BULLETIN DE LA S. M. F.

MARIE DUFLO

Opérateurs potentiels des chaînes et des processus de Markov irréductibles

Bulletin de la S. M. F., tome 98 (1970), p. 127-164
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1970__98__127_0>

Bull. Soc. math. France,
98, 1970, p. 127 à 163.

OPÉRATEURS POTENTIELS DES CHAÎNES ET DES PROCESSUS DE MARKOV IRRÉDUCTIBLES

PAR

MARIE DUFLO (*).

Introduction.

On sait faire une théorie du potentiel dans le cas des chaînes de Markov dénombrables récurrentes, grâce notamment aux travaux de KEMENY, SNELL et KNAPP [14] et, dans le cas des marches aléatoires, de SPITZER [21] et KESTEN [15]. Cet article étend une partie de ces résultats aux chaînes et aux processus de Markov récurrents au sens de HARRIS, définis sur un espace mesurable de type dénombrable.

Dans une première étude, on montre qu'une chaîne irréductible est, soit *transiente*, soit *récurrente* au sens de HARRIS; ceci donne une caractérisation de la récurrence plus aisée à vérifier que l'hypothèse de Harris. Pour la théorie du potentiel, dans le cas récurrent, le rôle joué dans le cas discret pour les ensembles finis est ici joué par une classe d'ensembles bornés. On obtient l'existence d'un opérateur potentiel défini sur les fonctions mesurables bornées, d'intégrale nulle, nulles hors d'un ensemble borné; en outre, sous une hypothèse de normalité, on peut prendre pour opérateur potentiel l'opérateur $\lim_{N \to \infty} \sum_{1}^{N} P_n$ (où P_n est le $n^{\text{ième}}$ itéré de la fonction de transition de la chaîne).

Dans la 2e partie, on obtient des résultats semblables pour les résolvantes irréductibles $(U_\lambda)_{\lambda>0}$ en leur associant la chaîne irréductible de fonction de transition U_1. Sans hypothèse d'irréductibilité, lorsque $(U_\lambda)_{\lambda>0}$ est la résolvante d'un processus de Hunt, on sait, sous l'hypo-

(*) Équipe de recherche n° 1 « Processus stochastiques et applications », dépendant de la section n° 2 « Théories physiques et probabilités », associée au C.N.R.S.

thèse (L) de MEYER, décomposer l'espace en classes récurrentes sur lesquelles le processus est récurrent au sens de HARRIS [1], donc sur lesquelles s'applique la théorie du potentiel faite ici.

Dans la 3e partie, on étudie le cas particulier des processus à résolvante fortement fellerienne. Dans le cas transient, le temps de séjour dans tout compact est alors intégrable; dans le cas récurrent, les compacts sont bornés. On construit un compactifié de Martin E^* de E, sur lequel la résolvante est normale si, et seulement si, les mesures λU_λ convergent vaguement dans E^*, si λ tend vers zéro.

On a ainsi étendu aux chaînes et aux processus irréductibles presque tous les résultats de la théorie du potentiel des chaînes discrètes récurrentes qui n'utilisent pas la chaîne retournée. Pour achever l'extension de la théorie discrète, il faudra, par la suite, introduire des hypothèses assurant l'existance d'un processus retourné.

1. Étude des chaînes de Markov irréductibles.

1.1. Hypothèses et notations.

Soient $(E, \mathcal{B})$ un espace mesurable, et B l'ensemble des variables aléatoires bornées sur $(E, \mathcal{B})$. Si $f \in B$, $\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|$; si ν est une mesure, $\|\nu\|$ désigne sa variation totale.

On considère une fonction de transition P sur $(E, \mathcal{B})$ telle que $P(.\,, E) \leqq 1$.

Si ∂ est un point n'appartenant pas à E, on pose $E_\partial = E \cup \{\partial\}$, et on définit sur E_∂ la tribu $\mathcal{B}_\partial$, engendrée par $\mathcal{B}$ et $\{\partial\}$. P est prolongé sur E_∂ en une fonction de transition markovienne par $P(.\,, \{\partial\}) = 1 - P(.\,, E)$ sur E et $P(\partial, \{\partial\}) = 1$.

Soit $X = \{\Omega, \mathcal{F}, (P_x)_{x \in E}, (X_n)_{n \in \mathbf{N}}, (\theta_n)_{n \in \mathbf{N}}\}$ une chaîne de Markov de fonction de transition P. $(\Omega, \mathcal{F})$ est l'espace des trajectoires; X_n fonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(E_\partial, \mathcal{B}_\partial)$ représente la position de la chaîne à l'instant n; θ_n est l'opérateur de translation défini par les relations $X_{p+n} = X_p \circ \theta_n$ pour tous les entiers p; enfin P_x est la loi de la chaîne lorsque l'état initial est x. On désigne par P_n la $n^{\text{ième}}$ itérée de P; pour $f \in B$, on pose

$$P_n f = \int P_n(.\,, dy)\, f(y);$$

si μ est une mesure positive sur $(E, \mathcal{B})$, on pose

$$\mu P_n = \int \mu(dx)\, P_n(x, .).$$

Enfin, si $z \in [0, 1[$, on pose

$$G_z = \sum_{n=1}^{\infty} z^n P_n.$$

Suivant Foguel [8], on dira que X est irréductible, s'il existe une mesure ν absolument continue par rapport aux mesures $G_z(x, .)$ pour tout x de E. Dans ce paragraphe, on supposera X irréductible.

En outre, $\mathcal{B}$ est supposée séparable ou complétée universelle d'une tribu séparable.

L'outil essentiel, dans la suite, sera l'utilisation de la « trace » de X sur certains ensembles A de $\mathcal{B}$. A tout ensemble A de $\mathcal{B}$, on associera les fonctions suivantes :

$$T_A(\omega) = \begin{cases} \inf\{n; n > 0, X_n(\omega) \in A\} & \text{si } \omega \in \bigcup_n \{X_n \in A\}, \\ \infty & \text{si } \omega \notin \bigcup_n \{X_n \in A\}; \end{cases}$$

$$P_A(x, .) = P_x(X_{T_A} \in .),$$
$$T_A^{(1)} = T_A,$$
$$T_A^{(n)} = T_A^{(n-1)} + T_A \circ \theta_{T_A^{(n-1)}}.$$

$\{T_A^{(n)}\}$ est la suite des temps de passage successifs en A. Si on pose $X_\infty = \delta$ la chaîne $X^A = \{\Omega, \mathcal{F}, (P_x)_{x \in A}, (X_{T_A^{(n)}})_{n \in \mathbf{N}}\}$ est une chaîne de Markov de fonction de transition $P^A(x, .)$ $(x \in A \cup \{\delta\})$. On dit que X^A est la trace de X sur A. On notera $P_n^A(x, .) = P_x\{X_{T_A^{(n)}} \in .\}$ pour tout x de E_δ.

1.2. Transience et récurrence.

1.2.1. Théorème. — *Il n'y a que deux cas possibles :*

1° *Cas transient : le noyau potentiel est un noyau propre, c'est-à-dire qu'il existe une suite croissante d'ensembles mesurables $\{E_n\}$ telle que*

$$E = \bigcup E_n \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} P_k(., E_n) \leq M_n < \infty.$$

2° *Cas récurrent : Il existe une mesure μ, σ-finie invariante, telle que, pour tout Γ de $\mathcal{B}$ chargé par μ et tout x de E, on ait*

$$P_x\left(\sum_{1}^{\infty} 1_{(X_n \in \Gamma)} = \infty\right) = 1.$$

1.2.2. La démonstration de ce théorème reprend essentiellement celle où HARRIS montre, dans le cas récurrent, l'existence d'une mesure invariante [9]. Les deux résultats suivants de Harris restent valables sous l'hypothèse d'irréductibilité :

(*a*) Si pour un A de $\mathcal{B}$ chargé par ν, il existe une mesure μ_A bornée invariante par P^A, alors la mesure $\mu(.) = \int \mu_A(dx) E_x\left(\sum_1^{T_A} (1_{(X_n \in .)})\right)$ est une mesure σ-finie invariante par P.

(*b*) Il existe un A de $\mathcal{B}$, chargé par ν, et un entier j, tels que, si $R = \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{j} P_k^A$, on ait pour tout entier n supérieur à un certain entier n_0 et pour un nombre positif δ inférieur à 1, l'inégalité suivante :

$$\sup_{\substack{x, y \in E \times E \\ \Gamma \in \mathcal{B}}} | R_n(x, \Gamma) - R_n(y, \Gamma) | < \delta^n.$$

Ceci implique l'existence d'une mesure μ_A telle que l'on ait

$$\forall n \geqq n_0, \quad \forall x \in E, \quad \forall \Gamma \in \mathcal{B}, \quad | R_n(x, \Gamma) - \mu_A(\Gamma) | < \delta^n.$$

L'alternative entre transience et récurrence, annoncée par le théorème, correspond alors à l'alternative entre $\| \mu_A \| = 0$ et $\| \mu_A \| > 0$.

1.2.3. Supposons $\| \mu_A \| = 0$. Dans ce cas, $R_n(., A) \leqq \delta^n$, si $n \geqq n_0$. Or

$$R_n(., A) = \frac{1}{j^n} \sum_{i_1, \ldots, i_n} P_{i_1+i_2+\ldots+i_n}^A(., A),$$

où $(i_1, \ldots, i_n)$ décrit les j^n suites de n entiers inférieurs ou égaux à j. Mais la fonction $n \to P_n^A(x, A)$ est décroissante pour tout $x \in A$. Par suite $P_{jn}^A(., A) \leqq \delta^n$, lorsque $n \geqq n_0$ et

$$\sum_{n-1}^{\infty} P_n^A(., A) = \sum_{k=0}^{j-1} P_k^A\left(\sum_{n=1}^{\infty} P_{jn}^A(., A)\right) \leqq j\left(n_0 + \frac{1}{1-\delta}\right).$$

Posant $M = j\left(n_0 + \frac{1}{1-\delta}\right)$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(., A) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^A(., A) \leqq M.$$

Soit alors $E_N = \left\{ x;\, x \in E,\, \sum_{n=1}^{N} P_n(x, A) \geq \frac{1}{N} \right\}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x, E_N) \leq N \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int P_n(x, dy) \left\{ \sum_{k=1}^{N} P_k(y, A) \right\} \right)$$
$$\leq N \sum_{k=1}^{N} \left(\int P_k(x, dy) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} P_n(y, A) \right\} \right)$$
$$\leq N^2 M.$$

La ν-irréductibilité et le fait que $\nu(A) > 0$ entraînent alors que $E = \bigcup E_N$, et la première alternative du théorème est démontrée.

1.2.4. Supposons $\| \mu_A \| > 0$. La mesure μ_A est alors invariante par P^A; en effet, $R^n P^A = P^A R^n$, donc pour tout $\Gamma \subset A$ mesurable,

$$\mu_A(\Gamma) = \lim_{n \to \infty} R_n(.,\Gamma) = \lim_{n \to \infty} \int P^A(., dy)\, R_n(y, \Gamma)$$
$$= \lim_{n \to \infty} \int R_n(., dy)\, P^A(y, \Gamma) = \int \mu_A(dy)\, P^A(y, \Gamma).$$

La mesure $\mu(.) = \int \mu_A(dx)\, E_x\left(\sum_{1}^{T_A} (1_{(X_n \in .)}) \right)$ est donc une mesure σ-finie invariante par P. Reste à montrer la dernière phrase du théorème. Soit $\Gamma \in \mathcal{B}$ tel que $\mu(\Gamma) > 0$. Supposons d'abord $\Gamma \subset A$. Il existe un entier k tel que

$$R_k(., \Gamma) \geq \mu_A(\Gamma) - \delta^k > 0.$$

Donc, pour tout x, il y a un entier $n \in (k, kj)$ tel que

$$P_n^A(., \Gamma) \geq \frac{1}{jk} (\mu_A(\Gamma) - \delta^k) = \alpha > 0;$$

par suite, $\sum_{n=k}^{kj} P_n^A(., \Gamma) \geq \alpha$. Soit $q = kj$. Si $\mathcal{G}_n$ est la tribu engendrée par les variables $X_{T_A^{(m)}}$ pour $m \leq n$, on a

$$\sum_{p \geq 0} E_x\left(\sum_{j=pq+1}^{(p+1)q} 1_{\left(X_{T_A^{(j)}} \in \Gamma\right)} \mid \mathcal{G}_{pq} \right) = \sum_{p \geq 0} \left(\sum_{j=1}^{q} P_j^A(X_{T_A^{(qp)}}, \Gamma) \right)$$
$$= \infty \quad P_x p.\text{-}s.,$$

et

$$\sum_{p \geq 0} \left(\sum_{j=pq+1}^{(p+1)q} 1_{\left(X_{T_A^{(j)}} \in \Gamma\right)} \right) = \infty \quad P_x p.\text{-}s.,$$

$$\sum_{n \geq 0} 1_{\left(X_{T_A^{(n)}} \in \Gamma\right)} = \sum_{n \geq 0} 1_{(X_n \in \Gamma)} = \infty \quad P_x p.\text{-}s.$$

Si φ est une fonction mesurable, positive chargée par μ_A, on a de même $\sum_{n \geq 0} \varphi(X_{T_A^{(n)}}) = \infty$, $P_x p.\text{-}s.$

Si $\Gamma \in \mathcal{B}$ est chargé par μ, μ_A charge la fonction

$$E_{\cdot}\left(\sum_{n=1}^{T_A} 1_{(X_n \in \Gamma)} \right).$$

Donc pour un nombre $c > 0$, μ_A charge

$$P_{\cdot}\left(\left(\sum_{n=1}^{T_A} 1_{(X_n \in \Gamma)} \right) > c \right),$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{X_{T_A^{(n)}}}\left(\left(\sum_{k=1}^{T_A} 1_{(X_k \in \Gamma)} \right) > c \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P_x\left(\left(\sum_{k=T_A^{(n)}+1}^{T_A^{(n+1)}} 1_{(X_k \in \Gamma)} \right) > c \mid \mathcal{G}_n \right) = \infty, \quad P_x p.\text{-}s.$$

et $\sum_{k=T_A^{(n)}+1}^{T_A^{(n+1)}} 1_{(X_k \in \Gamma)} > c$ pour une infinité de n, $P_x p.\text{-}s.$ Donc

$$P_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} (1_{(X_n \in \Gamma)}) = \infty \right) = 1.$$

1.3. Opérateur potentiel dans le cas récurrent.

1.3.1. *Rappels sur les chaînes récurrentes.* — Dans le cas récurrent, X est une chaîne récurrente au sens de HARRIS. Rappelons les propriétés d'une telle chaîne qui nous seront utiles (*cf.* [9], [12], [13], [19]) :

(*a*) μ est l'unique mesure excessive pour P, à un facteur de proportionnalité constant près.

(*b*) Toute fonction f mesurable positive et invariante par P est constante.

(*c*) E est réunion de classes cycliques $C_1, \ldots, C_d$ disjointes et d'un ensemble F de μ-mesure nulle, tels que (en posant $C_{d+1} = C_1$) on ait $P(., C_{i+1}) = 1_{C_i}$; d est la période de X. Si, pour chaque n, $P_n^0(x, .)$ désigne la partie absolument continue de $P_n(x, .)$ par rapport à μ, on désigne par $p_n(x, .)$ une version bimesurable de la densité de $P_n^0(x, .)$ par rapport à μ. Il existe un ensemble $\Gamma \in \mathcal{B}$ chargé par μ, pour lequel l'ensemble $\left\{k;\, k \in \mathbf{N},\ \inf_{x,y \in \Gamma \times \Gamma} p_k(x, y) > 0\right\} = I(\Gamma)$ n'est pas vide. Pour tous les ensembles Γ ayant cette propriété, d est le p. g. c. d. des entiers de $I(\Gamma)$.

La chaîne est dite apériodique, si $d = 1$; dans le cas général, la chaîne de fonction de transition P_d est apériodique sur chaque classe cyclique.

(*d*) Si X est apériodique, quel que soit le couple de probabilités ν_1 et ν_2, $\lim_{n \to \infty} \| \nu_1 \mathrm{P}_n - \nu_2 P_n \| = 0$.

Par suite, si $\| \mu \| = 1$, $\lim_{n \to \infty} \| \nu_1 \mathrm{P}_n - \mu \| = 0$.

Si $\| \mu \| = \infty$, et si $f \in \mathcal{L}^1(\mu) \cap B$, $\lim_{n \to \infty} \nu_1 P_n f = 0$.

En outre, pour tout événement asymptotique A, la fonction $P_.(A)$ est identique à 1 ou identique à 0.

(*e*) On dit qu'une chaîne de Markov de fonction de transition P satisfait la condition de Doeblin, s'il existe une probabilité φ, deux nombres $\varepsilon > 0$ et $\eta < 1$ et un entier n_0 tels que, pour tout $\Gamma \in \mathcal{B}$ pour lequel $\varphi(\Gamma) > \eta$, on ait $P_{n_0}(., \Gamma) > \varepsilon$. Cette condition implique la récurrence au sens de HARRIS; si, en outre, la chaîne est apériodique, il existe un $\delta < 1$ et un entier n_1 tels que, pour $n \geq n_1$, on ait
$\sup_{x \in B} | P_n(x, .) - \mu(.) | < \delta^n$.

(*f*) Soit $A \in \mathcal{B}$ un ensemble chargé par μ. La chaîne X^A trace de X sur A est récurrente au sens de HARRIS; sa mesure invariante est la trace de μ sur A. Enfin E est limite croissante d'ensembles $A_n \in \mathcal{B}$, tels que X^{A_n} satisfasse la condition de Doeblin.

Dans la suite de la partie 1, X est récurrente et apériodique. Si $\| \mu \| = \infty$, la chaîne sera dite nulle; si $\| \mu \| < \infty$, elle sera dite positive, et on prendra pour μ la mesure invariante de masse 1.

1.3.2. *Position du problème.* — Jusqu'à la fin de cette section, on étudie les solutions mesurables bornées de l'équation :

$$(\star) \qquad (I - P)\, g = f,$$

où f est une fonction de B. Si $(\star)$ a une solution $g \in B$, on dit que f est une « *charge* »; Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des charges. Si f est une charge, et si $g \in \mathrm{B}$ est une solution de ($\bigstar$), on dit que g est un potentiel de la charge f; si g_1 et g_2 sont deux potentiels de f, leur différence est invariante par P, donc constante. Soit g un potentiel de f; pour tout entier N :

$$\sum_{n=0}^{N} P_n(I-P)\,g = g - P_{N+1}g = \sum_{n=0}^{N} P_n f.$$

D'après le théorème 1.3.1 (*d*), pour tout couple ν_1 et ν_2 de probabilités sur E, $\lim\limits_{N \succ \infty} (\nu_1 P_N g - \nu_2 P_N g) = 0$.

Par conséquent, pour que f soit une charge, il est nécessaire que les deux conditions suivantes soient réalisées :

(i) *Les expressions* $\left|\sum_{n=1}^{N} P_n f\right|$ *sont bornées uniformément par rapport à* N.

(ii) *Pour tout couple de probabilités* ν_1 *et* ν_2 *sur* E, *les expressions* $\sum_{n=1}^{N} (\nu_1 P_n - \nu_2 P_n)\, f$ *convergent si* N *tend vers* $+\infty$.

Ces conditions sont suffisantes; si en effet, on fixe une probabilité ν et si on pose $G_\nu f = \lim\limits_{N \succ \infty} \sum_{n=1}^{N} (P_n f - \nu P_n f)$, alors $G_\nu f$ est une solution de ($\bigstar$).

On peut s'intéresser également à la propriété suivante :

(iii) *Les expressions* $\sum_{n=1}^{N} P_n f$ *convergent, si* N *tend vers* $+\infty$.

Si (i) et (iii) sont satisfaites, alors la fonction

$$Gf = \lim_{N \succ \infty} \sum_{n=1}^{N} P_n f$$

est un potentiel associé à la charge f.

Dans la suite, on va montrer l'existence de certaines classes de fonctions qui sont des charges; il est clair que ces fonctions ne peuvent être positives, et chargées par μ, que si, $\|\mu\| < \infty$, elles sont nécessairement d'intégrale nulle.

1.3.3. *Charges des chaînes satisfaisant la condition de Doeblin et apériodiques.*

LEMME. — *Si X est une chaîne de Markov satisfaisant à la condition de Doeblin et apériodique, il existe une constante L, telle que, pour toute fonction $f \in B$, on ait*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |P_n f - \mu(f)| \leq L \|f\|.$$

En effet, il existe un $\delta > 1$, et un entier n_1 tels que, pour $n \geq n_1$, on ait

$$\sup_{x \in E} \|P_n(x, .) - \mu(.)\| \leq 2\, \delta^n.$$

Si f est mesurable bornée,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |P_n f(.) - \mu(f)| \leq 2 \|f\| \left\{ n_1 + \frac{1}{1-\delta} \right\}.$$

On obtient le résultat en posant $L = 2\left(n_1 + \dfrac{1}{1-\delta}\right)$.

Par suite, f est une charge si, et seulement si, $f \in B$ et $\mu(f) = 0$; dans ce cas, la série $\sum_{n=1}^{\infty} P_n f$ converge absolument vers une fonction Kf, bornée par $\|f\| L$.

1.3.4. *Charges concentrées sur un ensemble A tel que X_A satisfasse la condition de Doeblin et soit apériodique.* — Soit $A \in \mathcal{B}$, tel que X^A satisfasse la condition de Doeblin et soit apériodique; il existe une constante L_A telle que, si $f \in B$ est concentrée sur A,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| P_n^A f - \frac{\mu(f)}{\mu(A)} \right| \leq L_A \|f\|.$$

Soit $\mathcal{N}^A = \{ f ; f \in B, (f = 0) \supset A^c, \mu(f) = 0 \}$. Si $f \in \mathcal{N}^A$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} P_n^A f$ converge absolument vers une fonction $K^A f$ bornée par $L^A \|f\|$.

THÉORÈME. — *L'ensemble des charges nulles hors de A coïncide avec $\mathcal{N}^A$. En outre, pour tout $f \in \mathcal{N}^A$, et tout entier N, on a*

$$\left| \sum_{n=1}^{N} P_n f \right| \leq 2 L_A \|f\|.$$

LEMME. — *Quelle que soit $f \in \mathcal{N}^A$, $K^A f - P(K^A f) = Pf$.*

Démonstration. — Pour tout entier N, on a

$$\sum_{n=1}^{N} P_n^A f - P\left(\sum_{n=1}^{N} P_n^A f\right) = E_{\cdot}\left(\sum_{n=1}^{N} f(X_{T_A^{(n)}})\right) - E_{\cdot}\left(\sum_{n=1}^{N} f(X_{T_A^{(n)}\circ\theta_1+1})\right)$$
$$= E_{\cdot}\left(f(X_1) - E_{\cdot}\left(1_{(X_1\in A)} f\left(X_{T_A^{(N)}\circ\theta_1+1}\right)\right)\right)$$
$$= Pf - \int P(.,dy)\, 1_A(y)\, P_N^A f(y).$$

Si N est assez grand, $|P_N^A f| < 2\delta^N \|f\|$. En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient le résultat.

Démonstration du théorème.

(a) D'après le lemme précédent, pour tout entier N,

$$\sum_{n=1}^{N} P_n f = K^A f - P_N(K^A f).$$

Donc

$$\left|\sum_{n=1}^{N} P_n f\right| \leq 2\, L_A \|f\|.$$

(b) Si ν_1 et ν_2 sont deux probabilités sur E,

$$\sum_{n=1}^{N} (\nu_1 P_n f - \nu_2 P_n f) = (\nu_1 - \nu_2)\,(K_A f) - (\nu_1 - \nu_2)\, P_N(K_A f).$$

Mais $(\nu_1 - \nu_2)\, P_N(K_A f) \leq \|\nu_1 P_N - \nu_2 P_N\|\, L_A \|f\|$, expression qui tend vers zéro, si N tend vers $+\infty$. Donc

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (\nu_1 P_n f - \nu_2 P_n f) = (\nu_1 - \nu_2)\,(K_A f).$$

(c) Si $f \in B$ et si f est nulle hors de A, alors

$$f - 1_A \frac{\mu(f)}{\mu(A)} \in \mathfrak{N}^A.$$

Pour tout entier N,

$$\left|\sum_{1}^{N} P_n\left(f - 1_A \frac{\mu(f)}{\mu(A)}\right)\right| \leq \|f\|\, L^A.$$

Donc si $\mu(f) > 0$ (respectivement $\mu(f) < 0$),

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} P_n f = +\infty$$

(respectivement, $-\infty$), et f n'est pas une charge.

1.3.5. *Charges concentrées sur les ensembles « bornés ».* — On va étendre le résultat précédent à une classe d'ensembles plus riche. Soit k un entier; considérons la chaîne de fonction de transition P_k,

$$X^{(k)} = \{ \Omega, \mathcal{F}, (\mathrm{P}_x)_{x \in E}, (X_{nk})_{n \in N} \}.$$

Elle est récurrente au sens de HARRIS. En effet, si $\Gamma \in \mathcal{B}$ est chargé par μ, alors $\left\{ \sum 1_{(X_{nk} \in \Gamma)} = \infty \right\} = c$ est un événement asymptotique; comme

$$\left\{ \sum 1_{(X_n \in \Gamma)} = \infty \right\} = \bigcup_{i=0}^{k-1} \theta_i c,$$

$P_\mu(c) > 0$, donc $P_.(c) = 1$. En outre, un événement asymptotique de $X^{(k)}$ est asymptotique pour la chaîne X, donc $X^{(k)}$ est apériodique. Si $A \in \mathcal{B}$, on désigne par $X_A^{(k)}$ la chaîne trace de $X^{(k)}$ sur A, par $T_{A,k}^{(n)}$ la suite des temps de passage de $X^{(k)}$ dans A; si $f \in B$, on pose

$$P_n^{A,k} f(x) = E_x\left(f X_{T_{A,k}^{(n)}}\right).$$

DÉFINITION. — On dit qu'un ensemble A *est borné,* si $A \in \mathcal{B}$, et s'il existe un entier k pour lequel $X_A^{(k)}$ soit une chaîne satisfaisant la condition de Doeblin et apériodique. On dira que k est l'indice de A.

Remarque. — Si E est dénombrable, les ensembles finis sont bornés. Les théorèmes qui suivent sont donc des extensions de ceux de [14].

PROPOSITION. — *E est limite croissante d'ensembles E_n bornés.*

Démonstration. — D'après la propriété (c) de 1.3.1, il existe un Γ chargé par μ et un entier k tels que $\inf_{x, y \in \Gamma} p_k(x, y) > 0$.

D'après la propriété (f) de 1.3.1, E est limite croissante d'ensembles E_n, tels que $X_{E_n}^{(k)}$ satisfasse la condition de Doeblin. Mais si $A \in \mathcal{B}$ et si $\mu(A \cap \Gamma) > 0$, alors $X_A^{(k)}$ est apériodique. En effet, $P_1^{A,k}(., c) \geqq P_k(., c)$ pour tout $c \in \mathcal{B}$ inclus dans A, et l'on peut choisir une densité $p^{A,k}(x, .)$ de $P_1^{A,k}(x, .)$ par rapport à μ, plus grande que $p_k(x, .)$; donc

$$\inf_{x, y \in \Gamma \cap A} p_1^{A,k}(x, y) > 0$$

et la période de $X_A^{(k)}$ vaut 1.

A tout ensemble borné, on associe encore l'ensemble $\mathcal{N}^A$ des fonctions de B, nulles hors de A et d'intégrale nulle.

THÉORÈME. — *Si A est un ensemble borné, l'ensemble des charges concentrées sur A coïncide avec $\mathcal{N}^A$. En outre, il existe une constante C_A telle que, pour toute $f \in \mathcal{N}^A$ et tout entier N,*

$$\left| \sum_1^N P_n f \right| \leqq C_A \| f \|.$$

Remarque. — La seconde partie de ce théorème a été également démontrée par MÉTIVIER [17] et par OREY (à paraître) par d'autres méthodes.

Démonstration.

(*a*) Soit A un ensemble borné d'indice k.

Il existe une constante L_A, telle que, pour $f \in \mathcal{N}^A$, on ait

$$\sum_1^\infty | P_n^{A,k} f | \leqq \mathrm{L}_A \| f \|.$$

Si $K_A(f)$ est la somme de la série absolument convergente $\sum_1^\infty P_n^{A,k} f$, on a la relation suivante, quel que soit l'entier N :

$$\sum_{n=1}^N P_{nk} f = K_A(f) - P_{kN} K_A(f).$$

On intègre les deux termes par la mesure $\sum_{i=0}^{k-1} P_i$, et on pose

$$\hat{K}_A(f) = \sum_{i=0}^{k-1} P_i(K_A(f)),$$

$$\sum_{k=n}^{Nk} P_n f = \hat{K}_A(f) - P_{kN} \hat{K}_A(f).$$

D'où

$$\left| \sum_{n=1}^N P_n f \right| \leqq \left| \sum_{n=1}^{k-1} P_n f \right| + \left| \sum_{n=k}^{\left(\frac{N}{k}\right) k} P_n f \right| + \left| \sum_{n=\left(\frac{N}{k}\right) k+1}^{N} P_n f \right|$$

$$\leqq 2\, k \| f \| + 2 k L_A \| f \| = \mathrm{C}_A \| f \|,$$

avec $C_A = (1 + L_A)\, 2 k$.

(*b*) Si ν_1 et ν_2 sont deux probabilités sur E,

$$\lim_{N \to \infty} |\nu_1 P_{kN}(\hat{K}_A(f)) - \nu_2 P_{kN}(\hat{K}_A(f))| = 0.$$

Donc les expressions $\sum_{n=1}^{Nk} (\nu_1 P_n f - \nu_2 P_n f)$ convergent, si N tend vers $+\infty$ vers $(\nu_1 - \nu_2)\hat{K}_A(f)$. En outre, $f \in B \cap \mathcal{L}^1(\mu)$; donc

$$\lim_{n \to \infty} P_n f = 0 = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=\left(\frac{N}{k}\right)k}^{N} P_n f.$$

Par suite, les expressions $\sum_{n=1}^{N} (\nu_1 P_n f - \nu_2 P_n f)$ convergent, si N tend vers $+\infty$, vers $(\nu_1 - \nu_2)\hat{K}_A(f)$.

(*c*) Il n'existe pas d'autre charge concentrée sur A d'après le raisonnement fait en 1.3.4.

1.3.6. *Chaînes normales.* — On étudie maintenant la convergence des sommes $\sum_{1}^{N} P_n f$, si N tend vers $+\infty$, pour une fonction $f \in \mathfrak{N}^A$, A étant un ensemble borné.

THÉORÈME. — *Si A est un ensemble borné les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *Pour toute $f \in \mathfrak{N}^A$, les expressions $\sum_{1}^{N} P_n f$ convergent en tout point si N tend vers $+\infty$;*

(*b*) *Pour tout $x \in E$ et tout $\Gamma \in \mathcal{B}$, la suite $P_N P_A(x, \Gamma)$ converge si N tend vers $+\infty$;*

(*c*) *Pour tout ensemble $B \in \mathcal{B}$ inclus dans A, il existe une mesure λ_B, telle que, pour toute fonction $g \in B$ et tout $x \in E$, on ait $\lim_{N \to \infty} \mathrm{P}_N \mathrm{P}_B g(x) = \lambda_B(g)$.*

Démonstration. — Remarquons que si B est un ensemble mesurable et si, pour tout x de E et tout Γ de $\mathcal{B}$, la suite $P_N P_B(x, \Gamma)$ converge vers une limite $\lambda_B(x, \Gamma)$, alors, d'après le théorème de Vitali, $\lambda_B(x, .)$ est une mesure et, pour toute fonction $g \in B$,

$$\lim_{N \to \infty} P_N P_B\, g(x) = \lambda_B(x, g).$$

En outre, ces mesures $\lambda_B(x, .)$ ne dépendent pas de x car, pour chaque Γ de $\mathcal{B}$, la fonction $\lambda_B(., \Gamma)$ est bornée et invariante par P. On pose $\lambda_B(\Gamma) = \lambda_B(., \Gamma)$.

Il est clair que la condition (*c*) implique (*b*).

Montrons que (*b*) implique (*a*). Soit $f \in \mathcal{N}^A$; on a vu que

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=\left(\frac{N}{k}\right)k}^{N} P_n f(x) = 0,$$

il suffit donc de montrer que la suite $\sum_{n=k}^{Nk} P_n f(x)$ converge si N tend vers $+\infty$.

Si k est l'indice de A, il suffit de montrer que (*b*) implique la convergence de la suite $P_{kN}\left(\sum_{i=0}^{k-1} P_i\right)(K_A(f))$ si N tend vers $+\infty$,

$$K_A(f) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{A,k} f = P^{A,k}\left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{A,k} f\right).$$

Soit Γ un ensemble mesurable; on doit étudier

$$\sum_{i=0}^{k-1} P_i(P^{A,k}(x, \Gamma)) = E_x\left(\sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{I}_{(X_{T_{A,k}} \circ \theta_i + i \in \Gamma)}\right),$$

$$T_{A,k} = \inf\{N;\ N > 0,\ N = nk,\ X_{nk} \in A\},$$

$$T_{A,k} \circ \theta_i + i = \inf\{N; N > i, N = nk + i,\ X_{nk+i} \in A\}.$$

D'où

$$T_A = \inf_{0 \leq i < k-1} T_{A,k} \circ \theta_i + i.$$

Posons $T_{A,k}^0 = \inf\{N; N \geq 0,\ N = nk, X_{nk} \in A\}$.

Fixons une trajectoire ω, et désignons par j l'entier de $[0, k-1]$ équivalent modulo k à $i - T_A(\omega)$,

$$T_{A,k} \circ \theta_i + i(\omega) = T_A(\omega) + \inf\{N; N \geq 0,\ N = nk + j, X_{nk+j+T_A}(\omega) \in A,$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{I}_{(X_{T_{A,k}} \circ \theta_i + i \in \Gamma)} = \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{I}_{\left(X_{T_A + (T_{A,k}^0 \circ \theta_j + j) \circ \theta_{T_A}} \in \Gamma\right)},$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} P_i P^{A,k}(x, \Gamma) = P_A E_x\left(\sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{I}_{(X_{T_{A,k}^0} \circ \theta_j + j \in \Gamma)}\right).$$

Donc si (*b*) est réalisée, la fonction $u = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{A,k} f$ étant bornée, la suite

$$P_n\left(\sum_{i=0}^{k-1} P_i\right) K_A(f) = P_n P_A E_x\left(\sum_{i=0}^{k-1} u(X_{T^0_{A,k}\circ\theta_i+i})\right)$$

converge, et (*a*) est réalisé.

Reste à montrer que (*a*) implique (*c*). Soit B un sous-ensemble mesurable de A. On pose

$$T^0_B = \inf\{n\,;\, n \geqq 0,\, X_n \in B\}.$$

Soit g une fonction mesurable bornée, on pose

$$\Pi_B g = E_.(g X_{T^0_B}).$$

Il est clair que $P\Pi_B = P_B$.

$(\Pi_B - P_B)\, g$ est une fonction bornée, nulle hors de B. En outre :

$$\int \mu(dx)\,(\Pi_B - P_B)\, g(x) = \int_B \mu(dx)\,(g(x) - P_B g(x)).$$

Mais la trace de μ sur B est invariante pour P_B. Donc cette intégrale est nulle, et $(\Pi_B - P_B)\, g$ est une fonction de $\mathcal{N}^A$.

$$\sum_{n=1}^{N} P_n(\Pi_B - P_B)\, g = \sum_{n=0}^{N-1} P_n(I - P)\, P_B g = P_B g - P_N P_B g.$$

(*a*) implique la convergence des expressions $\sum_{n=1}^{N} P_n(\Pi_B - P_B)\, g$, donc de $P_N P_B g$, si N tend vers $+\infty$. D'après le début de la démonstration de ce théorème, cela implique (*c*).

Ce théorème conduit, comme pour les chaînes définies sur un espace dénombrable, à introduire la définition suivante :

DÉFINITION. — La chaîne X est dite *normale*, si, pour tout ensemble A borné, les mesures $P_n P_A(x, .)$ convergent si n tend vers $+\infty$ pour tout $x \in E$.

Si $\|\mu\| = 1$, la chaîne est normale, car $\lim_{n\to\infty} P_n P_A(x, .) = \mu\, P_A(.)$. On sait que, même dans le cas dénombrable, il existe des chaînes non normales [14]; par contre, les marches aléatoires sur **R** ou sur les groupes dénombrables sont normales ([20], [21] et [15]).

COROLLAIRE. — *Si X est normale, les fonctions* $\sum_{1}^{N} P_n f$ *convergent en restant bornées, si N tend vers* $+\infty$, *pour toute charge nulle hors d'un ensemble borné.*

1.3.7. *Étude d'un noyau potentiel.* — On construit ici un noyau potentiel, qui permettra de montrer l'existence de charges qui ne sont pas concentrées sur un ensemble borné.

DÉFINITION. — Soit $K(x, .)$ une famille de mesures, bornées sur les ensembles bornés et telles que, pour tout $B \in \mathcal{B}$, $K(., B)$ soit mesurable. On dira que K est un *noyau potentiel*, si, pour toute charge f nulle hors d'un ensemble borné, Kf est un potentiel de f.

Soit A un ensemble borné d'indice k. Pour tout $x \in E$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| P_n^{A,k}(x, .) - \mu_A \| \leq 2\, L_A.$$

Par suite, l'application

$$f \to \sum_{n=1}^{\infty} (P_n^{A,k}(x, f) - \mu_A(f)) = K^A f(x)$$

de B dans $\mathbf{R}$ définit une mesure concentrée sur A et dont la valeur absolue est bornée par $2\, L_A$. Posons

$$\hat{K}_A f(x) = \sum_{i=0}^{k-1} P_i(K_A(f))(x).$$

Soit A_n une suite croissante d'ensembles bornés dont la réunion est E. Soit α une fonction positive, concentrée sur A_1 et telle que $\mu(\alpha) = 1$; soit ν une probabilité sur E. Pour tout $x \in E$, les expressions

$$\sum_{n=1}^{N} (P_n(f - \alpha\, \mu(f))(x) - \nu\, P_n(f - \alpha\, \mu(f)))$$

convergent, si N tend vers $+\infty$, vers $G_\nu(f - \alpha\, \mu(f))(x)$. Mais

$$G_\nu(f - \alpha\, \mu(f))(x) = \hat{K}_{A_n}(f - \alpha\, \mu(f))(x) - \nu\, \hat{K}_{A_n}(f - \alpha\, \mu(f)).$$

Par suite, on définit sur chaque A_n, une mesure bornée $K_n(x, .)$ en posant $K_n f(x) = G_\nu(f - \alpha\, \mu(f))(x)$ si $f \in B$ et si f est nulle hors de A_n. Soient K_n^+ et K_n^- les parties positives et négatives de la mesure K_n. Il est clair que, si $n \geqq m$, les restrictions à A_m de K_n, K_n^+ et K_n^- sont K_m, K_m^+ et K_m^-. Soient K^+ et K^- les mesures σ-finies, définies sur E, dont les restrictions à chaque A_n sont K_n^+ et K_n^-. On pose $|K| = K^+ + K^-$; pour chaque $f \in B^+$, on pose $Kf = K^+f - K^-f$, si K^+f ou K^-f est fini, et $Kf = +\infty$ si ces deux valeurs sont infinies. Soit A un ensemble borné, montrons que $K^+(x, .)$ et $K^-(x, .)$ sont des mesures bornées sur A, uniformément en x; x étant un point de E, soit $A_n^+ \in \mathcal{B}$, tel que $K_n^+(x, .)$ soit la restriction à A_n^+ de $K_n(x, .)$. Soit $f \in B$ nulle hors de A,

$$\begin{aligned} K_n^+ f(x) &= G_\nu(f 1_{A_n^+} - \alpha\, \mu(f 1_{A_n^+})) \\ &= G_\nu\left((f 1_{A_n^+} - 1_{A \cap A_1} \frac{\mu(f 1_{A_n^+})}{\mu(A \cap A_1)}\right) + G_\nu\left(\frac{1_{A \cap A_1}}{\mu(A \cap A_1)} - \alpha\right) \mu(f 1_{A_n^+}) \\ &\leqq 2(L_A + L_{A_1}) \| f \|. \end{aligned}$$

Donc

$$\| K^+(x, .) \| \leqq 2(L_A + L_{A_1}),$$

et, de même,

$$\| K^-(x, .) \| \leqq 2(L_A + L_{A_1}).$$

Proposition. — *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ telle que $|K|\,|f|$ soit bornée.*

On a alors $(\mathrm{I} - \mathrm{P})\, K(f) = f - \alpha\, \mu(f)$. *En outre, f est une charge, si $\mu(f) = 0$; si $\mu(f) > 0$ [resp. $\mu(f) < 0$], $\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} P_n f = +\infty$ (resp. $-\infty$).*

Démonstration. — Supposons f bornée,

$$\begin{aligned} Kf &= \lim_{A_n \uparrow E} K(1_{A_n} f) = \lim_{A_n \uparrow E} G_\nu(1_{A_n} f - \alpha\, \mu(f 1_{A^n})), \\ (I - P)\, Kf &= \lim_{A_n \uparrow E} (I - P)\, G_\nu(1_{A_n} f - \alpha\, \mu(f 1_{A_n})) \\ &= \lim_{A_n \uparrow E} \{ 1_{A_n} f - \alpha\, \mu(f 1_{A_n}) \} = f - \alpha\, \mu(f). \end{aligned}$$

Si on ne suppose pas f bornée, on considère f_n, fonction valant f sur $(|f| \leqq n)$, et 0 sur $(|f| > n)$. Pour chaque n, $(I - P)\, Kf_n = f_n - \alpha\, \mu(f_n)$ et, faisant tendre n vers $+\infty$, $(I - P)\, Kf = f - \alpha\, \mu(f)$. Il est facile de justifier les opérations écrites ci-dessus sous les hypothèses de la proposition.

De la relation $(I - P)\, Kf = f - \alpha\, \mu(f)$, on déduit que f est une charge si $\mu(f) = 0$. Sinon les sommes $\sum_{1}^{N} (P_n f - \mu(f) P_n \alpha)$ sont bornées par $2 \| Kf \|$; la dernière phrase de la proposition en résulte, car $\sum_{1}^{N} P_n \alpha$ tend vers $+\infty$ si N tend vers $+\infty$.

2. Étude des processus de Markov irréductibles.

2.1.1. *Hypothèses et notations.* — Comme dans la partie 1, $(E, \mathcal{B})$ désigne un espace mesurable, $\mathcal{B}$ est supposée séparable ou complétée universelle d'une tribu séparable. On considère une résolvante sous-markovienne $(U^\lambda)_{\lambda>0}$ sur $(E, \mathcal{B})$; si $f \in B$ est positive, on pose $Uf = \lim_{\lambda \to 0} U^\lambda f$. On supposera la résolvante « irréductible », c'est-à-dire qu'il existe une probabilité ν sur $(E, \mathcal{B})$ absolument continue par rapport à $U_1(x, .)$ pour tout $x \in E$.

Dans certains cas, on supposera en outre que $(U^\lambda)_{\lambda>0}$ est la résolvante associée à un semi-groupe $(P_t)_{t \geqq 0}$ de fonctions de transitions telles que $t \to P_t(x, \Gamma)$ soit mesurable pour tout $x \in E$ et tout $\Gamma \in \mathcal{B}$: $U_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t \, dt$. On déduira parfois des propriétés de la résolvante les conséquences probabilistes portant sur un processus de Markov

$$X = \{ \Omega, \mathcal{F}, (P_x)_{x \in E}, (X_t)_{t \in \mathbf{R}_+} \},$$

de semi-groupe $(P_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$, supposé mesurable. On appliquera dans ce cas au processus les mêmes qualificatifs qu'à la résolvante correspondante.

2.1.2. *Chaîne de Markov associée au processus.* — Posons $Q = U^1$. Q est une fonction de transition sous-markovienne sur $(E, \mathcal{B})$. Soit Q_n sa $n^{\text{ième}}$ itérée. D'après l'équation résolvante $U^1 = U^\lambda(1 - (1 - \lambda) U^1)$ et pour tout $\lambda \in]0, 1[$,

$$U^\lambda = Q \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \lambda)^n Q_n.$$

Si $G_z = \sum z^n Q_n$ ($z \in [0, 1[$), ceci implique $U^\lambda = \frac{1}{1 - \lambda} G_{1-\lambda}$. Par suite, l'étude de la résolvante $(U^\lambda)_{\lambda \in]0,1]}$ dans le cas continu se réduit à l'étude de $(G_z)_{z \in [0,1[}$ dans le cas discret.

Si $\{ \Omega, \mathcal{F}, (P_x)_{x \in E}, (X_t)_{t \in \mathbf{R}_+} \}$ est un processus de Markov mesurable de fonction de transition P_t, on peut lui associer une chaîne de Markov Y de fonction de transition Q de la manière suivante. Sur un espace de probabilité $(\Lambda, \mathcal{L}, \Pi)$ on considère une suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telles que les variables $(T_{n+1} - T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ soient indépendantes et exponentielles de paramètre 1, et que $T_0 = 0$. La chaîne Y est définie par

$$\{ \Omega \times \Lambda, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}, (P_x \otimes \Pi)_{x \in E}, (X_{T_n(\lambda)}(\omega))_{n \in \mathbf{N}} \} \quad (cf. [2]).$$

2.2. Récurrence et transience.

THÉORÈME 2.2.1. — *Si* $(U^\lambda)_{\lambda>0}$ *est une résolvante irréductible, il n'y a que deux cas possibles :*

1° *Cas transient : Le noyau potentiel est un noyau propre, c'est-à-dire qu'il existe une suite croissante d'ensembles mesurables* $\{E_n\}$ *telle que* $E=\bigcup E_n$ *et* $U(.,E_n)\leqq M_n<\infty$.

2° *Cas récurrent : Il existe une mesure* μ, *σ-finie invariante, telle que, pour tout* Γ *de* $\mathcal{B}$ *chargé par* μ, $U(.,\Gamma)=\infty$.

THÉORÈME 2.2.2. — *Soit X un processus de Markov irréductible.*

1° *Dans le cas transient, E est limite d'une suite croissante d'ensembles* $A_n\in\mathcal{B}$ *que les trajectoires quittent presque sûrement après un certain temps.*

2° *Dans le cas récurrent, X est récurrent au sens de* HARRIS, *c'est-à-dire que* μ *est invariante par le semi-groupe* $(P_t)_{t\geqq 0}$ *et que, si* $\Gamma\in\mathcal{B}$ *est chargé par la mesure invariante,* $P_{.}\left(\int_0^\infty 1_\Gamma(X_t)\,dt=\infty\right)=1$.

Démonstration. — Comme l'irréductibilité de la résolvante $(U^\lambda)_{\lambda>0}$ équivaut à l'irréductibilité de Q, le premier théorème résulte du théorème 1.2.1. Dans le cas transient, soit $\Gamma\in\mathcal{B}$ un ensemble chargé par ν tel que $\sup_x U(x,\Gamma)\leqq M<\infty$. D'après l'irréductibilité, si $A_n=\left\{x;\ U(x,\Gamma)\geqq\frac{1}{n}\right\}$, $E=\bigcup_n A_n$. Mais, pour toute loi P_x, $U(X_t,\Gamma)$ est une surmartingale positive et bornée; elle converge p.-s. et dans $L^1(P_x)$. Sa limite ne peut être que 0, car $E_x(U(X_t,\Gamma))=\int_t^\infty P_s(X,\Gamma)\,ds$ tend vers 0 si t tend vers $+\infty$; d'où

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\ 1_{(X_t\in A_n)}=0 \qquad (P_x\,\text{p.-s.}).$$

Dans le cas récurrent, μ est invariante par U_1, donc par le semi-groupe $(P_t)_{t\geqq 0}$ d'après [2]. Soit $\Gamma\in\mathcal{B}$ un ensemble chargé par μ; d'après le théorème 1.2.1, pour tout $x\in E$,

$$1=P_x\otimes\prod\left\{\sum_{n=1}^\infty 1_{(X_{T_n(\lambda)}(\omega)\in\Gamma)}=\infty\right\}$$

$$=P_x\left\{\omega;\ \prod\left(\lambda;\ \sum_{n=1}^\infty 1_{(T_n(\lambda)\in\{t;\ X_t(\omega)\in\Gamma\})}\right)=\infty\right\}.$$

Ceci implique que $P_x\left\{\omega;\ \int_0^\infty 1_{\{X_t(\omega)\in\Gamma\}}\,dt=\infty\right\}=1$, car T_n récurre dans un ensemble de $\mathbf{R}^+$ si et seulement si sa mesure de Lebesgue est infinie (d'après un résultat de Bretagnolle et Dacuhna-Castelle [6]).

2.3. Propriétés des processus récurrents.

Dans cette partie, $(U^\lambda)_{\lambda>0}$ est une résolvante irréductible récurrente.

2.3.1. *Théorèmes limite.* — Dans le cas récurrent, la chaîne Q est récurrente au sens de Harris. Elle est apériodique. En effet, si $\Gamma\in\mathcal{B}$ est chargé par μ, pour tout $x\in E$, $U^1(x,\Gamma)=Q(x,\Gamma)>0$; on peut donc choisir une version $q(x, y)$ de la densité de la partie absolument continue de $Q(x, .)$ par rapport à μ, strictement positive; d'après le critère 1.3.1 (c), ceci implique l'apériodicité. Cette remarque permet de déduire des théorèmes limites sur les chaînes apériodiques, un théorème limite sur les résolvantes. Comme pour les chaînes, la résolvante sera dite nulle si $\|\mu\|=\infty$, et positive si $\|\mu\|<\infty$; dans le cas positif, on prend $\|\mu\|=1$.

Théorème. — *Quelles que soient les probabilités ν_1 et ν_2 sur E, on a*

$$\lim_{\lambda\to 0}\|\lambda\nu_1 U^\lambda-\lambda\nu_2 U^\lambda\|=0.$$

En particulier, dans le cas positif, $\lim\limits_{\lambda\to 0}\|\lambda\nu_1 U^\lambda-\mu\|=0$.

Dans le cas nul, $\lim\limits_{\lambda\to 0}\lambda\nu_1 U^\lambda f=0$ *pour toute* $f\in B\cap\mathcal{L}^1(\mu)$.

Démonstration. — Si $\lambda<1$, l'équation résolvante permet d'écrire

$$U^\lambda=\sum_{n=1}^{\infty}(1-\lambda)^{n-1}Q_n,$$

$$\lambda\|\nu_1 U^\lambda-\nu_2 U^\lambda\|\leq\lambda\sum_{n=1}^{\infty}(1-\lambda)^{n-1}\|\nu_1 Q_n-\nu_2 Q_n\|.$$

Comme

$$\lim_{n\to\infty}\|\nu_1 Q_n-\nu_2 Q_n\|=0=\lim_{z\uparrow 1}(1-z)\sum_{n=1}^{\infty}z^n\|\nu_1 Q_n-\nu_2 Q_n\|,$$

on obtient la première partie du théorème.

Dans le cas nul, si $f\in B\cap\mathcal{L}^1(\mu)$, alors $\lim\limits_{n\to\infty}\nu_1 Q_n(f)=0$, et

$$\lim_{z\uparrow 1}(1-z)\sum_{n=1}^{\infty}z^n\nu_1 Q_n(f)=\lim_{\lambda\downarrow 0}\lambda\nu_1 U^\lambda f=0.$$

Corollaire. — *Si $(U^\lambda)_{\lambda>0}$ est la résolvante d'un processus de Hunt et si A est une fonctionnelle additive, dont le α potentiel U_A^α est borné pour un $\alpha > 0$, alors, pour tout couple de probabilités ν_1, ν_2 sur E, on a*

$$\lim_{\alpha\to 0} \alpha \| \nu_1 U_A^\alpha - \nu_2 U_A^\alpha \| = 0.$$

Dans le cas nul, si U_A^1 est intégrable, alors $\lim\limits_{\alpha\to 0} \alpha\nu_1 U_A^\alpha = 0$.

Ceci améliore certains théorèmes limite obtenus dans [2] et [3].

Démonstration. — Soit M une constante majorant U_A^β pour un $\beta > 0$,

$$\alpha \| \nu_1 U_A^\alpha - \nu_2 U_A^\alpha \| \leqq \alpha \| \nu_1 U_A^\beta - \nu_2 U_A^\beta \| + \alpha \,|\, \alpha - \beta \,|\, \| \nu_1 U^\alpha U_A^\beta - \nu_2 U^\alpha U_A^\beta \|.$$

Le premier terme du second membre est inférieur à $2M_\alpha$ et le second à $\alpha \,|\, \alpha - \beta \,|\,.\| \nu_1 U^\alpha - \nu_2 U^\alpha \| M$, ce qui entraîne le résultat. Il en est de même, pour la dernière partie du corollaire.

2.3.2. *Opérateur potentiel : position du problème.* — On dira que f est une « charge » de la résolvante $(U^\lambda)_{\lambda>0}$, si f est une fonction de B et s'il existe une fonction g de B telle que $(I - U_1)\, g = U_1 f$. On dit alors que g est un *potentiel faible* de f. Deux potentiels d'une même charge diffèrent d'une fonction, invariante par Q et bornée, donc d'une constante.

Soient f une charge et g un potentiel faible de f. Pour tout $\lambda > 0$, on a

$$U^\lambda (I - U^1)\, g = U^1 g - \lambda U^\lambda U^1 g = U^\lambda U^1 f = U^\lambda f - U^1 f + \lambda U^\lambda U^1 f.$$

Comme dans la partie 1.3.2, on déduit du théorème 2.3.1 que, pour que f soit une charge, les deux conditions suivantes doivent être réalisées :

(i) *Les expressions $| U_\lambda f |$ sont bornées uniformément par rapport à λ.*

(ii) *Pour tout couple de probabilités ν_1, ν_2 sur E, les expressions $(\nu_1 U^\lambda f - \nu_2 U^\lambda f)$ convergent si λ tend vers $+\infty$.*

En outre, ces conditions sont suffisantes; si en effet on fixe une probabilité ν, et si on pose $G_\nu f = \lim\limits_{\lambda\to 0} (U^\lambda f - \nu U^\lambda f)$, alors

$$(I - U^1)\, G_\nu f = \lim_{\lambda\to 0} (I - U^1)\, U^\lambda f = U^1 f.$$

On étudiera également la propriété suivante :

(iii) *Les expressions $U^\lambda f$ convergent si λ tend vers zéro.*

Si (i) et (iii) sont satisfaites, la fonction $Gf = \lim\limits_{\lambda\to 0} U^\lambda f$ est un potentiel associé à la charge f.

Lorsque la résolvante est la résolvante d'un semi-groupe $(P_t)_{t \geq 0}$, de fonctions de transition, on peut étudier les propriétés suivantes :

(j) *Les expressions* $\left| \int_0^t P_s f \, ds \right|$ *sont bornées uniformément par rapport à* t.

(jjj) *Les expressions* $\int_0^t P_s f \, ds$ *convergent si* t *tend vers* $+\infty$.

PROPOSITION. — *Soit* $f \in B \cap \mathcal{L}^1(\mu)$.

1° $\frac{1}{2} \sup_\lambda | U^\lambda f | \leq \sup_t \left| \int_0^t P_s f \, ds \right| \leq 2 \sup_\lambda | U^\lambda f |$, *les propriétés* (i) *et* (j) *sont donc équivalentes.*

2° *Si* (i) *est réalisée, alors* (jjj) *est réalisée si, et seulement si,* (iii) *est réalisée et si* $P_t Gf$ *converge si* t *tend vers* $+\infty$ (*sa limite est alors nulle*),

Démonstration

(*a*) Soient $\lambda > 0$ et $t > 0$,

$$\int_0^t e^{-\lambda s} P_s f \, ds = U^\lambda f - e^{-\lambda t} P_t U^\lambda f,$$

$$\left| \int_0^t P_s f \, ds \right| \leq \sup_\lambda \left| \int_0^t e^{-\lambda s} P_s f \, ds \right| \leq 2 \sup_\lambda | U^\lambda f |.$$

Soit $M = \sup_t \left| \int_0^t P_s f \, ds \right|$. Si $M = \infty$, alors $\sup_\lambda | U^\lambda f | = \infty$, et le 1° est démontré. Supposons $M < \infty$,

$$\begin{aligned}
\int_0^t P_s f \, ds - \lambda U^\lambda \left(\int_0^t P_s f \, ds \right) &= \lambda \int e^{-\lambda u} \, du \left(\int_0^t P_s f \, ds - \int_u^{t+u} P_s f \, ds \right) \\
&= \lambda \int e^{-\lambda u} \, du \left(\int_0^u P_s f \, ds - \int_t^{t+u} P_s f \, ds \right) \\
&= U^\lambda f - P_t U^\lambda f, \\
| U^\lambda f &- P_t U^\lambda f | \leq 2M.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $\alpha > 0$, $| U^\lambda f - \alpha U^\alpha U^\lambda f | \leq 2M$. Mais

$$\lim_{\alpha \to 0} \alpha U^\alpha U^\lambda f = 0;$$

en effet, si $\| \mu \| = \infty$, cela résulte de ce que $U^\lambda f \in B \cap \mathcal{L}^1(\mu)$. Si $\| \mu \| = 1$,

$$\lim_{\alpha \to 0} \alpha U^\alpha U^\lambda f = \frac{1}{\lambda} \mu(f);$$

mais $\mu(f)$ est nulle, car

$$\mu(f) = \frac{1}{t}\mu\left(\int_0^t P_s f\,ds\right) \leqq \frac{1}{t} M.$$

Par suite, $|U^\lambda f| \leqq 2M$.

(*b*) Pour montrer le 2°, supposons (i) réalisée. Il est clair que, pour que $\int_0^t P_s f\,ds$ converge si t tend vers $+\infty$, il faut que si λ tend vers zéro, $U^\lambda f$ converge vers la même limite; soit $Gf = \lim_{\lambda\to 0} U^\lambda f$,

$$\begin{aligned}\int_0^t P_s f\,ds &= \lim_{\lambda\to 0}(U^\lambda f - P_t U^\lambda f) + \lim_{\lambda\to 0}(1-e^{-\lambda t}) P_t U^\lambda f \\ &= Gf - P_t\, Gf.\end{aligned}$$

De cette relation, résulte l'assertion annoncée.

2.3.3. *Charges concentrées sur les ensembles « faiblement bornés ».* — Par définition, f est une charge de la résolvante $(U^\lambda)_{\lambda>0}$, si et seulement si Qf est une charge de la fonction de transition Q, ce qui équivaut à dire que f est une charge de Q. Par suite, les théorèmes de 1.3.5 et 1.3.6 s'appliquent directement.

La théorie est même plus simple ici, car si $A\in\mathcal{B}$ est chargé par μ, la chaîne trace sur A de la chaîne associée à Q est toujours apériodique. Soit, en effet, Q_A sa fonction de transition; pour tout $\Gamma\in\mathcal{B}$ inclus dans A, et tout $x\in E$, $Q_A(x,\Gamma) \geqq Q(x,\Gamma)$; on peut donc choisir une version de la densité de la partie absolument continue de $Q_A(x, .)$ par rapport à μ, plus grande que $q(x, .)$ sur A; q étant strictement positive, cela implique l'apériodicité.

Définition. — Un ensemble $A\in\mathcal{B}$ est dit « *faiblement borné* » si la trace sur A de la chaîne de fonction de transition U^1 satisfait la condition de Doeblin.

E est limite croissante d'une suite d'ensembles faiblement bornés.

Si $A\in\mathcal{B}$, $\mathcal{N}^A$ désigne l'ensemble des $f\in B\cap\mathcal{L}^1(\mu)$, d'intégrale nulle et concentrées sur A.

Théorème. — *Si A est faiblement borné, l'ensemble des charges concentrées sur A coïncide avec $\mathcal{N}^A$. En outre, il existe une constante C_A telle que, pour toute $f\in\mathcal{N}^A$ et tout $\lambda>0$, $|U^\lambda f| \leqq C_A\|f\|$.*

2.3.4. *Résolvantes faiblement normales.* — Soit $A\in\mathcal{B}$, chargé par μ. Interprétons Q_A en fonction de la résolvante $(U^\lambda)_{\lambda>0}$.

$$Q_A = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}(Q\,1_{A^c})^n Q\,1_A = \sum_{n=0}^{\infty}(U^1\,1_{A^c})^n U^1\,1_A.$$

Si $(U^\lambda)_{\lambda>0}$ est la résolvante d'un processus mesurable X, posons, pour $g \in B$,

$$U^{1A} g = E \int_0^\infty e^{\left(-\int_0^t 1_A(X_s)\,ds\right)} g(X_t)\,dt.$$

On montrera plus loin (3.1) que

$$U^1 - U^{1A} = U^1(1_A - 1)\,U^{1A},$$
$$(1 - Q\,1_{A^c})\,U^{1A} = Q,$$
$$U^{1A} - (Q\,1_{A^c})^{N+1}\,U\,1_A = \sum_{n=0}^{N} (Q\,1_{A^c})^n\,Q.$$

Par suite, $Q_A = U^{1A}\,1_A = V_A^1$; Q_A coïncide ainsi avec V_A^1, qui lorsque X est un processus de Hunt, est un potentiel du processus trace sur A de X (processus déduit de X par le changement de temps associé à la fonctionnelle $\int_0^t 1_A(X_s)\,ds$). Soit $(V_A^\lambda)_{\lambda>0}$, la résolvante de ce processus trace; on obtient, à l'aide de cette résolvante, une caractérisation des ensembles faiblement bornés.

Proposition. — *Un ensemble A est faiblement borné si et seulement si*

$$\mu(A) < \infty \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda \to \infty} \sup_x \| \lambda V_A^\lambda(x, .) - \mu_A \| = 0.$$

Démonstration. — Si A est faiblement borné, cette propriété est réalisée, car

$$\sup_x \| \lambda V_A^\lambda(x, .) - \mu_A \| \leq \lambda \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda)^{n-1} \sup_x \| (V_A^1)^n(x, .) - \mu_A \|,$$

et ces expressions tendent vers zéro si λ tend vers zéro, comme

$$\sup_x \| (V_A^1)^n(x, .) - \mu_A \|,$$

si n tend vers $+\infty$. Réciproquement, si cette propriété est réalisée, soit $\lambda > 0$ tel que $\sup_x \| \lambda V_A^\lambda - \mu_A \| < 1$; l'endomorphisme de B défini par λV_A^λ est quasicompact, donc celui que définit V_A^1 est aussi quasicompact d'après un résultat de Basterfield [5]. Mais ceci équivaut à dire que V_A^1 satisfait la condition de Doeblin (*cf.* [18]).

Théorème. — *Si A est faiblement borné, les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *Pour toute $f \in \mathfrak{N}^A$, les expressions $U^\lambda f$ convergent en tout point, si λ tend vers zéro;*

(*b*) *Pour tout* $x \in E$ *et tout* $\Gamma \in \mathcal{B}$, *la suite* $\lambda U^\lambda V_A^1(x, \Gamma)$ *converge si* λ *tend vers zéro;*

(*c*) *Pour tout* $B \in \mathcal{B}$ *inclus dans* A, *il existe une mesure* λ_B, *telle que, pour toute fonction* $g \in B$ *et tout* $x \in E$, *on ait* $\lim_{\lambda \to 0} \lambda U^\lambda V_B^1 g(x) = \lambda_B(g)$.

Démonstration. — D'après la démonstration du théorème 1.3.4, si $f \in \mathcal{N}^A$, et si $K^A f = \sum_{n=0}^{\infty} (Q_A)^n f$, on a la relation

$$K^A f - Q(K^A f) = Qf.$$

Par suite, si $z \in [0, 1[$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} z^n Q_n f = U^{1-z} f - U^1 f &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n (Q_{n+1}(K^A f) - Q_n(K^A f)) \\ &= K^A f - (1-z) \sum_{n=1}^{\infty} z^n Q_n(K^A f) \\ &= K^A f - (1-z)(U^{1-z}(K^A f) - U^1(K^A f)).\end{aligned}$$

La démonstration est alors une transcription de celle qui a été faite en 1.3.6, en effectuant ici les passages à la limite lorsque z croît vers 1.

Définition. — La résolvante $(U^\lambda)_{\lambda > 0}$ est dite *faiblement normale*, si, pour tout ensemble A faiblement borné, les mesures $\lambda U^\lambda V_A^1(x, .)$ convergent si λ tend vers zéro pour tout $x \in E$.

Corollaire. — *Si la résolvante est faiblement normale, les expressions* $U^\lambda f$ *convergent en restant bornées si* λ *tend vers zéro, quelle que soit* $f \in B$, *nulle hors d'un ensemble faiblement borné et d'intégrale nulle.*

Exemples :

1° Si $\|\mu\| = 1$, la résolvante est normale.

2° Si $(U^\lambda)_{\lambda>0}$ est la résolvante d'un processus à accroissements indépendants sur $\mathbf{Z}$ ou sur $\mathbf{R}$, elle est faiblement normale. Soit

$$X = \{\Omega, \mathcal{F}, (P_x)_{x \in E}, (X_t)_{t \in \mathbf{R}^+}\}$$

ce processus à accroissements indépendants; par le procédé décrit en 2.1.2, on lui associe la chaîne de Markov de fonction de transition Q,

$$Y = \{\Omega \times L, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}, (P_x \otimes \Pi)_{x \in E}, (X_{T_n(\lambda)}(\omega))_{N \in \mathbf{N}}\},$$

Y est une marche aléatoire. Soit, en effet, $(u_1, \ldots, u_n)$ une suite de n nombres réels;

$$E_x \otimes \Pi \exp(iuX_{nT_1} + u_2(X_{T_2} - X_{T_1}) + \ldots + u_n(X_{T_N} - X_{T_{n-1}}))$$
$$= \int d\Pi\, E_x(\exp(iu_1 X_{T_1}))\, E_x(\exp(iu_2(X_{T_2} - X_{T_1}))) \ldots$$
$$E_x(\exp(iu_n(X_{T_n} - X_{T_{n-1}})))$$
$$= \left(\int \exp(-t)\, dt\, E_x(\exp(iu_1 X_t))\right)\left(\int \exp(-t)\, dt\, E_x(\exp(iu_2 X_t))\right) \ldots$$
$$\left(\int \exp(-t)\, dt\, E_x(\exp(iu_n X_t))\right)$$
$$= (E_x \otimes \Pi \exp(iu_1 X_{T_1}))\,(E_x \otimes \Pi \exp(iu_2(X_{T_2} - X_{T_1}))) \ldots$$
$$(E_x \otimes \Pi \exp(iu_n(X_{T_n} - X_{T_{n-1}}))).$$

Y, marche aléatoire sur **R** ou **Z**, est normale d'après [20] et [21]. Donc X est faiblement normal.

3° Il existe des processus, même à valeurs dans un espace dénombrable, qui ne sont pas normaux. Considérons en effet une chaîne récurrente de fonction de transition P. Posons

$$P_t = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-t} \frac{P_n}{n!} t^n;$$

soit $(U^\lambda)_{\lambda>0}$ sa résolvante

$$U^\lambda = \int e^{-\lambda t} P_t\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n}{n!} \int e^{-(\lambda+1)t} t^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n}{(\lambda+1)^{n+1}}.$$

Ainsi $(U^\lambda)_{\lambda>0}$ est une résolvante récurrente; les charges de $(U^\lambda)_{\lambda>0}$ et de P sont les mêmes. Mais Orey a construit un exemple de chaîne sur un espace dénombrable, récurrente, pour laquelle $\sum_{n=1}^{\infty} z^n P_n f$ ne converge pas pour toutes les charges à support fini si z tend vers 1 (*cf.* [14]). La résolvante $(U^\lambda)_{\lambda>0}$ associée à une telle chaîne par l'opération précédente n'est pas normale.

2.3.4. *Opérateur potentiel dans le cas des processus réguliers.* — Dans cette section, on suppose la résolvante $(U^\lambda)_{\lambda>0}$ associée à un processus de Markov mesurable X de semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$. Pour chaque $x \in E$, soient $P_t^0(x, .)$ et $P_t^1(x, .)$ les parties absolument continue et singulière de $P_t(x, .)$ par rapport à P_t. On sait [7], que $P_t^1(., E) = 1$ pour tout t (μ p.-s.) ou $\lim_{t\to\infty} P_t^1(., E) = 0$ en tout point. Dans le premier cas, on ne peut pas espérer obtenir la convergence d'intégrales du type $\int_0^t P_s\,ds$ si t tend vers $+\infty$ à cause de phénomènes de périodicité. Par contre, dans le second cas, le semi-groupe a des propriétés semblables à celles des chaînes récurrentes apériodiques. Jusqu'à la fin de cette section, on suppose que $\lim\limits_{t\to\infty} P_t^1(.,E) = 0$. On dit alors que le semi-groupe est régulier. On utilisera essentiellement le fait montré dans [7] que, pour tout $a > 0$, la chaîne de fonction de transition P_{na} est récurrente et apériodique.

DÉFINITION. — Un ensemble $B \in \mathcal{B}$ est dit *borné*, s'il existe un $a > 0$ pour lequel la trace sur B de la chaîne de fonction de transition P_{na} satisfasse la condition de Doeblin et soit apériodique.

D'après 1.3.5, E est limite croissante d'ensembles E_n bornés.

THÉORÈME. — *Soit B un ensemble borné.*

1° *Il existe une constante C_B pour laquelle, quels que soient $f \in \mathcal{N}^B$ et $t \in \mathbf{R}_+$, on ait*

$$\left| \int_0^t P_s f\,ds \right| \leq C_B \| f \| ;$$

2° *Si ν_1 et ν_2 sont deux probabilités sur E, les expressions*

$$\int_0^t (\nu_1 P_s f - \nu_2 P_s f)\,ds$$

convergent si t tend vers $+\infty$;

3° *Si, pour tout x de E et tout Γ de $\mathcal{B}$, $P_t P_B(x, \Gamma)$ converge si t tend vers $+\infty$, alors, pour toute $f \in \mathcal{N}^B$, $\int_0^t P_s\,ds$ converge si t tend vers $+\infty$.*

Démonstration.

1° Soit B un ensemble borné; a étant un nombre positif, on pose

$$T_{B,a} = \inf\{ na\,;\, X_{na} \in B \} \text{ et } P^{B,a}(x,\,.) = E_x\{ X_{T_{B,a}} \in .\}.$$

On suppose que la chaîne de fonction de transition $P^{B,a}$ satisfait la condition de Doeblin et est apériodique. Alors, d'après 1.3.3, il existe une constante L_B, telle que, pour toute $f \in \mathcal{N}^B$, on ait

$$\sum_{n=1}^{\infty} | P_n^{B,a} f | \leq L_B \| f \|.$$

Si on pose $K_B f = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{B,a} f$, on a, pour tout entier N, la relation suivante :

$$\sum_{n=1}^{N} P_{na} f = K_B f - P_{Na} K_B f.$$

Intégrons les deux membres par la mesure bornée $\int_0^a P_s\, ds$,

$$\int_a^{Na} P_s f\, ds = \int_0^a P_s (K_B f)\, ds - \int_{Na}^{(N+1)a} P_s (K_B f)\, ds.$$

D'où la partie (i) du théorème en posant $C_B = 2\, a(L_B + 1)$.

2° Soient ν_1 et ν_2 deux probabilités sur E,

$$\left| (\nu_1 P_{Na} - \nu_2 P_{Na}) \int_0^a P_s (K_B f)\, ds \right| \leq a L_B \| \nu_1 P_{Na} - \nu_2 P_{Na} \|,$$

ces expressions tendent vers zéro si N tend vers $+\infty$, et les expressions $\int_0^{Na} (\nu_1 P_s - \nu_2 P_s) f\, ds$ convergent si N tend vers $+\infty$. Mais, d'après [7], $\lim_{t \to \infty} P_t f = 0$; donc $\lim_{t \to \infty} \int_{\left(\frac{t}{a}\right) a}^{t} P_s f\, ds = 0$. D'où la partie 2° du théorème.

3° Si pour un ensemble C mesurable, $P_t P_C(x, \Gamma)$ converge lorsque t tend vers $+\infty$, pour tout x de E et tout Γ de $\mathcal{B}$, alors il existe une mesure λ_C telle que $\lim_{t \to \infty} P_t P_C\, g(x) = \lambda_C(g)$ pour tout x et toute fonction g mesurable bornée; en effet, d'après le théorème de Vitali, il existe une mesure $\lambda_C(x, .)$ telle que $\lim_{t \to \infty} P_t P_C\, g(x) = \lambda_C(x, g)$, et cette mesure ne dépend pas de x, car $\lambda_C(., g)$ est invariante par P_t. Montrons que la convergence de $P_t P_B$ implique l'existence de $\lim_{t \to \infty} \int_0^t P_s f\, ds$. Il suffit de montrer que $\int_{Na}^{(N+1)a} P_s K_B(f)\, ds$ converge si N tend vers $+\infty$.

$$K_B(f) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{B,a} f = P^{B,a} \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{B,a} f \right).$$

Donc il suffit de montrer que $P_N \left(\int_0^a P^s P^{B,a}(x, \Gamma)\, ds \right)$ converge, pour tout x de E et tout Γ de $\mathcal{B}$,

$$T_{B,a} \circ \theta_s + s = \inf \{ t;\ t = s + na,\ t > s,\ X_{s+na} \in B \}.$$

ω étant une trajectoire donnée, désignons par $u(s)$ le nombre de $[0, a]$ égal modulo a à $s - T_B(\omega)$.

$$T_{B,a} \circ \theta_s(\omega) + s = T_B(\omega) + \inf\{t; t \geq 0, t = na + u(s), X_{na+u(s)+T_B}(\omega) \in B\}$$
$$= T_B(\omega) + [T^0_{B,a} \circ \theta_{u(s)} + u(s)] \circ \theta_{T_B}(\omega),$$

$$\int_0^a 1_{(X_{T_{B,a}} \circ \theta_{s+s}(\omega) \in \Gamma)}\, ds = \int_0^a 1_{(X_{T_{B,a}} \circ \theta_{u(s)} + u(s) \in \Gamma)} \circ \theta_{T_B}(\omega)\, ds$$
$$= \int_0^a 1_{(X_{T_{B,a}} \circ \theta_s + s \in \Gamma)} \circ \theta_{T_B}(\omega)\, ds.$$

D'où

$$\int_0^a P_s P^{B,a}(x, \Gamma)\, ds = P_B \int_0^a E_x\left(X_{T^0_{B,a} \circ \theta_s + s} \in \Gamma\right) ds.$$

2.3.5. *Théorème ergodique pour les fonctionnelles additives des processus réguliers.* — Les hypothèses faites dans la partie 2.3.4 sont encore réalisées. En outre, le processus X est ici un processus de Hunt. D'après [3], on peut associer à toute fonctionnelle $A = \{A_t\}_{t \geq 0}$ une mesure ν_A définie par $\nu_A(\Gamma) = E_\mu \int_0^1 1_\Gamma(X_s)\, dA_s$. Si ν_A est une mesure bornée, A est dite intégrable.

D'après [4], si $\Gamma \in \mathcal{B}$, deux cas sont possibles : ou bien $P_\cdot\left(\overline{\lim}_{t \to \infty} 1_{(X_t \in \Gamma)} = 1\right) = 1$ et Γ est alors dit récurrent, ou bien $P_\mu[\exists\, t, X_t \in \Gamma] = 0$ et Γ est dit transient. Enfin, si A est une fonctionnelle additive intégrable et si $K \in \mathcal{B}$ est chargé par μ, alors $\{x; E_x(A_{T_K}) = \infty\}$ est transient [4].

THÉORÈME. — *Il existe une fonction $t \to \beta_t$ à valeurs réelles, continue et croissant vers $+\infty$ (β_t peut être prise égale à t dans le cas $\|\mu\| = 1$), telle que, à toute fonctionnelle additive intégrable A, corresponde un ensemble transient Γ_A pour lequel*

$$\forall\, x \notin \Gamma_A,\ \lim_{t \to \infty} \frac{E_x A_t}{\beta_t} = \|\nu_A\|.$$

Démonstration.

1° D'après un théorème de HARRIS [10], si f est une fonction mesurable, bornée, positive, telle que $\mu(f) > 0$ et nulle hors d'un ensemble borné B (supposons que la trace sur B de la chaîne X_{na} satisfasse la condition de Doeblin et soit apériodique),

$$\forall\, x \in B,\quad \forall\, y \in B,\quad \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{N} P_{na} f(x)\right) \Bigg/ \left(\sum_{n=1}^{N} P_{na} f(y)\right) = 1.$$

f étant une telle fonction et x_0 un point arbitraire de B, posons

$$\beta_t = \frac{1}{\mu(f)} \int_0^t P_s f(x_0)\, ds.$$

2° Soit A une fonctionnelle additive intégrable. On sait [12] que

$$\lim_{N \to \infty} E_{\cdot}(A_{Na}) \Big/ \int_0^{Na} P_s f\, ds =$$

$$\lim_{N \to a} \left(\sum_{n=0}^{N} P_{na} E_{\cdot}(A_a) \right) \Big/ \left(\sum_{n=0}^{N} P_{na} \left(\int_0^a P_s f\, ds \right) \right) = \frac{E_\mu A_a}{a\mu(f)} = \frac{\|\nu_A\|}{\mu(f)}, \quad \mu \text{ p.-s.},$$

donc

$$\lim_{N \to \infty} \frac{E_{\cdot}(A_{Na})}{\beta_{Na}} = \|\nu_A\| \quad \mu \text{ p.-s. sur } B.$$

Si (t) est la partie entière de t :

$$\frac{\beta_{\left(\frac{t}{a}\right)a}}{\beta_t} \frac{E_x A_{\left(\frac{t}{a}\right)a}}{\beta_{\left(\frac{t}{a}\right)a}} \leq \frac{E_x A_t}{\beta_t} \leq \frac{E_x A_{\left(\frac{t}{a}\right)a+a}}{\beta_{\left(\frac{t}{a}\right)a+a}} \frac{\beta_{\left(\frac{t}{a}\right)a+a}}{\beta_t}.$$

Mais

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\beta_{\left(\frac{t}{a}\right)a}}{\beta_t} = \lim_{t \to \infty} \frac{\beta_{\left(\frac{t}{a}\right)a+a}}{\beta_t} = 1.$$

Donc

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{E_{\cdot}A_t}{\beta_t} = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{E_{\cdot}A_{na}}{\beta_{na}};$$

ceci démontre en particulier que ces fonctions sont mesurables.

3° $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{E_{\cdot}A_t}{\beta_t} = \|\nu_A\| \quad \mu$ p.-s. sur B.

La fonction $\underline{\lim}\limits_{t \to \infty} \dfrac{E_{\cdot}A_t}{\beta_t}$ est surmédiane; elle vaut donc μ p.-s. la constante $\|\nu_A\|$, et est supérieure à $\|\nu_A\|$ partout. D'autre part, il existe, d'après le théorème d'Egoroff, un ensemble K chargé par μ tel que

$$\forall \varepsilon, \quad \exists t_\varepsilon, \quad \forall t \geq t_\varepsilon, \quad \forall x \in K, \quad \left| \frac{E_x A_t}{\beta_t} - \|\nu_A\| \right| < \varepsilon.$$

Il existe un ensemble transient Γ_A tel que $E_x(A_{T_K}) < \infty$ pour tout x de Γ_A^c et tout $t \geq t_\varepsilon$,

$$\frac{E_x A_t}{\beta_t} \leq \frac{E_x(A_{t+T_K})}{\beta_t} = \frac{E_x(A_{T_K}) + E_x(E_{X_{T_K}}(A_t))}{\beta_t} \leq \frac{E_x(A_{T_K})}{\beta_t} + \| \nu_A \| + \varepsilon.$$

Par suite, pour tout $x \notin \Gamma_A$,

$$\| \nu_A \| \leq \varliminf_{t \to \infty} \frac{E_x A_t}{\beta_t} \leq \varlimsup_{t \to \infty} \frac{E_x A_t}{\beta_t} \leq \| \nu_A \|,$$

ce qui démontre le théorème.

4° Dans le cas où $\| \mu \| = 1$, la fonction β_t peut être prise égale à t, car $\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P_s f \, ds = \mu(f)$.

3. **Étude des processus de Markov à résolvante fortement fellerienne irréductible.**

3.1.1. *Hypothèses.* — On fera ici les hypothèses de la partie 2.1.1, et on adopte les mêmes notations. En outre, E est ici supposé localement compact à base dénombrable, $\mathcal{B}$ est la tribu des ensembles universellement mesurables de E. On désigne par C l'ensemble des fonctions continues bornées, par C_k l'ensemble des fonctions continues à support compact; C^+, C_k^+, B^+ désignent respectivement l'ensemble des fonctions positives de C, C_k et B. La résolvante $(U^\lambda)_{\lambda > 0}$ est fortement fellerienne, c'est-à-dire que, pour tout $\lambda > 0$, $U^\lambda B$ est contenu dans C; on lui associe un processus de Hunt $\{ \Omega, \mathcal{F}, (P_x)_{x \in E}, (X_t)_{t \in \mathbf{R}_+} \}$.

3.1.2. *Préliminaires.* — Soient a et b deux fonctions de B^+, chargées par μ, on pose

$$A_t = \int_0^t a(X_s) \, ds, \qquad B_t = \int_0^t b(X_s) \, ds$$

et pour $f \in B^+$,

$$U^a f = E_. \int_0^\infty e^{-A_t} f X_t \, dt, \qquad U^b f = E_. \int_0^\infty e^{-B_t} f X_t \, dt.$$

L'utilisation de ces noyaux pour la théorie du potentiel des processus de Markov a été proposée par Hunt [11] qui utilise la relation suivante.

Lemme (λ). — *Si* $a \leq b$, *on a*

$$U^a - U^b = U^a (b - a) U^b = U^b (b - a) U^a.$$

Démonstration. — Soient $f \in B^+$ et $x \in E$; on suppose $a \leqq b$ ou $a \geqq b$,

$$\begin{aligned}
U^b(b-a)\,U^a f(x) &= E_x \int_0^\infty e^{-B_t}(b(X_t)-a(X_t))\,dt\, E_{X_t}\int_0^\infty e^{-A_s} f(X_s)\,ds \\
&= E_x \int_0^\infty e^{-B_t}(b(X_t)-a(X_t))\,dt \left(\int_t^\infty e^{-A_s} f(X_s)\,ds\right) e^{A_t} \\
&= E_x \int_0^\infty e^{-(B_t-A_t)}\,d(B_t-A_t)\left(\int_t^\infty e^{-A_s} f X_s\,ds\right) \\
&= E_x \int_0^\infty f X_t\, e^{-A_t}\,dt \left(\int_0^t e^{-(B_s-A_s)}\,d(B_s-A_s)\right) \\
&= E_x \int_0^\infty f X_t\, e^{-A_t}\,dt\,(1-e^{-(B_t-A_t)}) = U^a f(x) - U^b f(x).
\end{aligned}$$

LEMME (β). — *Si $b \in B$ et si $a \in B^+$, alors $U^a b \in C$, lorsque $0 \leqq b \leqq a$, et lorsque b est nul hors d'un ensemble compact.*

Démonstration. — On peut toujours supposer b positive. Soit λ une constante positive majorant a,

$$U^a b - U^\lambda b = U^\lambda(a-\lambda)\,U^a b.$$

Par suite, $U^a b \in C$ dès que $U^a b \in B$. Ceci est en particulier réalisé si $b \leqq a$, car $U^a a = 1$. Supposons a et b nulles hors d'un certain compact K; on peut prendre $b \geqq a$, quitte à remplacer b par $a+b$, car $U^a a + b = 1 + U^a b$.

$$U^a a - U^b a = U^a(b-a)\,U^b a,$$

$U^b a$ est une fonction de C, elle est donc minorée sur K par une constante $\delta > 0$, et on a l'inégalité $(U^a b - 1)\,\delta \leqq 1$.

$U^a b$ est majorée par $\frac{1}{\delta} + 1$, elle est donc dans C. Si a n'est pas supposée nulle hors du compact K, $U^a b$ est majorée par $U^{a 1_K} b$ qui est bornée; donc $U^a b$ est dans B, donc dans C.

Si $a \in B^+$, on considère τ_a le changement de temps associé à la fonctionnelle additive $\int_0^t a(X_s)\,ds$ et V_a^λ la résolvante associée au processus déduit de X par le changement de temps τ_a,

$$V_a^\lambda f = E_.\int_0^\infty e^{-\lambda t} f X_{\tau_a(t)}\,dt = E_.\int_0^\infty e^{-\lambda A_t} f(X_t)\,a(X_t)\,dt,$$

$$V_a^\lambda = U^{\lambda a}\,a.$$

Corollaire. — *La résolvante V_a^λ est fortement fellerienne. En effet, si $f \in B$ et si $\lambda \geqq \| a \|$, alors $fa \leqq \| f \| \lambda$, et $U^{\lambda, a} fa = V_a^\lambda f$ est continue et bornée. Puis c'est vrai pour tout $\lambda > 0$ d'après l'équation résolvante.*

3.2. **Opérateur potentiel.**

Théorème. — *Il n'y a que deux cas possibles :*

1° *Cas transient : La fonction $U(.,K)$ est bornée pour tout compact K et le processus ne retourne pas dans K à partir d'un certain temps;*

2° *Cas récurrent : Le processus est récurrent au sens de* Harris *et ses compacts sont faiblement bornés.*

Démonstration.

1° Supposons E compact. On sait que E est limite croissante d'une suite d'ensembles E_n tels que

$$\lim_{\lambda \to 0} \sup_x \| \lambda V_{E_n}^\lambda (x, .) - \mu_{E_n} \| = 0,$$

où μ_{E_n} est une mesure nulle dans le cas transient, de masse 1 dans le cas récurrent. Mais les fonctions $U^1(1 - 1_{E_n})$ tendent vers zéro si n tend vers $+\infty$, uniformément. Soient $\varepsilon > 0$, et n tels que

$$\sup_x U^1(1 - 1_{E_n})(x) \leqq \varepsilon;$$

pour tout $\lambda \leqq 1$, on a, d'après l'équation résolvante

$$\sup_x \lambda U^\lambda (1 - 1_{E_n})(x) \leqq \varepsilon,$$

et pour tout $\lambda \leqq \lambda_0 \leqq 1$

$$\sup_x \| \lambda V_{E_n}^\lambda (x, .) - \mu_{E_n} \| \leqq \varepsilon.$$

Alors, si $\lambda \leqq \lambda_0$,

$$\| \lambda U^\lambda (x, .) - \mu_{E_n} \| \leqq \lambda U^\lambda (1 - 1_{E_n})(x) + \| \lambda U^\lambda (x, 1_{E_n}) - \lambda V_{E_n}^\lambda (x, .) \| + \varepsilon.$$

D'après la relation $U^\lambda - U^{\lambda, 1_{E_n}} = \lambda U^\lambda (1 - 1_{E_n}) U^{\lambda, 1_{E_n}}$, on obtient

$$\sup_x \| \lambda U^\lambda (x, .) - \mu_{E_n} \| \leqq 3\varepsilon.$$

Par suite, dans le cas transient,

$$\lim_{\lambda \to 0} \sup_x \| \lambda U^\lambda (x, .) \| = 0;$$

dans le cas récurrent, la mesure invariante μ est bornée, et si $\| \mu \| = 1$,

$$\lim_{\lambda \to 0} \sup_x \| \lambda U^\lambda (x, .) - \mu \| = 0.$$

Dans le cas transient, choisissons λ tel que $\sup_x \| \lambda U^\lambda(x, .) \| \leqq \delta < 1$; alors

$$U = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda U^\lambda)^n \qquad \text{et} \qquad U(., E) \leqq \frac{1}{\lambda(1-\delta)}.$$

Dans le cas récurrent, E est faiblement borné d'après la caractérisation des ensembles faiblement bornés de la partie 2.3.4.

2° Dans le cas général, si K est un compact chargé par ν, on applique la première partie à la résolvante fortement fellierienne $(V_K^\lambda)_{\lambda>0}$. Dans le cas transient, $U(., K) = \lim_{\lambda \succ 0} V_K^\lambda(., K)$ est borné; en outre, si L est un compact de E, $U(., K)$ est une fonction semi-continue inférieurement, donc minorée sur L par un nombre strictement positif, d'où il résulte que les trajectoires quittent presque-sûrement L après un temps fini, d'après la démonstration du théorème 2.2.2. Dans le cas récurrent, V_K^1 satisfait la condition de Doeblin et K est faiblement borné.

Corollaire. — *Soit un processus fortement fellerien et récurrent. La mesure invariante est une mesure de Radon; les charges nulles, hors d'un compact K, sont les fonctions de B nulles hors de K et d'intégrale nulle.*

Remarque. — Sans hypothèse d'irréductibilité, la notion de récurrence fine permet d'obtenir un résultat semblable [1]. Pour chaque point x, deux cas sont possibles : ou bien pour tout compact K, $U(x, K)$ est fini; ou bien le support de la mesure $U(x, .)$ est une classe récurrente du processus, c'est-à-dire un ensemble absorbant sur lequel le processus est récurrent au sens de Harris.

3.3. Frontière de Martin.

3.3.1. *Compactification.* — Soient $a \in C_k^+$ et $U^a(C_k) = S$. D'après la partie 3.1.2, S est contenue dans C, et indépendante de la fonction a de C_k; en effet, si a et b sont dans C_k^+,

$$U^a - U^{a+b} = U^{a+b}\, b\, U^a = U^a\, b\, U^{a+b} \qquad \text{et} \qquad U^a(C_k) = U^{a+b}(C_k) = U^b(C_k).$$

Soit C_1 un ensemble dénombrable dense dans C_k pour la convergence uniforme sur tout compact. Alors $S_1 = U^a(C_1)$ est un ensemble dénombrable dense dans S pour la norme uniforme. Soit, en effet, $f \in C_k$; il existe un compact L contenant $(f > 0)$, et une suite f_n de fonctions de C_1, nulles hors de L, qui convergent uniformément vers f si n tend vers $+\infty$;

$$\| U^a f - U^a f_n \| \leqq \| U^a 1_L \| . \| f - f_n \| \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \succ \infty} \| U^a f - U^a f_n \| = 0.$$

Soit E^* le complété de E pour la structure uniforme engendrée par S (ou S_1) pour la norme uniforme.

Indiquons quelques propriétés de E^*, générales dans des situations de ce type (*cf.* [16]).

(*a*) E^* est compact, puisque les fonctions de S sont bornées.

(*b*) E^* est métrisable, puisque S_1 est dénombrable.

(*c*) Soient $\bar{S}$ et $\bar{S}_1$ l'ensemble des fonctions de S et S_1 respectivement prolongées à E^*. $\bar{S}_1$ sépare les points de E^*. Par construction, $\bar{S}_1$ sépare en effet les points de $E^* \setminus E$. $\bar{S}_1$ sépare également les points de E car, si x et y sont deux points de E et si $a \in C_k^+$, l'identité de $U^a f(x)$ et $U^a f(y)$ pour toute $f \in C_k$ implique l'identité des mesures $U^a(x, .)$ et $U^a(y, .)$, d'où l'identité des mesures $U^1(x, .)$ et $U^1(y, .)$; pour tout $\lambda > 0$, les mesures $\lambda U^\lambda(x, .)$ et $\lambda U^\lambda(y, .)$ coïncident alors, ce qui est impossible car $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \lambda U^\lambda f = f$ lorsque $f \in C_k$.

(*d*) Les fonctions de S étant continues, l'injection de E dans E^* est continue : la topologie induite par E^* sur E est donc moins fine que celle de E.

(*e*) Soit C^* l'ensemble des fonctions continues sur E^*. Soit A l'algèbre contenue dans B, fermée pour la norme uniforme, et engendrée par S et 1. A est l'ensemble des fonctions qui ont un prolongement continu sur E^*. En effet, cet ensemble est une algèbre fermée contenant S et 1, donc A. Mais l'ensemble des extensions à E^* de fonctions de A est une algèbre fermée contenant 1 et $\bar{S}_1$, donc séparant les points de E^*; elle est donc dense dans C^* et contient C^*. Si $f \in A$, on notera $\bar{f}$ son prolongement. En particulier, soit $a \in C_k$, pour $\lambda > 0$ et $f \in C$, $V_a^\lambda f = U^{\lambda a} a f$ est une fonction prolongeable à E^* en une fonction $\overline{V_a^\lambda f}$. Cela définit un prolongement à E^* du noyau V_a^λ en un noyau $\overline{V_a^\lambda}$, qui, sur E, est la mesure qui donne à toute fonction $f \in C$ la valeur $\overline{V_a^\lambda f}$ et tel que $\overline{V_a^\lambda}(., E^* \setminus E) = 0$. L'équation résolvante se prolonge à E^*; la famille $(\overline{V_a^\lambda})_{\lambda > 0}$ est une résolvante.

3.3.2. *Normalité.* — Si le processus est positif, $\lim\limits_{\lambda \to 0} \lambda U^\lambda(x, .) = \mu$; en particulier, le processus est normal car, pour chaque $a \in B$, on a $\lim\limits_{\lambda \to 0} \lambda U^\lambda V_a^1(x, .) = \mu V_a^1(.)$. La proposition suivante donne sur E^+ une interprétation semblable de la normalité dans le cas nul.

THÉORÈME. — *Soit un processus récurrent nul. Ce processus est normal si, et seulement si, pour tout $x \in E$, les mesures $\lambda U^\lambda(x, .)$ convergent vaguement dans E^* vers une certaine mesure β, lorsque λ tend vers zéro.*

Démonstration.

(*a*) Supposons le processus normal. Si $a \in C_k^+$, soit L son support; on prend $a \leq 1$. Soit $f \in B$,

$$V_a^1 f = U^a a f = U^{1_L}(1_L - a)\, U^a a f.$$

Par suite,

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda U^\lambda V_a^1 f = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda U^\lambda V_L^1 (1_L - a) V_a^1 f = \lambda_L((1_L - a) V_a^1 f).$$

La mesure $\lambda U^\lambda V_a^1(x, .)$ converge vers la mesure $\lambda_a = \lambda_L(1_L - a) V_a^1(.)$. Les mesures $\lambda U^\lambda(x, .)$ peuvent être étendues à E^* en posant $\lambda U^\lambda(x, E^* \setminus E) = 0$; la famille de mesures $\{\lambda U^\lambda(x, .)\}_{\lambda > 0}$ est une famille de mesures de masse 1, elle est donc faiblement relativement compacte sur E^*. Soit β_1 une valeur d'adhérence de cette famille; pour $a \in C_k^+$ et $f \in C_k$, $\beta_1(\overline{V}_a^1 f) = \lambda_a(f)$. Mais si $a \in C_k^+$ et $f \in C_k$,

$$U^a f = U^{a+f} f + U^{a+f}(a) U^a f = V_{a+f}^1\left((f + a U^a f) \frac{1}{a+f}\right).$$

Donc si β_1 et β_2 sont deux valeurs d'adhérence faible de la famille $\lambda U^\lambda(x, .)$ dans E^*, ces deux mesures coïncident sur $\overline{S}$ et sur 1, donc sur $C(E^*)$ [d'après 3.3.1 (e)]. En outre, les valeurs d'adhérences, obtenues pour deux points x et y distincts de E, coïncident également sur $\overline{S}$, donc sur $C(E^*)$. Il existe donc une mesure β sur E^* telle que $\lambda U^\lambda(x, .)$ converge vaguement vers β (quel que soit $x \in E$) si λ tend vers zéro.

(*b*) Réciproquement, supposons cette propriété réalisée. Alors quels que soient $a \in C_k^+$ et $f \in C_k$, $\lim_{\lambda \to 0} \lambda U^\lambda V_a^1 f(x) = \beta(\overline{V}_a^1 f)$.

Soit $f \in B$; $\overline{V}_a^1 - \overline{V}_a^\mu = (\mu - 1) \overline{V}_a^1 \overline{V}_a^\mu f$,

$$\left| \lim_{\lambda \to 0} \lambda U^\lambda V_a^1 f - (\mu - 1) \beta(\overline{V}_a^1 \overline{V}_a^\mu f) \right| \leq \frac{1}{\mu} \| f \|,$$

$$\left| \lim_{\lambda \to 0} \lambda U^\lambda V_a^1 f - \beta(\overline{V}_a^1 f) \right| \leq \frac{2}{\mu} \| f \|.$$

Faisant tendre μ vers $+\infty$, on obtient

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda U^\lambda V_a^1 = \beta \overline{V}_a^1.$$

Si maintenant L est un compact, on prend $a \in C_k$ majorant 1_L. Soit $f \in B$,

$$U^a f - U^{1_L} f = U^a(1_L - a) U^{1_L} f$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \to 0} \lambda U^\lambda V_{1_L}^1 f &= \lim_{\lambda \to 0} \lambda U^\lambda U^a((1 - (1_L - a) U 1_L) f 1_L) \\ &= \beta\left(\overline{V}_a^1 (1 - (1_L - a) U^{1_L}) \frac{f 1_L}{a}\right).\end{aligned}$$

D'où la normalité du processus.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Azema (J.), Duflo (M.) et Revuz (D.). — Classes récurrentes d'un processus de Markov, *Séminaire de Probabilités*, 2, Université de Strasbourg, 1967. — Berlin, Springer-Verlag, 1968 (*Lecture Notes in Mathematics*, 51).

[2] Azema (J.), Duflo (M.) et Revuz (O.). — Mesure invariante sur les classes récurrentes des processus de Markov, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, t. 8, 1967, p. 151-181.

[3] Azema (J.), Duflo (M.) et Revuz (D.). — Mesure invariante des processus de Markov récurrents, *Séminaire de Probabilités*, 3, Université de Strasbourg, 1967. — Berlin, Springer-Verlag, 1968 (*Lecture Notes in Mathematics*, 88).

[4] Azema (J.), Duflo (M.) et Revuz (D.). — Propriétés relatives des processus de Markov récurrents, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie* (à paraître).

[5] Basterfield (J. G.). — On quasi compact pseudo-resolvents, *Proceedings of the fifth Berkeley Symposium on mathematical Statistics and Probability* [1966, Berkeley], vol. II, Part 2, p. 193-195. — Berkeley, University of California Press, 1967.

[6] Bretagnolle (J.) et Dacunha-Castelle (D.). — Sur une classe de marches aléatoires, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, série 2, t. 3, 1967, p. 403-431.

[7] Duflo (M.) et Revuz (D.). — Propriétés asymptotiques des probabilités de transition des processus de Markov récurrents, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Série 2, t. 5, 1969, p. 233-244.

[8] Foguel (S. R.). — Limit theorems for Markov processes, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 121, 1966, p. 200-209.

[9] Harris (T. E.). — The existence of stationary measures for certain Markov processes, *Proceedings of the third Berkeley Symposium on mathematical Statistics and Probability* [1954-1955, Berkeley], vol. II, p. 113-124. — Berkeley, University of California Press, 1956.

[10] Harris (T. E.). — Recurrent Markov processes, II (abstract), *Ann. math. Stat.*, t. 26, 1955, p. 152-153.

[11] Hunt (G. A.). — La théorie du potentiel et les processus récurrents, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 15, 1965, fasc. 1, p. 3-12.

[12] Jain (N. C.). — Some limit theorems for a general Markov process, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, t. 6, 1966, p. 206-223.

[13] Jamison (B.) and Orey (S.). — Tail σ-field of Markov processes recurrent in the sense of Harris, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, t. 8, 1967, p. 41-48.

[14] Kemeny (J. G.), Snell (J. L.) and Knapp (A. W.). — *Denumerable Markov chains*. — Princeton, D. Van Nostrand, 1966 (*The University Series in higher Mathematics*).

[15] Kesten (H.). — The Martin boundary of recurrent random walks on countable groups, *Proceedings of the fifth Berkeley Symposium on mathematical Statistics and Probability* [1966, Berkeley], vol. II, Part 2, p. 51-75. — Berkeley, University of California Press, 1967.

[16] Kunita (H.) and Watanabe (T.). — Some theorems concerning resolvents over locally compact spaces, *Proceedings of the fifth Berkeley Symposium on mathematical Statistics and Probability* [1966, Berkeley], vol. II, Part 2, p. 131-165. — Berkeley, University of California Press, 1967.

[17] METIVIER (M.). — Existence of an invariant measure and an Ornstein's ergodic theorem, *Ann. of math. Stat.* (à paraître).

[18] NEVEU (J.). — *Bases mathématiques du calcul des probabilités.* — Paris, Masson, 1964.

[19] OREY (S.). — Recurrent Markov chains, *Pacific J. Math.*, t. 9, 1959, p. 805-827.

[20] ORNSTEIN (D. S.). — Random Walks (à paraître).

[21] SPITZER (F.). — Principles of random walks. — Princeton, D. Van Nostrand, 1960 (The University Series in higher mathematics).

Service de Probabilités
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre-et-Marie-Curie
75-Paris 05

(Texte reçu le 20 avril 1969.)

Mme Marie DUFLO
3, rue de l'Estrapade
75-Paris 05