpha'^{-1}$ est un isomorphisme de $(\operatorname{gr} V, \alpha' \bigstar \mu)$ sur $(\operatorname{gr} V, \alpha \bigstar \mu)$ de la forme $1 + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_p$ où chacun des φ_i est une application linéaire homogène de degré i de $\operatorname{gr} V$ dans $\operatorname{gr} V$, on obtient les relations

$$\sum_{i+j+k=r} \mu_k(\varphi_i x, \varphi_j y) = \sum_{l+m=r} \varphi_l(\mu'_m(x, y)).$$

En particulier, à l'ordre 1, on obtient simplement la relation

$$\mu_0(x, \varphi_1 y) + \mu_0(\varphi_1 x, y) + \mu_1(x, y) = \mu'_1(x, y) + \varphi_1(\mu_0(x, y)),$$

ce qui signifie que $\mu_1 - \mu'_1$ est un cobord.

Donc, à toute structure d'algèbre de Lie filtrée μ, on peut associer une classe de cohomologie bien définie $\mu_1 \in H^2(\mathrm{gr}\,\mu, \mathrm{gr}\,\mu)$ homogène de degré 1.

D'autre part, si $L(V)$ désigne la variété des algèbres de Lie sur l'espace vectoriel V, et si μ est une algèbre de Lie filtrée sur V, $\mathrm{gr}\,\mu$ est une algèbre de Lie graduée sur $\mathrm{gr}\,V$, mais nous pouvons la considérer, en la transportant par l'isomorphisme α^{-1}, comme une algèbre de Lie sur V.

PROPOSITION 6. — $\alpha^{-1} \star \mathrm{gr}\,\mu$ *appartient à l'adhérence de l'orbite de l'algèbre de Lie* μ *dans* $L(V)$.

Démonstration. — Il suffit de démontrer que $\mathrm{gr}\,\mu$ appartient à l'adhérence de l'orbite de $\alpha \star \mu$ dans $L(\mathrm{gr}\,V)$.

Or, si $\alpha \star \mu = \mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_p$, et si on considère $\varphi(t) \in GL(\mathrm{gr}\,V)$, définie par $\varphi(t)(x) = t^i x_i$ si $x_i \in W_i$,

$$\varphi(t) \star (\alpha \star \mu) = \mu_0 + t\mu_1 + \ldots + t^p \mu_p,$$

d'où le résultat.

2. Conditions d'intégrabilité pour un module filtré.

Soit (M, ρ) un module filtré sur l'algèbre de Lie filtrée (V, μ). Choisissons un isomorphisme β de M avec $\mathrm{gr}\,M$ tel que $\mathrm{gr}\,\beta = \mathrm{id}$. On peut alors transporter la représentation $\rho : V \to \mathrm{End}\,M$ en une représentation $(\alpha, \beta) \star \rho : \mathrm{gr}\,V \to \mathrm{End}\,\mathrm{gr}\,M$. Nous avons $(\alpha, \beta) \star \rho = \rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_r$. La relation $((\alpha, \beta) \star \rho) \smile ((\alpha, \beta) \star \rho) = ((\alpha, \beta) \star \rho) . (\alpha \star \mu)$ est équivalente à la série de relations

$$\sum_{i+j=n} \rho_i \smile \mu_j = \sum_{i+j=n} \rho_i . \mu_j,$$

en particulier, ρ_0 est la représentation canonique de $(\mathrm{gr}\,V, \mathrm{gr}\,\mu)$ dans $\mathrm{gr}\,M$.

3. Suite spectrale associée à une algèbre de Lie filtrée à valeurs dans un module filtré.

Soit (V, μ) une algèbre de Lie filtrée, et soit (M, ρ) un (V, μ)-module filtré. Le complexe de Koszul $(C^n(V, M), \delta(\mu, \rho))$ est naturellement filtré par les

$$C^n_p(V, M) = \left\{ f \in C^n(V, M) \text{ telles que } f(V_{\alpha_1} \wedge V_{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge V_{\alpha_n}) \subset M_{p+\sum \alpha_i} \right\}.$$

A cette filtration du complexe de Koszul est associée une suite spectrale. Transportons, par les isomorphismes α et β, le complexe de Koszul $\{ C^n(V, M), \delta(\mu, \rho) \}$ sur le complexe

$$\{ C^n(\mathrm{gr}\,V, \mathrm{gr}\,M), \delta(\alpha \star \mu), (\alpha, \beta) \star \rho) \}.$$

L'espace $C^n(\operatorname{gr} V, \operatorname{gr} M)$ est un espace vectoriel gradué. L'application cobord se décompose donc en une somme d'applications linéaires homogènes de degrés positifs ou nuls :

$$\delta = d_0 + d_1 + \ldots + d_p.$$

On a

$$d_i . f = \rho_i \smile f - f . \mu_i$$

La relation $\delta \circ \delta = 0$ montre que $\sum_{i+j=n} d_i \circ d_j = 0$, en particulier $d_0 \circ d_0 = 0$, et d_0 n'est autre que l'opérateur cobord du complexe de Koszul de l'algèbre de Lie $(\operatorname{gr} V, \operatorname{gr} \mu)$ à valeurs dans le module $(\operatorname{gr} M, \operatorname{gr} \rho)$.

A l'ordre 1, on a $d_1 \circ d_0 + d_0 \circ d_1 = 0$. d_1 applique donc un cocycle de l'algèbre de Lie μ_0 à valeurs dans $(\operatorname{gr} M, \rho_0)$ de degré n et homogène de degré d'homogénéité p, sur un cocycle de degré $n+1$ et de degré d'homogénéité $p+1$. De même, d_1 applique un cobord de degré n et de degré d'homogénéité p, sur un cobord de degré $n+1$, et de degré d'homogénéité $p+1$.

Donc d_1 induit une application ∂_1 de $H^{p,q}(\mu_0, \rho_0)$ dans $H^{p+1,q}(\mu_0, \rho_0)$, où $H^{p,q}$ désigne les classes de cohomologie de degré total $p+q$ et de degré d'homogénéité p.

Proposition 7. — *L'espace $E_1^{p,q}$ de la suite spectrale, définie par la filtration du complexe de Koszul, est isomorphe à l'espace $H^{p,q}(\operatorname{gr} \mu, \operatorname{gr} \rho)$. La différentielle sur l'espace $E_1^{p,q}$ est l'application ∂_1, obtenue par passage au quotient de $d_1 = \rho_1 \smile f - f . \mu_1$.*

Démonstration. — Elle résulte immédiatement des définitions des espaces $E_1^{p,q}$.

Remarque. — Si on considère l'exemple de la filtration d'une algèbre de Lie associée à une sous-algèbre, la filtration obtenue sur le complexe de cohomologie est la filtration définie par Hochschild-Serre dans [3].

3. Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes.

1. Extensions d'une algèbre de Lie p-nilpotente par un module p-nilpotent.

Soit (V, μ) une algèbre de Lie nilpotente, on notera $\mathcal{C}^i(\mu)$ les termes de la série centrale descendante de l'algèbre de Lie (V, μ). On dira que (V, μ) est p-nilpotente si $\mathcal{C}^p(\mu) = 0$, c'est-à-dire si p est supérieur ou égal à l'indice de nilpotence de (V, μ).

De même, soit (M, ρ) un μ-module nilpotent : on dira que (M, ρ) est p-nilpotent si $\rho(V)^p . M = 0$, c'est-à-dire si p est supérieur ou égal à l'indice de nilpotence de M.

Soit (V, μ) une algèbre de Lie d'indice de nilpotence r_1, soit (M, ρ) un μ-module nilpotent d'indice de nilpotence r_2, soit h une classe de 2-cohomologie de (V, μ) à valeurs dans (M, ρ) et soit $(Q(h), \lambda(h))$ un représentant de la classe d'extension définie par h :

$$0 \to M \xrightarrow{i} Q(h) \xrightarrow{\pi} V \to 0.$$

On identifiera M à $i(M)$; soit r l'indice de nilpotence de $(Q(h), \lambda(h))$. On a alors $r \geqq r_1$ et $r \geqq r_2$, d'après les relations

$$\pi(\mathcal{C}^i(\lambda(h))) = \mathcal{C}^i(\mu),$$
$$\mathcal{C}^i(\lambda(h)) \supset \rho(V)^i.M,$$

et $r \leqq r_1 + r_2$, d'après la relation $\mathcal{C}^{r_2+r_1}(\lambda(h)) \subset \rho(V)^{r_2}.M = 0$. On dira que h est une classe de cohomologie p-nilpotente si l'extension $Q(h)$ est p-nilpotente.

Soit donc $p \geqq r_1$ et r_2, c'est-à-dire supposons que (V, μ) et (M, ρ) soient p-nilpotents. Cherchons à quelle condition une classe de cohomologie h est p-nilpotente :

Soit s une section de l'espace vectoriel V dans $Q(h)$. Alors l'application bilinéaire alternée de $V \wedge V$ dans M,

$$\beta(x, y) = \lambda(h)(sx, sy) - s(\mu(x, y))$$

est un représentant de la classe de cohomologie de h, et tout représentant de h s'obtient par le choix d'une section appropriée.

$Q(h)$ est somme directe de $s(V)$ et de $i(M)$, et la loi d'algèbre $\lambda(h)$ sur $Q(h)$ est définie par

$$\lambda(h)(sx_1 + m_1, sx_2 + m_2) = s(\mu(x_1, x_2)) + \beta(x_1, x_2) + \rho(x_1).m_2 - \rho(x_2).m_1.$$

Définissons l'application $a_\mu^r : \overset{r}{\bigotimes} V \to V$ par

$$a_\mu^r(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \mu(x_1, \mu(x_2, \mu(\ldots \mu(x_{r-1}, x_r))\ldots)).$$

Soit de même l'application $a_{\lambda(h)}^r : \overset{r}{\bigotimes} Q(h) \to Q(h)$.

Pour qu'une classe h soit p-nilpotente, il faut et il suffit que l'application $a_{\lambda(h)}^{p+1}$ soit nulle. Exprimons cette condition en fonction de β.

LEMME 4. — *Si $x_1, x_2, \ldots, x_r$ sont des éléments de V, alors*

$$a_{\lambda(h)}^r(sx_1, sx_2, \ldots, sx_r) - s(a_\mu^r(x_1, x_2, \ldots, x_r)) = \varphi^r(\mu, \beta)(x_1, x_2, \ldots, x_r)$$

où

$$\begin{aligned}\varphi^r(\mu, \beta)&(x_1, x_2, \ldots, x_r)\\ &= \beta(x_1, a_\mu^{r-1}(x_2, \ldots, x_r)) + \rho(x_1).\beta(x_2, a_\mu^{r-2}(x_3, \ldots, x_r)) + \ldots\\ &\quad + \rho(x_1)\rho(x_2)\ldots\rho(x_{r-2})\beta(x_{r-1}, x_r).\end{aligned}$$

LEMME 5. — *Soient* $y_1, y_2, \ldots, y_r$ *des éléments de* $Q(h)$. *Posons* $y_i = s(x_i) + m_i$, *alors*

$$a^r_{\lambda(h)}(y_1, y_2, \ldots, y_r) - a^r_{\lambda(h)}(sx_1, sx_2, \ldots, sx_r) \in \rho(V)^{r-1}.M.$$

Ces deux lemmes se démontrent sans difficultés par récurrence. Par conséquent, pour qu'une classe h soit p-nilpotente, il faut et il suffit, puisque (V, μ) et (M, ρ) sont p-nilpotents, que, si β est un représentant quelconque de h, l'application $\varphi^{p+1}(\mu, \beta)$ soit nulle. La condition $\varphi^{p+1}(\mu, \beta) = 0$ sera appelée *condition de p-nilpotence* pour le cocycle β.

Si (V, μ) et (M, ρ) sont p-nilpotents, on notera $E_p(\mu, \rho)$ le sous-espace de $H^2(\mu, \rho)$ formé des classes de cohomologie p-nilpotentes, en particulier, si $p \geqq r_1 + r_2$, on a $E_p(\mu, \rho) = H^2(\mu, \rho)$.

2. Filtration des espaces de cohomologie et classes de cohomologie p-nilpotentes.

On rappelle que si (V, μ) est une algèbre de Lie nilpotente, on filtre V par la filtration $V_i = \mathcal{C}^{i-1}(\mu)$. Soit M un μ-module nilpotent. Nous filtrerons M par la filtration $M_i = \{ m \text{ tels que } \rho(V)^{-i+1}.m = 0 \}$.

La filtration de (V, μ) et (M, ρ) donne naissance à une filtration du complexe de cohomologie. Soit $H^n(\mu, \rho)_p$ le sous-espace de $H^n(\mu, \rho)$ formé des images des cocycles β de degré n tels que

$$\beta(V_{\alpha_1} \wedge V_{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge V_{\alpha_n}) \subset M_{p+\sum \alpha_i}.$$

On sait qu'il existe une suite spectrale dont le premier terme $E_1^{p,q}$ est isomorphe à $H^{p,q}(\mathrm{gr}\,\mu, \mathrm{gr}\,\rho)$, et dont le terme $E_\infty^{p,q}$ est isomorphe à $H^{p+q}(\mu, \rho)_p / H^{p+q}(\mu, \rho)_{p+1}$.

Nous allons chercher une interprétation de l'espace $H^2(\mu, \rho)_p$. Soit $b \in H^2(\mu, \rho)_p$. b a donc un représentant β, tel que $\beta(V_i, V_j) \subset M_{i+j+p}$. On a donc

$$\beta(V_1, V_1) \subset M_{p+2}$$

et

$$\beta(V_{-p}, V_1) \subset M_1 = 0.$$

La structure d'algèbre de Lie μ donne, par passage au quotient, une structure d'algèbre de Lie sur V/V_{-p} qui est une algèbre de Lie $-(p+1)$-nilpotente.

D'autre part, on a $\rho(V_{-p}).M_{p+2} \subset M_2 = 0$.

Donc on peut munir M_{p+2} d'une structure de (V/V_{-p})-module qui est $-(p+1)$-nilpotent, et β définit un cocycle $\bar{\beta}$ de l'algèbre de Lie V/V_{-p}, à valeurs dans M_{p+2}. V/V_{-p} et M_{p+2} étant $-(p+1)$-nilpotents, on peut considérer l'espace $E_{-p}(V/V_{-p}, M_{p+2})$ des classes de 2-cohomologie définissant des extensions de V/V_{-p} par M_{p+2} qui sont p-nilpotentes.

De même, on peut considérer l'algèbre $V/V_{-(p-1)} = V/\mathcal{C}^{-p}(\mu)$, qui est $(-p)$-nilpotente, et $M_{p+1} = \{m$ tels que $(\rho(V))^{-p}.m = 0\}$ qui est un module $(-p)$-nilpotent, et on peut considérer l'espace $E_{-p}(V/\mathcal{C}^{-p}(\mu), M_{p+1})$ des extensions de $V/\mathcal{C}^{-p}(\mu)$ par M_{p+1} qui sont $-p$-nilpotentes.

On a des applications

$$V \to V/V_{-(p-1)} \to V/V_{-p},$$
$$M_{p+2} \to M_{p+1} \to M.$$

Donc on a des applications

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] H^2(V/V_{-p}, M_{p+2}) \arrow[rr] \arrow[dr, "\alpha_{p-1}"'] & & H^2(V/V_{-(p-1)}, M_{p+1}) \arrow[dl, "\alpha_p"] \\ & H^2(V, M) & \end{tikzcd}$$

Les lignes précédentes montrent que si $b \in H^2(V, M)_p$, alors $b = \alpha_{p-1}(b')$, $b' \in H^2(V/V_{-p}, M_{p+2})$.

Nous avons précisément la proposition suivante :

PROPOSITION 8.

$$H^2(V, M)_p = \alpha_{p-1}(E_{-p}(V/V_{-p}, M_{p+2})) = \alpha_p(E_{-p}(V/\mathcal{C}^{-p}(\mu), M_{p+1})).$$

Démonstration.

(*a*) $H^2(V, M)_p \subset \alpha_{p-1}(E_{-p}(V/V_{-p}, M_{p+2}))$.

Si $b \in H^2(V, M)$, nous avons vu que, si β est un représentant de b tel que $\beta(V_i, V_j) \subset M_{i+j+p}$, alors β définit un cocycle $\bar{\beta}$ de V/V_{-p} dans M_{p+2}.

Montrons que β vérifie la condition de $-p$-nilpotence. Or ceci est évident, car en considérant l'expression de la condition de $-p$-nilpotence, on voit que $\varphi(\mu, \beta)(x_1, x_2, \ldots, x_{-p+1})$ appartient à l'espace M_1 qui est nul.

(*b*) $\alpha_{p-1}(E_{-p}(V/V_{-p}, M_{p+2})) \subset \alpha_p(E_{-p}(V/\mathcal{C}^{-p}(\mu), M_{p+1}))$.

Ceci est évident d'après l'expression de la condition de $-p$-nilpotence.

(*c*) $\alpha_p(E_{-p}(V/\mathcal{C}^{-p}(\mu), M_{p+1})) \subset H^2(V, M)_p$.

Soit $h \in (E_{-p}(V/\mathcal{C}^{-p}(\mu), M_{p+1})$, alors h définit une extension $Q(h)$ $(-p)$-nilpotente de $V' = V/\mathcal{C}^{-p}(\mu)$, par M_{p+1} :

$$0 \to M_{p+1} \to Q(h) \xrightarrow{\pi} V' \to 0.$$

Choisissons alors une section s telle que $s(V'_i) \subset Q(h)_i$, où

$$V'_i = \mathcal{C}^{i-1}(V') = \mathcal{C}^{i-1}(V)/\mathcal{C}^{i-p}(V) \qquad \text{et} \qquad Q(h)_i = \mathcal{C}^{i-1}Q(h).$$

Ceci est possible car $\pi(Q(h)_i) = V'_i$.

Soit alors β le cocycle défini par une telle section.

On a, si $x_i \in V'_i$ et $x_j \in V'_j$,

$$\beta(x_i, x_j) \in Q(h)_{i+j} \cap M,$$

donc

$$\rho(V)^{-(i+j+p)+1}\beta(x_i, x_j) \in Q(h)_{-p+1} = \mathcal{C}^{-p}Q(h) = 0,$$

donc

$$\beta(x_i, x_j) \in M_{i+j+p} \qquad \text{et} \qquad \alpha_p(h) \in H^2(V, M)_p.$$

COROLLAIRE 2. — *Si $p \leqq -r_1$, indice de nilpotence de (V, μ), et $p \leqq -r_2$, indice de nilpotence de (M, ρ), alors $H^2(\mu, \rho)_p = E_{-p}(\mu, \rho)$ = ensemble des classes d'extensions de (V, μ) par (M, ρ) qui sont $-p$-nilpotentes et si $p \leqq -(r_1 + r_2)$,*

$$H^2(\mu, \rho)_p = H^2(\mu, \rho).$$

4. Applications géométriques. Étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes.

1. Espace tangent à la variété des algèbres de Lie nilpotentes.

On supposera dans ce chapitre que K est un corps algébriquement clos.

Soit V un espace vectoriel; on notera $N(V)$ le sous-ensemble de $L(V)$ formé des structures d'algèbres de Lie nilpotentes sur V. Supposons V de dimension n, alors si μ est nilpotente, on a $\mathcal{C}^{n-1}(\mu) = 0$.

$N(V)$ est donc un sous-ensemble algébrique de $L(V)$, et on a

$$N(V) = \{\mu \in \operatorname{Hom}(\Lambda^2 V, V) \text{ tels que } \mu.\mu = 0 \text{ et } a^n(\mu) = 0\},$$

où $a^n(\mu)$ est l'application de $\bigotimes^n V$ dans V, définie par

$$a^n(\mu)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mu(x_1, \mu(x_2, \ldots \mu(x_{n-1}, x_n)) \ldots)).$$

Soit donc (V, μ_0) un point de $N(V)$. Cherchons l'espace tangent au point μ_0 à la variété $N(V)$ des algèbres de Lie nilpotentes.

Si $\mu_1 \in \operatorname{Hom}(\Lambda^2 V, V)$ appartient à l'espace tangent en μ_0 à $N(V)$, on doit avoir, en particulier, $\mu_0.\mu_1 + \mu_1.\mu_0 = 0$, c'est-à-dire μ_1 doit être un 2-cocycle de l'algèbre (V, μ_0) à valeur dans V pour la représentation adjointe. D'autre part, l'application différentielle au point μ_0 de l'application $a^n(\mu)$ n'est autre que l'application qui, à μ_1, fait correspondre l'application $\varphi^n(\mu_0, \mu_1) : \bigotimes^n V \to V$ définie en (3.1).

Donc si μ_1 appartient à l'espace tangent au point μ_0 à la variété $N(V)$, μ_1 doit être un cocycle $(n-1)$-nilpotent de l'algèbre de Lie (V, μ_0) à valeurs dans V.

L'algèbre de Lie (V, μ_0) est filtrée par la suite centrale descendante $V_i = \mathcal{C}^{i-1}(\mu_0)$. La filtration de l'espace de représentation considérée en (3.2) donne sur V, espace de représentation adjointe, la filtration par la suite centrale ascendante

$$\begin{aligned} V_0 &= \text{centre de } (V, \mu) = \mathcal{C}_1(\mu_0), \\ V_{-1} &= \mathcal{C}_2(\mu_0), \\ V_{-i} &= \mathcal{C}_{i+1}(\mu_0). \end{aligned}$$

On rappelle que la suite centrale descendante $\mathcal{C}_i(\mu)$ d'une algèbre de Lie (V, μ) est définie par récurrence par les formules suivantes :

$$\mathcal{C}_0(\mu) = 0, \qquad \mathcal{C}_i(\mu) = \{ x \in V \text{ tels que } \mu(x, V) \subset \mathcal{C}_{i-1}(\mu) \}.$$

On notera V_d l'espace filtré par la série centrale descendante $V_i = \mathcal{C}^{i-1}(\mu_0)$, et V_a l'espace V filtré par la série centrale ascendante $V_i = \mathcal{C}_{-i+1}(\mu_0)$. D'après la proposition 7, on obtient la proposition suivante.

PROPOSITION 9. — *Soient V un espace vectoriel de dimension n, μ_0 un point de $N(V)$, et soit μ_1 un élément de* $\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, V)$ *tangent en μ_0 à la variété $N(V)$. Alors μ_1 est un cocycle de l'algèbre de Lie μ_0 à valeurs dans V, et il existe un cobord $\delta(\mu_0)\varphi$ tel que $\mu_1 - \delta(\mu_0)\varphi = \beta$, où β est un cocycle tel que*

$$\beta(\mathcal{C}^{i-1}\mu_0, \mathcal{C}^{j-1}\mu_0) \subset \mathcal{C}_{n-(i+j)}(\mu_0).$$

En particulier, si (V, μ_0) est une algèbre de Lie filiforme (1.5), on sait que la série centrale ascendante coïncide avec la série centrale descendante. Précisément $\mathcal{C}^i(\mu_0) = \mathcal{C}_{n-1-i}(\mu_0)$.

Donc $H^2(V_d, V_a)_{-(n-1)}$ est formé de l'ensemble des classes de cocycles β tels que

$$\beta(\mathcal{C}^{i-1}(\mu_0), \mathcal{C}^{j-1}(\mu_0)) \subset \mathcal{C}^{i+j-1}(\mu_0)$$

ou encore tels que

$$\beta(V_i(\mu_0), V_j(\mu_0)) \subset V_{i+j}(\mu_0).$$

Soit (V, μ_0) une algèbre de Lie nilpotente, on sait [4] que l'espace tangent à l'orbite $O(\mu_0)$ est l'espace des cobords de (V, μ_0) à valeurs dans V muni de la représentation adjointe. On obtient donc le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3. — *Soit (V, μ_0) une algèbre de Lie nilpotente de dimension n telle que $H^2(V_d, V_a)_{-(n-1)} = 0$, alors l'orbite de μ_0 est ouverte dans $N(V)$.*

EXEMPLES. — On sait [5] que, si V est un espace vectoriel de dimension n inférieure ou égale à 6 sur un corps K algébriquement clos de caractéristique 0, la variété $N(V)$ est irréductible, et qu'il existe μ_n telle que $N(V) = \overline{O(\mu_n)}$.

μ_n est une algèbre de Lie filiforme de dimension n. L'orbite $O(\mu_n)$ est donc ouverte dans $N(V)$. On peut calculer, sans hypothèse sur le corps K, que $H^2(\mu_n, \mu_n)_{-(n-1)} = 0$.

Donnons ici simplement le calcul pour $n = 5$ et $n = 6$.

— μ^5 est définie sur la base $y_0 y_1 y_2 y_3 y_4$ par

$$\mu^5(y_0, y_1) = y_2,$$
$$\mu^5(y_0, y_2) = y_3,$$
$$\mu^5(y_0, y_3) = y_4,$$
$$\mu^5(y_1, y_2) = y_4$$

(les valeurs $\mu^5(y_i, y_j)$ non exprimées sont nulles).

Cherchons les cocycles β tels que $\beta(V_i(\mu^5), V_j(\mu^5)) \subset V_{i+j}(\mu^5)$. En ajoutant un cobord convenable, on peut supposer que

$$\beta(y_0, y_i) = 0,$$
$$\beta(y_1, y_2) = 0,$$

alors l'équation $\mu^5 . \beta + \beta . \mu^5(y_0, y_1, y_2) = 0$ prouve que $\beta(y_1, y_3) = 0$, donc $\beta = 0$.

— μ^6 est définie sur la base $y_0 y_1 y_2 y_3 y_4 y_5$ par

$$\mu^6(y_0, y_i) = y_{i+1} \qquad (1 \leq i \leq 4),$$
$$\mu^6(y_1, y_2) = y_4,$$
$$\mu^6(y_1, y_3) = y_5,$$
$$\mu^6(y_1, y_4) = y_5,$$
$$\mu^6(y_2, y_3) = -y_5.$$

Cherchons les cocycles β tels que $\beta(y_i, y_j) \in K y_{i+j} + \ldots$. En ajoutant un cobord convenable, on peut supposer que

$$\beta(y_0, y_i) = 0,$$
$$\beta(y_1, y_2) = 0,$$
$$\beta(y_1, y_4) = 0.$$

Alors l'équation $\mu^6 . \beta + \beta . \mu^6(y_0, y_1, y_2) = 0$ prouve que $\beta(y_1, y_3) = 0$, et l'équation $\mu^6 . \beta + \beta . \mu^6(y_0, y_1, y_3) = 0$ prouve que $\beta(y_2, y_3) = 0$, donc β est nul.

2. Espace tangent à la variété $N(V)$ en un point μ_0 filiforme.

Soit V un espace vectoriel de dimension $n + 1$. Alors l'ensemble des structures μ d'algèbres filiformes sur V est un ouvert de la variété $N(V)$ des structures d'algèbres de Lie nilpotentes sur V.

Les résultats de (1.5) montrent que si (V, μ_0) est une algèbre de Lie filiforme, on peut toujours trouver une base $\{e_0, e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de V telle que

$$\mu_0(e_0, e_i) = e_{i+1} \qquad (1 \leqq i \leqq n-1),$$
$$\mu_0(e_0, e_n) = 0,$$
$$\mu_0(e_1, e_2) \in K e_4 + K e_5 + \ldots + K e_n.$$

On appelle une telle base une base adaptée de (V, μ_0). On a alors

$$V_i(\mu_0) = \sum_{r \geqq i} K e_r \qquad \text{pour} \quad i \geqq 2,$$

$$\mu_0(V_i(\mu_0), V_j(\mu_0)) \subset V_{i+j+1}(\mu_0) \qquad \text{si} \quad i+j<n$$

et

$$\mu_0(e_i, e_{n-i}) = (-1)^i \alpha\, e_n \qquad \text{où} \quad \alpha = 0 \quad \text{si } n \text{ est pair.}$$

D'autre part, il existe un ouvert $\mathcal{U}$ de $L(V)$, entourant μ_0, tel que, si $\mu \in \mathcal{U}$, les éléments e_0, e_1 et $x_i(\mu) = \mathrm{ad}_\mu^{i-1}(e_0).e_1$, $2 \leqq i \leqq n$, soient tous linéairement indépendants. Donc, sur l'ouvert $\mathcal{U} \cap N(V)$, les $x_i(\mu)$, $i \geqq k$, forment une base de $V_k(\mu)$ pour $k \geqq 2$. On sait alors que sur l'ouvert des algèbres filiformes

$$\mu(V_i(\mu), V_j(\mu)) \subset V_{i+j+1}(\mu) \qquad \text{si} \quad i+j<n, \qquad i \geqq 2, \quad j \geqq 2$$

et si n est pair, on a

$$\mu(V_i(\mu), V_j(\mu)) \subset V_{i+j+1}(\mu), \quad \forall i, j \geqq 2.$$

Sur l'ouvert $N(V)$, cette condition s'exprime par les équations polynomiales

$$Q_{ij}(\mu) = \mu(x_i(\mu), x_j(\mu)) \wedge x_{i+j+1}(\mu) \wedge \ldots \wedge x_n(\mu) = 0$$

si $i+j<n$, pour n impair et $i, j \geqq 2$, et $\forall i \geqq 2$, $\forall j \geqq 2$, si n est pair; soit β un élément tangent à $N(V)$ en μ_0, alors il existe $\varphi : V \to V$ tel que $\beta - \delta(\mu_0)\varphi = z_0$ avec $z_0(V_i(\mu_0), V_j(\mu_0)) \subset V_{i+j}(\mu_0)$.

Mais d'autre part, on peut trouver $\varphi' : V \to V$ tel que

$$(z_0 + \delta(\mu_0)\varphi')(e_0, e_i) = 0 \qquad \text{et} \qquad (z_0 + \delta(\mu_0)\varphi')(V_i(\mu_0), V_j(\mu_0)) \subset V_{i+j}(\mu_0).$$

En effet, les équations $z_0 + \delta(\mu_0)\varphi'(e_0, e_{i-1}) = 0$, $2 \leqq i \leqq n$, définissent $\varphi'(e_i)$ en fonction de $\varphi'(e_0)$, $\varphi'(e_1)$ et des $z_0(e_0, e_k)$, $k \leqq i$, et on a $\varphi'(e_i) \in V_i(\mu_0)$. Donc

$$(z_0 + \delta\mu_0\varphi')(e_0, e_n) = 0 \qquad \text{et} \qquad (z_0 + \delta(\mu_0)\varphi')(V_i(\mu_0), V_j(\mu_0)) \subset V_{i+j}(\mu_0).$$

D'autre part, on peut choisir convenablement $\varphi'(e_1)$ pour que $(z_0 + \delta(\mu_0)\varphi')(e_1, e_2) \in K e_4 + \ldots + K e_n$, soit alors $z_1 = z_0 + \delta(\mu_0)\varphi'$. Alors si β est tangent à $N(V)$ en μ_0, z_1 est tangent à $N(V)$ en μ_0, car l'espace des cobords est l'espace tangent à l'orbite $O(\mu_0)$, et est donc contenu dans l'espace tangent en μ_0 à $N(V)$.

Donc les équations différentielles en μ_0 des applications polynômiales $Q_{i,j}(\mu)$ annulent z_1. Or ceci s'exprime, puisque $z_1(e_0, e_i) = 0$, $\forall i$, par la condition

$$z_1(V_i(\mu_0), V_j(\mu_0)) \subset V_{i+j+1}(\mu_0)$$

pour $i \geqq 2$, $j \geqq 2$ et $i + j < n$ si n est impair; si n est pair, ceci s'exprime par

$$z_1(V_i(\mu_0), V_j(\mu_0)) \subset V_{i+j+1}(\mu_0), \quad \forall i \geqq 2 \quad \text{et} \quad j \geqq 2.$$

Posons $z_0(e_i, e_{n-i}) = \alpha_i e_n$. Les équations $\mu_0 . z_0 + z_0 . \mu_0(e_0, e_i, e_{n-i}) = 0$ montrent que

$$z_0(e_i, e_{n-i}) = (-1)^i \alpha\, e_n.$$

Appelons d'une manière générale $Z'_p(\mu_0, \mu_0)$ l'espace des 2-cocycles de μ_0 tels que

$$z'(e_0, e_i) = 0 \qquad \text{et} \qquad z'(e_i, e_j) \in K\, e_{i+j+p} + \ldots + K\, e_n \qquad \text{pour } i \text{ et } j \geqq 1$$

alors on a la proposition suivante :

PROPOSITION 10. — *Soient μ_0 une algèbre de Lie filiforme de dimension $(n+1)$ sur V de base adaptée $e_0, e_1, e_2, \ldots, e_n$, C une composante irréductible de $N(V)$ contenant μ_0, $T(\mu_0, C)$ l'espace tangent au point μ_0 à C. Alors :*

1° *Si n est pair,*

$$T(\mu_0, C) \subset B^2(\mu_0, \mu_0) + Z'_1(\mu_0, \mu_0),$$

2° *Si n est impair et s'il existe $z_0 \in T(\mu_0, C)$ tel que $z_0(e_0, e_i) = 0$, $i + j < n$, $i \geqq 2$, $j \geqq 2$, $z_0(e_i, e_j) \in Ke_{i+j+1}$,*

$$z_0(e_i, e_{n-i}) = (-1)^i \alpha\, e_n, \qquad \alpha \neq 0,$$

alors

$$T(\mu_0, C) \subset B^2(\mu_0, \mu_0) + Kz_0 + Z'_1(\mu_0, \mu_0);$$

s'il n'existe pas de tel vecteur tangent, alors

$$T(\mu_0, C) \subset B^2(\mu_0, \mu_0) + Z'_1(\mu_0, \mu_0).$$

D'autre part, la proposition suivante permet de calculer la dimension de l'espace $B^2(\mu_0, \mu_0) + Z'_1(\mu_0, \mu_0)$.

D'après (1.5), on sait que l'algèbre de Lie $\operatorname{gr}\mu_0$, associée à μ_0 est isomorphe soit à l'algèbre μ_0^n soit à l'algèbre μ_1^n.

PROPOSITION 11. — *Si* (V, μ_0) *est une algèbre de Lie de dimension* $(n+1)$ *telle que* $\operatorname{gr}\mu_0 \simeq \mu_0^n$, *alors*

$$\dim(B^2(\mu_0, \mu_0) + Z'_1(\mu_0, \mu_0)) = \dim Z'_1(\mu_0, \mu_0) + n^2$$

et si $\operatorname{gr}\mu_0 \simeq \mu_1^n$, *alors*

$$\dim(B^2(\mu_0, \mu_0) + Z'_1(\mu_0, \mu_0)) = \dim Z'_1(\mu_0, \mu_0) + n^2 + 1.$$

Démonstration. — En effet, on a

$$\begin{aligned}&\dim(B^2(\mu_0, \mu_0) + Z'_1(\mu_0, \mu_0))\\ &= \dim B^2(\mu_0, \mu_0) + \dim Z'_1(\mu_0, \mu_0) - \dim(B^2(\mu_0, \mu_0) \cap Z'_1(\mu_0, \mu_0)).\end{aligned}$$

Or $B^2(\mu_0, \mu_0) \cap Z'_1(\mu_0, \mu_0) = \{ d\varphi,\ \varphi : V \to V \}$, avec

$$\begin{aligned}&d\varphi(e_0, e_i) = 0,\\ &d\varphi(e_i, e_j) \in K e_{i+j+1} + \ldots + K e_n, \quad \forall i, j \geqq 1.\end{aligned}$$

Les équations $d\varphi(e_0, e_i) = 0$ définissent $\varphi(e_i)$, $i \geqq 2$, en fonction de $\varphi(e_0)$ et $\varphi(e_1)$.

L'équation $d\varphi(e_0, e_2) = 0$ montre que $\varphi(e_1) \in K e_1 + \ldots + K e_n$.

$$\text{Si} \quad \begin{aligned}\varphi(e_0) &= a_0^0 e_0 + \ldots + a_1^n e_n,\\ \varphi(e_1) &= a_1^1 e_1 + \ldots + a_1^n e_n,\end{aligned}$$

alors

$$\varphi(e_i) = (i-1)(a_0^0 + a_1^1) e_i \bmod K e_{i+1} + \ldots + K e_n.$$

On doit simplement écrire que $d\varphi(e_i, e_{n-i}) = 0$, or ceci, si

$$\mu_0(e_i, e_{n-i}) = (-1)^i \alpha e_n,$$

vaut $(-1)^i \alpha (a_0^0 - a_1^1) e_n$, d'où le résultat.

3. Cohomologie d'une algèbre de Lie filiforme.

Soit μ_0 une algèbre filiforme, et soit $(e_0, e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base adaptée de μ_0.

Notons D la dérivation de μ_0 définie par e_0,

$$D = \operatorname{ad} e_0, \qquad D(e_i) = e_{i+1}, \qquad i \geqq 1.$$

On utilisera la convention $e_i = 0$, si $i > n$.

Notons H l'idéal $K e_1 + \ldots + K e_n$. Soit

$$Z'(\mu_0, \mu_0) = \{ \beta : \text{cocycles de } \mu_0 \text{ tels que } \beta(e_0, e_i) = 0 \}.$$

Nous allons chercher à calculer cet espace.

Les équations $\mu_0.\beta+\beta.\mu_0(e_i, e_j, e_k)=0$, $i, j, k\geqq 1$, prouvent que $\beta(e_i, e_j)\in H$.

Les équations $\mu_0.\beta+\beta.\mu_0(e_0, e_i, e_j)=0$, $i, j\geqq 1$, s'écrivent

$$\mathrm{D}(\beta(e_i, e_j))=\beta(e_{i+1}, e_j)+\beta(e_i, e_{j+1}).$$

D'autre part, si on considère les espaces $\mathrm{Hom}(\Lambda^n V, V)$ comme des μ_0-modules, on sait que la différentielle $\delta(\mu_0)$:

$$\mathrm{Hom}(\Lambda^n V, V)\to\mathrm{Hom}(\Lambda^{n+1} V, V)$$

est un morphisme de μ_0-modules.

En particulier, $\delta(\mu_0)$ $(e_0.\beta)=e_0.\delta(\mu_0)\beta$, quelle que soit l'application $\beta:\Lambda^2 V\to V$.

Si donc β vérifie

$$D(\beta(e_i, e_j))=\beta(e_{i+1}, e_j)+\beta(e_i, e_{j+1}),$$

ceci signifie que $e_0.\beta=0$. On a alors $e_0.\delta(\mu_0)\beta=0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}D(\delta\mu_0(\beta)(e_i, e_j, e_k))&-(\delta(\mu_0)\beta)(e_{i+1}, e_j, e_k)\\&-(\delta(\mu_0)\beta)(e_i, e_{j+1}, e_k)-(\delta(\mu_0)\beta)(e_i, e_j, e_{k+1})=0.\end{aligned}$$

Par conséquent, si $\delta\mu_0(\beta)(e_1, e_i, e_j)=0$, $\forall\, i\geqq 1$, $j\geqq 1$ alors

$$\delta\mu_0(\beta)(e_i, e_j, e_k)=0,\quad \forall\, i, j, k\geqq 1.$$

Nous obtenons donc la proposition suivante :

PROPOSITION 12. — *Soient μ_0 une algèbre de Lie filiforme de dimension $n+1$, $(e_0, e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base adaptée de μ_0, $H=K e_1+\ldots+K e_n$ et D la dérivation* $\mathrm{ad}\, e_0$. *Soit $Z'^2(\mu_0, \mu_0)$ l'ensemble des 2-cocycles de (V, μ_0) à valeurs dans V, muni de la représentation adjointe, tels que $\beta(e_0, e_i)=0$, $\forall\, i$.*

Alors $\beta(e_i, e_j)\in H$, les valeurs $\beta(e_i, e_j)\,(i, j\geqq 1)$ sont entièrement déterminées par les valeurs $\beta(e_i, e_{i+1})\,(i\geqq 1)$ grâce à la relation de récurrence $\mathrm{D}\beta(e_i, e_j)=\beta(e_{i+1}, e_j)+\beta(e_i, e_{j+1})$, *et pour qu'une application β à valeurs dans H, vérifiant*

$$\beta(e_0, e_i)=0 \qquad \text{et} \qquad D\beta(e_i, e_j)=\beta(e_{i+j}, e_j)+\beta(e_i, e_{j+1}),$$

soit un 2-cocycle, il faut et il suffit que

$$(\delta(\mu_0)\beta)(e_1, e_j, e_k)=0,\quad \forall\, j, k\geqq 2.$$

Les relations $\mathrm{D}(\beta(e_i, e_j))=\beta(e_{i+1}, e_j)+\beta(e_i, e_{j+1})$ permettent d'exprimer $\beta(e_i, e_{i+p+1})$ en fonction de $\beta(e_j, e_{j+1})$ par la formule

$$\beta(e_i, e_{i+p+1})=\sum_{n=0}^{[p/2]}(-1)^r C_{p-r}^r D^{p-2r}\beta(e_{i+r}, e_{i+r+1})$$

où $[p/2]$ désigne la partie entière de $p/2$; si $i+p+1>n$, $\beta(e_i, e_{i+p+1})$ doit être nul. Ceci impose, sur les éléments $\beta(e_i, e_{i+1})$, les relations $\beta(e_i, e_{n+1}) = 0$, c'est-à-dire

$$\sum_{r=0}^{[n-i/2]} (-1)^r C_{n-i-r}^r D^{n-i-2r}\beta(e_{i+r}, e_{i+r+1}) = 0.$$

En particulier, on voit que si β est de degré $\geqq -1$, c'est-à-dire si on choisit $\beta(e_i, e_{i+1}) \in Kx_{2i} + \ldots + K e_n$, alors les équations $\beta(e_i, e_{n+1}) = 0$ sont automatiquement vérifiées.

4. Applications à la majoration des composantes irréductibles de $N(V)$.

Soit V un espace vectoriel de dimension $n+1$, et de base $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$.

Exemple 1. — Soit μ_0^n l'algèbre de Lie de dimension $n+1$ définie par $\mu_0^n(e_0, e_i) = e_{i+1}$, $1 \leqq i \leqq n-1$.

Alors, pour se donner un élément $\beta \in Z'_1(\mu_0, \mu_0)$, c'est-à-dire un cocycle tel que $\beta(e_0, e_i) = 0$ et $\beta(e_i, e_j) \in \mathrm{K} e_{i+j+1}$, il suffit de se donner arbitrairement des valeurs $\beta(e_i, e_{i+1})$ dans l'espace $Ke_{2i+2} + \ldots + Ke_n$.

On a donc, si $n = 2p$,

$$\dim Z'_1(\mu_0^n, \mu_0^n) = (p-1)^2,$$

et si $n = 2p+1$,

$$\dim Z'_1(\mu_0^n, \mu_0^n) = p(p-1).$$

Donc, d'après les propositions 9 et 10, on a la proposition suivante :

Proposition 13. — *Soit C une composante irréductible de $N(V)$ contenant μ_0^n, alors, si $n = 2p$,*

$$\dim C \leqq (p-1)^2 + n^2,$$

et si $n = 2p+1$,

$$\dim C \leqq p(p-1) + n^2 + 1.$$

Mais d'autre part, soit C une composante irréductible de $N(V)$, rencontrant l'ouvert des algèbres filiformes, alors $\mu_0^n \in C$. En effet, si δ est une algèbre de Lie filiforme qui appartient à C, alors on sait (proposition 6) que l'algèbre $\mathrm{gr}\,\delta \in \overline{O(\delta)}$, donc appartient à C. Or $\mathrm{gr}\,\delta$ est isomorphe soit à μ_0^n soit à μ_1^n, mais $\mu_0^n \in \overline{O(\mu_1^n)}$, donc $\mu_0^n \in C$.

On en déduit donc la proposition suivante :

Proposition 14. — *Si C est une composante irréductible de $N(V)$, rencontrant l'ouvert des filiformes, alors $\mu_0^n \in C$ et*

$$\dim C \leqq (p-1)^2 + (2p)^2 \quad \text{si} \quad \dim V = 2p+1,$$
$$\dim C \leqq p(p-1) + (2p)^2 + 1 \quad \text{si} \quad \dim V = 2p+2.$$

EXEMPLE 2. — Soit δ_2^n l'algèbre de Lie sur V, définie par

$$\delta_2^n(e_0, e_i) = e_{i+1}, \qquad 1 \leqq i \leqq n-1,$$
$$\delta_2^n(e_1, e_i) = e_{i+2}, \qquad 2 \leqq i \leqq n-2,$$

δ_2^n est une algèbre de Lie filiforme.

Cherchons à déterminer l'espace $Z'_1(\delta_2^n, \delta_2^n)$, si $\beta \in Z'(\delta_2^n, \delta_2^n)$, on doit avoir

$$D(\beta(e_i, e_j)) = \beta(e_{i+1}, e_j) + \beta(e_i, e_{j+1}).$$

D'autre part, les équations $\delta\beta(e_1, e_i, e_j) = 0$, $i, j \geqq 2$, s'écrivent

$$D^2\beta(e_i, e_j) = \beta(e_{i+2}, e_j) + \beta(e_i, e_{j+2}).$$

On voit donc que ceci entraîne $2\beta(e_{i+1}, e_{j+1}) = 0$, $i \geqq 2$, $j \geqq 2$. Donc en caractéristique $\neq 2$, on a $\beta(e_i, e_j) = 0$ si $i \geqq 3$, $j \geqq 3$, et pour déterminer un élément de $Z'_1(\delta_2^n, \delta_2^n)$, on peut choisir arbitrairement les valeurs

$$\beta(e_1, e_2) \in K e_4 + \ldots,$$
$$\beta(e_2, e_3) \in K e_6 + \ldots.$$

Si $n \geqq 6$, on voit qu'il ne peut y avoir de cocycles z, tel que

$$z(e_1, e_2) \in K e_4 + \ldots,$$
$$z(e_2, e_3) \in K e_6 + \ldots$$

et $z(e_i, e_{n-i}) = (-1)^i \alpha e_n$ avec $\alpha \neq 0$.

Donc, d'après les propositions 9 et 10, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 15. — *Soit V un espace vectoriel de dimension $n+1$ ($n \geqq 6$) sur un corps K de caractéristique $\neq 2$; soit C une composante irréductible de $N(V)$ contenant δ_2^n, alors*

$$\dim C \leqq (n+1)^2 - 9.$$

REMARQUE. — C'est la majoration obtenue dans [6], par une méthode de récurrence, en utilisant le fait que $\dim H^2(\delta_2^n, K) = 3$.

5. Composantes irréductibles de l'ouvert des algèbres filiformes.

Soit V un espace vectoriel de dimension $n+1$, de base $e_0, e_1, e_2, \ldots, e_n$. On sait que toute algèbre de Lie filiforme μ admet une base adaptée $e_0(\mu)$, $e_1(\mu)$, $\ldots$, $e_n(\mu)$. Toute algèbre de Lie filiforme est donc isomorphe à une algèbre de la forme $\mu_0^n + \beta$, où β est une application bilinéaire telle que

$$\beta(e_0, e_i) = 0,$$
$$\beta(e_i, e_j) \in K e_{i+j+1} + \ldots + K e_n, \qquad \text{si} \quad i+j < n,$$
$$\beta(e_i, e_{n-i}) = (-1)^i \alpha e_n, \qquad \text{où} \quad \alpha = 0 \quad \text{si } n \text{ est pair.}$$

L'équation $(\mu_0^n + \beta).(\mu_0^n + \beta) = 0$ s'écrit $\beta.\mu_0^n + \mu_0^n.\beta + \beta.\beta = 0$. Or pour les valeurs e_0, e_i, e_j, ceci entraîne $\beta.\mu_0^n + \mu_0^n.\beta\,(e_0, e_i, e_j) = 0$, et par conséquent, on a

$$\beta.\mu_0^n + \mu_0^n.\beta = 0 \qquad \text{et} \qquad \beta.\beta = 0.$$

Appelons $\mathrm{J}(\mu_0^n)$ l'ensemble des deux cocycles β de μ_0^n tels que

$$\begin{aligned}&\beta(e_0, e_i) = 0,\\ &\beta(e_i, e_j) \in K e_{i+j+1+\ldots} + K e_n \qquad \text{si} \quad i+j<n,\\ &\beta(e_i, e_{n-i}) = (-1)^i \alpha e_n\end{aligned}$$

et

$$\beta.\beta = 0,$$

$\mathrm{J}(\mu_0^n)$ est un sous-ensemble algébrique de $Z^2(\mu_0^n, \mu_0^n)$. Alors si $\beta \in J(\mu_0^n)$ $\mu_0^n + \beta$ est une algèbre de Lie filiforme.

PROPOSITION 16. — *Soit C une composante irréductible de $J(\mu_0^n)$ de dimension a, alors $\overline{GL(V) \star (\mu_0^n + C)}$ est une composante irréductible de $N(V)$ de dimension $n^2 + a$, et l'application ainsi définie est bijective sur l'ensemble des composantes irréductibles de $N(V)$ rencontrant l'ouvert des algèbres filiformes.*

Démonstration. — Soit C une composante irréductible de $J(\mu_0^n)$, et soit C' une composante irréductible de $N(V)$ contenant l'ensemble irréductible $GL(V) \star (\mu_0^n + C)$. Alors C' contient μ_0^n.

Considérons l'ouvert U de $N(V)$ contenant μ_0^n tel que, si $\mu \in U$, les éléments $\{e_0, e_1, x_{i+1}(\mu) = \mathrm{ad}_\mu^i e_0 . e_1\}$, $1 \leqq i \leqq n-1$, soient linéairement indépendants.

On a alors

$$\mu(e_1, x_2(\mu)) = \sum_{i \geqq 3} \alpha_i(\mu) x_i(\mu),$$

où les $\alpha_i(\mu)$ sont des fonctions rationnelles de μ définies sur U. Posons alors

$$\begin{aligned} e_1(\mu) &= \alpha_3(\mu) e_0 - e_1,\\ e_{i+1}(\mu) &= \mathrm{ad}_\mu^i(e_0).e_1(\mu).\end{aligned}$$

Alors les éléments $e_0, e_1(\mu), e_2(\mu), \ldots, e_n(\mu)$ forment une base adaptée de l'algèbre μ, et l'application qui à μ fait correspondre $(e_0, e_1(\mu), \ldots, e_n(\mu))$ est une application rationnelle.

On a donc $\mu = \varphi(\mu) \star (\mu_0^n + \beta(\mu))$ où $\varphi(\mu) \in GL(V)$ et $\beta(\mu) \in J(\mu_0^n)$, et l'application qui à $\mu \in U$ fait correspondre $\beta(\mu)$ est une application rationnelle.

On voit donc que $\beta(U \cap C')$ est un ensemble irréductible contenant C. On a donc

$$\beta(U \cap C') = C \qquad \text{et} \qquad U \cap C' \subset GL(V) \star (\mu_0^n + C),$$

donc

$$C' = \overline{GL(V) \star (\mu_0^n + C)}.$$

Réciproquement, si C' est une composante irréductible de $N(V)$, rencontrant l'ouvert des filiformes, alors C' contient μ_0^n, et le même raisonnement montre que si C est une composante irréductible contenant $\beta(C' \cap U)$, alors $\overline{GL(V) \star (\mu_0^n + C)} = C'$.

Enfin, si C est une composante irréductible de $J(\mu_0^n)$ de dimension a, on a

$$\dim GL(V) \star (\mu_0^n + C) = \dim GL(V) + \dim C - \inf_{\beta \in C} d(\beta),$$

où, si $\beta \in C$, $d(\beta)$ est la dimension de l'ensemble des $g \in GL(V)$ tels que $g \star (\mu_0^n + \beta) \in C$.

Calculons la dimension de l'ensemble $H(\beta)$ des $g \in GL(V)$ tels que $g^{-1} \star (\mu_0^n + \beta) \in C$. On voit alors que $H(\beta)$ est le sous-ensemble de $GL(V)$ tel que $g(e_0) = a_0^0 e_0 + \ldots + a_1^n e_n$,

$$g(e_1) = a_1^1 e_1 + \ldots + a_1^n e_n,$$
$$g(e_i) = (\mu_0^n + \beta)(g e_0, g e_{i-1}).$$

Donc $d(\beta) = 2n + 1$ pour tout $\beta \in C$, ce qui démontre le résultat.

6. Applications à la réductibilité de l'ouvert des filiformes.

(*a*) Soit $r \geqq 1$, et soit $Z'_r(\mu_0^n, \mu_0^n)$ l'ensemble des $\beta \in Z^2(\mu_0^n, \mu_0^n)$ tels que

$$\beta(e_0, e_i) = 0,$$
$$\beta(e_i, e_j) \in \sum K e_k, \qquad k \geqq i + j + r,$$

alors $\beta . \beta(e_i, e_j, e_k) \in \sum K e_p$, $p \geqq i + j + k + 2r$.

Par conséquent, si $2r + 6 \geqq n + 1$, tous les éléments de l'espace vectoriel $Z'_r(\mu_0^n, \mu_0^n)$ vérifient l'équation $\beta . \beta = 0$; soit r_0 le plus petit des entiers $r \geqq 1$ tels que $2r + 6 \geqq n + 1$.

$Z'_{r_0}(\mu_0^n, \mu_0^n)$ est alors un sous-ensemble irréductible de $J(\mu_0^n)$. Calculons sa dimension. D'après (4.3), pour se donner un élément de $Z'_{r_0}(\mu_0^n, \mu_0^n)$, il suffit de se donner des valeurs arbitraires $z(e_i, e_{i+1})$ dans

$\sum K e_p$, $p \geqq 2i + 1 + r_0$. Alors,

si $n = 4q$,	$r_0 = 2q - 2$,	$\dim Z'_{r_0} = q(q+1)$,	$q \geqq 2$,
si $n = 4q + 1$,	$r_0 = 2q - 2$,	$\dim Z'_{r_0} = (q+1)^2$,	$q \geqq 2$,
si $n = 4q + 2$,	$r_0 = 2q - 1$,	$\dim Z'_{r_0} = (q+1)^2$,	$q \geqq 1$,
si $n = 4q + 3$,	$r_0 = 2q - 1$,	$\dim Z'_{r_0} = (q+1)(q+2)$,	$q \geqq 1$,

on obtient donc la proposition suivante :

PROPOSITION 17. — *Si V est de dimension $n + 1$, il existe une composante irréductible de $N(V)$ contenant μ_0^n et de dimension supérieure ou égale à*

$$\begin{cases} n^2 + q(q+1) & \textit{si}\ n = 4q \quad (q \geqq 2), \\ n^2 + (q+1)^2 & \textit{si}\ n = 4q + 1 \quad (q \geqq 2), \end{cases}$$

$$\begin{cases} n^2 + (q+1)^2 & \textit{si}\ n = 4q + 2 \quad (q \geqq 1), \\ n^2 + (q+1)(q+2) & \textit{si}\ n = 4q + 3 \quad (q \geqq 1). \end{cases}$$

(*b*) Considérons l'ensemble $A_2(\mu_0^n)$ de $Z^2(\mu_0^n, \mu_0^n)$, défini par

$$\begin{cases} \beta(e_0, e_i) = 0, \\ \beta(e_1, e_2) \in K e_4 + \ldots + K e_n, \\ \beta(e_2, e_3) \in K e_{n-1} + K e_n, \\ \beta(e_i, e_{i+1}) = 0 \quad \text{si} \quad i \geqq 3. \end{cases}$$

On a alors, si $\beta \in A_2(\mu_0^n)$,

$$\beta . \beta = 0.$$

Il existe donc une composante irréductible C, contenant μ_0^n, et de dimension $\geqq n^2 + (n - 1)$.

Mais, d'autre part, si on considère le cocycle β_0 de $A_2(\mu_0^n)$, défini par

$$\left.\begin{array}{l} \beta_0(e_1, e_2) = e^4 \\ \beta_0(e_2, e_3) = 0 \end{array}\right\} \text{ alors } \quad \mu_0^n + \beta_0 = \delta_2^n,$$

et par conséquent on a aussi

$$\dim C \leqq (n + 1)^2 - 9.$$

(*c*) De la proposition 17 et de la proposition 15, on déduit que, si $n \geqq 23$, alors il existe une composante irréductible de $N(V)$ contenant μ_0^n et ne contenant pas δ_2^n. Donc l'ouvert des algèbres filiformes sur un espace vectoriel de dimension $n + 1$, $n \geqq 23$, est réductible.

On sait, d'autre part [6], qu'il existe un ensemble irréductible de $N(V)$ dont la dimension est de l'ordre de $2n^3/27$ lorsque n est grand.

Il existe donc au moins trois composantes irréductibles dans la variété des algèbres de Lie nilpotentes pour n suffisamment grand, si K est un corps algébriquement clos de caractéristique $\neq 2$.

5. Cohomologie p-nilpotente.

1. Définition de la cohomologie p-nilpotente.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur V espace vectoriel sur K($\mathfrak{g}$ n'est pas supposée nilpotente). Considérons la catégorie C_p des $\mathfrak{g}$-modules p-nilpotents. C_p est une catégorie abélienne. Si U désigne l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, et I l'idéal d'augmentation de l'algèbre U, et I^p la $p^{\text{ième}}$ puissance de l'idéal I, il y a équivalence entre la catégorie C_p et la catégorie des (U/I^p)-modules.

Le corps K, muni de la représentation triviale, est un $\mathfrak{g}$-module p-nilpotent quel que soit $p \geqq 1$. On peut donc chercher à résoudre le foncteur qui à tout $\mathfrak{g}$-module M p-nilpotent fait correspondre l'espace vectoriel sur K, $\mathrm{Hom}_{U/I^p\text{-mod}}(K, M)$, espace vectoriel isomorphe à l'espace des invariants de la représentation de $\mathfrak{g}$ dans M. La résolution de ce foncteur exact à gauche fournit des espaces $N_p^r(\mathfrak{g}, M)$ qu'on appellera les $r^{\text{ièmes}}$-espaces de cohomologie p-nilpotentes de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans M. La catégorie C_p des $\mathfrak{g}$-modules p-nilpotents étant une sous-catégorie pleine de la catégorie C_{p+1} des $\mathfrak{g}$-modules $(p+1)$-nilpotents, elle-même sous-catégorie pleine de la catégorie C des $\mathfrak{g}$-modules, on a un diagramme commutatif de foncteurs exacts :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] C_p \arrow[rr] \arrow[dr] & & C_{p+1} \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

On en déduit si M est un $\mathfrak{g}$-module p-nilpotent des applications canoniques

$$\begin{tikzcd} N_p^r(\mathfrak{g}, M) \arrow[rr, "i^r_{p,p+1}"] \arrow[dr, "i_p^r"'] & & N_{p+1}^r(\mathfrak{g}, M) \arrow[dl, "i_{p+1}^r"] \\ & H^r(\mathfrak{g}, M) & \end{tikzcd}$$

2. Description des espaces de cohomologie p-nilpotente.

Considérons les résolutions de K dans la catégorie des U-modules par la résolution de Koszul $E(\mathfrak{g})$, où $E^n(\mathfrak{g}) = U \otimes \Lambda^n V$, et la résolution normalisée standard $N(\mathfrak{g})$ où $N^n(\mathfrak{g}) = U \otimes \bigotimes^n I$.

On sait que l'application canonique $1 \otimes \lambda^n$, avec $\lambda^n : \Lambda^n V \to \bigotimes^n I$, définie par

$$\lambda^n(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n) = \sum_{\sigma \in S[1,n]} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)},$$

est un morphisme de $E(\mathfrak{g})$ dans $N(\mathfrak{g})$.

Par conséquent, l'application

$$\operatorname{Hom}\lambda^n : \quad \operatorname{Hom}_K\left(\overset{n}{\bigotimes} I, M\right) \to \operatorname{Hom}_K(\Lambda^n V, M)$$

réalise un isomorphisme des espaces de cohomologie $HI^n(\mathfrak{g}, M)$ et $H^n(\mathfrak{g}, M)$ de ces deux complexes.

Si on note respectivement $ZI^n(\mathfrak{g}, M)$ et $BI^n(\mathfrak{g}, M)$ les espaces de cocycles et de cobords d'ordre n du complexe $\left\{\operatorname{Hom}\left(\overset{n}{\bigotimes} I, M\right)\right\}$, et $Z^n(\mathfrak{g}, M)$ et $B^n(\mathfrak{g}, M)$ respectivement les espaces de cocycles et de cobords du complexe de cohomologie de Koszul $(\operatorname{Hom}(\Lambda^n V, M))$, alors on sait ([1]) que tout cocycle $\beta \in Z^n(\mathfrak{g}, M)$ admet un prolongement $B \in ZI^n(\mathfrak{g}, M)$, et si deux cocycles B et B' ont la restriction dans $Z^n(\mathfrak{g}, M)$, ils ne diffèrent que par un élément de $BI^n(\mathfrak{g}, M)$.

D'autre part, résolvons K dans la catégorie des (U/I^p)-modules par la résolution normalisée standard $N(U/I^p)$, où

$$N^n(U/I^p) = U/I^p \otimes \overset{n}{\bigotimes} I/I^p.$$

La différentielle d^n_p est définie naturellement par

$$d^n_p(u_0 \otimes u_1 \otimes \ldots \otimes u_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i u_0 \otimes u_1 \otimes \ldots \otimes u_i u_{i+1} \otimes \ldots \otimes u_n.$$

Les espaces $N^n_p(\mathfrak{g}, M)$ seront donc les espaces de cohomologie du complexe $\left(\operatorname{Hom}_K\left(\overset{n}{\bigotimes} I/I^p, M\right)\right)$ muni de la différentielle d^n, où

$$\begin{aligned} & d^n f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ & = x_0 . f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f(x_1, x_2, \ldots, x_i x_{i+1}, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Les applications de passage au quotient

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[dr] & U/I^p \\ & U/I^{p+1} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

définissent des morphismes des résolutions normalisées

$$\begin{tikzcd} N(U) \arrow[r] \arrow[dr] & N(U/I^p) \\ & N(U/I^{p+1}) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

et par conséquent des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} N_p^r(\mathfrak{g}, M) \arrow[rr, "i_p^r"] \arrow[dr, "i_{p,p+1}^r"'] & & H^r(\mathfrak{g}, M) \\ & N_{p+1}^r(\mathfrak{g}, M) \arrow[ur, "i_{p+1}^r"'] & \end{tikzcd}$$

D'autre part, si $V_p(\mathfrak{g})$ désigne l'idéal $\mathcal{C}^{p-1}\mathfrak{g}$, il y a équivalence entre la catégorie des modules sur $\mathfrak{g}$, qui sont p-nilpotents, et la catégorie des modules sur $\mathfrak{g}/V_p(\mathfrak{g})$, qui sont p-nilpotents.

L'application canonique $N_p^r(\mathfrak{g}/V_p(\mathfrak{g}), M) \to N_p^r(\mathfrak{g}, M)$ est donc un isomorphisme.

PROPOSITION 18. — *Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie nilpotente et si M est un $\mathfrak{g}$-module nilpotent d'indice de nilpotence r_2, alors $H^n(\mathfrak{g}, M)$ est limite inductive des espaces $N_p^n(\mathfrak{g}, M)$ définis pour $p \geqq r_2$.*

Démonstration. — C'est une application de la proposition 4 du chapitre 1. On considère $V_i(\mathfrak{g})$ la filtration de $\mathfrak{g}$ définie par $V_i(\mathfrak{g}) = \mathcal{C}^{i-1}\mathfrak{g}$; alors soit β un cocycle de $\mathfrak{g}$ dans M; β définit une application U-linéaire de $U \otimes \Lambda^n \mathfrak{g} \to M$. Cette application est nulle sur l'espace $E^{n, r_2+nr_1}(\mathfrak{g})$ (*cf.* 1.3), où

$$E^{n, r_2+nr_1}(\mathfrak{g}) = \sum_{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n \geqq r_2+nr_1} I^{\alpha_0} \otimes V_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge V_{\alpha_n}.$$

En effet, si $y \in I^{\alpha_0} \otimes V_{\alpha_1} \wedge V_{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge V_{\alpha_n}$, $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \geqq n_2 + nr_1$, si $\alpha_0 \geqq r_2$, alors $\beta(y) = 0$, car M est r_2-nilpotent, et si $\alpha_0 < r_2$, alors l'un des α_i est supérieur à r_1 et l'espace V_{α_i}, étant nul puisque $\mathfrak{g}$ est d'indice de nilpotence r_1, y est nul.

Mais alors le cocycle $\beta \circ \Psi_n$, où Ψ_n est choisi vérifiant les conditions de la proposition 4, est nul sur l'espace $N^{n, r_2+nr_1}(\mathfrak{g})$, donc $\beta \circ \Psi_n (1 \otimes X_{A_1} \otimes \ldots \otimes X_{A_n})$ est nul dès que l'un des X_{A_i} appartient à I^q avec $q \geqq r_2 + n(r_1 - 1) + 1$; $\beta \circ \Psi_n$ définit donc un élément de $N_q^n(\mathfrak{g}, M)$, et la classe de β dans $H^n(\mathfrak{g}, M)$ est l'image de la classe de $\beta \circ \Psi_n$ dans $N_q^n(\mathfrak{g}, M)$.

L'application $N_q^n(\mathfrak{g}, M) \to H^n(\mathfrak{g}, M)$ est donc surjective dès que $q \geqq r_2 + n(r_1 - 1) + 1$. De même, on déduit de la proposition 4 que si $h \in N_p^n(\mathfrak{g}, M)$ est tel que $i_p^n(h) = 0$, alors il existe $p' \geqq p$ tel que l'image de h dans $N_{p'}^n(\mathfrak{g}, M)$ soit nulle.

2. Interprétations des premiers groupes de cohomologie p-nilpotents.

Rappelons que nous avons défini, si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie nilpotente, et si M est un $\mathfrak{g}$-module nilpotent, une filtration de $\mathfrak{g}$ par la suite $V_i(\mathfrak{g}) = \mathcal{C}^{i-1}\mathfrak{g}$, et une filtration de M par la suite $M_i = \{m$ tels que $\rho(\mathfrak{g})^{-i+1}.m = 0\}$. Ces filtrations déterminent une filtration des espaces

$H^n(\mathfrak{g}, M)$. Nous allons voir que, en dimension 1 et 2, il y a un rapport étroit entre les espaces de cohomologie p-nilpotente et la filtration sur $H^n(\mathfrak{g}, M)$.

PROPOSITION 19. — *Si M est un $\mathfrak{g}$-module p-nilpotent, la suite suivante est exacte :*

$$0 \to N_p^1(\mathfrak{g}, M) \xrightarrow{i_p^1} H^1(\mathfrak{g}, M) \xrightarrow{r} \mathrm{Hom}_K(I^p/I^{p+1}, M_0)$$
$$\xrightarrow{\delta} N_p^2(\mathfrak{g}, M) \xrightarrow{i_p^2} (H^2(\mathfrak{g}, M))_{-p} \to 0$$

et l'image de i_p^1 est l'espace $H^1(\mathfrak{g}, M)_{-(p-1)}$.

Démonstration. — Tout d'abord définissons les applications r et δ intervenant dans cette suite exacte.

L'application r est définie de la façon suivante : si β est un cocycle de $\mathfrak{g}$ dans M, alors β se prolonge de manière unique en un cocycle B de I dans M, car B doit vérifier $B(X, Y) = X.B(Y).B$ est nul sur l'espace I^{p+1}, car M est p-nilpotent, et la restriction de B à l'espace I^p définit une application $r(\beta)$ de I^p/I^{p+1} dans M_0. D'autre part, si β est un cobord, alors B est un cobord, et est donc nul sur I^p.

δ est défini de la façon suivante. Soit $\varphi : I^p/I^{p+1} \to M_0$. Prolongeons φ d'une manière quelconque en $\varphi' : I/I^{p+1} \to M$, et calculons $d\varphi' : I \otimes I \to M$.

$d\varphi'$ est définie par $d\varphi'(x, y) = \varphi'(xy) - x.\varphi'(y)$, alors $d\varphi'$ est nul si x ou y appartiennent à I^p; $d\varphi'$ définit donc un élément de $N_p^2(\mathfrak{g}, M)$ qui ne dépend que de φ, car si φ'_1 et φ'_2 sont deux prolongements de φ alors l'application $\varphi'_1 - \varphi'_2$ est nulle sur l'espace I^p, et $d(\varphi'_1 - \varphi'_2)$ est un cobord pour la cohomologie p-nilpotente.

Démontrons maintenant l'exactitude de cette suite. La seule difficulté est de montrer que l'application i_p^2 est surjective sur l'espace $H^2(\mathfrak{g}, M)_{-p}$. Montrons d'abord que

$$i_p^2(N_p^2(\mathfrak{g}, M)) \subset H^2(\mathfrak{g}, M)_{-p}.$$

D'après la proposition 8, il suffit de prouver que si B est un cocycle de $I \otimes I$ dans M tel que $B(X, Y) = 0$, si X ou $Y \in I^p$, alors le cocycle $\beta : \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \to M$, défini par $\beta(x, y) = B(x \otimes y) - B(y \otimes x)$, vérifie la condition de p-nilpotence. Ceci résulte du lemme suivant :

LEMME 5. — *Soit β un élément de $Z^2(\mathfrak{g}, M)$ et soit B un élément de $ZI^2(\mathfrak{g}, M)$ prolongeant β, alors*

$$\varphi^r(\beta)(x_1, x_2, \ldots, x_r) = B(W(x_1, x_2, \ldots, x_r))$$

où

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_r) = x_1 x_2 \ldots x_{r-2} x_{r-1} \otimes x_r - \sum_{i=1}^{r-1} x_1 x_2 \ldots \hat{x}_i [x_{i+1}[\ldots[x_{r-1}, x_r]\ldots]] \otimes x_i.$$

Ce lemme se démontre par récurrence. On a

$$\varphi^r(\beta)(x_1, x_2, \ldots, x_r)$$
$$= \beta(x_1, [x_2[x_3 \ldots [x_{r-1}, x_r] \ldots]]) + x_1 . \varphi^{r-1}(\beta)(x_2, \ldots, x_r).$$

Or par hypothèse de récurrence :

$$\varphi^{r-1}(\beta)(x_2, \ldots, x_r) = B(W(x_2, \ldots, x_r)).$$

B est un cocycle, on a donc

$$u . B(v, w) = B(uv, w) - B(u, vw).$$

Donc si on appelle π l'application de $I \otimes I$ dans I, qui à $u \otimes v$ fait correspondre uv, on a

$$x_1 . B(W(x_2, \ldots, x_r) = B((x_1 \otimes 1) W(x_2, \ldots, x_r)) - B(x_1, \pi W(x_2, \ldots, x_r))$$

et finalement

$$\varphi^r(\beta)(x_1, x_2, \ldots, x_r) = B(W(x_1, x_2, \ldots, x_r))$$
$$- B(x_1, [x_2[x_3 \ldots [x_{r-1}, x_r] \ldots]] - \pi W(x_2, \ldots, x_r))$$

et pour conclure la démonstration du lemme, il suffit de démontrer que

$$\pi(W(x_2, \ldots, x_r)) = [x_2[x_3 \ldots [x_{r-1}, x_r]] \ldots],$$

ce qui se démontre sans difficulté par récurrence sur le nombre de variables.

Il reste donc à montrer réciproquement que, si $h \in H^2(\mathfrak{g}, M)_{-p}$, alors $h = i_p^2(b)$, où $b \in N_p^2(\mathfrak{g}, M)$. Or ceci est évident, car si β est un cocycle représentant h tel que $\beta(V_i, V_j) \subset M_{i+j-p}$, alors β est un cocycle nul sur l'espace $E^{2,p+1}(\mathfrak{g})$, et $\Psi_2 \circ \beta$ est nul sur l'espace $N^{2,p+1}(\mathfrak{g})$, donc $\Psi_2 \circ \beta(X \otimes Y)$ est nul dès que X ou Y appartiennent à I^p.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). — *Homological algebra.* — Princeton, Princeton University Press, 1956 (*Princeton mathematical series*, 19).

[2] GERSTENHABER (M.). — The cohomology structure of an associative ring, *Annals of Math.*, t. 78, 1963, p. 267-288.

[3] HOCHSCHILD (G.) and SERRE (J.-P.). — Cohomologie of Lie algebras, *Annals of Math.*, t. 57, 1953, p. 591-603.

[4] NIJENHUIS (A.) and RICHARDSON (R. W.). — Cohomology and deformations in graded Lie algebras, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 72, 1966, p. 1-29.

[5] VERGNE (M.). — *Variété des algèbres de Lie nilpotentes.* Thèse 3e cycle, Paris, 1966.

[6] VERGNE (M.). — Réductibilité de la variété des algèbres de Lie nilpotentes, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 263, série A, 1966, p. 4-6.

(Texte reçu le 31 janvier 1969.)

Mlle Michèle VERGNE,
11, rue de Quatrefages,
75-Paris 5e.