FRANÇOIS COMBES

Poids et espérances conditionnelles dans les algèbres de von Neumann

Bulletin de la S. M. F., tome 99 (1971), p. 73-112
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1971__99__73_0>

Bull. Soc. math. France,
99, 1971, p. 73 à 112.

POIDS ET ESPÉRANCES CONDITIONNELLES DANS LES ALGÈBRES DE VON NEUMANN

PAR

François COMBES.

1. Introduction et notations.

Les traces et les formes linéaires positives contituent un outil puissant dans l'étude des C*-algèbres et des algèbres de von Neumann : construction de représentations, théorie non commutative de l'intégration, etc. D'autre part, ces objets présentent à certains égards des analogies frappantes. Le souci de généraliser et d'unifier a conduit à la recherche d'une notion dont l'étude engloberait celle des formes linéaires positives et celle des traces. C'est ainsi que les poids on été introduits et étudiés ([1], [13], [14], [15]).

D'autre part, toute algèbre hilbertienne définit, par représentation à gauche, une algèbre de von Neumann M et une trace fidèle, semi-finie, normale sur M. Dans [4], nous avons généralisé cette propriété pour les algèbres hilbertiennes à gauche récemment introduites ([20], [17]) : une telle algèbre définit, sur l'algèbre de von Neumann qu'elle engendre par représentation à gauche, un poids fidèle, semi-fini, ultrafaiblement semi-continu inférieurement (s. c. i.).

Toutefois, un poids semi-fini, ultrafaiblement s. c. i. sur une algèbre de von Neumann, paraît à certains égards une notion peu maniable. Jusqu'à ce jour, certains problèmes très naturels demeurent sans réponse : Un tel poids est-il somme de formes linéaires positives normales? Est-il enveloppe supérieure de formes linéaires positives normales? S'il est fidèle, definit-il une algèbre hilbertienne à gauche achevée ? etc. Le premier de ces problèmes est posé par J. Dixmier dans [6] (chap. 1, § 4, p. 52).

Dans cette étude, nous introduisons une classe de poids pour laquelle on puisse répondre affirmativement à toutes ces questions. Cette catégorie est assez générale pour englober les traces et les formes linéaires positives normales. Ces poids sont aussi assez nombreux pour être un outil convenant à l'étude des algèbres de von Neumann. Nous reprenons une notion mise en évidence dans [4], § 3 : ces poids étaient ceux qui correspondaient aux algèbres hilbertiennes à gauche définissant une algèbre de von Neumann G-finie pour le groupe G des automorphismes modulaires.

Nous avons essayé de définir et d'étudier ces poids indépendamment de la théorie générale des algèbres hilbertiennes à gauche (c'est l'objet des paragraphes 2, 3, et 4). Pour tout poids φ sur une algèbre de von Neumann M, nous considérons l'ensemble A des $y \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$ (*voir* les définitions ci-dessous) tels que $\dot{\varphi}(yx) = \dot{\varphi}(xy)$ pour tout $x \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$. Nous dirons que φ est strictement semi-fini si I est ultrafaiblement adhérent à A (qui est une sous-algèbre involutive de $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$). Comme $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$ est alors ultrafaiblement dense dans M, un tel poids est semi-fini. Si φ est strictement semi-fini et ultrafaiblement semi-continu inférieurement sur M^+, il existe alors une espérance conditionnelle T_φ appliquant M dans l'adhérence ultrafaible M_φ de A et telle que $\varphi = \varphi_0 \circ T_\varphi$, où nous posons $\varphi_0 = \varphi \mid M^+$. En outre, φ_0 est une trace normale semi-finie sur M_φ. La construction de l'espérance conditionnelle T_φ reprend les méthodes utilisées par H. Umegaki ([22], [23], [24]).

Nous appliquons ces résultats à l'étude de divers problèmes : ceux que nous citions précédemment, ou encore dans les paragraphes 4 et 5, des problèmes sur les poids K. M. S. que nous n'avions pas su résoudre dans le cadre le plus général. Par exemple, si $G : t \mapsto \sigma_t$ est un groupe à un paramètre d'automorphismes d'une algèbre de von Neumann M, et si β est un nombre > 0, l'ensemble des poids strictement semi-finis, ultrafaiblement semi-continus inférieurement et K. M. S. avec la constante β pour G, forment un cône convexe réticulé. Pour qu'un poids appartienne à une génératrice extrémale de ce cône, il faut et il suffit qu'il définisse une représentation factorielle de M. Si M est un facteur, ce cône se réduit à zéro ou à une demi-droite. Autrement dit, s'il existe sur M un poids strictement semi-fini, ultrafaiblement semi-continu inférieurement non nul qui soit K. M. S. pour $t \mapsto \sigma_t$ avec la constante β, ce poids est unique à une constante multiplicative près.

L'étude se présente de la façon suivante. Au paragraphe 2, nous faisons de brefs rappels préliminaires sur les sous-algèbres faciales et les idéaux à gauche des algèbres de von Neumann. Au paragraphe 3, nous construisons l'espérance conditionnelle associée à un poids ultrafaiblement semi-continu inférieurement. Au paragraphe 4, nous introduisons les poids strictement semi-finis. En les supposant ultrafaiblement semi-continus inférieurement, nous les décrivons ainsi que la représentation qu'il définissent. Le paragraphe 5 est consacré aux poids K. M. S.. Au paragraphe 6, nous étudions le produit tensoriel des poids précédemment introduits, et nous retrouvons, en particulier, quelques propriétés bien connues des traces [8].

Un poids sur une C^*-algèbre A est une fonction φ définie sur A^+ à valeurs dans $[0, +\infty]$ vérifiant les conditions suivantes :

(*a*) pour $x, y \in A^+$, on a $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;

(*b*) pour $x \in A^+$ et $\lambda \in \mathbf{R}^+$, on a $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$ (on convient que $0 . +\infty = 0$).

L'ensemble F des $x \in A^+$ tels que $\varphi(x) < +\infty$ est une face du cône A^+. Le sous-espace vectoriel lin F, engendré linéairement par F, est une sous-algèbre involutive $\mathfrak{M}_\varphi$ de A. Il existe sur $\mathfrak{M}_\varphi$ une forme linéaire positive $\dot{\varphi}$ et une seule qui coïncide avec φ sur $\mathfrak{M}_\varphi^+ = F$. L'ensemble des $x \in A$, tels que $\varphi(x^* x) < +\infty$ [resp. $\varphi(x^* x) = 0$], est un idéal à gauche $\mathfrak{N}_\varphi$ [resp. N_φ] de A, et on a $\mathfrak{M}_\varphi = \mathfrak{N}_\varphi^* \mathfrak{N}_\varphi$. On note Λ_φ l'application canonique $\mathfrak{N}_\varphi \to \mathfrak{N}_\varphi / N_\varphi$, H_φ l'espace hilbertien complété de $\mathfrak{N}_\varphi / N_\varphi$ pour le produit scalaire $(\Lambda_\varphi x \mid \Lambda_\varphi y) = \dot{\varphi}(y^* x)$, π_φ la représentation de A sur H_φ obtenue par le procédé habituel. Si φ est une trace semi-continue inférieurement, nous noterons ρ_φ la représentation de l'algèbre opposée de A sur H_φ définie par φ. Si φ est la restriction à A^+ d'une forme linéaire positive $f \in A'$, nous noterons ξ_f le vecteur de H_f totalisateur pour π_f canoniquement défini par f.

Si A est une algèbre de von Neumann, nous dirons que le poids φ est normal si, pour toute famille filtrante croissante (x_i) d'éléments de A^+ admettant une borne supérieure x, on a $\varphi(x) = \sup \varphi(x_i)$. Si φ est normal, l'ensemble des projecteurs $q \in A$, tels que $\varphi(q) = 0$, possède un plus grand élément q_0. Le projecteur $p_0 = I - q_0$ est appelé le support de φ. Notons que si φ est ultrafaiblement semi-continu inférieurement (nous dirons simplement « ultrafaiblement s. c. i. »), il est normal. Si φ est une trace, la réciproque est vraie ([6], chap. 1, § 6, cor. prop. 2, p. 85); pour un poids quelconque, le problème est ouvert. Si $N_\varphi = (0)$ on dira que φ est fidèle. Si $\mathfrak{M}_\varphi$ est ultrafaiblement dense dans A, on dit que φ est semifini.

Pour la théorie des algèbres hilbertiennes à gauche, nous suivrons les notations de [17]. En particulier, si $\mathfrak{A}$ est une telle algèbre, nous noterons $\mathfrak{A}'$ l'algèbre hilbertienne à droite associée, $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi(\mathfrak{A})$, où π désigne la représentation canonique de $\mathfrak{A}$ sur l'espace hilbertien complété de $\mathfrak{A}$.

Je remercie M. Takesaki qui m'a tenu au courant de ses travaux sur la théorie des algèbres hilbertiennes. Je remercie également F. Perdrizet qui a discuté avec moi certains points de cette étude.

2. Quelques propriétés des sous-algèbres faciales d'une algèbre de von Neumann.

Les propriétés énoncées dans ce paragraphe sont toutes plus ou moins connues. Pour la clarté de l'exposé qui suit, il nous a semblé nécessaire de les rassembler ici.

Soit M une C^*-algèbre. Rappelons qu'on appelle *face de* M^+ un sous-cône convexe héréditaire F de M^+. Le sous-espace vectoriel lin F, engendré linéairement par F, est une sous-algèbre involutive $\mathfrak{M}$ de M et $\mathfrak{M}^+ = F$ (*voir* par exemple [2], prop. 1.3). L'ensemble des $x \in M$ tels que $x^*x \in F$ sera noté $L(F)$; c'est un idéal à gauche de M, et on a $\mathfrak{M} = L(F)^* L(F)$. Une sous-algèbre $\mathfrak{M}$ de M engendrée linéairement par sa partie positive $\mathfrak{M}^+$, et telle que $\mathfrak{M}^+$ soit une face de M^+, est appelée une sous-algèbre faciale de M.

Si M est une algèbre de von Neumann, pour tout idéal à gauche $\mathfrak{N}$ de M, $\mathfrak{N}^*\mathfrak{N}$ est une sous-algèbre faciale de M, et on a $\mathfrak{N} = L[(\mathfrak{N}^*\mathfrak{N})^+]$ ([4], lemme 4.11).

2.1. Lemme. — *Soient M une algèbre de von Neumann, $\mathfrak{N}$ un idéal à gauche de M, $\overline{\mathfrak{N}}$ son adhérence ultrafaible. Alors la boule unité de $\mathfrak{N}$ est ultrafaiblement dense dans celle de $\overline{\mathfrak{N}}$, et toute unité approchée filtrante croissante de $\mathfrak{N}$ converge ultrafortement vers l'unique projecteur p de $\overline{\mathfrak{N}}$ tel que $\overline{\mathfrak{N}} = Mp$.*

Soit (u_i) une unité approchée filtrante croissante de $\mathfrak{N}$, et soit p sa borne supérieure dans M. Comme u_i converge ultrafortement vers p ([6], append. II), p est dans $\overline{\mathfrak{N}}$. Pour $x \in \mathfrak{N}$, on a $\| x - xu_i \| \to 0$, d'où $x = xp$. Cette relation est encore valable pour $x \in \overline{\mathfrak{N}}$. En particulier, on a $p = p^2$, donc p est un projecteur. On a $Mp \subset \overline{\mathfrak{N}}$, car $\overline{\mathfrak{N}}$ est un idéal à gauche, et on a $\overline{\mathfrak{N}} \subset Mp$ d'après ce qui précède. Donc $\overline{\mathfrak{N}} = Mp$. Alors tout $x \in \overline{\mathfrak{N}}$ est limite ultraforte de $xu_i \in \mathfrak{N}$ et on a

$$\| xu_i \| \leqq \| x \| . \| u_i \| \leqq \| x \|,$$

ce qui achève la démonstration.

2.2. — Lemme. — *Soient M une algèbre de von Neumann, $\mathfrak{N}$ un idéal à gauche de M. Notons $\mathfrak{M}$ la sous-algèbre faciale $\mathfrak{N}^*\mathfrak{N}$ de M. On a alors $\mathfrak{M} = (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}^*)^2$, et les adhérences ultrafaibles $\overline{\mathfrak{M}}$, $\overline{\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}^*}$, $\overline{\mathfrak{N}}$ de ces ensembles vérifient*

$$\overline{\mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}^*} = \overline{\mathfrak{N}} \cap \overline{\mathfrak{N}}^* = \overline{\mathfrak{N}}^* \overline{\mathfrak{N}}.$$

En particulier, $\overline{\mathfrak{M}}$ est faciale, et on a $\overline{\mathfrak{N}} = L(\overline{\mathfrak{M}}^+)$.

D'après [4] (lemme 4.11), $\mathfrak{M}$ est faciale et, d'après [4], (lemme 2.10), on a $\mathfrak{M} = (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}^*)^2$. Les relations $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}^*\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}^*$ entraînent $\overline{\mathfrak{M}} \subset \overline{\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}^*} \subset \overline{\mathfrak{N}} \cap \overline{\mathfrak{N}}^*$. L'idéal à gauche $\overline{\mathfrak{N}}$ de M étant normiquement fermé, la proposition 3.1 de [2] nous donne $\overline{\mathfrak{N}} \cap \overline{\mathfrak{N}}^* = \overline{\mathfrak{N}}^* \overline{\mathfrak{N}}$. Montrons que $\overline{\mathfrak{N}}^* \overline{\mathfrak{N}} \subset \overline{\mathfrak{N}^*\mathfrak{N}} = \overline{\mathfrak{M}}$. Il suffit de montrer que $\overline{\mathfrak{N}^*\mathfrak{N}}$ contient les éléments x^*x, où $x \in \overline{\mathfrak{N}}$, car ces éléments engendrent linéairement $\overline{\mathfrak{N}}^*\overline{\mathfrak{N}}$. D'après le lemme 2.1, tout $x \in \overline{\mathfrak{N}}$ est limite ultraforte d'éléments $y_i \in \mathfrak{N}$ tels que $\| y_i \| \leqq \| y \|$. Alors x^*x est limite ultrafaible des éléments $y_i^* y_i \in \mathfrak{N}^*\mathfrak{N}$, d'où l'inclusion recherchée.

La relation $\overline{\mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{N}}^*\overline{\mathfrak{N}}$ et le lemme 4.11 de [4], déjà cité, montrent que $\overline{\mathfrak{M}}$ est faciale et que $\overline{\mathfrak{N}} = L(\overline{\mathfrak{M}}^+)$. (Notons que la relation $\overline{\mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{N}} \cap \overline{\mathfrak{N}}^*$ montre que $\overline{\mathfrak{M}} = pMp$, où p désigne le plus grand projecteur de $\overline{\mathfrak{N}}$).

2.3. Lemme. — *Soient M une algèbre de von Neumann, $\mathfrak{M}$ une sous-algèbre faciale de M, $\mathfrak{N}$ l'idéal à gauche $L(\mathfrak{M}^+)$. Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *$\mathfrak{M}$ est ultrafaiblement dense dans M*;

(ii) *$\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}^*$ est ultrafaiblement dense dans M*;

(iii) *$\mathfrak{N}$ est ultrafaiblement dense dans M*;

(iv) *Il existe une famille filtrante croissante d'éléments de $\mathfrak{N}^+$ convergeant ultrafaiblement vers I*;

(v) *Il existe une famille filtrante croissante d'éléments de $\mathfrak{M}^+$ convergeant ultrafaiblement vers I.*

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) d'après le lemme 2.2, et (v) $\Rightarrow$ (iv) est évident, car $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$.

(i) $\Rightarrow$ (v) : Si $\mathfrak{M}$ est ultrafaiblement dense dans M, la représentation identique de l'adhérence normique A de $\mathfrak{M}$ est non dégénérée. Si (u_i) est une unité approchée de A construite dans $\mathfrak{M}$, elle converge ultrafortement vers I ([5], 2.2.10).

(iv) $\Rightarrow$ (i) : Supposons qu'il existe sans $\mathfrak{N}^+$ une famille filtrante croissante (u_i), convergeant vers I ultrafaiblement (donc aussi ultrafortement d'après [6], append. II). Alors, tout $x \in M$ est limite ultraforte de $u_i x u_i \in \mathfrak{N}^*\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$.

2.4 Lemme ([6], chap. 1, § 3, cor. 5, p. 43). — *Soient M une algèbre de von Neumann, J un idéal bilatère de M ultrafaiblement dense dans M.*

(i) *Pour tout $x \in M^+$, il existe une famille filtrante croissante d'éléments de J^+ dont x est la borne supérieure.*

(ii) *Pour tout projecteur q de M, il existe une famille $(p_i)_{i \in I}$ de projecteurs de J, deux à deux orthogonaux, de somme égale à q.*

(i) D'après le lemme 2.1, toute unité approchée filtrante croissante (u_α) de J converge ultrafortement vers I. La famille filtrante croissante $(x^{1/2} u_\alpha x^{1/2})$ converge alors ultrafortement vers x qui est donc sa borne supérieure ([6], append. II)

(ii) Soit $(p_i)_{i\in I}$ une famille maximale de projecteurs, deux à deux orthogonaux de J, et majorés par q. Si la somme $e=\sum_{i\in I} p_i$ de ces projecteurs est différente de q, $q-e$ majore un élément x non nul de J^+ [d'après (i)]. D'après la théorie spectrale, il existe un projecteur p de M non nul, majoré par un multiple scalaire λx de x. Comme J^+ est une face de M^+ ([6], chap. 1, § 1, prop. 10, p. 11), on a $p\in J$, et la famille $(p_i)_{i\in I}$ n'est pas maximale. Donc $\sum_{i\in I} p_i = q$.

2.5. Lemme. — *Soient M une algèbre de von Neumann, $\mathfrak{M}$ une sous-algèbre faciale de M, J un idéal bilatère ultrafaiblement dense dans M. Alors* lin $(\mathfrak{M}^+\cap J^+)$ *est ultrafaiblement dense dans $\mathfrak{M}$. En particulier, si $\mathfrak{M}$ est ultrafaiblement dense dans M,* lin $(\mathfrak{M}^+\cap J^+)$ *et $\mathfrak{M}\cap J$ sont ultrafaiblement denses dans M.*

D'après le lemme 2.4, tout $x\in\mathfrak{M}^+$ est la borne supérieure, donc la limite ultrafaible, d'une famille filtrante croissante $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de J^+. Comme $\mathfrak{M}^+$ est une face de M^+, on a $x_i\in\mathfrak{M}^+\cap J^+$ pour tout $i\in I$. Ainsi $\mathfrak{M}^+\cap J^+$ est ultrafaiblement dense dans $\mathfrak{M}^+$, et lin $(\mathfrak{M}^+\cap J^+)$ est ultrafaiblement dense dans lin $\mathfrak{M}^+ = \mathfrak{M}$. L'inclusion évidente lin $(\mathfrak{M}^+\cap J^+)\subset\mathfrak{M}\cap J$ montre qu'il en est de même pour $\mathfrak{M}\cap J$.

3. Espérance conditionnelle associée a un poids ultrafaiblement s. c. i. sur une algèbre de von Neumann.

3.1. Lemme. — *Soient M une C^*-algèbre, φ un poids sur M^+, a un élément de N_φ. Posons $b = I - a$:*

(i) *Pour tout $x\in\mathfrak{N}_\varphi\cap\mathfrak{N}^*$, les éléments a^*a, a^*x, xa, a^*xa appartiennent à $\mathfrak{M}_\varphi$, et on a*

$$\varphi(a^*a)=\dot\varphi(a^*x)=\dot\varphi(xa)=\dot\varphi(a^*xa)=0.$$

(ii) *Pour tout $x\in\mathfrak{M}_\varphi$, les éléments b^*x, xb, b^*xb appartiennent à $\mathfrak{M}_\varphi$, et on a*

$$\dot\varphi(b^*x)=\dot\varphi(xb)=\dot\varphi(b^*xb)=\dot\varphi(x).$$

(iii) *Pour tout $x\in M^+$, on a*

$$\varphi(a^*xa)=0, \qquad \varphi(b^*xb)=\varphi(x).$$

(i) Pour $x\in\mathfrak{N}_\varphi\cap\mathfrak{N}_\varphi^*$, les éléments a^*x, xa, a^*xa appartiennent à $\mathfrak{N}^*\mathfrak{N}_\varphi=\mathfrak{M}_\varphi$. D'après l'inégalité de Schwarz, on a

$$|\dot\varphi(a^*x)|^2\leq\varphi(a^*a)\,\varphi(x^*x)=0,$$

et de même $\dot\varphi(xa)=\dot\varphi(a^*xa)=0$.

(ii) Supposons maintenant que $x \in \mathfrak{M}_\varphi \subset \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$. La relation $b^* x = x - a^* x$ et (i) montrent que $b^* x \in \mathfrak{M}_\varphi$ et que

$$\dot{\varphi}(b^* x) = \dot{\varphi}(x) - \dot{\varphi}(a^* x) = \dot{\varphi}(x);$$

on a de même $\dot{\varphi}(xb) = \dot{\varphi}(b^* xb) = \dot{\varphi}(x)$.

(iii) Supposons enfin que $x \in M^+$. La relation $a^* xa \leq \| x \| a^* a$ entraîne $\varphi(a^* xa) = 0$. Si $\varphi(x) < +\infty$ (soit $x \in \mathfrak{M}_\varphi^+$), on a vu que $b^* xb \in \mathfrak{M}_\varphi^+$ et que $\varphi(x) = \varphi(b^* xb)$. Supposons maintenant que $\varphi(x) = +\infty$. Si on avait $\varphi(b^* xb) < +\infty$, on aurait $x^{1/2} b \in \mathfrak{N}_\varphi$, d'où

$$x^{1/2} = x^{1/2} b + x^{1/2} a \in \mathfrak{N}_\varphi \qquad \text{et} \qquad x \in \mathfrak{N}_\varphi^* \mathfrak{N}_\varphi = \mathfrak{M}_\varphi.$$

C'est absurde, donc $\varphi(b^* xb) = +\infty = \varphi(x)$.

3.2. Lemme. — *Soient M une algèbre de von Neumann, φ un poids ultrafaiblement s. c. i. sur M^+. Alors N_φ est un idéal à gauche ultrafaiblement fermé de M.*

Il est clair que l'ensemble des $x \in M^+$, tels que $\varphi(x) = 0$, est une face ultrafaiblement fermée de M^+, d'où l'assertion d'après [2] [lemme 2.6-(ii)].

3.3 Proposition. — *Soient M une algèbre de von Neumann, φ une trace normale semi-finie sur M^+, ψ un poids semi-fini et ultrafaiblement s. c. i. sur M^+. On suppose que $\dot{\varphi}$ et $\dot{\psi}$ coïncident sur une sous-algèbre involutive A de $\mathfrak{M}_\varphi \cap \mathfrak{M}_\psi$. Si A est ultrafaiblement dense dans M, on a $\varphi = \psi$, et $\Lambda_\varphi A$ est ultrafaiblement dense dans l'algèbre hilbertienne achevée $\Lambda_\varphi \mathfrak{N}_\varphi$ définie par φ.*

Notons d'abord que, pour tout $a \in A$ et tout $x \in M$, on a

$$\dot{\varphi}(a^* xa) = \dot{\psi}(a^* xa).$$

En effet, les deux formes $x \mapsto \dot{\varphi}(a^* xa)$ et $x \mapsto \dot{\psi}(a^* xa)$ sont définies sur M, positives, normales, et prennent les mêmes valeurs sur A. Elles sont donc égales. En particulier, le support p de φ est un projecteur central de M, et on a, pour tout $a \in A$,

$$\begin{aligned}\psi[(I-p)\, a^* a(I-p)] &= \psi[a^*(I-p)\, a] \\ &= \varphi[a^*(I-p)\, a] = \varphi[(I-p)\, a^* a(I-p)] = 0.\end{aligned}$$

D'après le théorème de densité de Kaplansky, on peut faire tendre ultrafortement $a \in A$ vers I avec $\| a \| \leq 1$. Alors $a^* a$ converge ultrafaiblement vers I avec $a^* a \leq I$. D'après la semi-continuité inférieure de ψ, on a

$$\begin{aligned}\psi(I-p) &\leq \liminf \psi[(I-p)\, a^* a(I-p)] \\ &\leq \limsup \psi[(I-p)\, a^* a(I-p)] \leq \psi(I-p),\end{aligned}$$

d'où

$$\psi(I-p) = \lim \psi[(I-p)\, a^* a (I-p)] = 0.$$

On en déduit que $\psi \mid M^+(I-p) = 0 = \varphi \mid M^+(I-p)$.

En restreignant φ et ψ à M^+p, on peut supposer désormais (compte tenu du lemme 3.1) que φ est fidèle. Notons π_φ et ρ_φ la représentation et l'antireprésentation de M sur H_φ, canoniquement définies par φ Comme φ est normale, l'application

$$(x, y) \mapsto \Lambda_\varphi xy = \pi_\varphi(x)\, \Lambda_\varphi y = \rho_\varphi(y)\, \Lambda_\varphi x$$

est séparément continue de chaque variable quand on munit M de la topologie ultrafaible, et H_φ de sa norme. On en déduit facilement que $\Lambda_\varphi A^2$ est partout dense dans $\Lambda_\varphi \mathfrak{N}_\varphi$; donc $\Lambda_\varphi \mathfrak{N}_\varphi$ est l'algèbre hilbertienne achevée de la sous-algèbre hilbertienne $\Lambda_\varphi A^2$. D'après [6] (chap. 1, § 5, prop. 4, p. 73), pour tout $a \in \mathfrak{M}_\varphi^+$, il existe une suite (x_n) d'éléments de A^2 telle que

$$\| \Lambda_\varphi a^{1/2} - \Lambda_\varphi x_n \| \to 0, \qquad \text{avec} \quad \sup \| x_n \| < +\infty,$$

et x_n converge ultrafortement vers $a^{1/2}$. Alors $x_n^* x_n$ converge vers a ultrafaiblement, et la semi-continuité inférieure de ψ nous donne

$$\begin{aligned}\psi(a) &\leq \liminf \psi(x_n^* x_n) = \liminf \varphi(x_n^* x_n)\\ &= \lim \| \Lambda_\varphi x_n \|^2 = \| \Lambda_\varphi a^{1/2} \|^2 = \varphi(a).\end{aligned}$$

Cela prouve que ψ est majorée par φ sur $\mathfrak{M}_\varphi^+$. On en déduit

$$\begin{aligned}\| \Lambda_\psi a^{1/2} - \Lambda_\psi x_n \|^2 &= \psi[(a^{1/2} - x_n)^* (a^{1/2} - x_n)]\\ &\leq \varphi[(a^{1/2} - x_n)^* (a^{1/2} - x_n)] = \| \Lambda_\varphi a^{1/2} - \Lambda_\varphi x_n \|^2 \to 0,\end{aligned}$$

d'où

$$\psi(a) = \| \Lambda_\psi a^{1/2} \|^2 = \lim \| \Lambda_\psi x_n \|^2 = \lim \psi(x_n^* x_n) = \lim \varphi(x_n^* x_n) = \varphi(a).$$

Ainsi, φ et ψ coïncident sur $\mathfrak{M}_\varphi^+$. La normalité de φ et de ψ et le lemme 2.4 montrent alors que $\varphi = \psi$.

3.4. Remarques. (*a*) La proposition précédente était connue lorsque φ et ψ sont des traces ([6], chap. 2, § 6, lemme 1, p. 203).

(*b*) Une démonstration analogue à la précédente donne le résultat suivant : « Soient M une algèbre de von Neumann, φ une trace normale semi-finie sur M^+, ψ un poids semi-fini et ultrafaiblement s. c. i. sur M^+. On suppose que ψ est majoré par φ sur la partie positive d'une sous-algèbre involutive A de $\mathfrak{M}_\varphi \cap \mathfrak{M}_\psi$. Si A est ultrafaiblement dense dans M, φ majore ψ sur M^+. »

Le lemme suivant est sans doute bien connu.

3.5. LEMME. — *Soient M et N deux algèbres de von Neumann, $A \subset M$ une sous-algèbre involutive de M ultrafaiblement dense dans M, T une application linéaire de A dans N. On suppose que la restriction de T à la boule unité de A est bornée et qu'elle est continue pour les topologies ultrafaibles de M et N. Alors T se prolonge de manière unique en une application linéaire de M dans N continue pour les topologies ultrafaibles de M et N.*

Pour tout espace vectoriel normé X, notons X_r la boule fermée de rayon r de X. D'après le théorème de densité de Kaplansky, A_r est ultrafortement dense dans M_r, donc *a fortiori* ultrafaiblement dense dans M_r. D'autre part, M_r est ultrafaiblement compacte, et par suite ultrafaiblement complète; M_r est donc le complété ultrafaible de A_r. Posons $k = \| T \|$. L'application $T \mid A_r$ prend ses valeurs dans la boule N_{kr} qui est ultrafaiblement complète. En raison de la linéarité de T, $T \mid A_r$ est uniformément continue, donc prolongeable de manière unique en une application F_r définie et continue sur le complété M_r de A_r, à valeurs dans N_{kr}. Pour $r < r'$, on a évidemment $F_{r'} \mid M_r = F_r$. Il existe donc une application F de M dans N unique telle que $F \mid M_r = F_r$. pour tout $r > 0$. Alors F qui est ultrafaiblement continue sur la boule unité de M est ultrafaiblement continue sur M ([6], chap. 1, § 3, th. 1-(ii)) (F est évidemment linéaire).

La proposition suivante n'est qu'une adaptation aux algèbres de von Neumann du lemme 17.2.1 de [5].

3.6. PROPOSITION. — *Soient M une algèbre de von Neumann, $A \subset M$ une sous-algèbre involutive de M ultrafaiblement dense dans M, φ une forme linéaire positive sur A telle que $\varphi(x^* x) = \varphi(x x^*)$ pour tout $x \in A$, et telle que $y \mapsto \varphi(x^* y x)$ soit ultrafaiblement continue sur la boule unité de A pour tout $x \in A$. Alors il existe une trace normale semi-finie, et une seule sur M^+, qui coïncide avec φ sur A^+.*

Sur A, la forme sesquilinéaire hermitienne $s(x, y) = \varphi(y^* x)$ est positive et vérifie les conditions suivantes :

(*a*) $s(x, y) = s(x^*, y^*)$ pour tous $x, y \in A$;

(*b*) $s(zx, y) = s(x, z^* y)$ pour tous $x, y, z \in A$;

(*c*) $s(zx, zx) \leq \| z \|^2 s(x, x)$ pour tous $x, z \in A$;

(*d*) les éléments xy (où $x, y \in A$) sont partout denses dans A pour la structure préhilbertienne définie par s;

(*e*) Pour tout $x \in A$, $z \mapsto s(zx, x)$ est une forme linéaire ultrafaiblement continue sur A.

Vérifions par exemple la condition (*d*). Soit $y \in A$. D'après le théorème de densité de Kaplansky, il existe une famille (u_i) d'éléments de A convergeant ultrafortement vers I, avec $\| u_i \| \leq 1$. Alors $x_i = u_i^* u_i$ converge ultrafaiblement vers I avec $\| x_i \| \leq 1$. D'après les hypothèses faites, la forme linéaire $x \mapsto \varphi(y^* xy)$ est ultrafaiblement continue sur la boule unité A_1 de A. Elle est aussi bornée sur A_1. En effet, si $x \in A_1$ est hermitien, on a

$$-\varphi(y^* y) \leq \varphi(y^* xy) \leq \varphi(y^* y).$$

Si $x \in A_1$ est quelconque, ses parties hermitiennes sont dans A_1, et on a $|\varphi(y^* xy)| \leq 2\varphi(y^* y)$. D'après le lemme 3.5, cette forme est prolongeable en une forme linéaire positive ultrafaiblement continue f sur M, et on a alors

$$\begin{aligned} s(y - x_i y, y - x_i y) &= \varphi(y^* y - 2y^* x_i y + y^* x_i^2 y) \\ &\leq 2\varphi(y^* y - y^* x_i y) = 2f(I - x_i) \to 0, \qquad \text{d'où } (d). \end{aligned}$$

D'après la condition (*c*), l'ensemble N des $x \in A$ tels que $s(x, x) = 0$ est un idéal à gauche de A, et il est auto-adjoint, donc bilatère d'après la condition (*a*). On voit donc que A/N est muni d'une structure d'algèbre hilbertienne. Soit H l'espace hilbertien complété, et notons Λ l'application canonique de A sur A/N. Pour tout $z \in A$, il existe un opérateur linéaire continu $\pi(z)$, et un seul, sur H tel que $\pi(z)\Lambda x = \Lambda zx$ pour tout $x \in A$, et on a $\| \pi(z) \| \leq \| z \|$. Les combinaisons linéaires des formes $t \mapsto (t \Lambda x \mid \Lambda y)$ sont partout denses dans le prédual de l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi(A)$. De la condition (*e*), on déduit donc (par équicontinuité) que la restriction de π à la boule unité de A est ultrafaiblement continue. D'après le lemme 3.5, π est prolongeable en une représentation normale $\bar{\pi}$ de M sur H. Si τ est la trace canoniquement définie par A/N, $\tau \circ \bar{\pi}$ est sur M^+ une trace normale semi-finie coïncidant avec φ sur A^+. D'après la proposition 3.3, elle est unique avec ces propriétés.

3.7. Lemme. — *Soient M une C^*-algèbre, φ un poids sur M^+. L'ensemble A des $y \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$, tels que $\dot{\varphi}(yx) = \dot{\varphi}(xy)$ pour tout $x \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$, est une sous-algèbre involutive de $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$.*

Il est clair que A est un sous-espace vectoriel de M. C'est une sous-algèbre, car on a, pour tous $y_1, y_2 \in A$ et tout $x \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$,

$$\dot{\varphi}(y_1 y_2 x) = \dot{\varphi}[y_1(y_2 x)] = \dot{\varphi}[(y_2 x) y_1] = \dot{\varphi}[y_2(xy_1)] = \dot{\varphi}(xy_1 y_2).$$

Les relations suivantes, valables pour tout $y \in A$ et tout $x \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$, montrent que A est auto-adjointe :

$$\dot{\varphi}(y^* x) = \dot{\varphi}[(x^* y)^*] = \overline{\dot{\varphi}(x^* y)} = \overline{\dot{\varphi}(yx^*)} = \dot{\varphi}(xy^*).$$

3.8. Proposition. — *Soient M une algèbre de von Neumann, φ un poids ultrafaiblement s. c. i. sur M^+, M_φ l'adhérence ultrafaible de l'ensemble A des $y \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$ tels que $\dot{\varphi}(yx) = \dot{\varphi}(xy)$ pour tout $x \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$.*

Alors M_φ est une sous-algèbre involutive ultrafaiblement fermée de M. La restriction φ_0 de φ à M^+ est une trace normale semi-finie sur M_φ. *Le plus grand projecteur de N_{φ_0} dans M_φ est égal au plus grand projecteur de N_φ dans M, et on a $\mathfrak{N}_{\varphi_0} = \mathfrak{N}_\varphi \cap M_\varphi = A$.*

D'après le lemme 3.7, M_φ est une sous-algèbre involutive de M. Pour $y \in A$, on a $\varphi(y^* y) = \varphi(yy^*)$; la proposition 3.6 montre alors qu'il existe sur M_φ^+ une trace normale semi-finie coïncidant avec φ_0 sur $(A^2)^+$. Cette trace est égale à φ_0 en vertu de la proposition 3.3.

Notons respectivement q et q_0 le plus grand projecteur de N_φ et celui de N_{φ_0}. D'après le lemme 3.1, le projecteur q est un élément de $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$ tel que $\dot{\varphi}(xq) = \dot{\varphi}(qx) = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^+$. On a donc $q \in A \subset M_\varphi$. Les relations

$$\varphi_0(q) = \varphi(q) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(q_0) = \varphi_0(q_0) = 0$$

montrent alors que $q = q_0$.

On a évidemment $A \subset \mathfrak{N}_\varphi \cap M_\varphi = \mathfrak{N}_{\varphi_0}$. Réciproquement, soit $a \in \mathfrak{N}_{\varphi_0}$. D'après la proposition 3.3, $\Lambda_{\varphi_0} A^2$ est partout dense dans l'algèbre hilbertienne $\Lambda_{\varphi_0} \mathfrak{N}_{\varphi_0}$. On peut donc trouver une suite (y_n) dans A^2 telle que

$$\varphi_0[(a - y_n)(a - y_n)^*] = \varphi_0[(a - y_n)^*(a - y_n)] = \| \Lambda_{\varphi_0} a - \Lambda_{\varphi_0} y_n \|^2 \to 0.$$

On a alors, pour tout $x \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$,

$$| \dot{\varphi}(xa - xy_n) |^2 \leq \varphi(xx^*)\, \varphi_0[(a - y_n)^*(a - y_n)] \to 0,$$

et de même $\dot{\varphi}(ax - y_n x) \to 0$. On en déduit

$$\dot{\varphi}(ax) = \lim \dot{\varphi}(y_n x) = \lim \dot{\varphi}(xy_n) = \dot{\varphi}(xa).$$

Donc $a \in A$, et on a bien $\mathfrak{N}_{\varphi_0} \subset A$.

3.9. Proposition. — *Soient M une algèbre de von Neumann, φ une trace normale semi-finie sur M^+. Pour tout $x \in M^+$, la fonction ψ : $y \mapsto \varphi(x^{1/2} y x^{1/2})$ est un poids semi-fini ultrafaiblement s. c. i. sur M^+ et majoré par $\| x \| \varphi$. Réciproquement, pour tout poids ψ sur M^+ majoré par un multiple $\lambda\varphi$ de φ sur M^+, il existe un élément $x \in M^+$ tel que $\| x \| \leq \lambda$ et tel que $\psi(y) = \varphi(x^{1/2} y x^{1/2})$ pour tout $y \in \mathfrak{M}_\varphi^+$; si ψ est ultrafaiblement s. c. i. sur M^+ on a*

$$\psi(y) = \varphi(x^{1/2} y x^{1/2}) \quad \textit{pour tout } y \in M^+,$$

et si φ est fidèle, il existe un seul élément $x \in M^+$ tel que

$$\psi(y) = \varphi(x^{1/2} y x^{1/2}) \quad \textit{pour tout } y \in \mathfrak{M}_\varphi^+.$$

Pour $x \in M^+$, $y \in \mathfrak{M}_\varphi^+$, on a $y^{1/2} \in \mathfrak{N}_\varphi$, d'où

$$\psi(y) = \varphi(x^{1/2} y x^{1/2}) = \varphi(y^{1/2} x y^{1/2}) \leqq \| x \| \varphi(y).$$

Ainsi on a $\psi \leqq \| x \| \varphi$ sur $\mathfrak{M}^+$, donc sur M^+. Comme φ est une trace normale, elle est ultrafaiblement s. c. i., et il en est de même pour ψ. Comme ψ est à valeurs finies sur $\mathfrak{M}^+$, il est semi-fini.

Réciproquement, considérons un poids ψ sur M^+, majoré par $\lambda\varphi$, où $\lambda \in \mathbf{R}^+$, et montrons qu'il existe $x \in M^+$ vérifiant

$$\| x \| \leqq \lambda \qquad \text{et} \qquad \psi(y) = \varphi(x^{1/2} y x^{1/2}) \quad \text{pour tout } y \in \mathfrak{M}_\varphi^+.$$

Si $\lambda = 0$, on peut prendre $x = 0$. Si $\lambda > 0$, on peut évidemment supposer que $\psi \leqq \varphi$. D'après [1] (lemme 2.3), il existe alors un opérateur $t \in \pi_\varphi(M)'$, tel que $0 \leqq t \leqq I$ et tel que

$$\psi(v^* u) = (\Lambda_\varphi u \mid t \Lambda_\varphi v) \quad \text{pour tous } u, v \in \mathfrak{N}_\varphi \subset \mathfrak{N}_\psi.$$

Soit J l'isométrie linéaire de H_φ sur l'espace hilbertien conjugué qui prolonge l'involution $\Lambda_\varphi u \mapsto \Lambda_\varphi u^*$ de l'algèbre hilbertienne $\Lambda_\varphi \mathfrak{N}_\varphi$. Posons $z = JtJ$. On a $\| z \| = \| t \| \leqq 1$ et $z \in \pi_\varphi(M)$. Choisissons $x \in M^+$ tel que $\| x \| = \| z \| \leqq 1$ et $\pi_\varphi(x) = z$. Pour tous u, $v \in \mathfrak{N}_\varphi$ on a alors

$$\psi(v^* u) = (\Lambda_\varphi u \mid JzJ \Lambda_\varphi v) = (\Lambda_\varphi u^* \mid z \Lambda_\varphi v^*) = \dot{\varphi}(v x u^*) = \dot{\varphi}(x^{1/2} u^* v x^{1/2}).$$

Alors, pour $y \in \mathfrak{M}_\varphi^+$, on a $y^{1/2} \in \mathfrak{N}_\varphi$, d'où $\psi(y) = \varphi(x^{1/2} y x^{1/2})$. Si ψ est ultrafaiblement s. c. i., tout élément de M^+ étant la borne supérieure d'éléments de $\mathfrak{M}_\varphi^+$ (lemme 2.4), on a

$$\psi(y) = \varphi(x^{1/2} y x^{1/2}) \quad \text{pour tout } y \in M^+$$

Supposons φ fidèle, et soit x_1 un autre élément de M^+ possédant la propriété énoncée. Posons $a = x - x_1$, et soit $a = w \mid a \mid$ sa décomposition polaire. Pour tous y, $z \in \mathfrak{N}_\varphi$, on a alors $y^* x z$, $y^* x_1 z \in \mathfrak{M}_\varphi$, d'où

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(y^* a z) &= \dot{\varphi}(y^* x z) - \dot{\varphi}(y^* x_1 z) \\ &= \dot{\varphi}(x^{1/2} z y^* x^{1/2}) - \dot{\varphi}(x_1^{1/2} z y^* x_1^{1/2}) = \dot{\psi}(z y^*) - \dot{\psi}(z y^*) = 0. \end{aligned}$$

Soit (u_i) une unité approchée filtrante croissante de $\mathfrak{N}_\varphi$. On a $w u_i \in \mathfrak{N}_\varphi$, d'où

$$0 = \dot{\varphi}(u_i w^* a u_i) = \varphi(u_i \mid a \mid u_i) = \varphi(\mid a \mid^{1/2} u_i^2 \mid a \mid^{1/2}).$$

Alors u_i, et par suite u_i^2, converge ultrafortement vers I, et la semi-continuité inférieure de φ donne $\varphi(\mid a \mid) = 0$, d'où $\mid a \mid = 0$ et $x = x_1$.

3.10. Lemme. — Soient *A et B deux C^*-algèbres, T une application linéaire de A dans B. Si T est positive, elle est continue.*

Il suffit de reprendre la démonstration donnant la continuité des formes linéaires positives sur une C^*-algèbre. Si T n'était pas continue, il existerait des éléments hermitiens $x_1, x_2, \ldots$ de A tels que $\| x_n \| \leqq 1$ et $\| T(x_n) \| \geqq 2^{2n}$, pour $n = 1, 2, \ldots$. La relation $- | x_n | \leqq x_n \leqq | x_n |$ donne $- T(| x_n |) \leqq T(x_n) | \leqq T(| x_n |)$, d'où $\| T(| x_n |) \| \geqq 2^{2n}$. En posant

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} | x_n |,$$

on voit que l'on a

$$\| T(a) \| \geqq \| T(2^{-n} | x_n |) \| \geqq 2^n,$$

pour tout $n = 1, 2, \ldots$, ce qui est absurde.

3.11. Définitions et notations. — Pour tout poids φ sur une algèbre de von Neumann M, nous noterons M_φ l'adhérence ultrafaible de la sous-algèbre involutive A de M caractérisée par le lemme 3.7, φ_0 la restriction de φ à M_φ^+, $\mathfrak{N}_0$ l'ensemble des $x \in M_\varphi$ tels que $\varphi(x^* x) < +\infty$. Comme M_φ est l'adhérence ultrafaible de A, donc de $\mathfrak{N}_0$, c'est aussi l'adhérence ultrafaible de $\mathfrak{M}_0$ (par exemple d'après le lemme 2.3). Remarquons aussi que si φ est une forme linéaire positive normale, fidèle sur M, définissant une algèbre hilbertienne à gauche $\mathfrak{A}$, M_φ est l'ensemble des éléments de M invariants par les automorphismes modulaires définis par $\mathfrak{A}$ dans M et, dans ce cas, nos notations concordent avec celles de [17] (lemme 15.8).

Rappelons qu'on appelle espérance conditionnelle dans une C^*-algèbre A une application linéaire positive T de A dans A telle que

$$T[T(x)\, y] = T(x)\, T(y) \quad \text{pour tous } x, y \in A.$$

Comme T est hermitienne, on a aussi $T[y\, T(x)] = T(y)\, T(x)$. Une telle application est normiquement continue d'après le lemme 3.10. L'ensemble B des $x \in A$ tels que $T(x) = x$ est une sous-C^*-algèbre de A, et T est une projection positive de A sur B. Si A est unifère et si $T(I) = I$, B est aussi l'ensemble des $x \in A$ tels que $T(xa) = x\, T(a)$ pour tout $a \in A$. Si A est une algèbre de von Neumann, et si T est normale, elle est ultrafaiblement continue; son image B et son noyau sont ultrafaiblement fermés, et A est somme directe topologique de ces sous-espaces (*voir* [22], [23], [24]).

3.12. Proposition. — *Soient M une algèbre de von Neumann, φ un poids semi-fini, ultrafaiblement s. c. i. sur M^+, e le plus grand projecteur de M_φ, p_0 le support de φ_0. Alors on a $e \mathfrak{M}_\varphi e \subset \mathfrak{M}_\varphi$, et il existe une espérance conditionnelle normale, et une seule, T de M sur $p_0 M_\varphi p_0$ telle que*

$$\varphi(exe) = \varphi_0[T(x)] \quad \text{pour tout } x \in M^+.$$

L'unicité de T vient du fait que φ_0 est une trace fidèle sur $p_0 M_\varphi p_0$ (prop. 3.8). Considérons en effet deux applications T et T' possédant les propriétés de l'énoncé, et soit $x \in \mathfrak{M}_\varphi^+$. En admettant la relation $e\mathfrak{M}^+ e \subset \mathfrak{M}_\varphi^+$ démontrée plus loin, on voit que $exe \in \mathfrak{M}_\varphi^+$. La relation $\varphi(exe) = \varphi_0[T(x)]$ montre alors que $T(x) \in \mathfrak{M}_{\varphi_0} \subset \mathfrak{N}_{\varphi_0}$. Il en est de même pour $T'(x)$. Posons $y = T(x) - T'(x)$, il vient

$$\begin{aligned}\varphi_0[(T(x) - T'(x))^*(T(x) - T'(x))] &= \dot{\varphi}_0[y^* T(x) - y^* T'(x)] \\ &= \dot{\varphi}_0[T(y^* x) - T'(y^* x)] = \dot{\varphi}(ey^* xe) - \dot{\varphi}(ey^* xe) = 0.\end{aligned}$$

On a donc $T(x) = T'(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{M}_\varphi^+$ et, par linéarité, pour tout $x \in \mathfrak{M}_\varphi$. D'après la continuité ultrafaible de T et de T', on a $T = T'$.

Établissons maintenant l'existence de T. Sur l'algèbre $p_0 M_\varphi p_0 = M_\varphi p_0$, $\tau = \varphi_0 \mid p_0 M^+ p_0$ est d'après la proposition 3.8, une trace normale, fidèle, semi-finie. On a évidemment $\mathfrak{N}_\tau \subset \mathfrak{N}_{\varphi_0}$. D'après la proposition 3.8, pour tout $x \in \mathfrak{M}_\varphi^+$ et tout $y \in \mathfrak{M}_\tau^+$, on a

$$\dot{\varphi}(xy) = \varphi(y^{1/2} x y^{1/2}) \leq \| x \| \varphi(y) = \| x \| \tau(y).$$

Ceci montre que $y \mapsto \dot{\varphi}(xy)$ est sur $\mathfrak{M}_\tau$ une forme linéaire positive majorée par $\| x \| \tau$. En prenant sa restriction sur $\mathfrak{M}_\tau^+$ et $+\infty$ sur le complémentaire de $\mathfrak{M}_\tau^+$ dans $M^+ p_0$, on obtient sur M_φ^+ un poids majoré par $\| x \| \tau$. D'après la proposition 3.9, il existe un élément $T(x)$ unique de $M_\varphi^+ p_0$ tel que

$$\dot{\varphi}(xy) = \tau[y^{1/2} T(x) y^{1/2}] = \tau[T(x)^{1/2} y T(x)^{1/2}] \quad \text{pour tout } y \in \mathfrak{M}_\tau^+,$$

et on a $\| T(x) \| \leq \| x \|$. En utilisant l'unicité de l'élément $T(x)$, on vérifie immédiatement que T est une application linéaire de $\mathfrak{M}^+$ dans $M_\varphi^+ p_0$. Elle se prolonge de manière unique en une application linéaire positive de $\mathfrak{M}_\varphi$ dans $M_\varphi p_0$ (nous noterons encore T cette application). Pour tout $x \in \mathfrak{M}_\varphi$ hermitien de norme ≤ 1, on a $\| x^+ \| \leq 1$, $\| x^- \| \leq 1$, d'où

$$\| T(x) \| \leq \| T(x^+) \| + \| T(x^-) \| \leq 2.$$

Ainsi T est normiquement continue. En outre, T est ultrafaiblement continue sur toute boule fermée de $\mathfrak{M}_\varphi$. En effet, si $x_i \in \mathfrak{M}_\varphi$ converge ultrafaiblement vers $x \in \mathfrak{M}_\varphi$ avec $\| x_i \| \leq 1$, pour tout $y \in \mathfrak{M}_\tau^+$, on a

$$\dot{\tau}[y^{1/2} T(x) y^{1/2}] = \dot{\varphi}(y^{1/2} x y^{1/2}) = \lim \dot{\varphi}(y^{1/2} x_i y^{1/2}) = \lim \dot{\tau}[y^{1/2} T(x_i) y^{1/2}].$$

Les combinaisons linéaires des formes $u \mapsto \dot{\tau}(y^{1/2} u y^{1/2})$, où y décrit $\mathfrak{M}_\tau^+$, sont normiquement denses dans le prédual de $M_\varphi p_0$ ([6], chap. 1, § 6, th. 9). Comme $\| T(x_i) \|$ est borné, $T(x_i)$ converge ultrafaiblement vers $T(x)$. D'après le lemme 3.5, T se prolonge à M en une application linéaire ultrafaiblement continue. Sur $\mathfrak{M}_\tau$, T est l'application identique. Par continuité, son prolongement T est positif, égal à l'identité sur l'adhérence ultrafaible $M_\varphi p_0$ de $\mathfrak{M}_\tau$. Pour $x \in \mathfrak{M}_\varphi^+$, $u \in \mathfrak{M}_\tau$ *et* $y \in \mathfrak{M}_\tau^+$, on a

$$\dot\varphi(u^* xuy) = \dot\varphi(xuyu^*) = \tau[T(x)^{1/2} uyu^* T(x)^{1/2}] = \tau[y^{1/2} u^* T(x) uy^{1/2}].$$

On en déduit que $T(u^* xu) = u^* T(x) u$ et, par polarisation et continuité ultrafaible de T, que $T(uxv) = uT(x)v$ pour tout $x \in M$ et tous $u, v \in M_\varphi p_0$. Ainsi, T est bien une espérance conditionnelle.

Montrons maintenant que, pour tout $x \in M^+$, on a

$$(1) \qquad \tau[T(x)] \leqq \varphi(x).$$

Supposons d'abord que $x \in \mathfrak{M}_\varphi^+$. Pour tout $y \in \mathfrak{M}_\tau^+$ vérifiant $\| y \| \leqq 1$, on a $y^2 \leqq y$. La forme linéaire $u \mapsto \dot\varphi(xu)$ étant positive sur $\mathfrak{M}_\tau$, on a $\dot\varphi(xy^2) \leqq \dot\varphi(xy)$, et d'après l'inégalité de Schwarz et les propriétés des éléments de $\mathfrak{N}_{\varphi_0}$.

$$\dot\varphi(xy)^2 = \dot\varphi[x^{1/2}(x^{1/2} y)]^2 \leqq \varphi(x)\,\varphi(yxy) = \varphi(x)\,\varphi(xy^2) \leqq \varphi(x)\,\varphi(xy).$$

On en déduit que $\varphi(xy) \leqq \varphi(x)$, soit encore

$$(2) \qquad \tau[T(x)^{1/2} y\, T(x)^{1/2}] \leqq \varphi(x).$$

Si $\varphi(x) = +\infty$, la relation (2) est évidemment vérifiée; elle est donc valable pour tout $x \in M^+$, En faisant converger ultrafaiblement y vers l'unité p_0 de $M_\varphi p_0$, on obtient

$$\tau[T(x)] \leqq \liminf \tau[T(x)^{1/2} y\, T(x)^{1/2}] \leqq \varphi(x), \qquad \text{d'où (1).}$$

Montrons maintenant que $\varphi(exe) = \varphi_0[T(x)]$ pour tout $x \in M^+$. Pour tout $x \in M$ et tout $y \in \mathfrak{N}_\tau^+$, on a $\dot\tau[y\,T(x)\,y] = \dot\varphi(yxy)$. En effet, en tant que fonctions de x, les deux membres de cette relation sont des formes linéaires positives normales qui coïncident sur $\mathfrak{M}_\varphi^+$ d'après la construction de T. Elles sont donc égales sur M. Faisons converger ultrafortement $y \in \mathfrak{N}_\tau^+$ vers p_0 avec $\| y \| \leqq 1$. Alors yxy et y^2 convergent ultrafaiblement vers $p_0 x p_0$ et p_0 respectivement, et on obtient, pour tout $x \in M^+$,

$$(3) \qquad \begin{aligned} \varphi(p_0 x p_0) &\leqq \liminf \varphi(yxy) = \liminf \tau[T(x)^{1/2} y^2\, T(x)^{1/2}] \\ &= \tau[T(x)^{1/2} p_0\, T(x)^{1/2}] = \tau[T(x)]. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que T est une espérance conditionnelle, les relations (3) et (1) donnent

$$\varphi(p_0 x p_0) \leqq \tau[T(x)] = \tau[p_0\, T(x)\, p_0] = \tau[T(p_0 x p_0)] \leqq \varphi(p_0 x p_0).$$

Donc $\varphi(p_0 x p_0) = \tau[T(x)]$ pour tout $x \in M^+$. Notons φ_1 la restriction de φ à eM^+e. On a $N_{\varphi_0} \subset N_{\varphi_1} \subset N_\varphi$ et, d'après la proposition 3.8, le plus grand projecteur de N_φ est égal à celui de N_{φ_0}. On en déduit que p_0 est le support de φ_1, et alors le lemme 3.1 donne

$$\varphi(exe) = \varphi(p_0 x p_0) = \tau[T(x)] \quad \text{pour tout } x \in M^+.$$

Cette relation et (1) entraînent $\varphi(exe) \leq \varphi(x)$ pour tout $x \in M^+$. Il en résulte que $e\mathfrak{M}_\varphi e \subset \mathfrak{M}_\varphi$.

3.13. Définition. — Si φ est un poids ultrafaiblement s. c. i. et semi-fini sur une algèbre de von Neumann M, l'espérance conditionnelle de M sur $p_0 M_\varphi p_0$, caractérisée par la proposition 3.12, sera appelée l'espérance conditionnelle associée à φ, et notée T_φ.

3.14. Corollaire. — *On reprend toutes les données et notations de la proposition* 3.12. *Pour tout* $x \in \mathfrak{M}_\varphi^+$, *la borne supérieure des nombres* $\varphi(a^* x a)$, *où* a *décrit la boule unité de* M_φ, *est finie et égale à* $\varphi(exe)$. *On a les relations*

$$M_\varphi \mathfrak{M}_\varphi \subset \mathfrak{M}_\varphi, \qquad \mathfrak{M}_\varphi M_\varphi \subset \mathfrak{M}_\varphi, \qquad M_\varphi \mathfrak{N}_\varphi \subset \mathfrak{N}_\varphi, \qquad \mathfrak{N}_\varphi M_\varphi \subset \mathfrak{N}_\varphi,$$
$$M_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*) \subset \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*, \qquad (\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*) M_\varphi \subset \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*, \qquad \mathfrak{M}_{\varphi_0} = \mathfrak{M}_\varphi \cap M_\varphi.$$

Soient $x \in \mathfrak{M}_\varphi^+$, et $a \in M_\varphi$ tel que $\| a \| \leq 1$. D'après la proposition 3.12, on a $exe \in \mathfrak{M}_\varphi^+$, et $\varphi_0[T(x)] = \varphi(exe) < +\infty$. On en déduit que $T(x) \in \mathfrak{M}_{\varphi_0}^+$; comme le support p_0 de φ_0 est aussi le support de $\varphi \mid eM^+e$, on a

$$\begin{aligned}\varphi(a^* x a) &= \varphi(e a^* x a e) = \varphi(p_0 a^* x a p_0) = \varphi_0[T(p_0 a^* x a p_0)] = \varphi_0[p_0 a^* T(x) a p_0] \\ &= \varphi_0[a^* T(x) a] = \varphi_0[T(x)^{1/2} a a^* T(x)^{1/2}] \leq \varphi_0[T(x)] = \varphi(exe) = \varphi(x).\end{aligned}$$

Vérifions maintenant les relations proposées. D'après ce qui précède, on a $a^* x a \in \mathfrak{M}_\varphi$ pour tout $x \in \mathfrak{M}_\varphi^+$ et tout $a \in M_\varphi$, donc $M_\varphi \mathfrak{M}_\varphi M_\varphi \subset \mathfrak{M}_\varphi$, ce qui entraîne

$$\mathfrak{N}_\varphi M_\varphi \subset \mathfrak{N}_\varphi \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{M}_\varphi M_\varphi = \mathfrak{N}_\varphi^* \mathfrak{N}_\varphi M_\varphi \subset \mathfrak{N}_\varphi^* \mathfrak{N}_\varphi = \mathfrak{M}_\varphi.$$

En transformant ces relations par passage aux adjoints, on obtient $M_\varphi \mathfrak{M}_\varphi \subset \mathfrak{M}_\varphi$ et $M_\varphi \mathfrak{N}^* \subset \mathfrak{N}_\varphi^*$. Cette dernière, jointe à la relation $M_\varphi \mathfrak{N}_\varphi \subset \mathfrak{N}_\varphi$ (évidente car $\mathfrak{N}_\varphi$ est un idéal à gauche de M), donne

$$M_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*) \subset \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^* \qquad \text{et} \qquad (\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*) M_\varphi \subset \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*.$$

Les inclusions $M_\varphi \mathfrak{M}_\varphi \subset \mathfrak{M}_\varphi$ et $\mathfrak{M}_\varphi M_\varphi \subset \mathfrak{M}_\varphi$ montrent que $\mathfrak{M}_\varphi \cap M_\varphi$ est un idéal bilatère de M_φ. Sa partie positive $\mathfrak{M}^+ \cap M_\varphi$ est égale à celle de l'idéal bilatère $\mathfrak{M}_{\varphi_0}$. Donc $\mathfrak{M}_\varphi \cap M_\varphi = \mathfrak{M}_{\varphi_0}$ ([6], chap. 1, § 1, prop. 11).

3.15. Corollaire. — *Soient* M *une algèbre de von Neumann de type* I, φ *un poids semi-fini ultrafaiblement s. c. i. sur* M^+, p_0 *le support de* φ_0 *dans* M_φ. *Alors* $p_0 M_\varphi p_0$ *est de type I.*

Comme $\tau = \varphi_0 \mid p_0 M_\varphi^+ p_0$ est une trace normale semi-finie et fidèle sur $p_0 M_\varphi p_0$, cette algèbre est semi-finie. Soit q un projecteur central de $p_0 M_\varphi p_0$ tel que $M_\varphi q$ soit de type II. Alors $x \mapsto T_\varphi(x)\, q$ est une projection positive normale de M sur $M_\varphi q$. D'après [21] (th. 4), on a $q = 0$. Ainsi M_φ est de type I.

4. Poids strictement semi-finis sur les algèbres de von Neumann.

4.1. Définitions. — Soit φ un poids sur une algèbre de von Neumann M. Nous dirons que φ est strictement semi-fini si M_φ est une sous-algèbre de von Neumann de M, autrement dit si I est ultrafaiblement adhérent à l'ensemble des éléments $y \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}^*$ tels que $\dot\varphi(yx) = \dot\varphi(xy)$ pour tout $x \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$. D'après le lemme 2.2, l'adhérence ultrafaible de $\mathfrak{M}_\varphi$ est alors égale à celle de $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}^*$ qui contient I, donc φ est semifini.

Soit φ un poids ultrafaiblement s. c. i. et semi-fini sur une algèbre de von Neumann M. D'après [1] (lemme 4.3), la représentation π_φ de M définie par φ est normale. Pour tout poids ψ majoré par un multiple scalaire de φ sur M^+, on a $\mathfrak{N}_\varphi \subset \mathfrak{N}_\psi$, et l'application identique de $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$ dans $\mathfrak{N}_\psi \cap \mathfrak{N}_\psi^*$ définit, par passage au quotient et prolongement, une application linéaire continue λ de H_φ dans H_ψ. L'opérateur $t_\psi = \lambda^*\lambda$ appartient au commutant de $\pi_\varphi(M)$, et c'est le seul opérateur continu sur H_φ tel que $\dot\psi(y^*x) = (\Lambda_\varphi x \mid t_\psi \Lambda_\varphi y)$ pour tous $x, y \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}^*$. Nous appellerons λ l'application canonique de H_φ dans H_ψ, et t_ψ l'opérateur associé à ψ dans la représentation π_φ. Si φ est la restriction à M^+ d'une forme linéaire positive normale f, il existe un vecteur $\alpha_f \in H_\varphi$ unique tel que

$$f = \omega_{\alpha_f} \circ \pi_\varphi \qquad \text{et} \qquad \pi_\varphi(x)\,\alpha_f = t_f^{1/2} \Lambda_f x \quad \text{pour tout } x \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*.$$

(*voir* [1], prop. 2.4). Nous appellerons α_f le vecteur associé à f dans la représentation π_φ.

Donnons des exemples de poids strictement semi-finis.

4.2. Proposition. — *Soit M une algèbre de von Neumann.*

(i) *Les traces semi-finies sur M^+ et les restrictions à M^+ des formes linéaires positives sur M sont des poids strictement semi-finis.*

(ii) *Si $(f_i)_{i \in I}$ est une famille de formes linéaires positives normales sur M à supports deux à deux orthogonaux, le poids $\varphi : x \mapsto \sum_{i \in I} f_i(x)$, défini pour $x \in M^+$, est strictement semi-fini et ultrafaiblement s. c. i..*

Pour tout poids φ sur M^+, notons A_φ l'ensemble des $y \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$ tels que

$$\dot\varphi(yx) = \dot\varphi(xy) \quad \text{pour tout } x \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*.$$

(i) Soit φ une trace semi-finie sur M^+. L'idéal bilatère $\mathfrak{N}_\varphi$ de M est auto-adjoint, donc $\mathfrak{N}_\varphi = \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$. On a $A_\varphi = \mathfrak{N}_\varphi$, car φ est une trace. Comme $\mathfrak{N}_\varphi$ est ultrafaiblement dense dans M, φ est strictement semi-fini (avec $M_\varphi = M$).

Soit φ la restriction à M^+ d'une forme linéaire positive normale f définie sur M. On a $\mathfrak{N}_\varphi = M$. Il est clair que $I \in A_\varphi \subset M_\varphi$. Donc φ est strictement semi-fini.

(ii) Pour tout $i \in I$, notons p_i le support de la forme f_i. On a $\varphi(p_i) = f_i(p_i) < +\infty$, de sorte que la famille $(p_i)_{i\in I}$ est contenue dans $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$. Pour tout $x \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$, on a $\dot{\varphi}(xp_i) = f_i(x) = \dot{\varphi}(p_i x)$, donc $p_i \in A_\varphi$ pour tout $i \in I$. Le support p de φ est égal à $\sum_{i\in I} p_i$ ([1], lemme 4.8). Alors $I - p$, $(p_i)_{i\in I}$ sont des éléments de A_φ de somme égale à I, donc φ est strictement semi-fini. Il est clair que φ est ultrafaiblement s. c. i..

4.3. Proposition. — *Soient M une algèbre de von Neumann, φ un poids sur M^+ strictement semi-fini. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *φ est ultrafaiblement s. c. i.* ;

(ii) φ est enveloppe supérieure sur M^+ des formes linéaires positives normales qu'il majore;

(iii) *φ est somme sur M^+ de formes linéaires positives normales à supports deux à deux orthogonaux;*

(iv) *il existe une trace normale ψ sur M_φ^+ et une espérance conditionnelle normale T appliquant M sur $M_\varphi p$ (où p désigne le support de ψ) telles que $\varphi(x) = \psi[T(x)]$ pour tout $x \in M^+$.*

De plus, les éléments ψ et *T introduits dans la condition* (iv), *sont nécessairement égaux à φ_0 et T_φ.*

(iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) sont évidents, et (i) $\Rightarrow$ (iv) résulte des propositions 3.8 et 3.12.

(iv) $\Rightarrow$ (iii) : Comme φ est semi-fini, la relation $\varphi = \psi \circ T$ montre que ψ est une trace semi-finie. D'après le lemme 2.4, il existe, dans l'idéal de définition $\mathfrak{M}_\psi$ de ψ, une famille $(e_i)_{i\in I}$ de projecteurs deux à deux orthogonaux de somme égale à p. Les formes $h_i : x \mapsto \dot{\psi}(e_i x e_i)$ sont positives normales sur $M_\varphi p$. Pour $x \in M_\varphi^+ p$, on a

$$\sum_{i\in I} h_i(x) = \sum_{i\in I} \psi(e_i x e_i) = \sum_{i\in I} \psi(x^{1/2} e_i x^{1/2}) = \psi(xp) = \psi(x).$$

Pour tout $i \in I$, posons $f_i = h_i \circ T$. Il est clair que $f_i \mid M_\varphi p = h_i$. Le support p_i de f_i dans M est donc majoré par le support e_i de h_i dans $M_\varphi p$. Les projecteurs p_i sont donc deux à deux orthogonaux. Sur M^+, φ est la somme des formes f_i d'après la relation $\varphi = \psi \circ T$.

Avant de démontrer la dernière assertion, vérifions que, pour tout $x \in M_\varphi$, on a $T(x) = xp$. Comme T est une espérance conditionnelle, $T(I)$ est un projecteur. En effet.

$$T(I)\, T(I) = T[IT(I)] = T[T(I)] = T(I).$$

On voit facilement que $T(I)$ est le plus grand projecteur de l'image $M_\varphi p$ de T. On a donc $T(I) = p$ et $T(I - p) = 0$. Pour $x \in M_\varphi$ hermitien, la relation $-\| x \| (I - p) \leq x \leq \| x \| (I - p)$ entraîne $T(x) = 0$, donc T est nulle sur $M_\varphi (I - p)$. Comme T et $x \mapsto xp$ sont des projections de M_φ sur $M_\varphi p$ de même noyau et de même image, elles sont égales.

Pour tout $x \in M_\varphi^+$, on a donc

$$\varphi_0(x) = \varphi(x) = \psi[T(x)] = \psi(xp) = \psi(x), \qquad \text{d'où} \qquad \varphi_0 = \psi,$$

et la proposition 3.12 nous donne alors $T = T_\varphi$.

4.4. Corollaire. — *Soient M une algèbre de von Neumann, φ un poids sur M^+ strictement semi-fini, fidèle et ultrafaiblement s. c. i., $\mathfrak{A}$ l'algèbre hilbertienne à gauche définie par φ. Alors $\mathfrak{A}$ est achevée et, si on identifie M à $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ par l'isomorphisme π_φ, φ s'identifie au poids canoniquement défini par $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$.*

Cela découle de la proposition 4.3 [(i) $\Rightarrow$ (ii)] et de [4] (th. 2.13).

4.5. Proposition. — *Soient M une algèbre de von Neumann, $(\varphi_i)_{i \in I}$ une famille de poids strictement semi-finis et ultrafaiblement s. c. i. sur M^+ dont les supports $(p_i)_{i \in I}$ sont deux à deux orthogonaux, φ le poids $x \mapsto \sum_{i \in I} \varphi_i(x)$ défini pour $x \in M^+$.*

(i) *φ est strictement semi-fini et ultrafaiblement s. c. i..*

(ii) *Pour tout $i \in I$, l'opérateur t_i associé au poids φ_i dans la représentation π_φ est le projecteur de H_φ sur $H_i = \overline{\Lambda_\varphi[(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*)\, p_i]}$. L'application canonique λ_i de H_φ dans H_{φ_i} est une isométrie partielle d'espace initial H_i et d'espace final H_{φ_i}; λ_i établit une équivalence unitaire entre π_{φ_i} et la sous-représentation $\pi_\varphi \mid H_i$ de π_φ. Les sous-espaces H_i de H_φ sont deux à deux orthogonaux de somme hilbertienne égale à H_φ,* et *π_φ est unitairement équivalente à $\bigoplus_{i \in I} \pi_{\varphi_i}$.*

(iii) *Si, pour tout $i \in I$, φ_i est la restriction à M^+ d'une forme linéaire positive normale f_i, le vecteur α_i associé à f_i dans la représentation π_φ est égal à $\Lambda_\varphi p_i$.*

(i) Si chaque poids φ_i est strictement semi-fini, chaque poids φ_i, et par suite φ, est somme de formes linéaires positives normales à support deux à deux orthogonaux (prop. 4.3). D'après la proposition 4.2-(ii), φ est strictement semi-fini et ultrafaiblement s. c. i.

(ii) on a $\mathfrak{N}_\varphi = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{N}_{\varphi_i}$, d'où $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^* = \bigcap_{i\in I} (\mathfrak{N}_{\varphi_i} \cap \mathfrak{N}_{\varphi_i}^*)$. Les relations suivantes sont valables, pour tout $x \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$:

$$\varphi[(xp_i)^*(xp_i)] = \varphi(p_i x^* x p_i) = \varphi_i(x^* x) \leqq \varphi(x^* x) < +\infty.$$

Elles montrent que $xp_i \in \mathfrak{N}_\varphi$ On a aussi $xp_i \in \mathfrak{N}_\varphi^*$, car x est un élément de l'idéal à droite $\mathfrak{N}^*$. On voit donc que $(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*)\, p_i \subset \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$. Pour $i, j \in I$ distincts et $x, y \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$, on a

$$(\Lambda_\varphi x p_i \mid \Lambda_\varphi y p_j) = \dot\varphi(p_j y^* x p_i) = 0.$$

Les sous-espaces $H_i = \overline{\Lambda_\varphi[(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*)\, p_i]}$ de H_φ sont donc deux à deux orthogonaux. Pour tous $x, y \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$, on a

$$(\Lambda_\varphi x - \Lambda_\varphi x p_i \mid \Lambda_\varphi y p_i) = \dot\varphi(p_i y^* x) - \dot\varphi(p_i y^* x p_i) = \dot\varphi_i(y^* x) - \dot\varphi_i(y^* x) = 0.$$

Ces relations montrent que $\Lambda_\varphi x p_i$ est la projection orthogonale de $\Lambda_\varphi x$ sur H_i. On a

$$\sum_{i\in I} \| \Lambda_\varphi x p_i \|^2 = \sum_{i\in I} \varphi(p_i x^* x p_i) = \sum_{i\in I} \varphi_i(x^* x) = \varphi(x^* x) = \| \Lambda_\varphi x \|^2.$$

La relation de Parceval permet alors d'affirmer que $\Lambda_\varphi x \in \bigoplus_{i\in I} H_i$. Donc $\bigoplus_{i\in I} H_i$ contient $\Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*)$. On en déduit que $H_\varphi = \bigoplus_{i\in I} H_i$. Notons e_i' la projection orthogonale de H_φ sur H_i. Les égalités suivantes sont valables, pour tous $x, y \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$,

$$(\Lambda_\varphi x \mid e_i' \Lambda_\varphi y) = (\Lambda_\varphi x \mid \Lambda_\varphi y p_i) = \dot\varphi(p_i y^* x) = \dot\varphi_i(y^* x).$$

Elles montrent que e_i' est égal à l'opérateur t_i associé au poids φ_i dans la représentation π_φ. L'application λ_i vérifie $\lambda_i^* \lambda_i = t_i$. C'est donc une isométrie partielle. Son espace initial est le support H_i de t_i et son espace final est l'adhérence de $\Lambda_{\varphi_i} \mathfrak{N}_\varphi$ dans H_{φ_i} ([1], lemme 2.3). Vérifions que cet espace final est H_{φ_i}.

Comme $I - p_i$ est le plus grand projecteur de N_{φ_i}, pour tout $x \in \mathfrak{N}_{\varphi_i}$, on a $\Lambda_{\varphi_i} x = \Lambda_{\varphi_i} x p_i$, de sorte que $\Lambda_{\varphi_i} \mathfrak{N}_{\varphi_i} = \Lambda_{\varphi_i} \mathfrak{N}_{\varphi_i} p_i$. Pour $x \in \mathfrak{N}_{\varphi_i} p_i$, on a

$$\varphi(x^* x) = \varphi(p_i x^* x p_i) = \varphi_i(x^* x) < +\infty, \qquad \text{donc} \quad x \in \mathfrak{N}_\varphi.$$

Cela prouve que $\mathfrak{N}_{\varphi_i} p_i \subset \mathfrak{N}_\varphi$. Ainsi $\Lambda_{\varphi_i} \mathfrak{N}_\varphi$ contient $\Lambda_{\varphi_i} \mathfrak{N}_{\varphi_i} p_i = \Lambda_{\varphi_i} \mathfrak{N}_{\varphi_i}$. Donc l'adhérence de $\Lambda_{\varphi_i} \mathfrak{N}_\varphi$ est H_{φ_i}, et l'espace final de λ_i est H_{φ_i}.

Comme les projecteurs t_i appartiennent au commutant de $\pi_\varphi(M)$, les sous-espaces $(H_i)_{i\in I}$ de H_φ sont stables pour π_φ. D'après ([1], lemme 2.3) λ_i met en équivalence les représentations $\pi_\varphi \mid H_i$ et π_{φ_i}. Donc $\bigoplus_{i\in I} \lambda_i$ met en équivalence les représentations π_φ et $\bigoplus_{i\in I} \pi_{\varphi_i}$.

(iii) Si φ_i est la restriction à M^+ d'une forme linéaire positive normale f_i, on a

$$\varphi(p_i) = f_i(p_i) < +\infty, \qquad \text{d'où} \qquad p_i = p_i^2 \in \mathfrak{M}_\varphi.$$

Ainsi p_i est un élément de $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$. Pour tout $x \in M$, on a

$$(1) \qquad (\pi_\varphi(x)\Lambda_\varphi p_i \mid \Lambda_\varphi p_i) = (\Lambda_\varphi x p_i \mid \Lambda_\varphi p_i) = \varphi(p_i x p_i) = f_i(x).$$

Pour tout $x \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$, on a vu que $\Lambda_\varphi x p_i$ est la projection orthogonale de $\Lambda_\varphi x$ sur H_i, de sorte que

$$(2) \qquad \pi_\varphi(x)\,\Lambda_\varphi p_i = \Lambda_\varphi x p_i = t_i \Lambda_\varphi x.$$

Les relations (1) et (2) montrent que $\Lambda_\varphi p_i$ est le vecteur associé à f_i dans la représentation π_φ.

4.6. Corollaire. — *Soient M une algèbre de von Neumann, φ un poids strictement semi-fini et ultrafaiblement s. c. i., A une sous-algèbre involutive de $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$. Pour que $\Lambda_\varphi A$ soit partout dense dans H_φ, l'une ou l'autre des conditions suivantes est suffisante :*

(i) *A est ultrafaiblement dense dans M et contient une famille $(e_i)_{i\in I}$ de projecteurs de $\mathfrak{N}_{\varphi_0}$, deux à deux orthogonaux, de somme égale à I;*

(ii) *A et $A \cap M_\varphi$ sont ultrafaiblement denses respectivement dans M et M_φ.*

Plaçons-nous d'abord dans la première hypothèse. Pour tout $i \in I$, la forme linéaire positive normale $f_i : x \mapsto \varphi(e_i x e_i)$ a un support p_i majoré par e_i. On a évidemment

$$\varphi(e_i - p_i) = \varphi(e_i) - \varphi(p_i) = f_i(I) - f_i(p_i) = 0,$$

d'où

$$e_i - p_i \in N_\varphi \qquad \text{et} \qquad \Lambda_\varphi e_i = \Lambda_\varphi p_i.$$

D'autre part, φ est somme des formes $(f_i)_{i\in I}$ sur M^+. En effet, pour tout $x \in M^+$, on a (en notant p_0 le support commun à φ et φ_0) :

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} f_i(x) &= \sum_{i\in I} \varphi(p_0 e_i x e_i p_0) = \sum_{i\in I} \varphi_0[T_\varphi(p_0 e_i x e_i p_0)] = \sum_{i\in I} \varphi_0[p_0 e_i T(x)\, p_0 e_i] \\ &= \sum_{i\in I} \varphi_0[T_\varphi(x)^{1/2} e_i T_\varphi(x)^{1/2}] = \varphi_0[T_\varphi(x)] = \varphi(x).\end{aligned}$$

D'après la proposition 4.5, les sous-espaces $H_i = \overline{\Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*)\, p_i}$ de H_φ sont deux à deux orthogonaux de somme H_φ. Pour établir l'assertion, il suffit de montrer que $\Lambda_\varphi A p_i = \Lambda_\varphi A e_i \subset \Lambda_\varphi A$ est partout dense dans H_i pour tout $i \in I$. L'application canonique λ_i de H_φ dans H_{f_i} est une isométrie partielle qui met en équivalence $\pi_\varphi | H_i$ et π_{f_i}, et telle que $\lambda_i(\Lambda_\varphi x) = \Lambda_{f_i} x$ pour tout $x \in \mathfrak{N}_\varphi$. Il revient donc au même, de vérifier que $\Lambda_{f_i} A = \Lambda_{f_i} A p_i$ est partout dense dans H_{f_i} pour tout $i \in I$. D'après le théorème de densité de Kaplansky, tout $x \in M$ est limite ultraforte d'éléments $a_k \in A$ vérifiant $\| a_k \| \leqq \| x \|$. Alors, $(x - a_k)^*(x - a_k)$ converge ultrafaiblement vers zéro et

$$\| \Lambda_{f_i} x - \Lambda_{f_i} a_k \|^2 = f_i[(x - a_k)^*(x - a_k)] \to 0,$$

d'où l'assertion.

Plaçons-nous maintenant dans l'hypothèse (ii). Comme on a $N_{\varphi_0} = N_\varphi \cap M_\varphi$, on voit facilement que $\Lambda_{\varphi_0} \mathfrak{N}_{\varphi_0}$ s'identifie isométriquement au sous-espace vectoriel $\Lambda_\varphi \mathfrak{N}_{\varphi_0}$ de $\Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*)$. Posons $B = A \cap M_\varphi$. Comme

$$(x, y) \mapsto \Lambda_{\varphi_0} xy = \pi_{\varphi_0}(x) \Lambda_{\varphi_0} y = \rho_{\varphi_0}(y) \Lambda_{\varphi_0} x.$$

est une application de $\mathfrak{N}_{\varphi_0} \cap \mathfrak{N}_{\varphi_0}^*$ dans H_φ ultrafaiblement continue séparément de chaque variable, $\Lambda_{\varphi_0} B^2$ (et par suite $\Lambda_\varphi B$) est partout dense dans H_{φ_0}. L'adhérence de $\Lambda_\varphi A$ dans H_φ contient donc $\Lambda_\varphi \mathfrak{N}_{\varphi_0}$. D'après le lemme 2.4-(ii), il existe dans $\mathfrak{N}_{\varphi_0}$ une famille $(p_i)_{i \in I}$ de projecteurs deux à deux orthogonaux de somme égale au support p_0 commun à φ et φ_0. Comme précédemment, les formes linéaires $f_i : x \mapsto \varphi(p_i x p_i)$ sont positives normales à supports mutuellement orthogonaux, de somme égale à φ sur M^+, et les sous-espaces $H_i = \overline{\Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*)\, p_i}$ de H_φ sont orthogonaux, de somme hilbertienne H_φ. Fixons $i \in I$, et choisissons une suite (x_n) d'éléments de B telle que $\Lambda_\varphi x_n \to \Lambda_\varphi p_i$. Pour tout $a \in A$, on a

$$\lim \Lambda_\varphi a x_n = \lim \pi_\varphi(a) \Lambda_\varphi x_n = \pi_\varphi(a) \Lambda_\varphi p_i = \Lambda_\varphi a p_i.$$

Cela montre que $\overline{\Lambda_\varphi A}$ contient le sous-espace $\Lambda_\varphi A p_i$ de H_i. On achève alors la démonstration comme précédemment.

4.7. Proposition. — *Soient M une algèbre de von Neumann, φ un poids sur M^+, a un élément positif du centre de M, ψ le poids $x \mapsto \varphi(xa) = \varphi(a^{1/2} x a^{1/2})$ défini pour $x \in M^+$. Notons A_φ l'ensemble des $y \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$ tels que $\dot\varphi(xy) = \dot\varphi(yx)$ pour tout $x \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$, et définissons A_ψ de manière analogue pour ψ.*

(i) *On a $\mathfrak{M}_\varphi \subset \mathfrak{M}_\psi$, $\mathfrak{N}_\varphi \subset \mathfrak{N}_\psi$. En particulier, si φ est semi-fini, il en est de même pour ψ.*

(ii) *On a $A_\varphi \subset A_\psi$. En particulier, si φ est strictement semi-fini, il en est de même pour ψ.*

(i) est immédiat.

(ii) Soit y un élément de A_φ. Pour tout $x \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$, ax est encore un élément de $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$. On a donc

$$\dot\psi(xy) = \dot\varphi[(ax)y] = \dot\varphi[y(ax)] = \dot\psi(yx),$$

ce qui prouve que $y \in A_\psi$, d'où $A_\varphi \subset A_\psi$ et l'assertion.

4.8. Lemme. — *Soient M une algèbre de von Neumann, φ un poids ultrafaiblement s. c. i. sur M^+. Pour que φ soit strictement semi-fini, il faut et il suffit que le support p de φ soit dans M_φ.*

D'après la proposition 3.8, $I - p$ est un élément de $\mathfrak{N}_{\varphi_0} \subset M_\varphi$. Pour que I soit un élément de M_φ, il est donc nécessaire et suffisant que p soit lui-même un élément de M_φ.

4.9. Proposition. — *Soient M une algèbre de von Neumann, $(\varphi_i)_{i\in I}$ une famille de poids ultrafaiblement s. c. i. sur M^+ dont les supports $(p_i)_{i\in I}$ sont deux à deux orthogonaux, φ le poids $x \mapsto \sum_{i\in I} \varphi_i(x)$ défini sur M^+. Pour que φ soit strictement semi-fini, il faut et il suffit que chaque poids φ_i soit strictement semi-fini.*

La condition est suffisante d'après la proposition 4.5-(i). Montrons qu'elle est nécessaire. Supposons donc φ strictement semi-fini. D'après le lemme 4.8, son support p est dans M_φ. D'après le lemme 2.4, il existe une famille filtrante croissante (y_k) d'éléments de $\mathfrak{N}_{\varphi_0}$ convergeant ultrafaiblement vers p. Pour tout $x \in \mathfrak{N}_{\varphi_i} \cap \mathfrak{N}_{\varphi_i}^*$, on a

$$\varphi_i[(p_i x p_i)^*(p_i x p_i)] = \varphi_i(x^* p_i x) \leqq \varphi_i(x^* x) < +\infty,$$

et de même

$$\varphi_i[(p_i x p_i)(p_i x p_i)^*] \leqq \varphi_i(x x^*) < +\infty,$$

ce qui montre que $p_i x p_i \in \mathfrak{N}_{\varphi_i} \cap \mathfrak{N}_{\varphi_i}^*$. En particulier, puisque

$$y_k \in \mathfrak{N}_{\varphi_0} \subset \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^* \subset \mathfrak{N}_{\varphi_i} \cap \mathfrak{N}_{\varphi_i}^*,$$

on a

$$p_i y_k p_i \in \mathfrak{N}_{\varphi_i} \cap \mathfrak{N}_{\varphi_i}^*.$$

En utilisant les propriétés des éléments

$$y_k \in \mathfrak{N}_{\varphi_0} \subset \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^* = \bigcap_{i\in I} (\mathfrak{N}_{\varphi_i} \cap \mathfrak{N}_{\varphi_i}^*),$$

on obtient, pour tout $x \in \mathfrak{N}_{\varphi_i} \cap \mathfrak{N}_{\varphi_i}^*$,

$$\begin{aligned}\dot\varphi_i(x p_i y_k p_i) &= \dot\varphi_i(p_i x p_i y_k) = \dot\varphi[(p_i x p_i) y_k] \\ &= \dot\varphi[y_k (p_i x p_i)] = \dot\varphi_i(y_k p_i x p_i) = \dot\varphi_i(p_i y_k p_i x).\end{aligned}$$

Cela prouve que $p_i y_k p_i \in M_{\varphi_i}$. Comme $p_i y_k p_i$ converge ultrafaiblement vers p_i quand y_k converge ultrafaiblement vers p, on a $p_i \in M_{\varphi_i}$ et φ_i est strictement semi-fini d'après le lemme 4.8.

4.10. Proposition. — *Soient M une algèbre de von Neumann, $(f_i)_{i\in I}$ une famille de formes linéaires positives normales dont les supports $(p_i)_{i\in I}$ sont deux à deux orthogonaux, τ le poids somme de cette famille sur M^+, $p = \sum_{i\in I} p_i$ le support de τ. Soit A une sous-algèbre involutive de $\mathfrak{M}_\tau$ ultrafaiblement dense dans M, contenant les projecteurs $(p_i)_{i\in I}$ et une famille $(p_j)_{j\in J}$ de projecteurs deux à deux orthogonaux de somme $I - p$. Soit θ un autre poids ultrafaiblement s. c. i. sur M^+ tel que $A \subset \mathfrak{M}_\theta$ et $\dot\theta \mid A = \dot\tau \mid A$. Alors on a $\mathfrak{M}_\tau \subset \mathfrak{M}_\theta$ et $\dot\tau = \dot\theta \mid \mathfrak{M}_\tau$.*

D'après la proposition 4.2, τ est un poids strictement semi-fini et ultrafaiblement s. c. i.. Pour toute partie finie K de $I \cup J$, le projecteur $p_K = \sum_{i\in K} p_i$ appartient à A. Les formes linéaires positives normales $x \mapsto \dot\tau(p_K x p_K)$ et $x \mapsto \dot\theta(p_K x p_K)$ coïncident sur A. Elles sont donc égales. Selon le filtre des parties finies de $I \cup J$, p_K converge ultrafortement vers I. Considérons un élément x de M^+. Le support p de τ est aussi celui de $\tau_0 = \tau \mid M_\tau^+$ (d'après le lemme 4.8 par exemple). Les projecteurs p_i, où $i \in J$ sont majorés par $I - p$. Pour $i \in J$, on a donc $T_\tau(p_i) = 0$, d'où

$$\tau_0[T_\tau(p_i x p_i)] = 0 = \tau_0[p_i T(x) p_i].$$

Utilisant les propriétés de T_τ, on en déduit, pour toute partie finie K de $I \cup J$, et tout $x \in \mathfrak{M}_\tau^+$,

$$\tau(p_K x p_K) = \tau_0[T_\tau(p_K x p_K)] = \tau_0[p_K T_\tau(x) p_K] = \tau_0[T_\tau(x)^{1/2} p_K T_\tau(x)^{1/2}],$$

d'où

$$\theta(x) \leq \liminf \theta(p_K x p_K) = \lim \tau(p_K x p_K) = \tau_0[T_\tau(x)] = \tau(x).$$

D'après le corollaire 4.6-(i), $\Lambda_\tau A$ est partout dense dans H_τ. Pour tout $x \in \mathfrak{M}_\tau^+$, il existe donc dans A une suite (a_k) telle que

$$\tau[(x^{1/2} - a_k)^*(x^{1/2} - a_k)] \to 0.$$

On a alors $\theta[(x^{1/2} - a_k)^*(x^{1/2} - a_k)] \to 0$, d'où

$$\theta(x) = \lim \theta(a_k^* a_k) = \lim \tau(a_k^* a_k) = \tau(x).$$

4.11. Remarques.

(*a*) Sous les hypothèses de la proposition 4.10 (et même en supposant θ strictement semi-fini), a-t-on $\theta = \tau$? Ce problème est intéressant en vue de la proposition 6.2.

(*b*) Il existe des poids qui sont strictement semi-finis et qui ne sont pas ultrafaiblement s. c. i. Par exemple, J. DIXMIER a construit sur l'algèbre $M = \mathcal{L}(H)$ des opérateurs sur un espace hilbertien séparable de dimension infinie H, une trace φ non normale et dont l'idéal de définition $\mathfrak{M}_\varphi$ est ultrafaiblement dense dans M [7]. Une telle trace est un poids strictement semi-fini d'après la proposition 4.2.

(*c*) Il existe des poids ultrafaiblement s. c. i. (et même somme de formes linéaires positives normales) qui sont semi-finis sans être strictement semi-finis. Considérons à nouveau l'algèbre de von Neumann $M = \mathcal{L}(H)$ où H est un espace hilbertien de dimension infinie, et notons tr la trace naturelle de M. Pour tout $a \in M^+$, le poids $\varphi : x \mapsto \mathrm{tr}(a^{1/2} x a^{1/2})$ est somme de formes linéaires positives normales, car c'est le cas pour la trace tr. Comme $\mathfrak{M}_\varphi$ contient les opérateurs à trace, ce poids est semi-fini. D'après [4] (prop. 3.7), φ est somme de formes linéaires positives normales à supports deux à deux orthogonaux, c'est-à-dire strictement semi-fini (prop. 4.2 et 4.3), si et seulement si a est somme d'opérateurs positifs de rang fini à supports deux à deux orthogonaux.

(*d*) Soient M une algèbre de von Neumann, φ un poids fidèle somme sur M^+ d'une famille $(f_i)_{i \in I}$ de formes linéaires positives normales définies sur M dont les supports $(p_i)_{i \in I}$ sont deux à deux orthogonaux. Les éléments $\alpha_i = \Lambda_\varphi p_i$ sont des idempotents de l'algèbre hilbertienne à gauche $\mathfrak{A}$ définie par φ, et les idéaux à gauche $(\mathfrak{A} \alpha_i)_{i \in I}$ de $\mathfrak{A}$ sont deux à deux orthogonaux et totaux dans $\mathfrak{A}$. La présente étude reprend donc, dans une certaine mesure, les méthodes à la base de l'étude des algèbres de Ambrose (ou algèbres hilbertiennes complètes) (*voir* par exemple [12], § 27).

5. Poids K. M. S. strictement semi-finis et ultrafaiblement s. c. i.

Dans ce paragraphe, nous allons résoudre pour les poids strictement semi-finis divers problèmes que nous n'avions pas su traiter dans le cas des poids semi-finis ([4], § 4). Rappelons qu'un poids φ, sur une C^*-algèbre A, est dit K. M. S. s'il existe un nombre $\beta > 0$, un groupe à un paramètre $t \mapsto \sigma_t$ d'automorphismes de A vérifiant les conditions suivantes

(*a*) φ est invariant par σ_t pour tout $t \in \mathbf{R}$;

(*b*) pour tout couple (a, b) d'éléments de $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$, il existe une fonction F continue et bornée sur la bande des $z \in \mathbf{C}$ tels que $0 \leq \mathrm{Im}\, z \leq \beta$, holomorphe dans cette bande et telle que

$$F(t) = \dot{\varphi}[\sigma_t(a)\, b], \qquad F(t + i\beta) = \dot{\varphi}[b\sigma_t(a)] \quad \text{pour tout } t \in \mathbf{R}.$$

Nous dirons que F est la fonction que le poids φ associe au couple (a, b) d'éléments de $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$ ou, plus brièvement, si aucune confusion n'est possible, nous dirons que F est la fonction associée au couple (a, b).

Rappelons que si φ est un poids K. M. S. fidèle semi-fini sur une algèbre de von Neumann M, et si φ est l'enveloppe supérieure sur M^+ de formes linéaires positives normales, le groupe $t \mapsto \sigma_t$ est déterminé de manière unique : si $\beta = 1$ (et on peut toujours se ramener à ce cas par un changement de variable sur l'axe réel), c'est le groupe des automorphismes modulaires définis par l'algèbre hilbertienne à gauche associée à φ ([4], prop. 4.8).

Si φ est la restriction à M^+ d'une forme linéaire positive normale, la condition (*b*) de la définition précédente entraîne la condition (*a*). Plus généralement, on a la proposition suivante.

5.1. PROPOSITION. — *Soient M une algèbre de von Neumann, φ un poids ultrafaiblement s. c. i. sur M^+, $t \mapsto \sigma_t$ un groupe à un paramètre d'automorphismes de M, β un nombre > 0. Supposons φ strictement semi-fini. Pour que φ soit K. M. S. pour $t \mapsto \sigma_t$ avec la constante β, il faut et il suffit que φ vérifie la condition (b) précédente, et que $\sigma_t(\mathfrak{M}_\varphi) = \mathfrak{M}_\varphi$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.*

La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle suffit. Soit p_0 le support de la trace $\varphi_0 = \varphi \mid M_\varphi^+$. Soit (u_i) une unité approchée filtrante croissante de l'idéal bilatère $\mathfrak{M}_{\varphi_0} p_0$ de M_φ. Considérons un élément $x \in \mathfrak{M}_\varphi^+$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $\sigma_t(x) \in \mathfrak{M}_\varphi$ et, d'après les propriétés de $\mathfrak{N}_{\varphi_0}$,

$$\dot{\varphi}[\sigma_t(x)\, u_i] = \dot{\varphi}[u_i \sigma_t(x)] \quad \text{pour tout } i \in I.$$

Pour tout $i \in I$, la fonction F associée au couple (x, u_i) est alors la restriction d'une fonction holomorphe périodique (de période $i\beta$) définie sur tout $\mathbf{C}$, à la bande B des $z \in \mathbf{C}$ tels que $0 \leqq \operatorname{Im} z \leqq \beta$. Étant bornée sur cette bande, elle est constante en vertu du théorème de Liouville. On a donc

$$\dot{\varphi}[\sigma_t(x)\, u_i] = \dot{\varphi}(x u_i) \quad \text{pour tout } t \in \mathbf{R}.$$

Comme u_i converge ultrafaiblement vers p_0, on a

$$\begin{aligned}
\varphi[\sigma_t(x)] &= \varphi_0[T_\varphi(\sigma_t(x))] = \lim \varphi_0[T_\varphi(\sigma_t(x))^{1/2} u_i T_\varphi(\sigma_t(x))^{1/2}] \\
&= \lim \varphi_0[u_i^{1/2} T_\varphi(\sigma_t(x))\, u_i^{1/2}] = \lim \varphi_0[T_\varphi(u_i^{1/2} \sigma_t(x)\, u_i^{1/2})] \\
&= \lim \varphi[u_i^{1/2} \sigma_t(x)\, u_i^{1/2}] = \lim \dot{\varphi}[\sigma_t(x)\, u_i] = \lim \dot{\varphi}(x u_i) \\
&= \lim \varphi_0[T_\varphi(x)^{1/2} u_i T_\varphi(x)^{1/2}] = \varphi_0[T_\varphi(x)] = \varphi(x).
\end{aligned}$$

Ainsi, sur $\mathfrak{M}_\varphi^+$, $\varphi \circ \sigma_t$ et φ coïncident. Pour $x \notin \mathfrak{M}^+$, on a $\sigma_t(x) \notin \mathfrak{M}_\varphi^+$, sinon on aurait $x = \sigma_{-t}[\sigma_t(x)] \in \mathfrak{M}_\varphi^+$. Donc $\varphi \circ \sigma_t = \varphi$, et φ est bien K. M. S. pour les automorphismes σ_t avec la constante β.

La proposition suivante généralise le théorème 13.3.1° de [17]. Dans la proposition 5.2 et le lemme 5.3, les poids considérés seront supposés semi-finis. Dans toute la suite du paragraphe, ils seront strictement semi-finis.

5.2. Proposition. — *Soient M une C^*-algèbre, β un nombre > 0, $t \mapsto \sigma_t$ un groupe à un paramètre d'automorphismes de M, φ un poids sur M^+, K. M. S. pour $t \mapsto \sigma_t$ avec la constante β.*

(i) *$N_\varphi \cap (\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*)$ est un idéal auto-adjoint de l'algèbre involutive $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$.*

(ii) *Si M est une algèbre de von Neumann, et si on suppose que φ est semi-fini et ultrafaiblement s. c. i., alors N_φ est un idéal bilatère ultrafaiblement fermé de M contenu dans $\mathfrak{M}_\varphi \cap M_\varphi$.*

(i) Il est clair que $N_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^* = N_\varphi \cap (\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*)$ est un idéal à gauche de $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$. Soit x un élément de $N_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$|\varphi[\sigma_t(x)^* x]|^2 \leq \varphi[\sigma_t(x)^* \sigma_t(x)]\, \varphi(x^* x) = 0.$$

La fonction F, associée au couple (x^*, x), est donc identiquement nulle sur l'axe réel, et par suite sur la bande où elle est définie. On a, en particulier, $\varphi(xx^*) = F(i\beta) = 0$. Donc x^* est un élément de $N_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$, et $N_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$ est un idéal auto-adjoint de $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$.

(ii) Soient $a \in M$ et $x \in N_\varphi$. Comme φ est semi-fini, il existe une famille (y_i) d'éléments de $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$ qui converge ultrafortement vers a avec $\| y_i \| \leq \| a \|$. Alors $y_i^* x^* x y_i$ converge ultrafaiblement vers $a^* x^* x a$, et on obtient

$$\varphi(a^* x^* x a) \leq \liminf \varphi(y_i^* x^* x y_i) = 0.$$

Ainsi $xa \in N_\varphi$ et N_φ est un idéal bilatère de M. Il est ultrafaiblement fermé donc $N_\varphi = N_\varphi^* N_\varphi \subset \mathfrak{N}_\varphi^* \mathfrak{N}_\varphi = \mathfrak{M}_\varphi$. Le lemme 3.1-(i) et la définition de M_φ montrent alors que $N_\varphi \subset M_\varphi$.

Nous aurons l'occasion d'utiliser le lemme suivant que nous adaptons de la démonstration du théorème 13.3 de [17].

5.3. Lemme. — *Soient A une C^*-algèbre, $t \mapsto \sigma_t$ un groupe à un paramètre d'automorphismes de A, β un nombre > 0, φ un poids sur A^+ invariant par σ_t pour tout $t \in \mathbf{R}$, X un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$ dont la partie hermitienne est partout dense dans celle de $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$ pour la structure préhilbertienne définie par φ. On suppose que, pour tout couple (x, y) d'éléments de X, il existe une fonction F continue et bornée sur la bande B des $z \in \mathbf{C}$ tel que $0 \leq \operatorname{Im} z \leq \beta$, holomorphe dans cette bande et telle que*

$$F(t) = \dot{\varphi}[\sigma_t(x)\, y], \qquad F(t + i\beta) = \dot{\varphi}[y \sigma_t(x)] \quad \textit{pour tout } t \in \mathbf{R}.$$

Alors φ est K. M. S. pour $t \mapsto \sigma_t$ avec la constante β.

Soit (a, b) un couple d'éléments de $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$. Il existe deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de X telles que $\Lambda_\varphi x_n \to \Lambda_\varphi a$, $\Lambda_\varphi x_n^* \to \Lambda_\varphi a^*$, $\Lambda_\varphi y_n \to \Lambda_\varphi b$, $\Lambda_\varphi y_n^* \to \Lambda_\varphi b^*$. Pour tout n, soit F_n la fonction associée au couple (x_n, y_n)

sur la bande B. Comme φ est invariant pour les automorphismes σ_t, on a, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}|\dot\varphi[\sigma_t(a)\,b]-\dot\varphi[\sigma_t(x_n)\,y_n]| &\leqq |\dot\varphi[\sigma_t(a)(b-y_n)]|+|\dot\varphi[(\sigma_t(a)-\sigma_t(x_n))\,y_n]|\\ &\leqq \varphi[\sigma_t(a)\,\sigma_t(a)^*]^{1/2}\varphi[(b-y_n)^*(b-y_n)]^{1/2}\\ &\quad+\varphi[\sigma_t(a-x_n)\,\sigma_t(a-x_n)^*]^{1/2}\varphi(y_n^*y_n)^{1/2}\\ &=\varphi(aa^*)^{1/2}\,\varphi[(b-y_n)^*(b-y_n)]^{1/2}\\ &\quad+\varphi[(a-x_n)\,(a-x_n)^*]^{1/2}\,\varphi\,(y_n^*y_n)^{1/2}\to 0.\end{aligned}$$

Ainsi $F_n(t)$ converge uniformément vers $\dot\varphi[\sigma_t(a)\,b]$ sur l'axe réel. On vérifie de même que $F_n(t+i\beta)$ converge uniformément vers $\dot\varphi[b\sigma_t(a)]$. Alors d'après le théorème de Phragméen et Lindelöf, F_n converge uniformément sur la bande B vers une fonction F. Cette fonction F est continue, bornée, holomorphe à l'intérieur de B, et vérifie

$$F(t)=\dot\varphi[\sigma_t(a)\,b],\qquad F(t+i\beta)=\dot\varphi[b\sigma_t(a)]\qquad \text{pour tout } t\in\mathbf{R}.$$

Donc φ est K. M. S. pour $t\mapsto\sigma_t$ avec la constante β.

5.4. Lemme. — *Soient M une algèbre de von Neumann, φ un poids fidèle, strictement semi-fini, ultrafaiblement s. c. i. sur M^+, $\mathfrak{A}$ l'algèbre hilbertienne à gauche achevée définie par φ, G le groupe des automorphismes modulaires que $\mathfrak{A}$ définit sur M. Alors M_φ est l'ensemble des éléments de M invariants par G, et T_φ est la projection de M sur M_φ traduisant la G-finitude de M.*

D'après le corollaire 4.4, on peut identifier M à $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$, et φ au poids canoniquement défini par $\mathfrak{A}$. Soit P l'ensemble des éléments de M fixes pour G. D'après la proposition 4.3 et [4] (th. 3.4), M est G-finie et $\varphi\mid P^+$ est une trace semi-finie, de sorte que P est l'adhérence ultrafaible de l'ensemble des éléments de $\mathfrak{M}_\varphi$ fixes pour G. Ceux-ci sont contenus dans $\mathfrak{N}_{\varphi_0}$ d'après la proposition 3.8 et [4] (lemme 3.1) de sorte que $P\subset M_\varphi$. D'autre part, toujours d'après [4] (lemme 3.1), les éléments de $\mathfrak{N}_{\varphi_0}$ sont contenus dans P, d'où $M_\varphi\subset P$.

D'après [4] (th. 3.4), il existe une seule projection positive normale T de M sur M_φ telle que $\varphi=\varphi_0\circ T$, et elle est G-invariante. Donc T_φ est G-invariante. C'est l'unique projection positive normale G-invariante de M sur M_φ mise en évidence par Kovacs et Szücs [11].

5.5. Lemme. — *Soient M une algèbre de von Neumann, $t\mapsto\sigma_t$ un groupe à un paramètre d'automorphismes de M, φ un poids strictement semi-fini, ultrafaiblement s. c. i. et K. M. S. pour $t\mapsto\sigma_t$ avec une constante $\beta>0$. Soit a un élément de M^+. Alors le poids $\psi : x\mapsto\varphi(a^{1/2}xa^{1/2})$ est semi-fini, ultrafaiblement s. c. i. et invariant par les automorphismes $(\sigma_t)_{t\in\mathbf{R}}$.*

D'après le corollaire 3.14, on a $M_\varphi \mathfrak{M}_\varphi M_\varphi \subset \mathfrak{M}_\varphi$. Cela entraîne $\mathfrak{M}_\varphi \subset \mathfrak{M}_\psi$, et ψ est semi-fini. Evidemment φ est ultrafaiblement s. c. i. Montrons qu'il est invariant par les automorphismes $(\sigma_t)_{t\in\mathbf{R}}$. Le support p commun à φ et φ_0 est central (prop. 5.2), aussi on ne change pas ψ en remplaçant a par ap. On vérifie facilement que $\varphi_1 = \varphi \mid M^+p$ est K. M. S. pour $t \mapsto \sigma_t \mid Mp$ avec la constante β, et que $M_{\varphi_1} = M_\varphi p$. Comme φ_1 est fidèle, $t \mapsto \sigma_t \mid Mp$ est identique au groupe des automorphismes modulaires de Mp définis par φ_1 ([4], prop. 4.8). Le lemme 5.4 montre que $\sigma_t(ap) = ap$. De l'invariance de φ résulte alors celle de ψ.

5.6. Lemme. — *Soient M une algèbre de von Neumann, Z son centre, $t \mapsto \sigma_t$ un groupe à un paramètre d'automorphismes de M, β un nombre > 0, φ un poids strictement semi-fini, ultrafaiblement s. c. i. sur M^+ et K. M. S. pour $t \mapsto \sigma_t$ avec la constante $\beta > 0$. Pour tout $a \in Z^+$, le poids $\psi : x \mapsto \varphi(xa)$ possède toutes les propriétés que nous venons d'énoncer pour φ.*

Il est clair que le poids ψ est ultrafaiblement s. c. i. Il est strictement semi-fini d'après la proposition 4.7-(ii).

D'après le lemme 5.2, le support p de φ est un projecteur du centre Z de M, et $Z(I - p) \subset M(I - p) = N_\varphi \subset M_\varphi$. La restriction φ_1 de φ à Mp est K. M. S. pour le groupe à un paramètre $t \mapsto \sigma_t \mid Mp$. Comme φ_1 est fidèle les automorphismes $\sigma_t \mid Mp$ sont les automorphismes modulaires définis par φ_1 sur Mp ([4], prop. 4.8). Ils laissent donc fixe le centre Zp de Mp ([4], lemme 4.10). Compte tenu du lemme 5.4, on a $Zp \subset M_{\varphi_1} \subset M_\varphi$, d'où $Z \subset M_\varphi$. D'après le lemme 5.5, ψ est invariant par les automorphismes $(\sigma_t)_{t\in\mathbf{R}}$.

Vérifions maintenant la condition (*b*) de la définition des poids K. M. S. Soient x, y deux éléments de $\mathfrak{N}_\psi \cap \mathfrak{N}_\psi^*$. D'après le lemme 3.1, si x ou y est dans $M(I - p) = N_\varphi$, on a

$$\dot\psi(\sigma_t(x)\, y) = \dot\psi(y\, \sigma_t(x)) = 0 \qquad \text{pour} \quad t \in \mathbf{R}.$$

Considérant le cas où $x, y \in Mp$, nous pouvons de nouveau supposer que φ est fidèle et que les automorphismes σ_t sont les automorphismes modulaires définis par φ dans M. D'après [4] (lemme 4.10), a est invariant par σ_t pour tout $t \in \mathbf{R}$. D'autre part, on voit facilement que $x \in \mathfrak{N}_\psi \cap \mathfrak{N}_\psi^*$ si et seulement si $a^{1/2}x \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$. On voit donc que

$$\dot\psi[\sigma_t(x)\, y] = \dot\varphi[a\sigma_t(x)\, y] = \dot\varphi[\sigma_t(a^{1/2}x)\, a^{1/2}y]$$

et

$$\dot\psi[y\sigma_t(x)] = \dot\varphi[ay\sigma_t(x)] = \dot\varphi[a^{1/2}y\sigma_t(a^{1/2}x)].$$

sont les valeurs $F(t)$ et $F(t + i\beta)$ de la fonction F associée au couple $(a^{1/2}x,\, a^{1/2}y)$ par le poids φ. Donc la condition (*b*) est vérifiée par ψ et ψ est K. M. S. pour $t \mapsto \sigma_t$ avec la constante β.

5.7. Proposition. — *Soient M une algèbre de von Neumann, $t \mapsto \sigma_t$ un groupe à un paramètre d'automorphismes de M, φ et ψ deux poids ultrafaiblement s. c. i. sur M^+. On suppose que φ est strictement semi-fini et K. M. S. pour $t \mapsto \sigma_t$, et que ψ est semi-fini et invariant par σ_t pour $t \in \mathbf{R}$. Alors $\mathfrak{M}_\varphi \cap \mathfrak{M}_\psi$ (resp. $M_\varphi \cap \mathfrak{M}_\varphi \cap \mathfrak{M}_\psi$) est ultrafaiblement dense dans M (resp. dans M_φ).*

La proposition 5.2 montre que le support p de φ est un projecteur central, et on a $M(I-p) = N_\varphi \subset \mathfrak{M}_\varphi$. Comme φ est invariant par σ_t pour tout $t \in \mathbf{R}$, son support p est lui aussi invariant. Soient φ_1 et φ_2 (resp. ψ_1 et ψ_2) les restrictions de φ (resp. de ψ) à M^+p et $M^+(I-p)$. On vérifie facilement que φ_1 et ψ_1 (resp. φ_2 et ψ_2) vérifient dans Mp [resp. $M(I-p)$] des hypothèses analogues à celles que nous avons faites pour φ et ψ dans M. Il suffit évidemment d'établir l'assertion pour chacun de ces couples.

Pour φ_2 et ψ_2, elle est évidente. En effet,

$$\mathfrak{M}_{\varphi_2} \cap \mathfrak{M}_{\psi_2} = M(I-p) \cap \mathfrak{M}_{\psi_2} = \mathfrak{M}_{\psi_2}$$

est ultrafaiblement dense dans $M(I-p)$. De plus M_{φ_2} est égale à $M(I-p)$ puisque $\dot{\varphi}(xy) = \dot{\varphi}(xy) = 0$ pour tous x, $y \in M(I-p)$. Donc $M_{\varphi_2} \cap \mathfrak{M}_{\varphi_2} \mathfrak{M}_{\psi_2} = \mathfrak{M}_{\psi_2}$ est ultrafaiblement dense dans M_{φ_2}.

Quitte à remplacer φ et ψ par φ_1 et ψ_1, nous pouvons désormais supposer que φ est fidèle pour démontrer la proposition. D'après le lemme 5.4 et [11] (th. 2), pour tout $x \in \mathfrak{M}_\psi^+$, $T_\varphi(x)$ est dans l'adhérence ultrafaible de l'enveloppe convexe C_x des éléments $\sigma_t(x)$ ou $t \in \mathbf{R}$. On a donc, d'après la semi-continuité et l'invariance de ψ,

$$\psi[T_\varphi(x)] \leq \sup_{y \in C_x} \psi(y) = \psi(x) < +\infty. \tag{1}$$

Posons $\tau = \psi \mid M_\varphi^+$. La relation (1) montre que $T_\varphi(\mathfrak{M}_\psi^+) \subset \mathfrak{M}_\tau^+$. Comme $\mathfrak{M}_\psi^+$ est ultrafaiblement dense dans M^+ et comme T_φ est ultrafaiblement continue, $\mathfrak{M}_\tau^+$ est ultrafaiblement dense dans M^+. D'après le lemme 2.5, $\mathfrak{M}_\tau \cap \mathfrak{M}_{\varphi_0} \subset M_\varphi \cap \mathfrak{M}_\varphi \cap \mathfrak{M}_\psi$ est ultrafaiblement dense dans $M\varphi$. D'après le lemme 2.3, I est limite ultrafaible d'une famille filtrante croissante d'éléments de $\mathfrak{M}_\tau^+ \cap \mathfrak{M}_{\varphi_0}^+ \subset \mathfrak{M}_\psi^+ \cap \mathfrak{M}_\varphi^+$. Toujours d'après ce lemme, $\mathrm{lin}(\mathfrak{M}_\psi^+ \cap \mathfrak{M}_\varphi^+) \subset \mathfrak{M}_\psi \cap \mathfrak{M}_\varphi)$ est ultrafaiblement dense dans M.

5.8. Proposition. — *Soient M une algèbre de von Neumann, Z son centre, $t \mapsto \sigma_t$ un groupe à un paramètre d'automorphismes de M, C l'ensemble des poids ultrafaiblement s. c. i., semi-finis et K. M. S. pour $t \mapsto \sigma_t$ avec une constante $\beta > 0$ donnée. On suppose qu'il existe dans C un poids fidèle et strictement semi-fini φ, et on note T l'espérance conditionnelle qu'il définit, Ω le cône convexe des traces normales semi-finies sur M_φ^+.*

(i) *Tout élément* ψ *de* C *est strictement semi-fini, et on a* $M_\varphi \subset M_\psi$. *Si* ψ *est fidèle, on a* $M_\psi = M_\varphi$ *et* $T_\psi = T$.

(ii) C *est un cône convexe réticulé et les applications* $\psi \mapsto \psi \mid M_\varphi^+$ *et* $\psi_1 \mapsto \psi_1 \circ T$ *sont des isomorphismes affins réciproques entre* C *et un sous-cône convexe* C_1 *de* Ω *stable pour la réticulation de* Ω.

(iii) *L'application qui à* $a \in Z^+$ *associe le poids* $x \mapsto \varphi(xa)$ *est un isomorphisme affin de* Z^+ *sur l'ensemble des éléments de* C *majorés par un multiple de* φ.

(i) Soit ψ un élément de C. Il est K. M. S. pour $t \mapsto \sigma_t$ avec la constante β. Pour tout $x \in \mathfrak{N}_\psi \cap \mathfrak{N}_\psi^*$ et tout $y \in \mathfrak{N}_\psi \cap \mathfrak{N}_\psi^* \cap M_\varphi$, il existe donc une fonction F continue et bornée sur la bande B des $z \in \mathbf{C}$ tels que $0 \leq \operatorname{Im} z \leq \beta$ et holomorphe dans B telle que

$$F(t) = \dot{\psi}[\sigma_t(y)\,x], \qquad F(t + i\beta) = \dot{\psi}[x\sigma_t(y)] \quad \text{pour tout } t \in \mathbf{R}.$$

Comme φ est fidèle, l'ensemble des σ_t, où $t \in \mathbf{R}$, est le groupe des automorphismes modulaires de M définis par φ. D'après le lemme 5.4, M_φ est l'ensemble des éléments de M fixes pour ce groupe. On a donc $\sigma_t(y) = y$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. On en déduit que F est constante sur $\mathbf{R}$, donc sur B. On a donc

$$\dot{\psi}(yx) = F(0) = F(i\beta) = \dot{\psi}(xy).$$

Cela montre que $\mathfrak{N}_{\psi_0}$ contient $\mathfrak{N}_\psi \cap \mathfrak{N}_\psi^* \cap M_\varphi$. Cet ensemble contient $\mathfrak{M}_\psi \cap M_\varphi$ qui est lui-même ultrafaiblement dense dans M_φ d'après la proposition 5.7. Ainsi, l'adhérence ultrafaible M_ψ de $\mathfrak{N}_{\psi_0}$ contient M_φ, et ψ est strictement semi-fini. Si ψ est lui aussi fidèle, on a de même $M_\psi \subset M_\varphi$, d'où $M_\psi = M_\varphi$. D'après le lemme 5.4, on a $T_\psi = T$.

(ii) Soient ψ et τ deux éléments de C. Le poids $\psi + \tau$ est évidemment ultrafaiblement s. c. i., à valeurs finies sur $\mathfrak{M}_\psi^+ \cap \mathfrak{M}_\tau^+$. D'après la proposition 5.7, $\mathfrak{M}_\psi^+ \cap \mathfrak{M}_\tau^+$ est ultrafaiblement dense dans M^+, donc $\psi + \tau$ est semi-fini. Comme on a $\mathfrak{N}_{\psi+\tau} = \mathfrak{N}_\psi \cap \mathfrak{N}_\tau$, on vérifie facilement que $\psi + \tau$ est K. M. S. pour $t \mapsto \sigma_t$ avec la constante β; c'est un élément de C. Comme $\lambda\psi \in C$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^+$ et tout $\psi \in C$, C est un cône convexe saillant.

Soit ψ un élément de C. Montrons que sa restriction ψ_1 à M_φ^+ est un élément de Ω, et que $\psi = \psi_1 \circ T$. Sur M_ψ, $\psi_0 = \psi \mid M_\psi^+$ est une trace normale semie-finie (prop. 3.8). Nous venons de voir que $M_\varphi \subset M_\psi$ et que $\mathfrak{N}_{\psi_1} = \mathfrak{N}_{\psi_0} \cap M$ est ultrafaiblement dense dans M_φ. Il en résulte que $\psi_1 = \psi_0 \mid M_\psi^+$ est une trace normale semi-finie sur M_φ.

D'après la proposition 5.2, le support q de ψ est dans le centre Z de M. D'après [4] (lemme 4.10), les éléments de Z sont invariants par les automorphismes modulaires définis par φ. Conpte tenu du lemme 5.4, on a donc $Z \subset M_\varphi$, d'où $q \in M_\varphi \subset M_\psi \subset M$. On en déduit que q est le support des trois poids $\psi_1 = \psi \mid M^+$, $\psi_0 = \psi \mid M_\psi^+$ et ψ. D'après le lemme 2.4, il existe dans $\mathfrak{M}_{\psi_1}$ une famille $(p_i)_{i\in I}$ de projecteurs, deux à deux orthogonaux, de somme égale à q. Ces projecteurs sont dans l'image $qM_\psi q$ de T_ψ; pour tout $x \in \mathfrak{M}_\psi^+$, on a donc

$$\psi(x) = \psi_0[T_\psi(x)] = \psi_0\left[T_\psi(x)^{1/2}\left(I - q + \sum_{i\in I} p_i\right) T_\psi(x)^{1/2}\right]$$

$$= \psi_0[T_\psi(x)^{1/2}(I-q)\, T_\psi(x)^{1/2}] + \sum_{i\in I} \psi_0[T_\psi(x)^{1/2}\, p_i\, T_\psi(x)^{1/2}]$$

$$= \sum_{i\in I} \psi_0[p_i T_\psi(x)\, p_i] = \sum_{i\in I} \psi_0[T_\psi(p_i x p_i)] = \sum_{i\in I} \psi(p_i x p_i).$$

Chacune des formes $f_i : x \mapsto \psi(p_i x p_i)$ est positive normale, invariante par σ_t pour $t \in \mathbf{R}$ (d'après le lemme 5.5). D'après [11] (prop. 3), on a $f_i = g_i \circ T$, où nous posons $g_i = f_i \mid M_\varphi$. Pour $x \in M^+$, on a donc

$$\psi(x) = \sum_{i\in I} f_i(x) = \sum_{i\in I} g_i[T(x)] = \psi_1[T(x)].$$

On vérifie alors facilement que $\psi \mapsto \psi \mid M_\varphi^+$ et $\psi_1 \mapsto \psi_1 \circ T$ sont des isomorphismes affins réciproques entre C et un sous-cône C_1 de Ω.

Vérifions que C_1 est stable pour la réticulation de Ω. Soient τ_1 et τ_2 des éléments de C_1, et notons τ_3 et τ les traces $\tau_1 + \tau_2$ et $\tau_1 \wedge \tau_2$. Soient ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ les poids sur M^+ obtenus en composant ces traces avec T. La trace $\tau_1 \wedge \tau_2$ peut être définie de la façon suivante. Le support p de τ_3 est égal à celui de $\psi_3 \in C$ (*voir* [4], lemme 3.3 par exemple). Il est central d'après la proposition 5.2. Comme $\tau_3 \mid M^+ p$ est fidèle, il existe dans le centre Zp de Mp des opérateurs positifs uniques t_1, t_2 tels que

$$\tau_1(x) = \tau_3(t_1^{1/2} x t_1^{1/2}), \qquad \tau_2(x) = \tau_3(t_2^{1/2} x t_2^{1/2}) \quad \text{pour tout } x \in \mathfrak{M}_{\tau_3}.$$

Soit t la borne inférieure de t_1 et t_2 dans Zp; τ est défini sur M^+ en posant $\tau(x) = \tau_3(t^{1/2} x t^{1/2})$. On a $t \in Z \subset M_\varphi$, d'où, pour tout $x \in M^+$,

$$\psi(x) = \tau_3[T(x)\, t] = \tau_3[T(xt)] = \psi_3(xt) = \psi_1(xt) + \psi_2(xt).$$

D'après le lemme 5.6, ψ est un élément du cône C.

(iii) Le lemme 5.6 montre que tout poids $x \mapsto \varphi(xa)$, où $a \in Z^+$, est un élément de C majoré par $\| a \| \varphi$ sur M^+. Réciproquement, supposons que $\psi \in C$ soit majoré par un multiple $\lambda\varphi$ de φ. Alors $\psi_1 = \psi \mid M_\varphi^+$ est une trace semi-finie majorée par $\lambda\varphi_0$, et on a $\psi = \psi_1 \circ T$. Il existe alors un opérateur positif a dans le centre de M_φ, unique tel que

$$\psi_1(y) = \varphi_0(ay) = \varphi_0(ya) \quad \text{pour tout } y \in M_\varphi^+.$$

Pour tout $x \in M^+$, on a alors

$$\psi(x) = \psi_1[T(x)] = \varphi_0[T(x)\,a] = \varphi_0[T(xa)] = \varphi(xa),$$

et de même $\psi(x) = \varphi(ax)$. Montrons que a est dans le centre Z de M. Soient x, y des éléments de $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^* \subset \mathfrak{N}_\psi \cap \mathfrak{N}_\psi^*$. D'après le corollaire 3.14, ya et ay sont des éléments de $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$. Considérons les fonctions F et G que les poids φ et ψ associent respectivement aux couples (x, ya) et (x, y). Pour $t \in \mathbf{R}$, on a

$$G(t) = \dot{\psi}[\sigma_t(x)\,y] = \dot{\varphi}[\sigma_t(x)\,ya] = F(t).$$

Les fonctions G et F qui coïncident sur $\mathbf{R}$ sont égales sur la bande où elles sont définies. On a donc, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\dot{\varphi}[ya\sigma_t(x)] = F(t + i\beta) = G(t + i\beta) = \dot{\psi}[y\sigma_t(x)] = \dot{\varphi}[ay\sigma_t(x)].$$

Fixons t. Si x décrit $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$, $\sigma_t(x)$ décrit aussi cet ensemble. On a donc

$$\dot{\varphi}[(ya - ay)\,z] = 0 \quad \text{pour tout } z \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*.$$

La densité de $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$ dans H_φ montre que $ya = ay$ pour tout $y \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$, et a est dans le centre de M.

5.9. Corollaire. — *Soient M un facteur, $t \mapsto \sigma_t$ un groupe à un paramètre d'automorphismes de M, β un nombre > 0, φ un poids strictement semi-fini, ultrafaiblement s. c. i., K. M. S. pour $t \mapsto \sigma_t$ avec la constante β. Si φ est non nul, tout autre poids sur M^+ qui possède ces propriétés est proportionnel à φ.*

Soit C l'ensemble des poids possédant les propriétés énoncées. Si C ne se réduit pas au poids identiquement nul, il existe un élément $\varphi \in C$ non nul. D'après la proposition 5.2, le support p de φ est un projecteur central. On a donc $p = I$, et φ est fidèle. Soit alors ψ un autre élément de C. d'après la proposition 5.8, $\tau = \varphi + \psi$ possède toutes les propriétés de φ que nous avons citées, y compris la fidélité. Il existe [d'après la proposition 5.8-(iii)], des éléments a, b positifs du centre Z de M tels que $\varphi(x) = \tau(xa)$ et $\psi(x) = \tau(xb)$ pour tout $x \in M^+$. Ces éléments sont des scalaires, et $a \neq 0$, car $\varphi \neq 0$, donc ψ est un multiple scalaire de φ.

5.10. Proposition. — *Soient M une algèbre de von Neumann, $t \mapsto \sigma_t$ un groupe à un paramètre d'automorphismes de M, β un nombre > 0. L'ensemble C des poids strictement semi-finis, ultrafaiblement s. c. i., K. M. S. pour $t \mapsto \sigma_t$ avec la constante β est un cône convexe. Si $(\varphi_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de C à supports deux à deux orthogonaux, la somme de ces poids est encore un élément de C. L'ensemble des supports des éléments de C possède un plus grand élément qui est un projecteur central de M.*

Soient φ et ψ deux éléments de C, et montrons que $\varphi + \psi$ est un élément de C. Seul le fait que $\varphi + \psi$ soit strictement semi-fini est peu évident. Le support p de φ est dans le centre Z de M (prop. 5.2) et invariant par les automorphismes σ_t. D'après le lemme 5.4, les poids $\psi_1 : x \mapsto \psi(xp)$ et $\psi_2 : x \mapsto \psi[x(I - p)]$ sont strictement semi-finis et K. M. S. pour $t \mapsto \sigma_t$ avec la constante β. Le poids $\varphi + \psi_1$ a un support $\leqq p$. Comme φ est fidèle sur Mp, $\varphi + \psi_1$ est strictement semi-fini, K. M. S. pour $t \mapsto \sigma_t \mid Mp$ sur Mp (d'après la proposition 5.8). Il est identiquement nul sur $M^+(I - p)$. Donc $\varphi + \psi_1$ est strictement semi-fini sur M. D'après la proposition 4.9, $(\varphi + \psi_1) + \psi_2 = \varphi + \psi$ est strictement semi-fini.

Soit $(\varphi_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de C dont les supports $(p_i)_{i \in I}$ sont deux à deux orthogonaux, et posons $\varphi(x) = \sum_{i \in I} \varphi_i(x)$ pour $x \in M^+$. D'après la proposition 4.9, φ est un poids strictement semi-fini et ultrafaiblement s. c. i. On a

$$\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^* = \bigcap_{i \in I} (\mathfrak{N}_{\varphi_i} \cap \mathfrak{N}_{\varphi_i}^*).$$

D'après la proposition 4.5-(ii), pour tout $x \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$, les éléments $\Lambda_\varphi x p_i$ sont deux à deux orthogonaux de somme $\Lambda_\varphi x$. La partie hermitienne de $\sum_{i \in I} (\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*) p_i$ est donc partout dense dans celle de $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$ pour la structure préhilbertienne définie par φ. Comme $p_i \in M_{\varphi_i}$, on a

$$(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*)\, p_i \subset \mathfrak{N}_{\varphi_i} \cap \mathfrak{N}_{\varphi_i}^* \quad \text{(corol. 3.15).}$$

Comme φ_i est K. M. S. pour $t \mapsto \sigma_t$ avec la constante β, pour $a, b \in (\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*)\, p_i \subset \mathfrak{N}_{\varphi_i} \cap \mathfrak{N}_{\varphi_i}^*$ il existe sur la bande des $z \in \mathbf{C}$ tels que $0 \leqq \operatorname{Im} z \leqq \beta$ une fonction F telle que

$$F(t) = \dot{\varphi}_i[\sigma_t(a)\, b] = \dot{\varphi}[\sigma_t(a)\, b], \qquad F(t + i\beta) = \dot{\varphi}_i[b\,\sigma_t(a)] = \dot{\varphi}[b\,\sigma_t(a)]$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$. On voit donc que l'on sait associer une telle fonction à tout couple d'éléments de X. D'après le lemme 5.3, φ est K. M. S. pour $t \mapsto \sigma_t$ avec la constante β.

Soit e la borne supérieure des supports des éléments de C dans Z. Considérons une famille maximale $(p_i)_{i \in I}$ de projecteurs non nuls de Z qui soient deux à deux orthogonaux et supports d'éléments de C. Pour tout $i \in I$, soit $\varphi_i \in C$ de support p_i. D'après ce qui précède, le poids $\varphi : x \mapsto \sum_{i \in I} \varphi_i(x)$ est un élément de C et son support est $p = \sum_{i \in I} p_i$. Si $p \neq e$, il existe un élément ψ de C dont le support q vérifie $(e - p)\, q \neq 0$. Le projecteur $r = (e - p)\, q$ est un élément de $\mathbf{Z}$. D'après le lemme 5.6, le poids $x \mapsto \psi(xr)$ est un élément de C et son support est r. La famille $(p_i)_{i \in I}$ n'est pas maximale, ce qui est absurde. Donc $p = e$.

5.11. Proposition. — *Soient M une algèbre de von Neumann, $t \mapsto \sigma_t$ un groupe à un paramètre d'automorphismes de M, β un nombre > 0, C le cône convexe des poids strictement semi-finis, ultrafaiblement s. c. i. sur M^+ et K. M. S. pour $t \mapsto \sigma_t$ avec la constante β. Pour qu'un élément φ de C appartienne à une génératrice extrémale de C, il faut et il suffit que $\pi_\varphi(M)$ soit un facteur.*

Soit φ un élément de C. Pour que φ appartienne à une génératrice extrémale de C, il faut et il suffit que tout élément ψ de C majoré par un multiple scalaire de φ soit proportionnel à φ. Un tel poids ψ s'annule sur le noyau K de la représentation π_φ. Le support p de φ étant un projecteur central, on a $K = M(I - p)$, et la restriction de π_φ à Mp est un isomorphisme de Mp sur $\pi_\varphi(M)$. La proposition 5.8-(iii) montre que φ est sur une génératrice extrémale de C si et seulement si le centre de $\pi_\varphi(M)$ est réduit aux scalaires.

6. Produit tensoriel de poids strictement semi-finis et ultrafaiblement s. c. i.

En application de ce qui précède, nous allons étudier le produit tensoriel de certains poids. Soient M et N deux algèbres de von Neumann, $M \otimes N$ l'algèbre de von Neumann produit tensoriel de M et N. Pour éviter toute confusion, nous noterons $\underset{a}{\otimes}$ toute construction tensorielle relevant de l'algèbre pure, et $\otimes$ le prolongement topologique, s'il existe, de ce même objet. En particulier, $M \underset{a}{\otimes} N$ désignera le produit tensoriel algébrique de M et N; si f et g sont deux formes linéaires ultrafaiblement continues sur M et N, $f \underset{a}{\otimes} g$ désignera la forme linéaire définie sur $M \underset{a}{\otimes} N$, produit tensoriel algébrique de f et g, et $f \otimes g$ désignera le prolongement ultrafaiblement continu de cet élément à $M \otimes N$.

6.1. Lemme. — *Soient M, N deux algèbres de von Neumann, f, g deux formes linéaires positives normales sur M et N de supports respectifs p et q. Alors $p \otimes q$ est dans $M \otimes N$ le support de $f \otimes g$.*

Quitte à faire une ampliation des espaces hilbertiens H et K de M et N, on peut supposer que $f = \omega_\alpha$ et que $g = \omega_\beta$, où $\alpha \in H$ et $\beta \in K$. Comme $f \otimes g$ et $\omega_{\alpha \otimes \beta}$ coïncident sur $M \underset{a}{\otimes} N$, ces formes normales sont égales. Les supports de f, g, $f \otimes g$ sont donc respectivement

$$p = E_\alpha^{M'}, \qquad q = E_\beta^{N'}, \qquad r = E_{\alpha \otimes \beta}^{(M \otimes N)'}.$$

D'après [17] (th. 12.3), on a $(M \otimes N)' = M' \otimes N'$. On en déduit aussitôt que $r = p \otimes q$.

6.2 Proposition. — *Soient M et N deux algèbres de von Neumann, φ et ψ deux poids ultrafaiblement s. c. i. et strictement semi-finis sur M^+ et N^+, $(f_i)_{i \in I}$ [resp. $(g_j)_{j \in J}$] une famille de formes linéaires positives normales à supports deux à deux orthogonaux de somme égale à φ sur M^+ (resp. à ψ sur N^+).*

(*i*) *$x \mapsto \tau(x) = \sum_{i,j} (f_i \otimes g_j)(x)$ est sur $(M \otimes N)^+$ un poids strictement semi-fini, ultrafaiblement s. c. i. Ce poids dépend seulement de φ et de ψ et non des familles (f_i) et (g_j) utilisées pour le définir; son support est le produit tensoriel des supports de φ et de ψ. L'algèbre $\mathfrak{M}_\tau$ contient $\mathfrak{M}_\varphi \underset{a}{\otimes} \mathfrak{M}_\psi$, et on a $\dot{\tau} \mid \mathfrak{M}_\varphi \underset{a}{\otimes} \mathfrak{M}_\psi = \dot{\varphi} \underset{a}{\otimes} \dot{\psi}$; tout autre poids θ ultrafaiblement semi-continu inférieurement sur $(M \otimes N)^+$, et vérifiant ces deux conditions, est tel que $\mathfrak{M}_\tau \subset \mathfrak{M}_\theta$ et $\dot{\tau} = \dot{\theta} \mid \mathfrak{M}_\tau$.*

(ii) *On suppose en outre que φ (resp. ψ) est K. M. S. pour un groupe à un paramètre $t \mapsto \sigma_t$ (resp. $t \mapsto \rho_t$) d'automorphismes avec une constante $\beta > 0$. Alors il existe sur $M \otimes N$ un poids ultrafaiblement s. c. i. τ, et un seul, vérifiant $\mathfrak{M}_\varphi \underset{a}{\otimes} \mathfrak{M}_\psi \subset \mathfrak{M}_\tau$ et $\dot{\tau} \mid \mathfrak{M}_\varphi \underset{a}{\otimes} \mathfrak{M}_\psi = \dot{\varphi} \underset{a}{\otimes} \dot{\psi}$, et qui soit K. M. S. avec la constante β pour le groupe $t \mapsto \sigma_t \otimes \rho_t$ d'automorphismes de $M \otimes N$. Ce poids est égal au poids précédemment décrit.*

(i) Il est clair que τ est un poids ultrafaiblement s. c. i. sur $(M \otimes N)^+$. D'après le lemme 6.1, τ est somme de formes linéaires positives normales à supports deux à deux orthogonaux; il est donc strictement semi-fini (prop. 4.2). Les projecteurs

$$p = \sum_{i \in I} p_i, \qquad q = \sum_{j \in J} q_j, \qquad r = \sum_{i,j} p_i \otimes q_j$$

sont les supports respectifs de φ, ψ, τ. Ils vérifient $r = p \otimes q$. Les projecteurs

$$(p_i \otimes q_j)_{i,j \in I \times J}, \qquad (p_i \otimes (I - q))_{i \in I},$$
$$((I - p) \otimes q_j)_{j \in J}, \qquad (I - p) \otimes (I - q)$$

sont deux à deux orthogonaux, de somme égale à I, et tous contenus dans l'algèbre $A = \mathfrak{M}_\varphi \underset{a}{\otimes} \mathfrak{M}_\psi$. En vertu de la proposition 4.10, tout autre poids θ ultrafaiblement s. c. i. sur $(M \otimes N)^+$, tel que $A \subset \mathfrak{M}_\theta$ et $\dot{\theta} \mid A = \dot{\varphi} \underset{a}{\otimes} \dot{\psi}$, coïncide avec τ sur $\mathfrak{M}_\tau^+$.

En particulier, considérons d'autres familles de formes linéaires positives (h_α) et (k_β) à supports deux à deux orthogonaux, de sommes respectives φ et ψ sur M^+ et N^+. Appliquons ce qui précède à la somme θ sur $(M \otimes N)^+$ des formes $h_\alpha \otimes k_\beta$. On aura $\mathfrak{M}_\tau \subset \mathfrak{M}_\theta$ et $\dot{\tau} = \dot{\theta} \mid \mathfrak{M}_\tau$, et de même $\mathfrak{M}_\theta \subset \mathfrak{M}_\tau$, d'où $\mathfrak{M}_\theta = \mathfrak{M}_\tau$ et $\theta = \tau$.

(ii) Supposons en outre que φ et ψ soient K. M. S. avec la constante β pour les groupes à un paramètre d'automorphismes $t \mapsto \sigma_t$ et $t \mapsto \rho_t$. Montrons que τ est alors K. M. S. avec la constante β pour le groupe à un paramètre $t \mapsto \sigma_t \otimes \rho_t$ d'automorphismes de $M \otimes N$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, posons $\alpha_t = \sigma_t \otimes \rho_t$. D'après le lemme 5.5, chacune des formes f_i : $x \mapsto \dot{\varphi}(p_i x p_i)$ est invariante par σ_t pour tout $t \in \mathbf{R}$. De même, les formes $(g_j)_{j \in J}$ sont invariantes par les automorphismes ρ_t. Les formes $f_i \otimes g_j$, où $i \in I$, $j \in J$, sont invariantes par les automorphismes α_t pour $t \in \mathbf{R}$; leur somme τ sur $(M \otimes N)^+$ est elle aussi invariante par α_t pour $t \in \mathbf{R}$. Posons $A = \mathfrak{M}_\varphi \underset{a}{\otimes} \mathfrak{M}_\psi$.

Considérons le poids θ défini par l'algèbre hilbertienne à gauche $\mathfrak{A}_\varphi \underset{a}{\otimes} \mathfrak{A}_\psi$. D'après le théorème 11.1 de [17], si on identifie M et $\mathfrak{L}(\mathfrak{A}_\psi)$, et de même N et $\mathfrak{L}(\mathfrak{A}_\varphi)$, $M \otimes N$ est identifiable à $\mathfrak{L}\left(\mathfrak{A}_\varphi \underset{a}{\otimes} \mathfrak{A}_\psi\right)$, et θ peut être considéré comme un poids sur $M \otimes N$. Quitte à faire un changement de variable sur l'axe réel, on peut supposer que $\beta = 1$. Alors $t \mapsto \sigma_t$ et $t \mapsto \rho_t$ sont les automorphismes modulaires définis par $\mathfrak{A}_\varphi$ et $\mathfrak{A}_\psi$ [(4), prop. 4.8). D'après le théorème 11.1 de [17] et sa démonstration, $t \mapsto \sigma_t \otimes \rho_t = \alpha_t$ est alors le groupe des automorphismes modulaires définis par $\mathfrak{A}_\varphi \underset{a}{\otimes} \mathfrak{A}_\psi$. Le poids θ est donc ultrafaiblement s. c. i. et K. M. S. avec la constante 1 pour $t \mapsto \alpha_t$ ([4], th. 2.11 et prop. 4.4). Pour $\xi \in \mathfrak{A}_\varphi$ et $\eta \in \mathfrak{A}_\psi$, la définition de θ donne

$$\begin{aligned}\theta([\pi(\xi) \otimes \pi(\zeta)]^*[\pi(\xi) \otimes \pi(\zeta)]) &= \theta[\pi(\xi \otimes \zeta)^* \pi(\xi \otimes \zeta)] \\ &= (\xi \otimes \zeta \mid \xi \otimes \zeta) = (\xi \mid \xi)(\zeta \mid \zeta) = \varphi[\pi(\xi)^* \pi(\xi)]\, \psi[\pi(\zeta)^* \pi(\zeta)].\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathfrak{M}_\theta \supset A$ et que $\dot{\theta} \mid A = \dot{\varphi} \underset{a}{\otimes} \dot{\psi}$. D'après ([4], th. 2-11), θ est ultrafaiblement s. c. i. sur $(M \otimes N)^+$. D'après (i) et les vérifications précédentes, on a $\mathfrak{M}_\tau \subset \mathfrak{M}_\theta$ et $\dot{\theta} \mid \mathfrak{M}_\tau = \dot{\tau}$, d'où $\mathfrak{N}_\tau \cap \mathfrak{N}_\tau^* \subset \mathfrak{N}_\theta \cap \mathfrak{N}_\theta^*$. Comme θ est K. M. S. pour $t \mapsto \alpha_t$, on en déduit que τ vérifie la condition (*b*) de la définition des poids K. M. S. Ainsi τ est K. M. S. pour $t \mapsto \alpha_t$ avec la constante β.

Sur $M \otimes N$, considérons un autre poids θ tel que $A \subset \mathfrak{M}_\theta$ et $\dot{\theta} \mid A = \dot{\tau} \mid A$, qui soit ultrafaiblement s. c. i. et K. M. S. pour $t \mapsto \alpha_t$ avec la constante β. Montrons que θ est nécessairement égal à τ. D'après la proposition 5.2-(ii), le support r de τ est un projecteur central, et d'après (i), on a

$$I - r = \sum_i p_i \otimes (I - q) + \sum_j (I - p) \otimes q_j + (I - p) \otimes (I - q).$$

Tous les projecteurs du second membre sont des éléments de A sur lesquels τ s'annule. Comme $\dot{\theta} \mid A = \dot{\tau} \mid A$ [d'après (i)], θ est nul sur tous ces projecteurs, et la semi-continuité ultrafaible de θ donne

$$\theta(I - r) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \theta \mid (M \otimes N)^+(I - r) = 0 = \tau \mid (M \otimes N)^+(I - r).$$

Quitte à restreindre toutes les données à $(M \otimes N)\, r$, nous pouvons désormais supposer que τ est fidèle. D'après la proposition 5.8-(ii), il existe une trace normale semi-finie θ_1 sur M telle que $\theta = \theta_1 \circ T_\tau$. D'après (i), on a $\mathfrak{M}_\tau \subset \mathfrak{M}_\theta$, et $\dot{\theta}$ coïncide avec $\dot{\tau}$ sur $\mathfrak{M}_\tau$ Il en résulte que θ_1 coïncide avec $\tau_0 = \tau \mid M_\tau^+$ sur $\mathfrak{M}_{\tau_0}^+$. La proposition 3.3 donne alors

$$\theta_1 = \tau_0 \quad \text{et} \quad \theta = \theta_1 \circ T_\tau = \tau_0 \circ T_\tau = \tau.$$

6.3. Définition. — Si φ et ψ sont deux poids strictement semi-finis et ultrafaiblement s. c. i. sur deux algèbres de von Neumann M et N, le poids τ sur $M \otimes N$ étudié dans la proposition 6.2 sera appelé le produit tensoriel de φ et ψ, et noté $\varphi \otimes \psi$.

6.4. Corollaire. — *Soient φ et ψ deux poids strictement semi-finis, ultrafaiblement s. c. i. et fidèles sur deux algèbres de von Neumann M et N, τ le produit tensoriel de ces poids. Notons $\mathfrak{A}_\varphi$, $\mathfrak{A}_\psi$, $\mathfrak{A}_\tau$ les algèbres hilbertiennes à gauche définies par ces poids. Alors $\mathfrak{A}_\tau$ est isomorphe à l'algèbre hilbertienne à gauche achevée de $\mathfrak{A}_\varphi \underset{a}{\otimes} \mathfrak{A}_\psi$.*

6.5. Corollaire ([8], th. 1). — *Soient φ et ψ deux traces normales semi-finies sur des algèbres de von Neumann M et N. Alors $\tau = \varphi \otimes \psi$ est sur $M \otimes N$ la seule trace normale semi-finie telle que*

$$\mathfrak{M}_\varphi \underset{a}{\otimes} \mathfrak{M}_\psi \subset \mathfrak{M}_\tau \qquad \text{et} \qquad \dot{\tau} \mid \mathfrak{M}_\varphi \underset{a}{\otimes} \mathfrak{M}_\psi = \dot{\varphi} \underset{a}{\otimes} \dot{\psi}.$$

C'est un cas particulier de la proposition 6.2-(ii), où $\sigma_t = I$ et $\rho_t = I$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ (*voir* [4], prop. 3.2).

6.6 Corollaire. — *Soient φ et ψ deux poids strictement semi-finis et ultrafaiblement s. c. i. sur deux algèbres de von Neumann M et N. Alors $\pi_{\varphi \otimes \psi}$ est unitairement équivalente à $\pi_\varphi \otimes \pi_\psi$. En particulier, $\pi_{\varphi \otimes \psi}$ est factorielle si et seulement si π_φ* et *π_ψ le sont.*

Soient $(f_i)_{i \in I}$ et $(g_j)_{j \in J}$ deux familles de formes linéaires positives normales à supports deux à deux orthogonaux sur M et N respectivement de sommes égales à φ et ψ sur M^+ et N^+. Pour tout $i \in I$ *et* tout $j \in J$, $\xi_{f_i} \otimes \xi_{g_j}$ est un vecteur totalisateur pour la représentation $\pi_{f_i} \otimes \pi_{g}$ de

$M \otimes N$, de sorte que la forme

$$(\omega_{\xi_{f_i}} \otimes \omega_{\xi_{g_j}}) \circ (\pi_{f_i} \otimes \pi_g) = f_i \otimes g_j$$

définit une représentation $\pi_{f_i \otimes g_j}$ unitairement équivalente à $\pi_{f_i} \otimes \pi_{g_j}$ ([5], 2.4.1). Les propositions 4.5-(ii) et 6.2 donnent alors

$$\pi_{\varphi \otimes \psi} \simeq \bigoplus_{i, j} \pi_{f_i \otimes g_j} \simeq \bigoplus_{i, j} (\pi_{f_i} \otimes \pi_{g_j}) \simeq \Big(\bigoplus_{i \in I} \pi_{f_i} \Big) \otimes \Big(\bigoplus_{j \in J} \pi_{g_j} \Big) \simeq \pi_\varphi \otimes \pi_\psi.$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Combes (F.). — Poids sur une C^*-algèbre, *J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. 47, 1968, p. 57-100.

[2] Combes (F.). — Sur les faces d'une C^*-algèbre, *Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 93, 1969, p. 37-62.

[3] Combes (F.). — Poids associé à une algèbre hilbertienne généralisée, *C. R. Acad Sc. Paris*, t. 270, 1970, série A, p. 33-36.

[4] Combes (F.). — *Poids associé à une algèbre hilbertienne à gauche* (à paraître).

[5] Dixmier (J.). — *Les C^*-algèbres et leurs représentations.* — Paris, Gauthier-Villars, 1964 (*Cahiers scientifiques*, 29).

[6] Dixmier (J.). — *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien* (*algèbres de von Neumann*), 2e édition. — Paris, Gauthier-Villars, 1969 (*Cahiers scientifiques*, 25).

[7] Dixmier (J.). — Existence de traces non normales, *C. R. Acad., Sc. Paris*, t. 262, 1966, série A, p. 1107-1108.

[8] Guichardet (A.). — Caractères et représentations de produits tensoriels de C^*-algèbres, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 81, 1964, p. 189-206.

[9] Guichardet (A.). — Sur le produit tensoriel des C^*-algèbres [en russe], *Dokl. Akad. Nauk. S. S. S. R.*, t. 160, 1965, p. 986-989 et t. 168, 1967, p. 1231.

[10] Herman (R. H.) and Takesaki (M.). — *States and automorphism groups of operator algebras* (à paraître).

[11] Kovács (I.) and Szücs (J.). — Ergodic type theorems in von Neumann algebras, *Acta. Sc. Math. Szeged*, t. 27, 1966, p. 233-246.

[12] Loomis (L. H.). — *An introduction to abstract harmonic analysis.* — New York, Van Nostrand and Co, 1953 (*University Series in higher Mathematics*).

[13] Pedersen (G. K.). — Measure theory for C^*-algebras, *Math. Scand.*, t. 19, 1966, p. 131-145.

[14] Pedersen (G. K.). — Measure theory for C^*-algebras, II, *Math. Scand.*, t. 22, 1968, p. 63-74.

[15] Pedersen (G. K.). — Measure theory for C^*-algebras, III, *Math. Scand.*, t. 25, 1969, p. 71-93.

[16] Perdrizet (F.). — *Éléments positifs relativement à une algèbre hilbertienne à gauche* (à paraître).

[17] Takesaki (M.). — *Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications.* — Berlin, Heidelberg, New York, Springer Verlag, 1970 (*Lecture Notes in Mathematics*, 128).

[18] Takesaki (M.). — *Disjointness of the K. M. S. states of different temperatures* (à paraître).

[19] Tomita (M.). — *Quasi-standard von Neumann algebras*, Mimeographied notes, 1967.

[20] Tomita (M.). — Standard forms of von Neumann algebras, Proceedings of the 5th Functional analysis symposium of the Mathematical Society of Japan *Sendai*, 1967).

[21] Tomiyama (M.). — On the projection of norm one in W^*-algebras, III, *Tôhoku Math. J.*, series 2, t. 11, 1959, p. 125-129.

[22] Umegaki (H.). — Conditional expectation in an operator algebra, *Tôhoku Math. J.*, series 2, t. 6, 1954, p. 177-181.

[23] Umegaki (H.). — Conditional expectation in an operator algebra, II, *Tôhoku Math. J.*, series 2, t. 8, 1956, p. 86-100.

[24] Umegaki (H.). — Conditional expectation in an operator algebra, III, *Kôdai Math. Sem. Rep.*, t. 11, 1959, p. 51-64.

François Combes,
28/A, avenue du Panorama,
92-Bourg-la-Reine.

(Texte reçu le 24 septembre 1970.)