

BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE DAZORD

Tores finslériens sans points conjugués

Bulletin de la S. M. F., tome 99 (1971), p. 171-192

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1971__99__171_0

© Bulletin de la S. M. F., 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TORES FINSLÉRIENS SANS POINTS CONJUGUÉS

PAR

PIERRE DAZORD

[Lyon.]

Sommaire.

	Pages.
0. Introduction.....	171
1. Bref rappel de géométrie finslérienne.....	172
2. Formule de Gauss-Bonnet en géométrie finslérienne.....	176
3. Variétés finslériennes compactes sans points conjugués.....	180
4. Scalaire principal.....	187
5. Tores finslériens sans points conjugués.....	189
Bibliographie.....	192

0. Introduction.

Le but de cet article est de démontrer dans le cas finslérien l'analogie du théorème riemannien suivant, dû à HOPF [9].

THÉORÈME DE HOPF. — *Les tores riemanniens à deux dimensions sans points conjugués sont isométriques à des tores riemanniens plats.*

Pour cela, on appellera tore finslérien plat (à deux dimensions) un tore dont la structure finslérienne est obtenue par passage au quotient d'une structure finslérienne de \mathbf{R}^2 invariante par translation.

Si on identifie l'espace tangent à \mathbf{R}^2 , $T\mathbf{R}^2$, à $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ une telle structure finslérienne est définie par une énergie :

$$E : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^+, (x, v) \rightarrow E(v).$$

Le principal résultat prouvé est le suivant :

THÉORÈME. — *Les tores finslériens de Landsberg à deux dimensions sans points conjugués sont isométriques à des tores finslériens plats.*

Pour démontrer ce théorème, on donne une forme nouvelle en dimension 2 à la formule de Gauss-Bonnet en géométrie finslérienne, établie par A. LICHNEROWICZ [10]. Puis on démontre que, pour une variété finslérienne, de dimension $n \geq 2$, (M, E) , sans points conjugués, l'intégrale de la courbure de Ricci sur la variété $U(M)$ des vecteurs tangents d'énergie unité [$E(v) = 1$], munie de la structure riemannienne canoniquement définie par (M, E) , n'est nulle que si (M, E) est à courbure sectionnelle nulle. De cela, il résulte qu'une variété de Landsberg sans points conjugués, homéomorphe à un tore, est à courbure sectionnelle nulle. On introduit alors le scalaire principal J d'une variété finslérienne. On inclut à cet endroit quelques résultats déduits de l'utilisation de ce scalaire et de la formule de divergence d'Akbar-Zadeh [1].

Dans une dernière partie, on établit le théorème proprement dit, ce qui repose sur l'utilisation du scalaire J et les propriétés particulières des géodésiques des tores.

Certains de ces résultats (théorèmes 1, 3 et 4 ci-dessous) ont été annoncés dans une Note aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* [6].

1. Bref rappel de géométrie finslérienne (cf. [5]).

Le fibré tangent d'une variété différentiable M (connexe, C^∞ , paracompacte) sera noté $\pi : TM \rightarrow M$. $\pi_0 : \mathfrak{C}M \rightarrow M$ désigne le sous-fibré des vecteurs tangents non nuls. Une carte locale de M [notée $x \rightarrow (x^i)$] définit canoniquement une carte locale de TM [notée $v \rightarrow (x^i, v^i)$].

Pour tout fibré $F \rightarrow M$, F_x désigne la fibre en x .

DÉFINITION. — Une variété finslérienne est un couple (M, E) d'une variété différentiable et d'une application énergie $E : TM \rightarrow \mathbf{R}^+$, telle que :

- (i) E est C^1 sur TM , C^∞ sur $\mathfrak{C}M$.
- (ii) E est positivement homogène de degré 2 .
- (iii) $\forall x \in M$, le tenseur $g_{ij}(v) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial v^i \partial v^j}$ (tenseur sur $\pi_0^{-1} TM$) est défini positif.

Remarques.

1° Si E est C^2 , (M, E) est une variété riemannienne.

2° La géométrie finslérienne « est » l'étude des problèmes de calcul des variations réguliers positivement homogènes de degré 2 . L'application $v \rightarrow E(v)^{1/2}$ de TM dans \mathbf{R} sera notée L .

La structure finslérienne, donnée sur (M, E) , définit donc une structure euclidienne g sur le fibré $p : \pi_0^{-1} TM \rightarrow \mathfrak{C}M$. Le produit fibré sur M de

deux vecteurs tangents à M , v et X , étant noté $v \times X$, on pose, pour tout couple $(X, Y) \in (T_x M)^2$,

$$g_v(X, Y) = g(v \times X, v \times Y).$$

Si on désigne par $\tilde{\pi}$ le morphisme canonique :

$$\begin{array}{ccc} \pi_0^{-1} TM & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & TM \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathfrak{E}M & \xrightarrow{\pi_0} & M \end{array}$$

ξ et η appartenant à $\pi_0^{-1} vTM$,

$$g(\xi, \eta) = g_p(\xi)(\hat{\pi}\xi, \hat{\pi}\eta).$$

On désigne par $U(M) \rightarrow M$ le fibré des vecteurs tangents d'énergie unité.

— A la structure finslérienne est associée canoniquement une gerbe G sur M au sens de [5]; G est une section du fibré $TTM \rightarrow TM$ pour sa structure naturelle de fibré tangent et pour la structure fibrée définie par π^T , où π^T est l'application linéaire tangente à π ; G est C^1 sur TM et C^∞ sur $\mathfrak{E}M$; enfin G est positivement homogène de degré 2.

— Deux variétés (M, E) et (M', E') sont isométriques par l'isométrie f si f est un difféomorphisme de M sur M' tel que $E' \circ f^T \equiv E$. Si G et G' sont les gerbes respectivement de (M, E) et (M', E') , $G' = (f^T)^T G$.

— La structure finslérienne permet de définir canoniquement une scission $\beta : TTM \rightarrow \pi^{-1} TM$ (resp. $\gamma : \pi^{-1} TM \rightarrow TTM$) de la suite exacte de fibrés sur TM :

$$0 \rightarrow \pi^{-1} TM \xrightarrow{i} TTM \xrightarrow{j} \pi^{-1} TM \rightarrow 0,$$

où $Z \in T_v TM$, $jZ = v \times \pi^T Z$, β et γ sont C^∞ sur $\mathfrak{E}M$ et C^0 sur TM . Enfin $G = \gamma \circ V$, où V désigne la section canonique du fibré $p : \pi^{-1} TM \rightarrow TM$, $v \rightarrow v \times v$.

— On désigne par D la loi de dérivation covariante dans $p : \pi_0^{-1} TM \rightarrow \mathfrak{E}M$, associée à la connexion finslérienne d'Élie Cartan, et par R, P, Q respectivement le premier, le second et le troisième tenseur de courbure d'Élie Cartan. R, P et Q sont des éléments de

$$\pi_0^{-1} TM \otimes \bigotimes^3 \pi_0^{-1} T^*M,$$

où $T^*M \rightarrow M$ est le fibré dual de $TM \rightarrow M$.

— On appelle courbure sectionnelle en $v \in \mathfrak{E}M$ du 2-plan P , contenant v , le scalaire

$$K_v(P) = - \frac{g(R(V, v \times X) V, v \times X)}{g(V, V) g(v \times X, v \times X) - g(V, v \times X)^2},$$

où X est n'importe quel vecteur de P non colinéaire à v . $K_v(P)$ ne dépend que de v et P . De plus, si λ est un réel positif, $K_{\lambda v}(P) = K_v(P)$.

On appelle courbure de Ricci, en $v \in \mathfrak{E}M$, le scalaire

$$\text{Ric } v = - \text{Trace} \{ X \rightarrow R(V, v \times X) V \}.$$

— A la connexion finslérienne est associé un transport par parallélisme le long des arcs C^1 à vitesse non nulle, i. e. si $f: I \rightarrow M$, où I est un intervalle de \mathbf{R} , f est C^1 et $df/dt \neq 0$ pour tout $t \in I$. Si $(a, b) \in I^2$, le transport par parallélisme $\tau_{a,b}^f$ est un isomorphisme de $T_{f(a)}M$ sur $T_{f(b)}M$ qui échange les structures euclidiennes de $T_{f(a)}M$ et $T_{f(b)}M$ relatives respectivement à $(df/dt)(a)$ et $(df/dt)(b)$. D_1 désignant la dérivation covariante relativement au champ canonique d/dt de \mathbf{R} , $X \in T_{f(a)}M$, $\tau_{a,b}^f X = \xi(b)$, où $\xi: [a, b] \rightarrow TM$ est telle que $\pi_0 \xi = f$, et

$$\begin{cases} D_1 \left(\frac{df}{dt} \times \xi(t) \right) = 0, \\ \xi(a) = X. \end{cases}$$

Remarque. — Si f est une application d'un voisinage de 0 dans \mathbf{R} , dans M , f^{-1} désignant l'application $t \rightarrow f(-t)$, on a en général $\tau_{0,-t}^{f^{-1}} \neq \tau_{0,t}^f$.

— Les géodésiques de (M, E) sont les géodésiques de la gerbe G , et peuvent encore être définies comme les courbes autoparallèles de la connexion. G_t désignant le flot de G sur TM , l'unique géodésique maximale γ_v , telle que $(d/dt) \gamma_v(t)|_{t=0} = v$, est définie par

$$t \rightarrow \gamma_v(t) = \pi_0 G_t v.$$

Soit Ω l'ouvert de TM formé des v tels que $G_1 v$ existe; l'application exponentielle de la gerbe $\exp: \Omega \rightarrow M$ est définie par $\exp v = \pi_0 G_1 v$, \exp est C^1 sur Ω , C^∞ sur $\Omega \cap \mathfrak{E}M$ et, pour $t \geq 0$, $\gamma_v(t) \equiv \exp tv$. Les champs de Jacobi le long d'une géodésique γ_v sont les applications X à valeurs dans TM telles que $\pi_0 X = \gamma_v$, et

$$D_1 D_1 \xi = R(p, \xi) p,$$

où

$$\xi = \frac{d\gamma_v}{dt} \times X;$$

R est le premier tenseur de courbure de Cartan;

$$p = V_0 \frac{d\gamma_\nu}{dt}.$$

— A la connexion finslérienne est associé un « tenseur de torsion finslérienne », $T \in \pi^{-1} \circ TM \otimes \otimes^2 \pi_0^{-1} T^* M$. j désignant le morphisme de fibrés vectoriels canoniques $TTM \rightarrow \pi^{-1} PM$, on a, en posant $J : TTM \rightarrow PPM$, $J = i_0 j$, $(Z_1, Z_2) \in T_\nu \mathfrak{E}M$,

$$(D_j)(Z_1, JZ_2) = T(jZ, jZ_2).$$

En coordonnées locales naturelles, $T_{ijk} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k}$.

On désigne par $S \in \pi_0^{-1} TM \otimes \otimes^2 \pi_0^{-1} T^* M$ le tenseur $S = D_G T$, et par $\overset{*}{T}$ l'élément de $\pi_0^{-1} TM$ défini par contraction à partir de T , $(\overset{*}{T})^i = g^{ij} T_{jr}$. On sait que $\overset{*}{T} = 0$ si, et seulement si, (M, E) est riemannienne (DIECKE). On a évidemment $g(V, \overset{*}{T}) = 0$.

Définition. — Une variété finslérienne est de Landsberg si $S = 0$.

La structure finslérienne permet de munir $\mathfrak{E}M$ d'une structure riemannienne \tilde{g} :

$$(Z_1, Z_2) \in T_\nu \mathfrak{E}M, \quad \tilde{g}(Z_1, Z_2) = g(jZ_1, jZ_2) + g(\beta Z_1, \beta Z_2).$$

On désigne par $(U(M), \tilde{g})$ la structure de sous-variété riemannienne de $(\mathfrak{E}M, \tilde{g})$ dont est naturellement munie $U(M)$.

$\mathfrak{E}M$ [resp. $U(M)$] est munie, d'autre part, d'une structure symplectique (resp. cosymplectique) définie par une 2-forme dA (resp. une 1-forme A),

$$A(Z) = g(V, jZ).$$

Si σ (resp. σ_0) désigne la forme volume de $(\mathfrak{E}M, \tilde{g})$ [resp. $U(M), g$] :

$$\sigma = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{n!} \Lambda^n dA \quad \left[\text{resp. } \sigma_0 = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(n-1)!} A \wedge \Lambda^{n-1} dA \right].$$

Enfin appelons chemin de M , toute application C^0 de l'intervalle $[0, 1]$ dans M continue, C^∞ par morceaux. Pour tout couple de points $(p, q) \in M^2$, on pose

$$d(p, q) = \inf_{c \in W} \int_0^1 L\left(\frac{dc}{dt}\right) dt,$$

où W est l'ensemble des chemins tels que $C(0) = p$, $C(1) = q$.

d a toutes les propriétés d'une distance sauf la symétrie. Par abus de langage, on appellera $d(p, q)$ « distance de p à q ». On définit une véritable distance sur M ,

$$(p, q) \rightarrow |pq| = d(p, q) + d(p, q).$$

On peut montrer [3] que la topologie de M coïncide avec la topologie déduite de la distance $(p, q) \rightarrow |pq|$.

Pour les variétés finslériennes, on peut prouver un « théorème de Hopf-Rinow » (cf. [5]). En particulier, si M est compacte, $d(p, q)$ est réalisée par un arc géodésique joignant p à q .

2. Formule de Gauss-Bonnet.

THÉORÈME 1. — *Si (M, E) est une variété de Landsberg de dimension 2, orientée compacte (connexe), de caractéristique d'Euler-Poincaré, $\chi(M)$*

$$\int_{U(M)} \text{Ric} v \cdot \sigma_0 = 4\pi^2 \chi(M).$$

Démonstration. — On adapte la méthode de BERGER [2] en géométrie riemannienne. On montre d'abord le lemme suivant :

LEMME 1. — *Soit $v \in U(M)$, $\xi \in \pi_0^{-1} v TM$. Alors $\gamma(\xi)$ est tangent à $U(M)$. De plus, $i(\xi)$ est tangent à $U(M)$ si, et seulement si, $g(V, \xi) = 0$.*

On introduit pour toute variété finslérienne (M, E) orientée une $(n-1)$ forme sur $U(M)$ ainsi définie :

$$1^\circ \omega(Z_1, \dots, Z_{n-1}) = 0, \text{ pour un } i \text{ au moins, } \beta(Z_i) = 0.$$

$2^\circ \omega(Z_1, \dots, Z_{n-1}) = 1$ si, pour tout j , $Z_j = i(\xi_j)$, où $g(V, \xi_j) = 0$; $g(\xi_j, \xi_j) = \delta_{ij}$; $(v, \hat{\pi}\xi_1, \dots, \hat{\pi}\xi_{n-1})$ forment un repère direct de M au point πv .

Il résulte de la condition 2° que $\omega|_{U_x(M)}$ est la forme volume de $(U_x(M), \bar{g}|_{U_x(M)})$.

Si (M, E) est une variété finslérienne de dimension 2, la courbure sectionnelle est une application K de $U(M)$ dans \mathbf{R} et, pour tout $v \in U(M)$, $K(v) = \text{Ric} v$.

LEMME 2. — *Si (M, E) est une variété finslérienne de dimension 2 orientée, $\omega \wedge d\omega = -K\sigma_0$.*

Démonstration. — Soit $w \in T_v M$, tel que $g_v(v, w) = 0$, $g_v(v, w) = 0$, $g_v(w, w) = 1$, et (v, w) est un repère direct de M . Posons $G = \gamma(V)$,

$\eta = \gamma(v \times w)$, $\zeta = i(v \times w)$. (G, η, ζ) est un repère orthonormé de $\mathfrak{L}(U(M), \bar{g})$. D'autre part, comme $\omega \circ \gamma = 0$:

$$\omega \wedge d\omega(G, \eta, \zeta) = d\omega(G, \eta),$$

soit

$$\omega \wedge d\omega(G, \eta, \zeta) = -\omega_0 i\beta[G, \eta].$$

Or $\beta[G, \eta] = -R(V, \hat{w})V$ où $\hat{w} = v \times w$.

Donc $\omega \wedge d\omega(G, \eta, \zeta) = -K(v)$, ce qui prouve le lemme puisque $\sigma_0(G, \eta, \zeta) = +1$.

— (S^n, g_0) désigne la sphère unité de \mathbf{R}^{n+1} considérée comme sous-variété riemannienne de \mathbf{R}^{n+1} avec sa structure riemannienne canonique.

DÉFINITION 1 [10]. — Une variété finslérienne (M, E) est de Berwald-Cartan si son troisième tenseur de courbure de Cartan Q est identiquement nul.

En particulier, toute variété finslérienne de dimension 2 est de Berwald-Cartan.

Pour les variétés de Berwald-Cartan, on prouve la proposition suivante :

PROPOSITION 1. — Si (M, E) est une variété de Berwald-Cartan, alors, pour tout $x \in M$, $(U_x M, \bar{g} | U_x M)$ est isométrique à (S^{n-1}, g_0) où $n = \dim M \geq 2$.

Démonstration. — Plusieurs lemmes sont nécessaires.

LEMME 3. — Si (M, E) est de Berwald-Cartan, et si la dimension n de M est supérieure ou égale à 3, $(U_x M, \bar{g} | U_x M)$ est isométrique à (S^{n-1}, g_0) .

En effet, si (M, E) est de Berwald-Cartan, la structure riemannienne, définie sur $\mathfrak{L}_x M : (\mathfrak{L}_x M, \bar{g} | \mathfrak{L}_x M)$, est à courbure sectionnelle nulle. Il résulte alors des formules de Gauss-Codazzi que la sous-variété riemannienne $(U_x M, \bar{g} | U_x M)$ est à courbure sectionnelle constante 1. Comme $n \geq 3$, $U_x M$ est simplement connexe et donc, d'après un théorème d'Élie CARTAN (cf. [2] par exemple), $(U_x M, \bar{g} | U_x M)$ est isométrique à (S^{n-1}, g_0) .

Le lemme suivant est trivial :

LEMME 4. — Si (M, E) et (N, F) sont deux variétés de Berwald-Cartan, alors $(M \times N, E \times F)$ est de Berwald-Cartan.

La proposition 1 sera démontrée quand n aura examiné le cas $n = 2$, ce qui est l'objet du lemme suivant :

LEMME 5. — Si (M, E) est une variété de Berwald-Cartan de dimension 2, $(U_x M, \bar{g} | U_x M)$ est isométrique à (S^1, g_0) .

Démonstration. — Soit \mathbf{R} la droite numérique avec sa structure riemannienne canonique. Il résulte du lemme 4 que la variété $M_1 = M \times \mathbf{R}$ est munie d'une structure de Berwald-Cartan et donc, si $x_1 \in M_1$, g_1 désignant le tenseur métrique de $\pi_0^{-1} TM_1 \rightarrow M_1$, $(U_{x_1}, M_1, \bar{g}_1 | U_{x_1} M_1)$ est isométrique à (S^2, g_0) . Soit ψ cette isométrie. Soit ∇ (resp. $\hat{\nabla}$) la connexion riemannienne de $(\mathfrak{E}_x M, \tilde{g} | \mathfrak{E}_x M)$ (resp. $U_{x_1} M_1, \bar{g}_1 | U_{x_1} M_1$). $\nabla_\zeta \zeta = - (v \times v)$. Donc $\hat{\nabla}_\zeta \zeta = 0$. Il en résulte que, si $x_1 = (x, t)$, $U_x M$ est géodésique de $(U_{x_1} M_1, \bar{g}_1 | U_{x_1} M_1)$. Donc $\psi(U_x M)$ est un grand cercle de (S^2, g_0) , et on en déduit que $(U_x M, \bar{g} | U_x M)$ est isométrique à (S^1, g_0) , ce qui prouve le lemme 5 et achève la démonstration de la proposition 1.

— On désigne par $s \in]0, 2\pi[$ l'arc de (S^1, g_0) . (M, E) étant une variété finslérienne (de dimension 2) compacte, il existe un champ de vecteur \bar{Y} de M n'ayant qu'un nombre fini de zéros. Soit

$$\dot{M} = \{x \in M \mid \bar{Y}_{(x)} \neq 0\}.$$

On définit une section Y du fibré $U(\dot{M}) \rightarrow \dot{M}$ en posant, pour tout $x \in \dot{M}$,

$$Y(x) = \frac{\bar{Y}(x)}{(E(\bar{Y}(x)))^{1/2}}.$$

M étant orientée, il existe, pour tout $x \in \dot{M}$, une isométrie directe unique,

$$\begin{aligned} \varphi_x: (S^1, g_0) &\rightarrow (U_x(M), \bar{g} | U_x(M)), \\ s &\rightarrow \varphi_x(s), \end{aligned}$$

telle que $\varphi_x(o) = Y(x)$.

On désigne par φ l'application de $S^1 \times \dot{M}$ dans $U(\dot{M})$, définie par $\varphi(s, x) = \varphi_x(s)$, et, pour tout $s \in]0, 2\pi[$ par φ_s la section de $U(\dot{M}) \rightarrow \dot{M}$, $x \rightarrow \varphi(s, x)$:

$$\int_{U(M)} \omega \wedge d\omega = \int_{U(\dot{M})} \omega \wedge d\omega = \int_{S^1 \times \dot{M}} \varphi^*(\omega \wedge d\omega).$$

M étant de dimension 2, $\varphi^*\omega = \varphi_x^*\omega + \varphi_s^*\omega$, et φ_x étant une isométrie, $\varphi_x^*\omega = ds$. La 3-forme $\varphi_s^*(\omega \wedge d\omega)$, étant une 3-forme sur M , est nulle. La variété étant de Landsberg $\mathcal{L}(\rho)\omega = 0$ et donc

$$\varphi^*(\omega \wedge d\omega) = ds \wedge d\varphi_s^*\omega.$$

Donc

$$\int_{U(M)} \omega \wedge d\omega = \int_{S^1} ds \int_{\dot{M}} d\varphi_s^*\omega.$$

Or,

$$\int_{\dot{M}} \varphi_s^* d\omega = \int_{\varphi_s(M)} d\omega.$$

$\varphi_s(\dot{M})$ est une sous-variété de $U(M)$ qui peut être considérée comme une variété à bord, de bord $\partial\varphi_s(\dot{M}) = \sum_i a_i U_{m_i}(M)$, où $\{m_i\} = M - \dot{M}$ et où a_i est l'indice de \bar{Y} en m_i . Donc

$$\int_{\dot{M}} \varphi_s^* d\omega = \sum_i a_i \int_{U_{m_i}(M)} \omega,$$

or, $(U_{m_i}(M), \bar{g})$ est isométrique à (S^1, g^0) , donc $\int_{U_{m_i}(M)} \omega = 2\pi$; comme

$$\sum_i a_i = \chi(M) \int_{U(M)} \omega \wedge d\omega = -4\pi^2 \chi(M),$$

donc

$$\int_{U(M)} \text{Ric}(v) \sigma_0 = 4\pi^2 \chi(M).$$

C. Q. F. D.

Cette formule donne une nouvelle expression dans le cas $S = 0$ de la formule d'A. LICHNEROWICZ [10], dont elle peut se déduire en remarquant que $d\omega$ est précisément la forme de Chern restreinte à $U(M)$, et que toute variété finslérienne de dimension 2 est de Berwald-Cartan.

Les variétés de Berwald-Cartan sont telles que les volumes des fibres $(U_x(M), \bar{g} | U_x(M))$ sont tous égaux au volume de la sphère S^{n-1} considérée comme sphère unité dans \mathbf{R}^{n-1} , où $n = \dim M$. Pour ces variétés, il est donc naturel de définir le volume par

$$\text{Vol}(M, E) = \frac{1}{\mathcal{V}_{n-1}} \int_{U(M)} \sigma_0,$$

où \mathcal{V}_{n-1} est le volume de (S^{n-1}, g_0) . En particulier, pour les variétés finslériennes de dimension 2 compactes, on pose

$$\text{Vol}(M, E) = \frac{1}{2\pi} \int_{U(M)} \sigma_0.$$

DÉFINITION. — On dira que, sur une variété finslérienne compacte, la distance de deux points conjugués est toujours supérieure ou égale à un scalaire δ si, pour tout point $x \in M$, et tout arc géodésique $\gamma : \mathbf{R}^+ \rightarrow M$, $\gamma(0) = x$, le premier point conjugué y de x sur γ est tel que $d(x, y) \geq \delta$.

Remarque. — Ceci équivaut à dire que l'application exponentielle de la gerbe (cf. [5]) est de rang maximal, en tout point $x \in M$, sur $B_x(\delta) = \{v \in T_x M \mid L(v) < \delta\}$. De plus, M étant compacte, il existe

toujours un tel $\delta > 0$. Enfin, si on change E en $\rho^2 E$ (ρ constante strictement positive), δ est changé en $\rho\delta$.

Dans [5], on établit le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit (M, E) une variété finslérienne de dimension n compacte connexe, telle que la distance de deux points conjugués soit toujours supérieure ou égale à δ . Le volume \mathcal{V} de $(U(M), \bar{g})$ est tel que*

$$\mathcal{V} \geq \frac{\delta^2}{\pi^2(n-1)} \int_{U(M)} \text{Ric}(v) \sigma_0,$$

et l'égalité n'est atteinte que si la variété est à courbure sectionnelle constante $\frac{\pi^2}{\delta^2}$.

Du théorème 1 et du théorème 2, on déduit alors le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1. — *Soit (S^2, E) une structure de Landsberg sur la sphère, telle que la distance de deux points conjugués soit supérieure ou égale à π , alors*

$$\text{Vol}(S^2, E) \geq 4\pi,$$

et l'égalité n'a lieu que si (S^2, E) est isométrique à (S^2, g_0) .

3. Variétés finslériennes compactes sans points conjugués.

THÉORÈME 3. — *Si (M, E) est une variété finslérienne compacte, de dimension n , sans points conjugués :*

$$\int_{U(M)} \text{Ric} v \sigma_0 \leq 0 \quad \text{et} \quad \int_{U(M)} \text{Ric} v \sigma_0 = 0$$

si, et seulement si, (M, E) est à courbure sectionnelle nulle.

Démonstration. — La première partie du résultat se déduit immédiatement du théorème 2. La démonstration va reposer sur l'utilisation de l'équation de Riccati, ce qui est l'idée de HOPF [9] en géométrie riemannienne de dimension 2 et sur les techniques de comparaisons de [8] adaptées au cas finslérien.

— M étant compacte, les géodésiques sont définies sur R . M étant sans points conjugués, pour tout couple de réels distincts (t_0, t_1) , les champs de Jacobi le long d'une géodésique γ sont déterminés par leur valeur en t_0 et en t_1 . Pour tout $v \in U(M)$, pour tout $w \in TM$, et tout s réel non nul, on désigne par

$$t \rightarrow h_s(v, t, w)$$

l'unique champ de Jacobi le long de la géodésique γ tangente à l'origine à v , défini par

$$\begin{cases} h_s(v, o, w) = w, \\ h_s(v, s, w) = o. \end{cases}$$

L'application $(s, t, v, w) \rightarrow h_s(v, t, w)$ est C^∞ . De plus, pour tout t compris entre o et s , s exclus, $w \rightarrow h_s(v, t, w)$ est un isomorphisme linéaire de $T_{\gamma(t)}M$ sur $T_{\gamma(o)}M$.

— Dans ce qui suit, le transport par parallélisme le long de γ de $T_{\gamma(o)}M$ sur $T_{\gamma(t)}M$, $\tau_{0,t}^\gamma$ sera noté τ_t . Pour tout t compris entre o et s , s exclus, on définit un isomorphisme linéaire de $T_{\gamma(o)}M$, $U_s(v, t)$, en posant

$$T_{\gamma(o)}M \ni w \rightarrow U_s(v, t)w = \tau_t^{-1}h_s(v, t, w) \in T_{\gamma(o)}M.$$

Soit B le sous-ensemble de \mathbf{R}^2 formé des couples (s, t) tels que t est compris entre o et s , s exclus. Posons $\mathcal{L}(TM) = TM \times_M T^*M$.

On a construit un morphisme C^∞ de fibrés vectoriels sur M :

$$\begin{aligned} B \times U(M) &\rightarrow \mathcal{L}(TM), \\ (s, t, v) &\rightarrow U_s(v, t). \end{aligned}$$

Posons

$$\eta_s(v, t, w) = G_t v \times h_s(v, t, w).$$

$t \rightarrow h_s(v, t, w)$, étant un champ de Jacobi, est solution de l'équation

$$D_1 D_1 \eta = R(p, \eta) p,$$

et donc $U_s(v, t)$ est solution de l'équation de Jacobi dans $\mathcal{L}(T_{\gamma(o)}M)$:

$$(1) \quad \ddot{U} + \alpha \circ U = o$$

(les points désignant les dérivations par rapport à t), α étant l'endomorphisme de $T_{\gamma(o)}M$, défini pour tout t par

$$\alpha(w) = -\tau_t \hat{\pi} \{ R(p, G_t v \times \tau_t w) p \}.$$

De plus, $U_s(v, o)$ est l'identité de $T_{\gamma(o)}M$ et $U_s(v, t)$ se prolonge continûment par o pour $t = s$.

Pour t compris entre o et s , $t \neq s$, $U_s(v, t)$ est inversible, et on peut donc définir un endomorphisme de $T_{\gamma(o)}M$, $V_s(t, v)$, en posant

$$V_s(t, v) = \dot{U}_s(v, t) \circ \bar{U}_s^{-1}(v, t),$$

endomorphisme qui est solution de l'équation de Riccati dans $\mathcal{L}(T_{\gamma(o)}M)$:

$$(2) \quad \dot{V} + V^2 + \alpha = o.$$

Soient w_i $i = 1, 2$ deux vecteurs de $T_{\gamma(0)}M$, et soient

$$Y_i : t \rightarrow Y_i(t) = h_s(v, t, w_i), \quad \eta_i = G_t v \times Y_i.$$

De l'identité $g(D_1 \eta_1, \eta_2) - g(D_1 \eta_2, \eta_1) = 0$, on déduit :

$$g_\nu(V_s \tau_t^{-1} Y_1, \tau_t^{-1} Y_2) - g_\nu(V_s \tau_t^{-1} Y_2, \tau_t^{-1} Y_1) = 0,$$

ce qui prouve que V_s est autoadjoint pour le produit scalaire g_ν . Donc :

PROPOSITION 1. — *Si $U_s(v, t)$ est une solution de (1) telle que $U_s(v, s) = 0$, $V_s(t, v)$, défini pour t compris entre 0 et s , s exclus, est solution de (2) auto-adjointe pour g_ν .*

— Pour s' compris entre 0 et s , $s' \neq s$, posons

$$\hat{w} = \tau_{s-s'} U_s(v, s - s') w.$$

Les champs de Jacobi Y et \hat{Y} , définis par

$$Y(t) = \tau_t U_s(v, t) w \quad \text{et} \quad \hat{Y}(t) = \tau_{s-s', t} U_{s'}(G_{s-s'} v, t - s + s') \hat{w}$$

coïncident pour les valeurs $t = s - s'$ et $t = s$; donc $Y \equiv \hat{Y}$. Il en résulte que

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_s(t, v) = \tau_t^{-1} V_{s-t}(0, G_t v) \tau_t \\ \text{et en particulier} \\ \text{Trace } V_s(t, v) = \text{Trace } V_{s-t}(0, G_t v) \\ \text{Trace } V_s^2(t, v) = \text{Trace } V_{s-t}^2(0, G_t v) \\ \text{pour } t \text{ compris entre } 0 \text{ et } s, s \text{ exclus.} \end{array} \right.$$

Admettons, ce qui sera prouvé plus loin, qu'il existe une solution V de l'équation de Riccati, définie sur $(0, +\infty)$, autoadjointe pour g_ν et telle que

$$V(t, v) = \lim_{s \rightarrow +\infty} V_s(t, v).$$

Alors

$$(i) \quad \dot{V} + V^2 + \alpha = 0;$$

$$(ii) \quad \text{Trace } V(1, v) = \text{Trace } V(0, G_1 v).$$

De (i), on déduit

$$\text{Trace } \dot{V} + \text{Trace } V^2 + \text{Ric } G_t v = 0.$$

Soit en sommant sur $(0, 1)$, compte tenu de (ii) :

$$\text{Trace } V(0, G_1 v) - \text{Trace } V(0, v) + \int_0^1 \text{Trace } V^2(t, v) dt = - \int_0^1 \text{Ric } G_t v dt.$$

Admettons (cf. *infra*) que les différentes fonctions de v qui interviennent sont intégrables sur $U(M)$. Compte tenu de l'invariance de σ_0 par G , on peut écrire :

$$\int_{U(M)} \int_0^1 \text{Trace } V^2(t, v) dt = - \int_{U(M)} \text{Ric } v \sigma_0.$$

V étant autoadjoint pour le produit scalaire g_ν , $\int_{U(M)} \text{Ric } v \sigma_0 \geq 0$, et l'égalité n'a lieu que si $\text{Trace } V^2(t, v) \equiv 0$, et donc $V(t, v) = 0$. Compte tenu de l'équation de Riccati, cela implique $\alpha = 0$, ce qui équivaut à $K_\nu(P) \equiv 0$.

C. Q. F. D.

Démonstration de l'existence de V . — L'existence de

$$V(t, v) = \lim_{s \rightarrow +\infty} V_s(t, v)$$

se ramène, d'après (3), à l'existence de la limite de $V_s(0, v)$ quand $s \rightarrow +\infty$. L'existence de V étant assurée, il en résulte alors que :

1° V est définie sur $(0, +\infty)$,

2° V est limite uniforme au sens de la convergence compacte sur \mathbf{R}^+ des $V_s(t, v)$ quand $s \rightarrow +\infty$, et est solution de l'équation de Riccati. V sera alors autoadjoint pour g_ν si, et seulement si, $V(0, v)$ est autoadjoint pour g_ν puisque l'équation de Riccati est invariante par adjonction.

L'existence de V sera donc assurée si on prouve l'existence de $V(0, v) = \lim_{s \rightarrow +\infty} V_s(0, v)$ autoadjoint pour g_ν .

Soit ψ_s la forme quadratique sur $T_{\gamma(0)}M$, définie par

$$\psi_s(w_1, w_2) = g_\nu(V_s(0, v) w_1, w_2).$$

Il suffit de prouver l'existence d'une forme quadratique ψ sur $T_{\gamma(0)}M$ limite de ψ_s quand $s \rightarrow +\infty$.

LEMME 1. — *Pour tout $w \in T_{\gamma(0)}M$, $s \rightarrow \psi_s(w)$ est croissante.*

Démonstration. — Soient Y_s , le champ de Jacobi le long de $\gamma|[0, s']$, $Y_{s'}(t) = h_{s'}(v, t, w)$, et Z le champ de Jacobi brisé le long de $\gamma|[0, s']$

ainsi défini :

$$\begin{cases} t \in [0, s], & Z(t) = h_s(v, t, w), \\ t \in [s, s'], & Z(t) = 0, \end{cases}$$

où $0 < s < s'$.

Comme les champs Z et Y_s , ont mêmes valeurs pour $t = 0$ et $t = s'$, et que γ est sans points conjugués :

$$E''_{\gamma_s'}(Z) \geq E''_{\gamma_s'}(Y_{s'}),$$

où $E''_{\gamma_s'}$ désigne la forme de Morse (variation seconde) de γ | $[0, s']$.

Posons

$$\xi = \frac{d\gamma}{dt} \times Z, \quad \eta_{s'} = \frac{d\gamma}{dt} \times Y_{s'}.$$

Comme $Y_{s'}$ est un champ de Jacobi,

$$E''_{\gamma_s'}(Y_{s'}) = -g(D_1 \eta_{s'}, (0), \eta_{s'}(0)).$$

Soit

$$E''_{\gamma_s'}(Y_{s'}) = -g_\nu(V_{s'}(0, v)w, w) = -\psi_{s'}(w).$$

Comme $Z|_{[s, s']} \equiv 0$,

$$E''_{\gamma_s'}(Z) = E''_{\gamma_s}(Z) = -g(D_1 \xi(0), \xi(0)).$$

Soit $E''_{\gamma_s'}(Z) = -\psi_s(w)$. D'où le lemme 1.

— Remarquons que M étant compacte, il existe une constante $c > 0$ telle que $K_\nu(P) \geq -c^2$ pour tout 2-plan P et tout $v \in \mathfrak{E}M$, $v \subset P$.

LEMME 2. — Pour tout $w \in T_{\gamma(0)}M$,

$$-\frac{c}{\text{th } cs} g_\nu(w, w) \leq \psi_s(w) \leq c g_\nu(w, w).$$

Démonstration. — Soit (M_1, g_1) une variété riemannienne complète de dimension n à courbure sectionnelle constante $-c^2$. Soient $x_1 \in M_1$, et u un isomorphisme euclidien de $(T_{\gamma(0)}M, g_\nu)$ sur $(T_{x_1}M_1, g_1)$. Dans ce qui suit, on adapte au cas finslérien une méthode de comparaison de [8].

Soient $s > 0$, $\tilde{\gamma}$ la géodésique de (M_1, g_1) issue de $u(v)$, et \tilde{Y}_s le champ de Jacobi le long de $\tilde{\gamma}$, tel que $\tilde{Y}(0) = u(w)$ $\tilde{Y}(s) = 0$. ∇ désignant la loi de dérivation covariante dans $TM_1 \rightarrow M_1$ définie par la connexion riemannienne,

$$\nabla_1 \tilde{Y}_s = -c^2 \tilde{Y}_s, \quad \text{où } \nabla_1 = \nabla_{\frac{d}{dt}}$$

ceci entraîne $\tilde{Y}_s(t) = \frac{\text{sh } C(s-t)}{\text{sh } Cs} \tau_t u(w)$ où, par abus de notation, τ_t désigne $\tau_{\delta, t}$.

Donc $E''_{\tilde{\gamma}_s}(Y_s) = cg_v(w, w) \text{ coth } cs$, où $E''_{\tilde{\gamma}_s}$ désigne la [forme] Morse relative à $\tilde{\gamma} | [0, s]$.

Soit φ l'application associant à tout champ de vecteurs \tilde{Z} le long de $\tilde{\gamma}$ le champ de vecteur le long de $\gamma \varphi \tilde{Z}$, défini par

$$\varphi \tilde{Z}(t) = \tau_t \circ u \circ \tau_t^{-1} \tilde{Z}(t).$$

On vérifie aisément que :

$$1^\circ \quad g_1(\tilde{Z}, \tilde{Z})(t) = g_{G_t v}(\varphi \tilde{Z}, \varphi \tilde{Z}),$$

$$2^\circ \quad D_1 \tilde{\xi}(t) = G_t v \times \varphi \nabla_1 Z(t),$$

où $\tilde{\xi}(t) = G_t v \times \varphi \tilde{Z}(t)$. Posons $\tilde{\eta}(t) = G_t v \times \tilde{Y}(t)$,

$$\begin{aligned} E''_{\tilde{\gamma}_s}(\tilde{Y}) &= \int_0^s \{ g_1(\nabla_1 \tilde{Y}_s, \nabla_1 \tilde{Y}_s) + c^2 g_1(\tilde{Y}_s, \tilde{Y}_s) \} dt \\ &= \int_0^s \{ g(D_1 \tilde{\eta}, D_1 \tilde{\eta}) + c^2 g(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}) \} dt. \end{aligned}$$

La courbure sectionnelle de (M, E) étant minorée par $-c^2$,

$$g(R(p, \tilde{\eta}) p, \tilde{\eta}) \leq c^2 g(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}),$$

Donc $E''_{\tilde{\gamma}_s}(\tilde{Y}) \geq E''_{\tilde{\gamma}_s}(\varphi \tilde{Y}_s)$; or $\varphi \tilde{Y}_s$ est un champ de vecteur le long de γ , ayant mêmes valeurs pour $t=0$ et $t=s$ que le champ de Jacobi, $Y_s = h_s(v, t, w)$. Comme (M, E) est sans points conjugués :

$$E''_{\tilde{\gamma}_s}(\varphi \tilde{Y}) \geq E''_{\tilde{\gamma}_s}(Y_s) = -\psi_s(w).$$

Or $E''_{\tilde{\gamma}_s}(\tilde{Y}) = cg_v(w, w) \text{ coth } cs$. Donc $\psi_s(w) \geq -cg_v(w, w) \text{ coth } cs$.

Pour obtenir l'autre partie de l'inégalité, on considère un [réel] $a > 0$ et le champ de Jacobi brisé Z le long de $\gamma | [a, s]$ ainsi défini :

$$\begin{cases} t \in [a, 0], & Z(t) = h_a(v, t, w). \\ t \in [0, s], & Z(t) = h_s(v, t, w). \end{cases}$$

Comme $\gamma | [a, s]$ est sans points [conjugués], $E''_{\gamma | [a, s]}(Z) \geq 0$. Soit $\psi_a(w) - \psi_s(w) \geq 0$.

Soient alors Y_a le champ de Jacobi le long de $\gamma|[a, 0]$, défini par $Y_a(t) = h_a(v, t, w)$ et \tilde{Y}_a le champ de Jacobi le long de $\tilde{\gamma}|[a, 0]$ tel que $\tilde{Y}_a(a) = o$, $\tilde{Y}_a(o) = u(w)$,

$$E_{\tilde{\gamma}_a}^u(\tilde{Y}_a) = -cg_v(w, w) \coth ca.$$

Par la même méthode que précédemment, on prouve que

$$E_{\tilde{\gamma}_a}^u(\tilde{Y}_a) \geq E_{\tilde{\gamma}_a}^u(\varphi \tilde{Y}_a) \geq E_{\tilde{\gamma}_a}^u(Y_a) = \psi_a(w).$$

Donc

$$\psi_s(w) \leq \psi_a(w) \leq -cg_v(w, w) \coth ca.$$

Ceci étant vrai pour tout $a < 0$, on en déduit :

$$\psi_s(w) \leq cg_v(w, w).$$

C. Q. F. D.

— L'existence de $V(o, v)$, et donc de $V(t, v)$, découle alors des lemmes 1 et 2. Posons $\psi(w) = g_v(V(o, v)w, w)$. Il résulte du lemme 2 que $|\psi(w)| \leq cg_v(w, w)$.

Questions d'intégrabilité. — Soit (v, e_1, \dots, e_{n-1}) une base orthonormée de $(T_{\gamma(o)}M, g_v)$:

$$\text{Trace } V_s(o, v) = \sum_{i=1}^{n-1} \psi_s(e_i).$$

Donc

$$\text{Trace } V_s(o, v) \leq c(n-1).$$

$v \rightarrow \text{Trace } V(o, v)$ étant limite simple de la famille croissante de fonctions continues $(v \rightarrow \text{Trace } V_s(o, v))_s$, uniformément bornée par la fonction constante $c(n-1)$, est intégrable.

D'autre part, $(t \rightarrow V_s(t, v))_s$ converge uniformément au sens de la convergence compacte vers $t \rightarrow V(t, v)$. Donc

$$\int_0^1 \text{Trace } V^2(t, v) dt = \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_0^1 \text{Trace } V_s^2(t, v) dt.$$

Or

$$\text{Trace } V_s^2(t, v) = \text{Trace } V_{s-1}^2(o, G_t v) \geq 0.$$

Donc

$$0 \leq \int_0^1 \text{Trace } V^2(t, v) dt \leq c^2(n-1).$$

$v \rightarrow \int_0^1 \text{Trace } V^2(t, v) dt$, étant limite simple de fonctions continues uniformément bornées par $c^2(n-1)$, est intégrable.

Ceci achève la démonstration du théorème 3.

Des théorèmes 1 et 3, il résulte alors le théorème suivant [6].

THÉORÈME 4. — *Si (M, E) est une variété de Landsberg sans points conjugués, homéomorphe au tore à 2 dimensions T^2 , alors la courbure sectionnelle K de M est identiquement nulle, et donc $R \equiv 0$.*

En effet, $\int_{U(M)} \text{Ric} v \cdot \sigma_0 = 4 \pi^2 \chi(M) = 0$, car M est homéomorphe à T^2 .

4. Scalaire principal.

Dans ce paragraphe, on désigne, pour tout $v \in \mathfrak{E}M$, par $X(v)$ l'élément de $\pi_0^{-1}TM$ défini par $X(v) = -L(v) \overset{\star}{T}(v)$. En coordonnées locales,

$$X^i = \frac{1}{2} g^{ik} L(v) \frac{\partial}{\partial v^k} \log g, \quad \text{où } g = \det g_{ij}.$$

On suppose dorénavant la variété finslérienne (M, E) de dimension 2 orientable, et on choisit une orientation de M . On désigne par (v, w) un repère orthonormé de $T_{\pi v}M$ pour g_v . $v \rightarrow v \times w$ définit une section globale de $\pi_0^{-1}TM \mid UM \rightarrow UM$.

DÉFINITION 1. — *On appelle scalaire principal de la variété finslérienne (M, E) , le scalaire $v \rightarrow J(v)$ défini par $X(v) = J(v)(v \times w)$.*

Remarque. — Si $J \equiv 0$, alors $\overset{\star}{T} \equiv 0$, et donc (M, E) est une variété riemannienne. $\mathcal{L}(G)J \equiv 0$ caractérise les variétés de Landsberg.

— (M, E) étant orientée, on obtient une base orthonormale directe de $(U(M), \bar{g})$ en tout point v , en considérant les champs de vecteurs G , $\gamma(v \times w) = \eta$, $c(v \times w) = \zeta$.

La démonstration des formules suivantes, dues à E. CARTAN [3], est classique (cf. [11] par exemple) :

PROPOSITION 1. — *K désignant la courbure sectionnelle de (M, E) ,*

- (1) $[G, \eta] = K\zeta$,
- (2) $[G, \zeta] = -\eta$,
- (3) $[\eta, \zeta] = G + J\eta + \mathcal{L}(G)J \cdot \zeta$,
- (4) $\mathcal{L}(\zeta)K + JK + \mathcal{L}(G)\mathcal{L}(G)J = 0$.

(4) représente l'identité de Jacobi écrite pour G, η, ζ , compte tenu de (1), (2) et (3).

Pour une variété finslérienne de dimension 2, orientée compacte, la formule de divergence d'AKBAR-ZADEH [1] s'écrit, pour tout $Y : \mathfrak{E}M \rightarrow \pi_0^{-1}TM$:

$$\int_{U(M)} \{ \operatorname{div} Y - \mathcal{L}(G) J \cdot g(Y, v \times w) \} \sigma_0 \equiv 0.$$

Il en résulte alors :

PROPOSITION 2. — Pour toute application $\varphi : U(M) \rightarrow \mathbf{R}$,

$$(a) \quad \int_{U(M)} \mathcal{L}(G) \varphi \sigma_0 = 0$$

$$(b) \quad \int_{U(M)} \mathcal{L}(\eta) \varphi \sigma_0 = \int_{U(M)} \varphi \mathcal{L}(G) J \cdot \sigma_0.$$

La démonstration résulte de la considération des sections φV et $\varphi(v \times w)$ de $\pi_0^{-1}TM \rightarrow \mathfrak{E}M$.

Appliquant la proposition au scalaire principal J , on obtient le corollaire suivant :

$$\text{COROLLAIRE 1. — } \int_{U(M)} \mathcal{L}(G) J \sigma_0 = 0 = \int_{U(M)} \mathcal{L}(\eta) J \sigma_0.$$

De plus, en utilisant la formule (4) de la proposition, on prouve le résultat suivant.

PROPOSITION 3. — Si (M, E) est une variété finslérienne de dimension 2 compacte orientée, de courbure sectionnelle K ,

(a) si $K = 1$,

$$\int_{U(M)} J \sigma_0 = 0; \quad \int_{U(M)} J^2 \sigma_0 = \int_{U(M)} (\mathcal{L}(G) J)^2 \sigma_0$$

et

$$\int_{U(M)} \mathcal{L}(\zeta) J \sigma_0 = - \int_{U(M)} (\mathcal{L}(G) J)^2 \sigma_0.$$

(b) Si $K = 0$,

$$\mathcal{L}(G) J = 0.$$

Pour les variétés compactes à courbure constante négative, on prouve la proposition suivante :

PROPOSITION 4. — Si (M, E) est une variété finslérienne de dimension 2 compacte à courbure sectionnelle constante -1 , (M, E) est riemannienne.

Démonstration de la proposition 3 (b). — K étant nul, $[G, \eta] = 0$. Donc

$$\mathcal{L}(G) \mathcal{L}(\eta) J = \mathcal{L}(\eta) \mathcal{L}(G) J,$$

ce qui entraîne, compte tenu de la proposition 2,

$$\int_{U(M)} \mathcal{L}(\eta) \mathcal{L}(G) J \sigma_0 = 0,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\int_{U(M)} (\mathcal{L}(G) J)^2 \sigma_0 = 0,$$

ce qui entraîne $\mathcal{L}(G) J = 0$.

Démonstration de la proposition 4. — On travaille sur le revêtement orientable \hat{M} . Pour tout couple φ, ψ , de fonctions sur $U(\hat{M})$,

$$\int_{U(\hat{M})} \mathcal{L}(G) (\varphi \psi) \sigma_0 = 0,$$

et donc

$$\int_{U(\hat{M})} \varphi \mathcal{L}(G) \psi \sigma_0 = \int_{U(\hat{M})} \psi \mathcal{L}(G) \varphi \sigma_0.$$

Prenant $\varphi = \mathcal{L}(G) J$, $\psi = J$, et tenant compte de ce que (4) s'écrit alors $\mathcal{L}(G) \mathcal{L}(G) J = J$, on obtient

$$\int_{U(\hat{M})} (\mathcal{L}(G) J)^2 \sigma_0 = - \int_{U(M)} J^2 \sigma_0$$

et donc $J \equiv 0$, ce qui entraîne que \hat{M} et donc M est riemannienne.

5. Tores finslériens sans points conjugués.

D'après le théorème 4, si (M, E) est une variété finslérienne homéomorphe à un tore, et sans points conjugués, telle que $\mathcal{L}(G) J = 0$, $K \equiv 0$.

Comme la courbure sectionnelle de (M, E) est nulle, $[G, \eta] = 0$, et donc $\mathcal{L}(G) \mathcal{L}(\eta) J = 0$, ce qui peut encore s'écrire :

$$\mathcal{L}(G) \mathcal{L}(G) \mathcal{L}(\zeta) J = 0, \quad \text{car } \mathcal{L}(\eta) J = -\mathcal{L}(G) (\zeta) J,$$

ce qui entraîne que

$$\mathcal{L}(\zeta) J(G_s v) = \mathcal{L}(\zeta) J(v) + s \mathcal{L}(G) \mathcal{L}(\zeta) J(v).$$

Donc le long d'une géodésique périodique $\mathcal{L}(G) \mathcal{L}(\zeta) J \equiv 0$.

LEMME 1. — Soit (T^2, E) un tore finslérien sans points conjugués. Alors, pour tout $x \in T^2$, l'ensemble des $v \in U_x(T^2)$, qui sont tangents à des géodésiques périodiques, est dense dans $U_x(T^2)$.

Démonstration. — Soit (\mathbf{R}^2, E) le revêtement finslérien de (T^2, E) , et soient (A_{pn}) $((p, n) \in Z \times Z)$ les sommets du réseau de T^2 dans \mathbf{R}^2 . $U_0(\mathbf{R}^2)$ sera noté U_0 .

U_0 est difféomorphe à S^1 et donc orienté, ce qui donne un sens à la notation $v_1 < v < v_2$ où les v_i et v sont des éléments de U_0 . Si l'ensemble des $v \in U_0$, qui sont tangents à des géodésiques passant par un point du réseau différent de o , n'est pas partout dense dans U_0 , il existe un élément de U_0 qui n'est pas point d'accumulation de cet ensemble, et donc il existe v_1 et v_2 appartenant à U_0 , vecteurs tangents en o à des géodésiques passant par un point du réseau différent de o et tel que, pour tout v , $v_1 < v < v_2$, la géodésique γ_v , issue de v , ne passe par aucun point du réseau distinct de o . γ_{v_1} passe par $A_{p_1 n_1} \neq o$, et γ_{v_2} par $A_{p_2 n_2} \neq o$. Donc γ_{v_1} (resp. γ_{v_2}) passe par $A_{qp_1 p_2, n_1 p_2 q}$ (resp. $A_{qp_1 p_2, n_2 p_1 q}$) pour tout q entier. Or K étant nul, deux géodésiques issues de o ne se recoupent pas. Comme pour tout $v \times v_1 < v < v_2$, γ_v ne passe par aucun sommet du réseau distinct de o ,

$$|n_1 p_2 q - n_2 p_1 q| \leq 1.$$

Ceci étant vrai pour tout $q \in Z$, $n_1 p_2 = n_2 p_1$, et donc γ_{v_1} et γ_{v_2} passent par le point $A_{p_1 p_2, n_1 p_2}$ qui est distinct de o si $p_2 \neq 0$. Si $p_2 = 0$, alors γ_{v_1} et γ_{v_2} passent par le point $A_{0, n_1 n_2}$. Donc, dans les deux cas, γ_{v_1} et γ_{v_2} se recoupent, ce qui est absurde et démontre le lemme, les géodésiques périodiques de T^2 se relevant en géodésiques joignant des points du réseau dans \mathbf{R}^2 .

Soit alors $x \in T^2$, $\mathcal{L}(G) \mathcal{L}(\zeta) J$ étant nul sur l'ensemble des $v \in U_x(T^2)$, tels que γ_v soit périodique, est donc nul sur $U_x(T^2)$. Donc $\mathcal{L}(G) \mathcal{L}(\zeta) J = 0$, ce qui équivaut à $\mathcal{L}(\eta) J \equiv 0$.

Les conditions $\mathcal{L}(G) J = 0 = \mathcal{L}(\eta) J$ peuvent encore s'exprimer ainsi : pour tout $Y \in \pi_0^{-1} TM$, $D_{\gamma Y} T = 0$.

LEMME 2. — Soit (M, E) une variété finslérienne de dimension n telle que, pour tout $Y \in \pi_0^{-1} TM$, $D_{\gamma Y} T = 0$. Alors la gerbe finslérienne de (M, E) est C^∞ sur TM .

Démonstration. — P désignant le deuxième tenseur de courbure de Cartan,

$$\begin{aligned} g(P(X_1, X_2)X_3, X_4) &= g((D_{\gamma X_1} P)(X_1, X_2), X_3) \\ &\quad - g((D_{\gamma X_2} T)(X_1, X_2), X_4) + g(T(S(X_3, X_2), X_1), X_4) \\ &\quad - g(T(S(X_4, X_2), X_1), X_3). \end{aligned}$$

Comme $S = D_G T = 0$ et $D_{\gamma} T = 0$, P est nul, ce qui se traduit, dans ce cas (cf. [1]), par

$$\frac{\partial \overset{*}{\Gamma}_{ij}^m}{\partial v^k} = 0,$$

où $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$ désigne le premier groupe de symboles de Christoffel de la connexion finslérienne rapportée à la base (dx^i, β^j) . Il en résulte que G est C^∞ sur TM .

Remarque. — On peut prouver que, réciproquement, si G est C^∞ sur TM , alors $D_{\gamma} T = 0$ pour tout $Y \in \pi_0^{-1} TM$.

Il résulte du lemme 2 que la gerbe d'un tore finslérien, sans points conjugués, est C^∞ . Il en est donc de même pour la gerbe G du revêtement finslérien de $(T^2, E) : (R^2, \tilde{E})$.

LEMME 3. — Soit (R^n, \tilde{E}) une structure finslérienne sur $R^n (n \geq 2)$ telle que :

- (1) R^n est complet pour la métrique associée à la structure finslérienne.
- (2) la gerbe \tilde{G} de R^n est C^∞ sur TR^n .
- (3) la courbure sectionnelle K est identiquement nulle.

Alors (R^n, \tilde{E}) est isométrique à (R^n, E_0) , où E_0 est invariant par les translations de R^n .

Démonstration. — Soit $x \in R^n$. Des conditions (1) et (2), il résulte ([5] et [7]) que \exp_x est définie sur $T_x R^n$ et C^∞ . On peut donc munir $T_x R^n$ d'une structure finslérienne $(T_x R^n, \exp_x^* \tilde{E})$ qui vérifie les conditions (1), (2) et (3) et qui est telle que les géodésiques issues de 0 sont des droites. Les champs de Jacobi X le long d'une géodésique $t \rightarrow tv$ de $(T_x R^n, \exp_x^* \tilde{E})$, nuls pour $t = 0$, sont donc de la forme tv_1 , où $v_1 \in T_x R^n$, et $v \times v_1 = D_1 \xi(0)$, où $\xi = tv \times X(t)$. Or la courbure sectionnelle étant nulle, $D_1 D_1 \xi = 0$, ce qui implique $X(t) = t \tau_1 v_1$, soit $\tau_1 v_1 = v_1$. Le transport par parallélisme le long des géodésiques $t \rightarrow tv$ est donc le parallélisme usuel. Dans les coordonnées (y^i) , relatives à une base de $T_x R^n$, ceci s'écrit :

$$\overset{*}{\Gamma}_{jk}^i(tv) v^j \equiv 0, \quad t \in R,$$

où $\overset{*}{\Gamma}_{jk}^i$ est le premier groupe de symboles de Christoffel de la connexion finslérienne de $(T_x R^n, \exp_x^* \tilde{E})$ dans la base (dy^i, β^j) .

Or des conditions (2) et (3), il résulte (cf. [4] ou [11]) qu'il existe, pour tout $y \in T_x R^n$, un difféomorphisme local φ_y tel que

$$\frac{\partial^2 \varphi_y^k}{\partial y^i \partial y^j} + \frac{\partial \varphi_y^k}{\partial y^r} \overset{*}{\Gamma}_{ij}^r = 0,$$

ce qui entraîne

$$\frac{\partial^2 \varphi_y^k}{\partial y^i \partial y^j}(y) y^i \equiv 0,$$

donc que $y \rightarrow \varphi^k(y)$ est positivement homogène de degré 1, et donc que $\tilde{\Gamma}_{ij}^r(y)$ est positivement homogène de degré -1 en y .

Il en résulte que $\tilde{\Gamma}_{jk}^i(y) = 0$, et donc que toutes les géodésiques de $(T_x \mathbf{R}^n, \exp_x^* \tilde{E})$ sont des droites, ce qui entraîne que $\exp_x^* \tilde{E}$ est invariant par les translations de $T_x \mathbf{R}^n$; le lemme 3 est donc prouvé.

Des lemmes 1, 2 et 3, il résulte que le revêtement finslérien universel de (T^2, E) est isométrique à (\mathbf{R}^2, E_0) ce qui entraîne que (T^2, E) est isométrique à un tore finslérien plat.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AKBAR-ZADEH (H.). — Les espaces de Finsler et certaines de leurs généralisations, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 3^e Série, t. 80, 1963, p. 1-79 (*Thèse Sc. math. Paris*, 1961).
- [2] BERGER (Marcel). — *Lectures on geodesics in riemannian geometry*. — Bombay, Tata Institute, 1965 (*Tata Institute of fundamental Research. Lectures on Mathematics*, 33).
- [3] CARTAN (Élie). — Sur un problème d'équivalence et la théorie des espaces métriques généralisés, *Mathematica*, Cluj, t. 4, 1930, p. 114-136.
- [4] CARTAN (Élie). — *Les espaces de Finsler*. — Paris, Hermann, 1934 (*Act. scient. et ind.*, 79; *Exposés de Géométrie*, 2).
- [5] DAZORD (Pierre). — *Propriétés globales des géodésiques des espaces de Finsler* (*Thèse Sc. math. Lyon*, 1969) (*).
- [6] DAZORD (Pierre). — Sur la formule de Gauss-Bonnet en géométrie finslérienne, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 270, 1970, Série A, p. 1241-1243.
- [7] DAZORD (Pierre). — *Remarques sur le théorème de Hopf-Rinow et sur les variétés finslériennes à gerbe C^∞ (à paraître)*.
- [8] GROMOLL (D.), KLINGENBERG (W.), MEYER (W.). — *Riemannsche Geometrie im Grossen*. — Berlin, Springer Verlag, 1968 (*Lecture Notes in Mathematics*, 55).
- [9] HOPF (Eberhard). — Closed surfaces without conjugate points, *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 34, 1948, p. 47-51.
- [10] LICHNEROWICZ (André). — Sur une extension de la formule d'Allendoerfer-Weil à certaines variétés finslériennes, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 223, 1946, p. 12-14.
- [11] RUND (Hanno). — *The differential geometry of Finsler spaces*. — Berlin, Springer-Verlag, 1959 (*Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 101).

(Texte reçu le 15 décembre 1970.)

Pierre DAZORD,
 Faculté des Sciences de Lyon,
 Mathématiques,
 43, boulevard du 11 novembre 1918,
 69-Villeurbanne.

(*) Dans cette note l'hypothèse « de Landsberg » a été omise pour les théorèmes 1 et 3.