BULLETIN DE LA S. M. F.

J. PELLAUMAIL

Sur la dérivation d'une mesure vectorielle

Bulletin de la S. M. F., tome 98 (1970), p. 359-368
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1970__98__359_0>

Bull. Soc. math. France,
98, 1970, p. 359 à 368.

SUR LA DÉRIVATION D'UNE MESURE VECTORIELLE

PAR

JEAN PELLAUMAIL,
Maître-Assistant, Département de Mathématiques,
Institut National des Sciences Appliquées de Rennes.

Introduction.

Dans toute cette étude, on considère un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ (avec μ σ-finie), un espace vectoriel V en dualité avec V', et une fonction φ définie sur $\mathcal{F}$, à valeurs dans V, σ-additive pour la topologie $\sigma(V, V')$, et dominée par μ.

Au paragraphe A, en utilisant la propriété de « *lifting* » (*cf.* [5]), on introduit une base de dérivation privilégiée : relativement à cette base de dérivation, la convergence presque-partout des dérivants est remplacée par la convergence partout dans certains théorèmes classiques où μ est supposée finie.

Au paragraphe B, on étudie le cas où les « *mesures scalaires* » associées à φ ont des densités bornées. Le lemme élémentaire B.1 introduit l'une des idées directrices de l'étude, à savoir : A tout ε positif, on associe une partition α telle que, pour toute partition plus fine β, on ait $|D_\alpha - D_\beta| \leqq \varepsilon$ (en désignant par D_α le dérivant associé à la partition α).

L'utilisation de ce lemme et de la base de dérivation définie au paragraphe A permet de préciser le théorème 7 de [6], et d'en simplifier la démonstration.

Dans toute la suite, on suppose que V est un espace de Banach et que φ est fortement σ-additive.

Au paragraphe C, on étudie le comportement des dérivants quand la variation totale de φ n'est pas σ-finie. L'idée du lemme C.3 est analogue à celle du lemme B.1 quand on se place au voisinage de l'infini : A tout entier p, on associe une partition α telle que, pour toute partition plus finie β, on ait $|D_\beta| \geqq p$.

De plus, un contre-exemple simple montre que, même si V est réflexif séparable, la variation totale de φ peut ne pas être σ-finie, ce qui différencie le cas d'un espace vectoriel de dimension infinie du cas d'un espace vectoriel de dimension finie.

Enfin, au paragraphe D, on étudie l'existence, ou l'absence, de « *densité faible* » : on montre surtout qu'il n'y a pas de densité faible si la variation totale n'est pas σ-finie, résultat que laissait espérer le paragraphe C. Le théorème D.4 reprend les résultats qui précèdent quand V est un espace de Banach. Essentiellement, ce théorème exprime que l'espace initial Ω se décompose en deux parties :

— une partie K où « rien ne marche », c'est-à-dire que la variation totale n'est pas σ-finie, qu'il n'y a pas de densité faible, et que la norme des dérivants (associés à une base de dérivation privilégiée) converge presque-partout vers l'infini;

— une partie $(\Omega \setminus K)$ où « tout marche bien », c'est-à-dire que la variation totale est σ-finie, qu'il existe une densité faible, et que les dérivants (associés à une base de dérivation privilégiée) convergent faiblement presque-partout vers cette densité faible. Si V est réflexif, cette densité faible est aussi une densité forte.

A. Notations et choix d'une base de dérivation.

A.1. *Notations.* — Dans ce travail, on utilisera les définitions et les notations de [6]. Plus précisément, on considérera :

(*a*) un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, la mesure étant supposée positive et σ-finie;

(*b*) un espace localement convexe V en dualité avec V' (*cf.* [1]);

(*c*) une fonction φ définie sur $\mathcal{F}$, à valeurs dans V, σ-additive pour la topologie $\sigma(V, V')$ et dominée par μ, c'est-à-dire que, si A appartient à $\mathcal{F}$ et si $\mu(A) = 0$, alors $\varphi(A) = 0$.

A.2. — « *Relèvement* ». — Soit $(\Omega_n)_{n>0}$ une partition de Ω telle que, pour tout n, Ω_n appartient à $\mathcal{F}$ et $\mu(\Omega_n) < +\infty$; soit $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}$ contenus dans Ω_n. D'après [5], on sait que, quel que soit n, il existe un anneau $\mathcal{A}_n$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{F}_n$;

(ii) Ω_n appartient à $\mathcal{A}_n$;

(iii) si A appartient à $\mathcal{A}_n$ et si $\mu(A) = 0$, alors $A = \emptyset$;

(iv) si B appartient à $\mathcal{F}_n$, il existe B' appartenant à $\mathcal{A}_n$ tel que $\mu(B \Delta B') = 0$ (en désignant par Δ la différence symétrique). On désignera par $\mathcal{A}$ l'anneau engendré par la réunion des $\mathcal{A}_n$.

A.3. *Base de dérivation « privilégiée ».* — On désignera par $(\mathcal{P}_\alpha)_{\alpha \in I}$ la famille des partitions dénombrables de Ω, partitions constituées d'éléments de $\mathfrak{A}$; une telle base de dérivation sera appelée base de dérivation privilégiée (associée à l'anneau $\mathfrak{A}$). Sur I, on introduit la relation d'ordre filtrante :

$\alpha \leqq \beta$ si et seulement si $\mathcal{P}_\alpha$ plus fine que $\mathcal{P}_\beta$.

A.4. *Dérivants.* — Étant donné α appartenant à I, on pose

$$D_\alpha^\varphi(\omega) = \sum_{F \in \mathcal{P}_\alpha} l_F(\omega) \times (\varphi(F)/\mu(F)) \quad [\text{on note que } \mu(F) \neq 0].$$

B. Cas où les dérivants prennent leurs valeurs dans une partie faiblement bornée et faiblement complète.

B.1. LEMME. — *Soit m une mesure réelle définie sur $\mathcal{F}$ et admettant, par rapport à μ, une densité μ-essentiellement bornée; alors, pour tout ε positif, il existe α élement de I tel que*

$$\alpha \geqq \beta \quad \textit{implique} \quad |D_\alpha^m(\omega) - D_\beta^m(\omega)| \leqq \varepsilon.$$

Preuve. — Notons, d'abord, que ce lemme est très voisin du lemme VI.8.3 de [4]. Soit f une fonction bornée définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbf{R}$ telle que $m = \int f . d\mu$. Étant donnés Ω_n (*cf.* A.2 ci-dessus), ε positif et p appartenant à $\mathbf{Z}$, soit $A(n, \varepsilon, p)$ le domaine de Ω_n où l'on a

$$p . \varepsilon \leqq f \leqq (p+1) . \varepsilon.$$

Soit, alors, $A'(n, \varepsilon, p)$ l'élément de $\mathfrak{A}_n$ tel que

$$\mu[A(n, \varepsilon, p) \Delta A'(n, \varepsilon, p)] = 0.$$

La famille $(A'(n, \varepsilon, p)]_{n>0, p \in \mathbf{Z}}$ est un élément α de I qui satisfait à la condition du lemme.

B.2. THÉORÈME. — *On suppose qu'il existe une partie H de V bornée et complète pour la topologie $\sigma(V, V')$ telle que, pour tout élément A de $\mathcal{F}$, $\varphi(A)/\mu(A)$ appartienne à H. Alors,*

1° *φ admet une densité faible f relativement à μ (cf. [6]);*

2° *Pour toute base privilégiée, les dérivants $(D_\alpha^\varphi)_{\alpha \in I}$ convergent, suivant I, faiblement uniformément vers f.*

Preuve. — D'après le théorème de Radon-Nikodym, les hypothèses du théorème B.2 impliquent que, pour tout y appartenant à V', la mesure scalaire $\langle \varphi, y \rangle$ admet, par rapport à μ, une densité μ-essentiellement bornée. Le lemme B.1 exprime alors que la famille des dérivants $(D_\alpha)_{\alpha \in I}$ est faiblement uniformément de Cauchy. On en déduit le théorème B.2 puisque H est une partie complète.

B.3. *Exemple.* — Dans [3], DINCULEANU démontre, entre autres, un théorème de Radon-Nikodym où la mesure est à valeurs dans un espace d'opérateurs (*cf.* théorème 1 de [3]). On peut noter que ce résultat est un cas particulier du théorème B.2. Utilisons les notations de [3], c'est-à-dire : $\mathcal{B}$ est un anneau de parties de T, E et F sont deux espaces de Banach, Z est un sous-espace du dual fort F' de F, Z' est le dual fort de Z, et m est une fonction σ-additive, définie sur $\mathcal{B}$ et à valeurs dans $\mathcal{L}(E, F)$ dont la variation totale μ est finie.

On se propose de prouver qu'il existe une application U_m de T dans $\mathcal{L}(E, Z')$ telle que, si x appartient à E, si z appartient à Z, et si A appartient à $\mathcal{B}$, on a

$$\langle m(A).x, z \rangle = \int_A \langle U_m(t).x, z \rangle \, d\mu(t)$$

(résultat de la 31^{e} ligne de la page 186 de [3]).

Preuve. — On décompose la démonstration en deux parties.

(a) Désignons par h l'application canonique de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(E, Z')$, définie par $\langle ux, z \rangle = \langle h(u)\, x, z \rangle$ pour x appartenant à E, z appartenant à Z, et u appartenant à $\mathcal{L}(E, F)$. Cette application a une norme inférieure ou égale à 1. La fonction $h \circ m$ est donc une mesure vectorielle définie sur $\mathcal{B}$, à valeurs dans $\mathcal{L}(E, Z')$, et de variation totale inférieure ou égale à μ. On pose $\varphi = h \circ m$.

(b) On désigne par topologie $\mathcal{C}$ sur $V = \mathcal{L}(E, Z')$ la topologie de la convergence simple sur E, Z' étant muni de la topologie faible $\sigma(Z', Z)$. On désigne par V' le dual de V pour la topologie $\mathcal{C}$. D'après [1] (§ 2, cor. 3), la boule unité de $\mathcal{L}(E, Z')$ est relativement compacte pour la topologie $\mathcal{C}$. On peut donc appliquer le théorème B.2 ci-dessus en posant $T = \Omega$, $\mathcal{F} = \delta$-anneau engendré par $\mathcal{B}$, et $U_m = f$ (m se prolonge évidemment à $\mathcal{F}$ puisque la variation totale de m est finie).

(c) Notons que, dans le cas de [3], la norme de h est égale à 1 (*cf.* haut de la page 183), donc la norme de U_m est égale à 1.

B.4. *Remarques sur l'hypothèse « complet ».* — Dans ce paragraphe, on suppose que $\varphi/\mu(\mathcal{A})$ est contenu dans une partie H bornée pour la topologie $\sigma(V, V')$. Pour pouvoir appliquer le théorème B.2, il suffit que l'adhérence $\overline{H}$ de H soit complète. Notamment :

(a) Si V est le dual W' d'un espace tonnelé séparé, on sait que $V = W'$ est quasi-complet pour la topologie $\sigma(V, W)$, donc $\overline{H}$ est complet;

(*b*) Si V est un espace tonnelé, désignons par V' son dual, et V'' son bidual; V peut être considéré comme plongé dans V'', donc φ peut être considérée comme une fonction à valeurs dans V''. D'après B.2 et B.4 (*a*), il existe donc une densité à valeurs dans V'', densité pour la topologie $\sigma(V'', V')$.

C. Étude des dérivants si V est un espace de Banach.

C.1. *Hypothèses et notations.* — Dans tout ce paragraphe C, on conserve les hypothèses indiquées en A.1, et on suppose, de plus, que V est un espace de Banach et que φ est fortement σ-additive, ce qui équivaut (*cf.* [6]) à prendre pour V' le dual de V dans l'hypothèse A.1 (*c*). La norme dans V sera notée $|\,.\,|$.

Notons que le fait de supposer l'existence de μ ne restreint en rien la généralité de φ à cause du lemme fondamental IV.10.5 de [4].

On désigne par $v(A)$ la variation totale de φ sur A (A étant un élément de $\mathcal{F}$). On désigne par $\mathcal{S}$ la famille des éléments S de $\mathcal{F}$ tels que : si B appartient à $\mathcal{F}$ et si B est contenu dans S, alors $v(B)$ est, soit nulle, soit infinie. On vérifie que $\mathcal{S}$ est stable pour la réunion dénombrable et que, si S appartient à $\mathcal{S}$, si A appartient à $\mathcal{F}$, et si A est contenu dans S, alors A appartient à $\mathcal{S}$.

C.2. Lemme. — *Il existe un élément K de $\mathcal{S}$ tel que la variation totale de φ soit σ-finie sur $(\Omega \setminus K)$.*

Preuve. — Supposons μ finie (*cf.* lemme IV.10.5 de [4]). Soit a la borne supérieure des $\mu(A)$ pour tous les éléments A de $\mathcal{F}$ tels que $v(A) < +\infty$. Soit $(A_n)_{n>0}$ une suite d'éléments A_n de $\mathcal{F}$ telle que :

— d'une part, pour tout n, $v(A_n) < +\infty$;

— d'autre part, $a = \sup\limits_{n>0} .\, \mu(A_n)$.

Il suffit, alors, de prendre pour K le complémentaire de la réunion des ensembles A_n.

Sur $(\Omega \setminus K)$, on connaît le comportement des dérivants (*cf.* B.2 ci-dessus). On va donc, maintenant, étudier le comportement des dérivants sur K.

C.3. Lemme (*fondamental*). — *Quel que soit l'élément S de $\mathcal{S}$ et quel que soit l'entier positif p, il existe une partition dénombrable $(S_n)_{n>0}$ de S telle que : D contenu dans S_n et $\mu(D) \neq 0$ implique $|\varphi(D)/\mu(D)| \geqq p$.*

Preuve. — Pour alléger l'écriture, on dira qu'un élément A de $\mathcal{F}$ satisfait à la condition p^* s'il existe une partition $(A_n)_{n>0}$ de A telle que : D contenu dans A_n et $\mu(D) \neq 0$ implique $|\varphi(D)/\mu(D)| \geqq p$.

On considère, alors, un entier positif p, un élément S de $\mathcal{S}$ et une partition $(R_n)_{n>0}$ de S telle que, pour tout n, $\mu(R_n)$ soit finie. Soit $\mathcal{R}_n$ la famille des éléments de $\mathcal{F}$ contenus dans R_n et satisfaisant à la condition p^*. Soit a_n la borne supérieure des $\mu(A)$ pour tous les éléments A de $\mathcal{R}_n$, et soit $(R_{n,k})_{k>0}$ une suite d'éléments disjoints de $\mathcal{R}_n$ telle que

$$a_n = \sup_{k>0} \mu\left[\bigcup_{j<k} R_{n,j}\right].$$

Soit

$$B = R_{n,0} = R_n \setminus \bigcup_{k>0} R_{n,k}.$$

On va d'abord prouver que $\mu(B) = 0$. Pour cela, raisonnons par l'absurde. On suppose donc $\mu(B) \neq 0$, ce qui implique $v(B) \neq 0$. Il existe donc une partition finie $(B_k)_{k\in K}$ de B telle que :

$$\sum_{k\in K} |\varphi(B_k)| \geq 2p \sum_{k\in K} \mu(B_k) = 2p.\mu(B).$$

donc il existe un élément k_0 de K tel que $\mu(B_{k_0}) \neq 0$ et $|\varphi(B_{k_0})| \geq 2p.\mu(B_{k_0})$. Étant donné le vecteur $x = \varphi(B_k)$, d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe un élément y du dual V' de V tel que $|y| = 1$ et $\langle x, y\rangle = |x|$. Soit f la densité, relativement à μ, de la mesure réelle $\langle\varphi, y\rangle$. Par construction, on a

$$\langle\varphi(B_{k_0}), y\rangle = |\varphi(B_{k_0})| \geq 2p.\mu(B_{k_0}),$$

donc le domaine Q, où f est supérieur ou égal à p, à une mesure $\mu(Q)$ non nulle. Mais, pour tout élément D de $\mathcal{F}$ contenu dans Q, on a $|\varphi(D)/\mu(D)| \geq p$, ce qui contredit la définition de a_n.

On en déduit, alors, que $(R_{n,k})_{n>0,k>0}$ constitue une partition de S qui satisfait à la condition du lemme.

C.4. Théorème. (*Etude des dérivants sur K*). — *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré, la mesure* μ *étant positive et* σ*-finie. Soit* $(\mathcal{P}_\alpha)_{\alpha\in I}$ *une base de dérivation privilégiée* (*cf.* A.3 ci-dessus). *Soit* V *un espace de Banach et soit* φ *une application de* $\mathcal{F}$ *dans* V *fortement* σ*-additive et dominée par* μ. *Soit* K *un élément de* $\mathcal{F}$ *tel que, pour tout élément* A *de* $\mathcal{F}$ *contenu dans* K, *la variation totale* $v(A)$ *de* φ *sur* A *est, soit nulle, soit infinie. Alors, il existe un élément* K' *de* $\mathcal{F}$ *tel que* $\mu(K') = v(K') = 0$ *et tel que la famille* $|D_\alpha^\varphi|$ *converge, suivant* I, *vers* $+\infty$ *sur* $(K\setminus K')$.

Preuve. — On désigne par $\mathcal{A}$ et par $(\Omega_n)_{n>0}$ l'anneau et la partition associés à la base de dérivation privilégiée considérée (*cf.* A.3 ci-dessus). Pour alléger l'écriture, on suppose que K est contenu dans l'un des Ω_n.

A tout entier p, associons une partition $(K_n^p)_{n>0}$ de K telle que D contenu dans K_n^p, D élément de $\mathcal{F}$ et $\mu(D) \neq 0$ implique $|\varphi(D)/\mu(D)| \geq p$ (*cf.* C.3 ci-dessus). Étant donné K_n^p, soit $K_n'^p$ l'élément de $\mathcal{A}$ tel que

$\mu(K_n^p \Delta K_n'^p) = 0$. Posons

$$K' = \bigcup_{n>0,\, p>0} (K_n^p \setminus K_n'^p).$$

On a $\mu(K') = 0$. Soient un entier p et un élément ω de $(K \setminus K')$. Il existe n_0 tel que ω appartienne à $K_{n_0}'^p$. Soit α la partition $\{K_{n_0}'^p, (\Omega_{n_0} \setminus K_{n_0}'^p), (\Omega_k)_{k \neq n_0}\}$: pour toute partition β plus fine que α, on aura $|D_\beta^\varphi(\omega)| \geq p$.

C. Q. F. D.

C.5. *Contre-exemples.* — On désigne par c_0 l'espace de Banach des suites $(x_n)_{n>0}$ de réels convergeant vers zéro muni de la norme

$$\| x \|^\infty = \sup_{n>0} | x_n | \quad (cf.\ [4]).$$

Notons que c_0 et son dual fort l_1 sont séparables.

(*a*) *Premier contre-exemple : Le but du contre-exemple qui suit est de montrer que la variation totale peut être σ-finie sans être finie; la question se pose, car, si V est de dimension finie, alors la variation totale est finie puisque φ est σ-additive.*

On prend $\Omega = \mathbf{N}$ et $V = c_0$; on prend pour $\mathcal{F}$ la tribu des parties de $\mathbf{N}$; enfin, on pose

$$\varphi(\{n\}) = \frac{1}{n}(\delta_{n,p})_{p>0}$$

avec

$$\delta_{n,p} = 1 \quad \text{si } n = p \quad \text{et} \quad \delta_{n,p} = 0 \quad \text{si } n \neq p.$$

On vérifie facilement que φ est σ-additive de variation totale σ-finie, mais non finie.

(*b*) *Deuxième contre-exemple : Son but est de montrer que l'ensemble K du lemme* C.2 *ou du théorème* C.4 *n'est pas nécessairement de mesure nulle, φ étant à valeurs dans un espace réflexif séparable* [1].

On pose $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F}$ = tribu des boréliens de Ω, et μ = mesure de Lebesgue sur $\mathcal{F}$. Soit $V = L^2(\mu)$ (espace de Hilbert séparable), et soit φ l'application de $\mathcal{F}$ dans V définie par $\varphi(A) = 1_A$.

Alors, φ est une application fortement σ-additive de $\mathcal{F}$ dans V dominée par μ. De plus, si A appartient à $\mathcal{F}$ et si $\mu(A) \neq 0$, il existe B et C éléments de $\mathcal{F}$ tels que

$$B \cap C = \emptyset, \qquad A = B \cup C \qquad \text{et} \qquad \mu(B) = \mu(C),$$

ce qui implique

$$| \varphi(B) | + | \varphi(C) | = \sqrt{2}\,.\, | \varphi(A) |.$$

On en déduit facilement que la variation totale de φ est infinie sur tout borélien D de mesure $\mu(D)$ non nulle.

---

[1] Ce contre-exemple m'a été signalé par G. Choquet.

D. Étude des densités si V est un espace de Banach.

D.1. *Hypothèses et notations.* — Dans tout ce paragraphe D, en plus des hypothèses indiquées en A.1, on suppose que V est un dual W' d'espace de Banach W, et que φ est fortement σ-additive. Les normes dans W et W' seront notées $|\ .\ |$. Remarquons que, si V est un espace de Banach quelconque, tout ce qui suit s'applique à condition de considérer V comme « plongé » dans son bidual V''.

On conserve les notations indiquées en C.1.

D.2. LEMME (*topologique*). — *Soit H une partie séparable du dual W' d'un espace de Banach W : alors, il existe une famille dénombrable $(z_n)_{n>0}$ d'éléments de la boule unité de W telle que, pour tout élément y de H, on ait*

$$|y| = \sup_{n>0} |\langle z_n, y\rangle|.$$

Preuve. — Soit $(y_n)_{n>0}$ une suite d'éléments de la boule unité de H, dense dans cette boule. Étant donnés deux entiers n et k, soit $x_{n,k}$ un élément de la boule unité de W tel que $|\langle y_n, x_{n,k}\rangle| \geqq 1 - 1/k$. La famille dénombrable $(x_{n,k})_{n>0,\,k>0}$ satisfait aux conditions du lemme.

D.3. LEMME. — *En plus des hypothèses indiquées en* D.1, *on suppose qu'il existe une densité faible de φ relativement à la dualité* (W', W), c'est-à-*dire une application f de Ω dans W' telle que, pour tout élément x de W, et pour tout élément A de $\mathcal{F}$, on ait*

$$\langle \varphi(A), x\rangle = \int_A \langle f, x\rangle . d\mu.$$

Soit $\mathcal{H}$ une tribu à base dénombrable contenue dans $\mathcal{F}$: alors, il existe une tribu $\mathcal{G}$ telle que $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ et telle que, relativement à $\mathcal{G}$, φ a une variation totale σ-finie.

Preuve. — Soit $(C_k)_{k>0}$ une partition de Ω (constituée d'éléments de $\mathcal{F}$) telle que, pour tout k, $\mu(C_k) < +\infty$.

On désigne par $\mathcal{G}_1$ la tribu engendrée par $\mathcal{H}$ et la partition ci-dessus. On construit $\mathcal{G}_n$ par récurrence de la façon suivante :

Étant donnée $\mathcal{G}_n$ tribu à base dénombrable, soit K_n le sous-espace vectoriel de W' fortement fermé engendré par $\varphi(\mathcal{G}_n)$ (qui est donc séparable). D'après le lemme D.2, il existe une suite $(z_{n,k})_{k>0}$ (n fixé) telle que, pour tout k,

$$|z_{n,k}| = 1 \qquad \text{et} \qquad |y| = \sup_{k>0} |\langle z_{n,k}, y\rangle|.$$

Soit $\mathcal{G}_{n+1}$ la tribu qui contient $\mathcal{G}_n$ et qui rend mesurable toutes les « projections » $\langle f, z_{n,k}\rangle$ pour n fixé et k positif (la tribu $\mathcal{G}_{n+1}$ est à base dénombrable puisque la tribu des boréliens de $\mathbf{R}$ est à base dénombrable).

On désigne, alors, par $\mathcal{G}$ la tribu engendrée par la réunion des $\mathcal{G}_n$ (pour n positif), et par K le sous-espace vectoriel de W' fortement fermé engendré par la réunion des K_n (pour n positif).

Soit $A^p_{n,k}$ l'ensemble des éléments ω de Ω tels que $[\langle f(\omega), z_{n,k}\rangle] \leqq p$. Posons alors

$$A^p = \bigcap_{n>0,\, k>0} A^p_{n,k} \quad \text{(ce qui définit un élément de } \mathcal{G}).$$

$$\Omega = \bigcup_{p>0} A^p$$

et, si B appartient à $\mathcal{F}$ et est contenu dans A^p, la variation totale de φ sur B, variation relativement à la tribu $\mathcal{G}$, est inférieure ou égale à $[p.\mu(B)]$, donc la variation totale de φ est σ-finie relativement à la tribu $\mathcal{G}$.

D.4. Théorème. — *Soit W' un dual d'espace de Banach W, soit Ω un ensemble et soit $\mathcal{F}$ une tribu de parties de Ω; soit φ une application de $\mathcal{F}$ dans W' fortement σ-additive. Alors, il existe un élément K de $\mathcal{F}$ tel que, quelle que soit la mesure μ positive σ-finie dominant φ et quelle que soit la famille $(D_\alpha)_{\alpha\in I}$ des dérivants associés à une base privilégiée (cf.* A.3 *ci-dessus), on a :*

— *d'une part, sur $(\Omega\setminus K)$:*

(*a*) *la variation totale de φ est σ-finie,*

(*b*) *sauf sur un ensemble de mesure μ-nulle, D_α converge, suivant I, uniformément pour $\sigma(W', W)$, vers une densité faible, pour la dualité (W', W), de φ relativement à μ;*

— *d'autre part :*

(*a*) *K appartient à $\mathcal{S}$ (cf.* C.1),

(*b*) *sur K, la famille $|D_\alpha|$ converge, suivant I, μ-presque partout vers $+\infty$,*

(*c*) *sur tout élément S de $\mathcal{F}$ contenu dans K tel que $\mu(S) \neq 0$, φ n'admet pas de densité faible relativement à μ.*

La première partie de ce théorème découle de C.2 et B.2 et le (*b*) de la deuxième partie se déduit de C.4. Soit, alors, un élément S de $\mathcal{F}$ comme indiqué au (*c*); à tout entier positif p, on associe une partition $(S^p_n)_{n>0}$ de S comme indiqué en C.3; on désigne par $\mathcal{H}$ la tribu engendrée par la famille $(S^p_n)_{n>0,\,p>0}$; le lemme D.3 montre alors qu'on ne peut pas avoir de densité faible, puisque la variation de φ relativement à toute tribu contenant $\mathcal{H}$ est, par construction de $\mathcal{H}$, non σ-finie.

D.5. Corollaire. — *Si W est un espace réflexif, φ admet une densité faible si et seulement si φ admet une densité forte.*

Preuve. — Il suffit d'utiliser le théorème 11 de [6] (*voir* aussi le théorème 7 de [2]).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BOURBAKI (Nicolas). — *Espaces vectoriels topologiques*, chap. 3-5. — Paris, Hermann, 1955, (*Act. Scient. et ind.*, 1229; *Bourbaki*, 18).

[2] CHATTERJI (S. D.). — Martingale convergence and the Radon-Nikodym theorem in Banach spaces, *Math. Scand.*, Kobenhavn, t. 22, 1968, p. 21-41.

[3] Dinculeanu (N.). — Integral representation of vector measures and linear operations, *Studia Math.*, Warszawa, t. 25, 1965, p. 181-205.

[4] DUNFORD (Nelson) and SCHWARTZ (Jacob I.). — *Linear operators*, Part. I : *General theory*. 2nd edition. — New York, Interscience Publishers, 1967 (*Pure and applied mathematics. Interscience*, 7).

[5] IONESCU-TULCEA (Alexandra and Cassius). — On the lifting property, I., *J. math. Anal. and Appl.*, t. 3, 1961, p. 537-546.

[6] MÉTIVIER (Michel). — Martingales à valeurs vectorielles. Applications à la dérivation des mesures vectorielles. *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 17, 1967, fasc. 2, p. 175-208.

(Texte reçu le 26 juin 1970.)

Jean PELLAUMAIL,
M. Ass. I.N.S.A.,
Avenue des Buttes de Goësmes,
35-Rennes.