Bulletin de la S. M. F.

Aoust

Intégrales des courbes dont les développantes par le plan et les développées par le plan sont égales entre elles

Bulletin de la S. M. F., tome 7 (1879), p. 143-159
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1879__7__143_1>

Intégrales des courbes dont les développantes par le plan et les développées par le plan sont égales entre elles; par M. l'abbé Aoust.

(Séance du 27 juin 1879.)

1. *État de la question.* — Lancret appelle *développée par le plan d'une courbe* l'arête de rebroussement de la surface enveloppe du plan normal à cette courbe, de sorte que, réciproquement, cette dernière est la développante par le plan de la première. Dans la question posée, il y a trois espèces de courbes à considérer : les courbes C, qui sont les développantes par le plan

des courbes C_1; les courbes C_2, qui sont les développées par le plan des courbes C_1. La question consiste à déterminer les courbes C_1 de telle sorte que les courbes C et les courbes C_2 soient égales entre elles.

Cette question est, dans sa généralité, au-dessus des forces de l'analyse, à cause des intégrations qui ne peuvent s'effectuer, mais elle mérite l'attention des géomètres à cause des simplifications dont elle est susceptible et des faits qui sont dévoilés par l'usage des coordonnées naturelles des courbes. En effet, lorsqu'on fait usage des coordonnées cartésiennes, on est conduit à une équation différentielle du douzième ordre; au contraire, si l'on fait usage des coordonnées naturelles, la question se partage en trois opérations distinctes, qui sont : 1° l'intégration d'une équation différentielle linéaire du quatrième ordre; 2° l'intégration d'une équation différentielle linéaire du troisième ordre; 3° une triple quadrature. Or, ces deux équations différentielles se ramènent à deux équations différentielles identiques du troisième ordre, l'une et l'autre linéaires. Lorsqu'on a trouvé les intégrales des courbes C_1, on obtient les intégrales des courbes C et des courbes C_2 sans intégrations nouvelles. Il existe d'ailleurs des cas intéressants dans lesquels l'intégration de l'équation résolvante du troisième ordre est possible, ainsi que le calcul des quadratures, et, dans ces cas, la question obtient une solution complète. Cette question peut être généralisée si, au lieu de se donner la condition que les courbes C et C_2 sont égales, on se donne la condition que ces courbes sont semblables.

2. *Équation résolvante.* — Soient $d\sigma$, $d\varepsilon$, $d\omega$ l'arc élémentaire, l'angle de contingence et l'angle de torsion de la courbe C; soient ψ le rapport de $d\varepsilon$ à $d\omega$ exprimé en fonction de ω dont la différentielle est $d\omega$, ρ et τ les rayons de courbure et de torsion; nous représentons par les mêmes lettres marquées des indices inférieurs 1 et 2 les éléments de même nom des courbes C_1 et C_2.

La nature de la question laisse indéterminé le rapport ψ; en effet, on a, par suite de l'égalité des courbes C et C_2, la série des rapports égaux

$$(1)\qquad \frac{d\omega}{d\varepsilon} = \frac{d\omega_2}{d\varepsilon_2} = \frac{\rho}{\tau} = \frac{\rho_2}{\tau_2};$$

or, les conditions du problème étant que ρ et ρ_2 sont égaux entre eux ainsi que τ et τ_2, comme l'égalité des rayons de courbure ρ et ρ_2 entraîne, par suite des équations (1), l'égalité des rayons de torsion τ et τ_2 et réciproquement, il en résulte que le rapport ψ reste indéterminé.

Par suite de la relation qui existe entre le rayon de courbure d'une courbe et le rayon de courbure de l'arête de rebroussement, on a les deux équations

$$(2) \qquad -\rho_1 = \rho + \frac{d^2\rho}{d\omega^2}, \quad -\rho_2 = \rho_1 + \frac{d}{\psi\, d\omega}\left(\frac{d\rho_1}{\psi\, d\omega}\right),$$

dont la seconde se déduit de la première par suite des égalités suivantes :

$$d\varepsilon = d\omega_1, \quad d\omega = d\varepsilon_1, \quad d\varepsilon_1 = d\omega_2, \quad d\omega_1 = d\varepsilon_2.$$

Donc, si l'on suppose ρ_2 et ρ égaux entre eux, et qu'on représente par ψ' la dérivée de ψ par rapport à ω, on tombera sur l'équation différentielle linéaire du quatrième ordre

$$(3) \qquad \frac{d^4\rho}{d\omega^4} - \frac{\psi'}{\psi}\frac{d^3\rho}{d\omega^3} + (1+\psi^2)\frac{d^2\rho}{d\omega^2} - \frac{\psi'}{\psi}\frac{d\rho}{d\omega} = 0,$$

qui est l'équation résolvante du problème. Posons $\frac{d\rho}{d\omega}$ égal à μ; l'équation précédente passe au troisième ordre et deviendra

$$(4) \qquad \frac{d^3\mu}{d\omega^3} - \frac{\psi'}{\psi}\frac{d^2\mu}{d\omega^2} + (1+\psi^2)\frac{d\mu}{d\omega} - \frac{\psi'}{\psi}\mu = 0.$$

3. *Intégrales de l'équation résolvante.* — Soient M_1, M_2, M_3 trois solutions particulières de l'équation (4), et A_0, A_1, A_2, A_3 quatre constantes arbitraires; l'intégrale générale de l'équation (3) sera

$$\rho = A_0 + \Sigma A \int M\, d\omega,$$

le signe Σ s'étendant aux valeurs que prend l'expression placée sous ce signe lorsque A et M sont affectés des indices 1, 2, 3. Cette intégrale exprime la valeur du rayon de courbure de la courbe C en fonction de ω.

Pour avoir le rayon de courbure ρ_1 de la courbe C_1, il faut recourir à la première des équations (2), laquelle donne l'expression suivante de ρ_1 :

$$(6)\qquad \rho_1 = -A_0 - \Sigma A\left(\frac{dM}{d\omega} + \int M\,d\omega\right).$$

La valeur de τ_1 se déduit de cette expression; en effet, on a les relations

$$\tau_1 = \rho_1 \frac{d\varepsilon_1}{d\omega_1} = \rho_1 \frac{d\omega}{d\varepsilon};$$

il suffit donc de diviser par ψ le second membre de l'équation (6) pour avoir τ_1.

La valeur du rayon de courbure ρ_2 de la courbe C_2 s'obtient de même sans difficulté au moyen de la seconde des équations (2) :

$$(7)\qquad \rho_2 = A_0 + \Sigma A\left[\frac{dM}{d\omega} + \int M\,d\omega + \frac{d}{\psi\,d\omega}\left(\frac{d^2M}{\psi\,d\omega^2} + \frac{M}{\psi}\right)\right].$$

La valeur du rayon de torsion τ_2 de la courbe C_2 s'obtient en multipliant par ψ le second membre de cette dernière équation.

4. *Intégrales premières.* — L'intégrale générale de l'équation (3) n'est pas possible, mais on peut en obtenir une intégrale première. Ce fait a une grande importance dans cette question.

En effet, si l'on multiplie la première des équations (2) par $2\,d\rho$ et la seconde par $2\,d\rho_1$, qu'on ajoute et qu'on intègre, on trouve

$$(8)\qquad -2\int \rho_2\,d\rho_1 - 2\int \rho_1\,d\rho = \rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\omega^2} + \rho_1^2 + \frac{d\rho_1^2}{\psi^2\,d\omega^2};$$

or, si l'on intègre par parties la première intégrale du premier membre, et qu'on représente par c^2 la constante d'intégration, ce premier membre se réduit au binôme $c^2 - 2\rho_1\rho_2$; on a donc, réductions faites, l'équation

$$(8)'\qquad c^2 - \frac{d\rho^2}{d\omega^2} - \left(\frac{d^2\rho}{d\omega^2}\right)^2 = \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{d\rho}{d\omega} + \frac{d^3\rho}{d\omega^3}\right)^2,$$

qui est du troisième ordre et qui devient du second ordre en μ. Nous l'écrirons sous la forme suivante :

$$(8)''\qquad \psi\,d\mu = \frac{\mu\,d\mu + \dfrac{d\mu}{d\omega}\,d\left(\dfrac{d\mu}{d\omega}\right)}{\sqrt{c^2 - \mu^2 - \dfrac{d\mu^2}{d\omega^2}}}.$$

Sous cette forme, elle devient une seconde fois intégrable si le rapport ψ est donné en fonction de μ. En effet, si l'on pose $\psi = f'(\mu)$, on obtient, par l'intégration immédiate,

$$f(\mu) = \sqrt{c^2 - \mu^2 - \frac{d\mu^2}{d\omega^2}}.$$

On a donc les deux équations

$$(9) \qquad d\omega = \frac{d\mu}{\sqrt{c^2 - \mu^2 - \overline{f(\mu)}^2}}, \qquad d\omega = \frac{f'(\mu)\,d\mu}{\sqrt{c^2 - \mu^2 - \overline{f(\mu)}^2}}.$$

L'intégration de la première donne μ en fonction de ω; soit $F(\omega)$ cette fonction, qui contient deux constantes arbitraires; on a les deux relations

$$\mu = F(\omega), \quad d\varepsilon = f'[F(\omega)]\,d\omega,$$

et conséquemment les deux intégrales

$$\rho = \int F(\omega)\,d\omega, \quad \varepsilon = \int f'[F(\omega)]\,d\omega,$$

dans chacune desquelles est contenue une nouvelle constante arbitraire.

Il est évident que ces deux relations sont les deux équations naturelles de la courbe C.

On en déduit : 1° la rectification de la courbe C, puisque l'arc de courbe s est donné par l'équation

$$s = \int f'[F(\omega)]\,d\omega \int F(\omega)\,d\omega;$$

2° le rayon de torsion de cette même courbe, lequel est donné par la dérivée par rapport à ω de l'équation précédente.

Il serait facile, comme on l'a fait au numéro précédent, d'obtenir les rayons de courbure et de torsion des courbes C_1 et C_2, et par conséquent les équations naturelles de ces courbes.

5. *Du trièdre des axes mobiles.* — La tangente τ_1, la binormale ν_1 et la normale principale ρ_1 forment, en chaque point de la courbe C_1, un trièdre trirectangle; or la direction de chacune des arêtes de ce trièdre ne dépend que du rapport $\frac{d\varepsilon}{d\omega}$, que nous

avons représenté par ψ. En effet, on a les trois équations

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} d\cos(\tau_1, x) &= d\omega \cos(\rho_1, x),\\ d\cos(\nu_1, x) &= d\varepsilon \cos(\rho_1, x),\\ d\cos(\rho_1, x) &= -d\omega\cos(\tau_1, x) - d\varepsilon\cos(\nu_1, x),\end{aligned}\right.$$

de sorte que, si l'on veut intégrer le système, on trouve l'équation résultante

$$(4)'\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^3\cos(\tau_1, x)}{d\omega^3} - \frac{\psi'}{\psi}\frac{d^2\cos(\tau_1, x)}{d\omega^2}\\ &\quad + (1+\psi^2)\frac{d\cos(\tau_1, x)}{d\omega} - \frac{\psi'}{\psi}\cos(\tau_1, x) = 0.\end{aligned}\right.$$

Cette équation résolvante est identiquement la même que l'équation (4); conséquemment, si l'on représente par a_1, a_2, a_3 trois constantes, on a l'intégrale générale

$$\cos(\tau_1, x) = \Sigma a\mathrm{M},$$

la somme Σ s'étendant à toutes les valeurs que prend le produit $a\mathrm{M}$ lorsqu'on affecte simultanément a et M des indices 1, 2, 3.

Soient maintenant b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 six nouvelles constantes qui sont des fonctions des précédentes; par suite de l'orthogonalité des axes, on a le Tableau suivant :

$$\cos(\tau_1, x) = \Sigma a\mathrm{M},\qquad \cos(\tau_1, y) = \Sigma b\mathrm{M},\qquad \cos(\tau_1, z) = \Sigma c\mathrm{M},$$

$$\cos(\rho_1, x) = \Sigma a\frac{d\mathrm{M}}{d\omega},\qquad \cos(\rho_1, y) = \Sigma b\frac{d\mathrm{M}}{d\omega},\qquad \cos(\rho_1, z) = \Sigma c\frac{d\mathrm{M}}{d\omega},$$

$$\cos(\nu_1, x) = \Sigma(b_1c_2 - c_1b_2)\left(\frac{\mathrm{M}_1 d\mathrm{M}_2 - \mathrm{M}_2 d\mathrm{M}_1}{d\omega}\right),$$

$$\cos(\nu_1, y) = \Sigma(c_1a_2 - a_1c_2)\left(\frac{\mathrm{M}_1 d\mathrm{M}_2 - \mathrm{M}_2 d\mathrm{M}_1}{d\omega}\right),$$

$$\cos(\nu_1, z) = \Sigma(a_1b_2 - b_1a_2)\left(\frac{\mathrm{M}_1 d\mathrm{M}_2 - \mathrm{M}_2 d\mathrm{M}_1}{d\omega}\right),$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs des expressions placées sous ce signe par suite de la rotation simultanée des indices.

Il résulte de cette analyse que la direction des axes du trièdre mobile ne dépend aussi que de la valeur de $\frac{d\rho}{d\omega}$ fournie par l'intégration de l'équation $(8)'$, dans laquelle on suppose la constante c^2 égale à l'unité.

Il importe de remarquer que deux des trois constantes a_1, a_2, a_3 sont arbitraires, parce que la somme des carrés des cosinus des angles que l'axe des x fait avec les trois axes mobiles est égale à l'unité. Ceci revient à dire que la question qui consiste à déterminer la direction des axes mobiles en fonction de ψ ne peut dépendre que d'une équation différentielle du second ordre. On trouve immédiatement cette équation lorsqu'on remplace dans le système (10) la deuxième équation par la relation

$$\cos^2(\tau_1, x) + \cos^2(\nu_1, x) + \cos^2(\rho_1, x) = 1;$$

on obtient alors l'équation différentielle

$$\psi = \frac{\dfrac{d^2\cos(\tau_1, x)}{d\omega^2} + \cos(\tau_1, x)}{\sqrt{1 - \cos^2(\tau_1, x) - \left[\dfrac{d\cos(\tau_1, x)}{d\omega}\right]^2}},$$

qui concorde avec l'équation $(8)''$, dans laquelle il suffit et il est nécessaire de faire la constante c égale à l'unité. Cette conclusion confirme ce que nous venons de dire dans le précédent alinéa.

Le D[r] Hoppe a, le premier, démontré par une transformation analytique élégante, et nous avons aussi démontré par des considérations géométriques, dans notre *Analyse des courbes dans l'espace*, que cette dernière équation est réductible à une équation différentielle linéaire du second ordre; mais cette équation simplifiée présente toujours les mêmes difficultés d'intégration.

6. *Coordonnées cartésiennes des courbes.* — Commençons par déterminer les coordonnées de la courbe C_1; si l'on représente par $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ trois constantes arbitraires, on déduit de la relation triple se rapportant aux trois axes x, y, z,

$$\frac{dx_1}{d\sigma_1} = \cos(\tau_1, x),$$

les trois équations contenues dans le type suivant :

$$x_1 - \alpha_1 = \int \cos(\tau_1, x)\, d\sigma_1,$$

Or, si l'on y remplace les cosinus des angles que τ_1 fait avec les trois axes fixes par leurs valeurs données par les premières équations (11) et $d\sigma_1$ par l'expression fournie par l'équation (6), on a les trois relations données par le type suivant :

$$(12) \quad x_1 - \alpha_1 = -\int\left(A_0 + \Sigma A \frac{dM}{d\omega} + \Sigma A \int M\, d\omega\right)(\Sigma a M)\, d\omega,$$

lesquelles donnent les trois coordonnées cartésiennes de la courbe C_1.

Les coordonnées x, y, z de la courbe C et les coordonnées x_2, y_2, z_2 de la courbe C_2 sont données par les équations contenues dans les deux types suivants :

$$(C) \qquad x_1 - x = \rho \cos(\rho_1, x) - \frac{d\rho}{d\omega} \cos(\tau_1, x),$$

$$(C_2) \qquad x_2 - x_1 = \rho_1 \cos(\rho_1, x) - \frac{d\rho_1}{\psi\, d\omega} \cos(\nu_1, x),$$

dans lesquelles toutes les quantités, à l'exception des coordonnées du point de la courbe que l'on considère, sont connues en fonction de ω, par suite des équations (11) et (12).

7. *Applications.* — L'intégration de l'équation (4) n'est pas possible d'une manière générale; mais nous avons fait connaître, dans notre *Analyse des courbes dans l'espace,* les séries des différentes valeurs de ψ dans lesquelles cette intégration se pratique; nous nous contenterons de l'examen de deux cas.

Premier cas :

$$\psi = 2\lambda\mu,$$

λ étant une constante. Dans ce cas, ψ étant proportionnel à μ, l'équation $(8)''$ donne

$$\frac{d\mu^2}{d\omega^2} = c^2 - \mu^2 - \lambda^2(\mu^2 + a^2)^2.$$

Si l'on représente par $\mathfrak{M}^2$ le second membre de cette équation, on a les deux relations

$$(9)' \qquad d\omega = \frac{d\mu}{\mathfrak{M}}, \quad d\varepsilon = \frac{2\lambda\mu\, d\mu}{\mathfrak{M}}.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$c^2 - \lambda^2 a^4 = \lambda^2 A^2, \quad 1 - 2\lambda^2 a^2 = 2\lambda^2 B^2, \quad A^2 + B^2 = n^2,$$

A, B et n étant des auxiliaires, la dernière équation $(9)'$ devient

$$d\varepsilon = \frac{2\mu\, d\mu}{\sqrt{n^2 - (B + \mu^2)^2}},$$

dont l'intégrale, en représentant par ε_0 la constante arbitraire, prend la forme

$$B + \mu^2 = n \sin(\varepsilon - \varepsilon_0),$$

de sorte que, si, dans cette équation, on remplace μ par sa valeur, on trouve

$$(10)' \qquad 2\lambda \frac{d\omega}{d\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{n \sin(\varepsilon - \varepsilon_0) - B}},$$

dont l'intégrale dépend de la fonction elliptique de première espèce. D'une autre part on a, par la nature même de l'hypothèse, la relation

$$d\varepsilon = 2\lambda\, d\rho,$$

de laquelle on déduit par intégration la nouvelle relation

$$(11)' \qquad 2\lambda(\rho - \rho_0) = (\varepsilon - \varepsilon_0),$$

dans laquelle $2\lambda\rho_0 - \varepsilon_0$ est une nouvelle constante. Cette équation et l'équation (10) sont les équations élémentaires de la courbe C.

On déduit de la dernière, combinée avec la relation $ds = \rho\, d\varepsilon$, l'équation suivante :

$$s - s_0 = \lambda\rho^2,$$

qui exprime une des deux propriétés caractéristiques de la courbe.

Trièdre des axes mobiles. — La valeur de $\cos(\nu, x)$ est donnée par l'équation différentielle $(10)'$, dans laquelle C est l'unité et a_1, A_1, B_1, n_1, ε_1 sont de nouvelles constantes, analogues à a, A, B, n, ε_0, et correspondent à l'hypothèse C égal à l'unité; on aura donc les deux équations

$$\cos(\nu, x) = \sqrt{n_1 \sin(\varepsilon - \varepsilon_1) - B_1} = \frac{1}{2\lambda}\frac{d\varepsilon}{d\omega},$$

desquelles on déduit, par la différentiation,

$$\frac{d\cos(\nu, x)}{d\omega} = \frac{n_1 \cos(\varepsilon - \varepsilon_1)}{2\sqrt{n_1 \sin(\varepsilon - \varepsilon_1) - B_1}}\frac{d\varepsilon}{d\omega} = \lambda n_1 \cos(\varepsilon - \varepsilon_1).$$

On a donc, en ayant égard aux équations analogues aux équations (10),

$$\cos(\rho, x) = \lambda n_1 \cos(\varepsilon - \varepsilon_1), \quad \cos(\tau, x) = \lambda n_1 \sin(\varepsilon - \varepsilon_1) + m,$$

m étant une nouvelle constante arbitraire.

Ces équations donnent la direction des axes mobiles en fonction de ε.

Coordonnées cartésiennes. — On déduit des équations précédentes les coordonnées x, y, z de la courbe C, lesquelles sont données par le type suivant :

$$x - \alpha = \int [m + \lambda n_1 \sin(\varepsilon - \varepsilon_1)]\,\rho_0 + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\lambda}\,d\varepsilon,$$

et, comme l'intégration du second membre est possible, on a les coordonnées x, y, z de la courbe C en fonction explicite de ε.

Il est facile de voir que les coordonnées des courbes C_1 et C_2 se déduisent sans difficulté de ce qui précède.

8. *Les courbes* C *sont des hélices.* — Cette hypothèse correspond au second cas.

Second cas :

(13) $$\psi = m = \text{const.}$$

L'équation (8) devient, a étant une constante,

$$\frac{d\mu^2}{d\omega^2} = c^2 - \mu^2 - m^2(\mu + a)^2;$$

on en déduit la suivante :

$$d\omega = \frac{d\mu}{\sqrt{c^2 - m^2 a^2 - 2m^2 a\mu - (1 + m^2)\mu^2}}.$$

Or, si l'on pose, pour abréger, $1 + m^2 = k^2$, on obtient l'intégrale

$$k(\omega - \omega_0) = \text{arc}\left(\sin = \frac{k^2\mu + m^2 a}{\sqrt{c^2 k^2 - m^2 a^2}}\right),$$

et conséquemment l'équation différentielle

$$(14) \qquad k^2 \frac{d\rho}{d\omega} = - m^3 a + \sqrt{c^2 k^2 - m^2 a^2} \sin k(\omega - \omega_0),$$

laquelle, lorsqu'on représente par ρ_0 la constante arbitraire, conduit par intégration à l'équation suivante :

$$(15) \qquad k^2(\rho - \rho_0) = - m^2 a\omega - \sqrt{c^2 k^2 - m^2 a^2} \cos k(\omega - \omega_0).$$

Si dans cette équation on remplace ρ par sa valeur $\frac{ds}{m\,d\omega}$, et qu'on intègre, on obtient la rectification de la courbe par la formule suivante, dans laquelle $k^2 s_0$ est la constante d'intégration :

$$k^2(s - m\rho_0\omega - s_0) = - \frac{1}{2} m^3 a\omega^2 - \frac{m}{k}\sqrt{c^2 k^2 - m^2 a^2} \sin k(\omega - \omega_0).$$

Les équations (15) et (13) sont les équations élémentaires de la courbe.

Direction de la tangente. — Si l'on représente par a_1, k_1, ω_1 des nouvelles constantes arbitraires, on trouvera, d'après le numéro précédent, l'équation suivante :

$$\cos(\tau_1, x) = - \frac{m^2 a_1}{k_1^2} + \frac{1}{k_1}\sqrt{1 - \frac{m^2 a_1^2}{k_1^2}} \sin k_1(\omega - \omega_1),$$

qui donne la direction de la tangente τ_1 à la courbe C_1 par rapport aux trois axes fixes.

D'une autre part, si l'on a recours à la première des équations (2), on trouve la formule

$$(16) \qquad \rho_1 = - \rho_0 + \frac{m^2 a}{k^2}\omega - \frac{m^2}{k}\sqrt{c^2 - \frac{m^2 a^2}{k^2}} \cos k(\omega - \omega_0),$$

qui donne le rayon de courbure de la courbe C_1.

Coordonnées du point. — On déduit de ces formules les expressions des coordonnées x_1, y_1, z_1 de la courbe C_1, qui sont données par le type suivant :

$$(17)\quad \begin{cases} x_1 - \alpha_1 = \displaystyle\int \left[\rho_0 - \frac{m^2 a}{k^2}\,\omega + \frac{m^2}{k}\sqrt{c^2 - \frac{m^2 a^2}{k^2}}\cos k(\omega - \omega_0)\right] \\ \qquad\qquad \times \left[\dfrac{m^2 a_1}{k_1^2} - \dfrac{1}{k_1}\sqrt{1 - \dfrac{m^2 a_1^2}{k_1^2}}\sin k(\omega - \omega_0)\right] d\omega, \end{cases}$$

et, comme le second membre de ce type est intégrable, il en résulte que les coordonnées de la courbe C_1 sont exprimables en fonction explicite de ω.

9. *Généralisation du problème.* — Proposons-nous maintenant la question suivante, qui est la généralisation de celle que nous avons résolue :

Problème. — *Trouver les courbes dont les développantes et les développées par le plan sont semblables entre elles.*

Conservons les notations établies ; on a les mêmes données que dans le problème résolu ; seulement, la condition relative à l'égalité des rayons de courbure ρ et ρ_2 est remplacée par la condition que ces rayons sont dans un rapport constant, laquelle entraîne la condition que les rayons de torsion τ et τ_2 sont dans le même rapport. On a donc les équations

$$(18)\qquad \rho_2 = n^2\rho, \quad \tau_2 = n^2\tau,$$

n^2 étant constant ; la fonction ψ reste encore indéterminée.

Si l'on a recours aux équations (2), la première condition fournit l'équation différentielle suivante :

$$(3)'\quad \frac{d^4\rho}{d\omega^4} - \frac{\psi'}{\psi}\frac{d^3\rho}{d\omega^3} + (1+\psi^2)\frac{d^2\rho}{d\omega^2} - \frac{\psi'}{\psi}\frac{d\rho}{d\omega} + (1-n^2)\psi^2\rho = 0,$$

qui est l'équation résolvante, puisque son intégration fait connaître ρ en fonction de ω et qu'elle donnera en même temps $\cos(\nu, x)$ en fonction de la même variable. Il suffira, en effet, de prendre la dérivée de ρ par rapport à ω et d'y faire n^2 égal à l'unité, en donnant aux constantes d'autres valeurs générales ; cette dérivée représentera la valeur de $\cos(\nu, x)$, comme cela résulte de l'équation (8)″.

Soient maintenant R_0, R_1, R_2, R_3 quatre solutions particulières de l'équation $(3)'$, et A_0, A_1, A_2, A_3 quatre constantes arbitraires; l'intégrale générale de l'équation sera

$$\rho = \Sigma AR,$$

la somme Σ s'étendant toujours, suivant nos conventions, à toutes les valeurs du produit AR, lorsqu'on affecte successivement et simultanément les deux facteurs des indices o, 1, 2, 3.

D'une autre part, si l'on représente par N_0, N_1, N_2, N_3 les valeurs de R_0, R_1, R_2, R_3, lorsqu'on y fait n^2 égal à l'unité, et qu'on représente par B_0, B_1, B_2, B_3 quatre nouvelles constantes, on aura le type suivant relatif aux cosinus que ν fait avec les trois axes fixes,

$$\cos(\nu, x) = \Sigma B \frac{dN}{d\omega},$$

avec cette circonstance que $\frac{dN_0}{d\omega}$ est nul.

Coordonnées de la courbe C_1. — Si l'on remonte à la première des équations (2), on aura l'équation

$$\rho_1 = -\Sigma A\left(R + \frac{d^2R}{d\omega^2}\right),$$

et, conséquemment, les coordonnées x_1, y_1, z_1 de la courbe C_1 seront

$$x_1 - \alpha_1 = -\int \left[\Sigma B \frac{dN}{d\omega}\right] \Sigma A \left(R + \frac{d^2R}{d\omega^2}\right) d\omega.$$

On déterminera comme précédemment les coordonnées des courbes C et C_2.

10. *Application aux hélices.* — Dans ce cas, on a

$$\psi = m = \text{const.};$$

l'équation $(3)'$ devient

$$(3)'' \qquad \frac{d^4\rho}{d\omega^4} + (1 + m^2)\frac{d^2\rho}{d\omega^2} + (1 - n^2)m^2\rho = 0.$$

Si l'on pose $\rho = e^{\alpha\omega}$, α étant une constante, on a l'équation de condition

$$\alpha^4 + (1 + m^2)\alpha^2 + (1 - n^2)m^2 = 0,$$

et les valeurs de α sont les quatre racines de cette équation; nous les représentons par α_1, α_2, α_3, α_4.

Il y a deux cas à considérer, suivant que n^2 est positif ou négatif.

Dans le premier cas, la similitude des courbes C_2, C est directe; or, dans ce même cas, suivant que n^2 est plus grand ou moindre que l'unité, deux racines seulement ou toutes les quatre sont imaginaires.

Soit $n^2 > 1$; en appelant λ la racine réelle positive, les quatre racines sont

$$\lambda, \quad -\lambda, \quad \sqrt{(1+m^2+\lambda^2)}\sqrt{-1}, \quad -\sqrt{(1+m^2+\lambda^2)}\sqrt{-1};$$

l'intégrale générale sera donc

$$\rho = A_0 e^{\lambda\omega} + A_1 e^{-\lambda\omega} + A_2 \cos(1+m^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\omega + A_3 \sin(1+m^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\omega.$$

Soit $n^2 < 1$; en appelant $\lambda_1\sqrt{-1}$ une racine imaginaire, les quatre racines imaginaires seront

$$\lambda_1\sqrt{-1}, \quad -\lambda_1\sqrt{-1}, \quad (1+m^2-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}, \quad -(1+m^2-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1},$$

et l'intégrale générale sera

$$\rho = A_0 \cos\lambda_1\omega + A_1 \sin\lambda_1\omega + A_2 \cos(1+m^2-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\omega$$
$$+ A_3 \sin(1+m^2-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\omega.$$

Dans le second cas, la similitude des courbes C_2 et C est inverse; mais, suivant que l'on a $(1-m^2)^2$ plus grand ou plus petit que $-4m^2n^2$, les quatre racines, qui sont dans les deux hypothèses imaginaires, se présentent sous l'une ou l'autre des deux formes

$$\lambda\sqrt{-1}, \quad -\lambda\sqrt{-1}, \quad (1+m^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}, \quad -(1+m^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1},$$
$$a+b\sqrt{-1}, \quad -a-b\sqrt{-1}, \quad a-b\sqrt{-1}, \quad -a+b\sqrt{-1},$$

de sorte que, dans la première hypothèse, on a

$$\rho = A_0 \cos\lambda\omega + A_1 \sin\lambda\omega + A_2 \cos(1+m^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\omega + A_3 \sin(1+\lambda^2+m^2)^{\frac{1}{2}}\omega,$$

et, dans la seconde,

$$\rho = (A_0 \cos b\omega + A_1 \sin b\omega)e^{a\omega} + (A_2 \cos b\omega + A_3 \sin b\omega)e^{-a\omega},$$

expression dans laquelle a et b sont faciles à déterminer.

En comparant les quatre expressions de ρ que nous venons d'obtenir, on voit qu'il n'y en a que trois distinctes de forme, suivant les valeurs assignées à n^2. Dans tous les cas, les valeurs de ρ_1 se calculent sans difficulté et le problème s'achève comme au n° 8, puisque les coordonnées des courbes C, C_1, C_2 s'obtiennent explicitement en fonction de ω, indépendamment de tout signe d'intégration. Nous laissons au lecteur le soin d'effectuer ce calcul, qui ne présente aucune difficulté.

11. *Intégrales premières.* — Reportons-nous à l'équation (8) du n° 4. Posons $\rho_2 = n^2\rho$ et intégrons le premier terme par parties; le premier membre devient

$$-2n^2\rho_1\rho + 2(n^2-1)\int \rho_1\, d\rho,$$

et, en remplaçant ρ_1 par sa valeur donnée par la première des équations (2) sous le signe $\int$, il prend la forme suivante, lorsqu'on pratique l'intégration et qu'on représente par c_2 la constante arbitraire:

$$-2n^2\rho_1\rho - (n^2-1)\left(\rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\omega^2}\right) + c^2.$$

D'après cela, l'équation (8) devient, après quelques réductions évidentes,

$$c^2 - n^2(\rho+\rho_1)^2 = (1-n^2)\rho_1^2 + n^2\frac{d\rho^2}{d\omega^2} + \frac{d\rho_1^2}{\psi^2 d\omega^2};$$

on a donc finalement l'équation

$$(19)\qquad \psi = \frac{\dfrac{d}{d\omega}\left(\rho + \dfrac{d^2\rho}{d\omega^2}\right)}{\sqrt{c^2 - n^2\left[\dfrac{d\rho^2}{d\omega^2} + \left(\dfrac{d^2\rho}{d\omega^2}\right)^2\right] - (1-n^2)\left(\rho + \dfrac{d^2\rho}{d\omega^2}\right)^2}},$$

qui est une équation différentielle du troisième ordre.

Si maintenant on pose, comme au n° 2, $\dfrac{d\rho}{d\omega} = \mu$, et qu'on multiplie les deux membres de cette équation par $2d\mu$, on obtient l'équation transformée du second ordre

$$(19)'\qquad 2\psi\, d\mu = \frac{d\left(\mu^2 + \dfrac{d\mu^2}{d\omega^2}\right)}{\sqrt{c^2 - n^2\left(\mu^2 + \dfrac{d\mu^2}{d\omega^2}\right) - (1-n^2)\int\left(\mu + \dfrac{d^2\mu}{d\omega^2}\right)d\omega}};$$

enfin, si l'on pose $\mu^2 + \frac{d\mu^2}{d\omega^2} = u^2$, cette dernière prend la forme simple

$$(19)'' \qquad \psi\, d\mu = \frac{u\,du}{\sqrt{c^2 - n^2u^2 - (1-n^2)\int \frac{d\omega}{d\mu}\, u\,du}}.$$

12. *Application.* — Cette dernière équation s'intègre de nouveau dans le cas où l'on a la relation

$$(20) \qquad \frac{d\mu}{d\omega} = \lambda = \text{const.}$$

En effet, si l'on représente par c_1^2 la constante arbitraire provenant de l'intégration du dernier terme placé sous le radical, l'équation différentielle devient

$$\lambda\, d\varepsilon = \frac{u\,du}{\sqrt{c^2 + c_1^2 - \left(n^2 - \frac{n^2-1}{2\lambda}\right)u^2}}.$$

Si maintenant on pose $c^2 + c_1^2 = k^2$, qu'on représente par ε_0 la constante d'intégration et par h une nouvelle constante, on obtient l'équation

$$(21) \qquad (\omega - \omega_0)^2 + \left(n^2 - \frac{n^2-1}{2\lambda}\right)(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 = \frac{h^2}{\lambda^2},$$

ce qui prouve que la courbe appartient à la classe des lignes dont la caractéristique sphérique a pour équation entre les variables ω et ε l'équation d'une conique.

D'un autre côté, l'équation de condition donne

$$\frac{d}{d\omega}\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right) = \lambda;$$

or, si l'on représente par λ_1 et λ_2 deux constantes arbitraires, et qu'on pratique deux intégrations successives, on trouve la relation

$$\rho = \frac{1}{2}\lambda\omega^2 + \lambda_1\omega + \lambda_2,$$

de sorte que la courbe C est définie d'une manière complète par les deux équations (20) et (21), qui sont ses équations naturelles.

Il est bon de remarquer que, si n^2 était égal à l'unité, la courbe C appartiendrait à la classe des cyclides, qui sont les développées par fil de la classe des hélices (¹).

13. *Conclusion.* — L'analyse dont nous venons de faire usage pour traiter la question qui fait l'objet de ce travail est susceptible d'applications nombreuses et a un caractère de généralité suffisante pour conduire à la solution complète de questions plus difficiles que la précédente, mais non moins intéressantes. C'est ainsi que l'on résoudra sans difficulté les questions suivantes de Géométrie curviligne :

1° *Trouver les intégrales des courbes dont les développantes par le plan et les développées par le plan sont liées entre elles par cette condition que, lorsqu'on développe ces deux courbes sur les plans tangents à leurs surfaces osculatrices, on obtient deux courbes planes parallèles;*

2° *Trouver les intégrales des courbes de la classe des hélices telles que les rayons des sphères osculatrices soient dans un rapport constant avec les rayons de courbure du lieu des centres de ces sphères osculatrices;*

3° *Trouver les intégrales de la courbe* C_1 *dont le rayon de courbure est la projection, sur ce rayon, du rayon de la sphère osculatrice de la développante par le plan de la courbe* C.

(¹) *Voir* notre *Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace*, p. 70.