BULLETIN DE LA S. M. F.

NOËL LEBLANC

Les endomorphismes d'algèbre à poids

Bulletin de la S. M. F., tome 99 (1971), p. 387-396
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1971__99__387_0>

Bull. Soc. math. France,
99, 1971, p. 387 à 396.

LES ENDOMORPHISMES D'ALGÈBRE A POIDS

PAR

NOËL LEBLANC

[Saint-Denis]

RÉSUMÉ. — Le résultat classique de Beurling et Helson peut être généralisé aux algèbres de séries de Fourier avec poids : les endomorphismes de ces algèbres sont définis par les changements de variables linéaires.

Soit A_α, l'algèbre de Banach définie par

$$A_\alpha = \left\{ f;\, f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \exp nix,\ \|f\|_{A_\alpha} = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|\,(1+|n|)^\alpha \right\}.$$

Nous nous proposons de déterminer ici les endomorphismes des algèbres A_α.

A. BEURLING et H. HELSON [1] ont étudié les endomorphismes de A_0 et montré qu'ils sont de la forme

$$(1) \qquad F(x) \to F(Nx+t), \qquad N \in \mathbf{Z}, \qquad t \in \mathbf{T}.$$

Par la suite, Y. KATZNELSON [3] a obtenu le même résultat pour les algèbres A_α, $\alpha \geq 2$, en utilisant le lemme de Van der Corput.

On peut d'ailleurs montrer facilement [5] que les endomorphismes de A_α, $\alpha \geq 1$, sont encore de la forme (1) en remarquant que A_1 est formée des fonctions dont la dérivée est dans A_0. Le théorème de Beurling-Helson permet alors de conclure pour A_1, puis, par interpolation, pour A_α, $\alpha \geq 1$.

Nous nous proposons de montrer ici que ce résultat est vrai pour tout $\alpha > 0$. Il est remarquable de constater que notre démonstration peut s'appliquer à des algèbres à poids plus générales que celles envisagées ici, mais ne permet cependant pas de retrouver le théorème de Beurling-

Helson. Nous utiliserons la remarque suivante [3] : les endomorphismes de A_α sont de la forme

$$F(x) \to F \circ f(x), \qquad \text{avec} \quad \| \exp Nif \|_{A_\alpha} \leq C_f \, | N |^\alpha,$$

et nous montrerons que cette inégalité ne peut être vérifiée que si f est linéaire.

Nous serons amené à démontrer tout d'abord un lemme de type Van der Corput, qui nous permettra d'obtenir, pour $\alpha > 1$, un résultat plus précis que celui de [5]. Il est intéressant de constater [4] que la démonstration utilisée ici se généralise aux fonctions de plusieurs variables.

Première partie

Nous commençons par démontrer le résultat suivant :

LEMME 1. — *Pour toute fonction f à valeurs réelles sur un intervalle I, dont la dérivée admet un module de continuité donné ω et varie avec l'amplitude* var (f'), *on peut trouver une suite de fonctions F_N telles que, pour tout nombre réel u, si ε satisfait $| N | \varepsilon \, \omega(\varepsilon) = 1$,*

$$\left| \int_I F_N(x) \exp(-uix) \, dx \right| \leq \frac{40}{\varepsilon \, | N | \operatorname{var}(f')} \left| \int_I F_N(x) \exp(Nif(x)) \, dx \right|.$$

Démonstration. — Nous définissons $\Delta(x)$ par

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= 1 - \frac{x-t}{\varepsilon} && \text{si} \quad x \in [t, t+\varepsilon], \\ &= 1 + \frac{x-t}{\varepsilon} && \text{si} \quad x \in [t-\varepsilon, t], \\ &= 0 && \text{ailleurs,} \end{aligned}$$

et nous posons

$$\Phi(x) = \exp(-Ni[f(t) + (x-t) f'(t)]) \, \Delta(x).$$

Une intégration par parties donne alors l'égalité

$$\int \Phi(x) \exp(-uix) \, dx = \frac{4 \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} (Nf'(t) + u) \exp(-Nif(t) - nit)}{\varepsilon [Nf'(t) + u]^2}.$$

Comme f' admet le module de continuité ω,

$$f(x) = f(t) + (x - t)\,[f'(t) + \eta\,(x - t)], \qquad |\,\eta\,(x - t)\,| \leq \omega\,(|\,x - t\,|),$$

et, si $|\,N\,|\,\varepsilon\,\omega\,(\varepsilon) = 1$,

$$\operatorname{Re}\,[\exp\,(Ni\,(x - t)\,\eta\,(x - t))] \geq \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{Re} \int \Phi\,(x) \exp\,(Nif(x))\,dx \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nous choisissons alors une suite de points t_k tels que $f'(t_k) = k\,(\varepsilon\,|\,N\,|)^{-1}$ et nous associons à chaque point t_k la fonction Φ_k construite comme ci-dessus. Nous posons

$$F_N(x) = \sum_k \Phi_k(x).$$

Il existe $\varepsilon\,|\,N\,|\,\operatorname{var}(f')$ points t_k, et

$$\left| \int_I F_N(x) \exp\,(Nif(x))\,dx \right| \geq \operatorname{Re} \int_I F_N(x) \exp\,(Nif(x))\,dx \geq \frac{\varepsilon^2\,|N|\operatorname{var}(f')}{2}.$$

Comme, d'autre part,

$$\left| \int_I F_N(x) \exp\,(-\,uix) \right| \leq \varepsilon + 2 \sum_{k \geq 1} \frac{4\,\varepsilon}{k^2} \leq 20\,\varepsilon,$$

et le lemme découle de ces deux inégalités.

Nous sommes maintenant en mesure de donner du théorème de Stein-Varopoulos une démonstration indépendante du théorème de Beurling-Helson :

THÉORÈME 1.1. — *Les endomorphismes de A_1 sont linéaires.*

Démonstration. — Soit f un endomorphisme de A_1; nous savons que est continûment dérivable, et nous pouvons choisir un intervalle I sur lequel f' admet un certain module de continuité ω, $|\,f'(x)\,| \geq \lambda$, où λ est une certaine constante positive. Nous construisons F_N comme dans le lemme, et nous posons

$$\exp\,(Nif(x)) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \exp nix, \qquad F_N(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \exp\,(-\,nix).$$

L'égalité de Parseval s'écrit

$$\lambda |N| \left| \int_I F_N(x) \exp(Nif(x))\, dx \right|$$
$$\leq \left| \int_I F_N (\exp Nif)'\, dx \right| = 2\pi \left| \sum_{-\infty}^{\infty} n\, a_n c_n \right| \leq 2\,\pi \sup |c_n| \sum_{-\infty}^{\infty} |n\, a_n|,$$

et l'on déduit du lemme

$$\| \exp Nif \|_{A_1} \geq \lambda |N| \frac{\varepsilon |N| \operatorname{var}(f')}{40}.$$

THÉORÈME 1.2. — *Si $\alpha \geq 1$, les endomorphismes de A_α sont linéaires.*

Démonstration. — Si f définit un endomorphisme de A_α, f' est lipschitzienne d'ordre $\beta = \inf(\alpha - 1, 1)$, et le module de continuité ω du lemme satisfait $\omega(\varepsilon) \leq C\varepsilon^\beta$. L'égalité $\varepsilon |N| \omega(\varepsilon) = 1$ implique alors

$$\varepsilon^{\beta+1} \geq \frac{1}{C|N|},$$

et le théorème 1.1 donne, dans ce cas,

$$\| \exp Nif \|_{A_1} \geq C_f |N|^{2-(1/\beta+1)}.$$

Nous pouvons alors, comme dans [5], quitte à envisager l'algèbre des restrictions de A_1 à un intervalle sur lequel f' ne s'annule pas, écrire

$$\| \exp Nif \|_{A_0} \leq \left\| \frac{1}{Nf'} \right\|_{A_0} \| Nf' \exp Nif \|_{A_0} \leq \left\| \frac{1}{Nf'} \right\|_{A_0} \| \exp Nif \|_{A_1},$$

puis l'inégalité de Hölder

$$\sum |a_n| (1 + |n|) \leq \left(\sum |a_n| \right)^{(\alpha-1)/\alpha} \left(\sum |a_n| (1 + |n|)^\alpha \right)^{1/\alpha}.$$

En réunissant ces deux inégalités, on obtient

$$\| \exp Nif \|_{A_\alpha} \geq \frac{\| \exp Nif \|_{A_1}^\alpha}{\| \exp Nif \|_{A_0}^{\alpha-1}} \geq \frac{\| \exp Nif \|_{A_1}}{\| 1/Nf' \|_{A_0}^{\alpha-1}},$$

ce qui donne, si $\alpha \leq 2$,

$$\| \exp Nif \|_{A_\alpha} \geq C'_f |N|^{\alpha+1-(1/\alpha)},$$

et, si $\alpha \geq 2$,

$$\| \exp Nif \|_{A_\alpha} \geq C'_f |N|^{\alpha+(1/2)}.$$

Dans les deux cas, $\| \exp N if \|_{A_\alpha}$ croît plus vite que $|N|^\alpha$, et nous obtenons donc le théorème. Il est, en outre, intéressant de constater que la minoration obtenue dans le second cas est la meilleure possible, ce qui découle immédiatement de l'inégalité de Carlson. Ce cas a d'ailleurs été étudié en détail dans [3].

Deuxième partie

Nous nous proposons de démontrer maintenant :

THÉORÈME 2. — *Si $0 < \alpha < 1$, tout endomorphisme de A_α est de la forme*

$$F(x) \to F(Nx + t), \qquad N \in \mathbf{Z}, \qquad t \in \mathbf{T}.$$

Nous cherchons encore à montrer que, si f n'est pas linéaire, $\| \exp N if \|_{A_\alpha}$ croît plus vite que $|N|^\alpha$. Nous partageons la démonstration en cinq propositions :

PROPOSITION 2.1. — *Si f n'est pas lipschitzienne d'ordre 1, f ne peut définir un endomorphisme de A_α.*

Démonstration. — Si f n'est pas lipschitzienne d'ordre 1, il existe une suite ω_N telle que $|N|^{-1}\omega_N$ augmente indéfiniment avec $|N|$ et telle que, pour tout entier $N \neq 0$, on peut trouver y et z satisfaisant

$$|f(y) - f(z)| = \pi/|N| \qquad \text{et} \qquad |y - z| \leq 1/\omega_N.$$

Nous définissons $\mu \sim \sum_{-\infty}^{\infty} b_n \exp(-nix)$ par

$$\mu = \exp(-N if(y))\,\delta_y + \exp(-N if(z))\,\delta_z,$$

où δ_y et δ_z représentent les mesures unitaires ponctuelles en y et z respectivement. D'après le choix de y et z,

$$2\pi\,|b_n| = 2\left|\sin n\frac{y-z}{2}\right|. \tag{2.1}$$

Si $\exp(N if(x)) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \exp nix$, $\int_0^{2\pi} \exp(N if(x))\,d\mu = 2 = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} a_n b_n$, et on obtient en utilisant (2.1)

$$1 \leq \sum_{|n| \leq \omega_N} \frac{|n|}{2\,\omega_N} |a_n| + \sum_{|n| \geq \omega_N} |a_n| \leq \sum_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{n}{\omega_N}\right|^\alpha |a_n|,$$

ce qui peut s'écrire $\|\exp N if\|_{A_\alpha} \geqq \omega_N^\alpha$, et la proposition découle du fait que $|N|^{-1}\omega_N$ augmente indéfiniment avec $|N|$.

Remarque. — Le calcul employé ici ne fait intervenir que des mesures ponctuelles, et peut être utilisé pour des algèbres de restriction : soit z, un point d'accumulation d'un ensemble E; si f n'est pas lipschitzienne d'ordre 1 en z, on peut trouver y de E tel que, pour $N > 0$,

$$\frac{\pi}{N+1} \leqq |f(y) - f(z)| \leqq \frac{\pi}{N} \qquad \text{et} \qquad |y - z| \leqq \frac{1}{\omega_N}.$$

On pose cette fois $\mu = \delta_y - \delta_z$, et le calcul se déroule de la même manière puisque

$$\left| \int_0^{2\pi} \exp(N if(x))\, d\mu \right| \geqq 2 - \frac{\pi}{N}.$$

Alors, les fonctions qui définissent un endomorphisme de $A_\alpha(E)$ sont lipschitzienne d'ordre 1 en tout point d'accumulation de E.

PROPOSITION 2.2. — *S'il existe une infinité de points* $\{t_j\}$ *tels que, si* $j \neq k$, $f'(t_j) \neq f'(t_k)$, *et une constante* λ *telle que, pour tout* j, $|f'(t_j) \geqq \lambda|$, *f ne peut définir un endomorphisme de* A_α.

Démonstration. — Soit $t_1, \ldots, t_q$, une sous-suite finie de $\{t_j\}$. Il existe θ tel que, si j et k sont inférieurs à q, $|f'(t_j) - f'(t_k)| \geqq 2\theta$; si nous définissons $\eta_j(x)$ par $f(x) - f(t_j) = (x - t_j)[f'(t_j) + \eta_j(x)]$, il existe en outre une fonction continue positive ω, tendant vers zéro avec x, telle que, pour tout $j \leqq q$,

$$|\eta_j(x)| \leqq \omega(|x - t_j|).$$

Nous définissons alors $\Psi_\varepsilon(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \exp(-nix)$ presque partout, par

$$\Psi_\varepsilon(x) = \exp(-N if(x)) \qquad \text{sur} \quad [t_j - \varepsilon, t_j + \varepsilon],$$
$$\Psi_\varepsilon(x) = 0 \qquad \text{ailleurs};$$

$$2\pi |c_n| = \left| \int_{t_j-\varepsilon}^{t_j+\varepsilon} \exp(nix - N ixf'(t_j)) \exp(-N i(x - t_j)\eta_j(x))\, dx \right|,$$

$$2\pi |c_n| \leqq \frac{2}{|n - Nf'(t_j)|} + 2|N|\varepsilon^2\omega(\varepsilon). \tag{2.2}$$

La proposition 1 permet par ailleurs d'affirmer l'existence de $\mu = \sup |f'(x)|$ et nous pouvons écrire

$$2\pi |c_n| \leqq 2\varepsilon, \qquad 2\pi |n c_n| \leqq 2 + 2\mu |N| \varepsilon. \tag{2.3}$$

L'égalité de Parseval implique alors, si $\omega(\varepsilon) \leqq \lambda/2$,

$$|N| \lambda\varepsilon \leqq |N[f(t_j+\varepsilon) - f(t_j-\varepsilon)]|$$
$$= \left| \int_0^{2\pi} N f'(x) \exp(N if(x)) \Psi_\varepsilon(x)\, dx \right| = \left| 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} n\, a_n\, c_n \right|,$$

et l'on obtient, en majorant $|n^{1-\alpha} c_n|$ à l'aide des inégalités (2.2) et (2.3), et en choisissant ε et N tels que $N^2 \theta \varepsilon^2 \omega(\varepsilon) \leqq 1$, $|N| \theta\varepsilon \geqq q^{1/\alpha}$,

$$|N| \lambda\varepsilon \leqq \sum_{|n-Nf'(t_j)| < \theta |N|} |n^\alpha a_n| 2\varepsilon (2|N|\mu)^{1-\alpha} + \sum_{-\infty}^{\infty} |n^\alpha a_n| \frac{4(|N|\mu\varepsilon)^{1-\alpha}}{(\theta|N|)^\alpha};$$

on utilise alors le fait que les ensembles $\{n; |n - Nf'(t_j)| < \theta |N|$ sont deux à deux disjoints, en écrivant l'inégalité précédente pour tous les indices $j \leqq q$. On obtient l'une des deux inégalités suivantes :

$$\|\exp N if\|_{A_\alpha} \geqq q\,|N|^\alpha\, \lambda/2\, (2\mu)^{1-\alpha},$$
$$\|\exp N if\|_{A_\alpha} \geqq (|N|\theta\varepsilon)^\alpha\, |N|^\alpha\, \lambda/4\, \mu^{1-\alpha}.$$

Dans les deux cas,

$$\|\exp N if\|_{A_\alpha} \geqq (\lambda/4\, \mu^{1-\alpha})\, q\, |N|^\alpha,$$

ce qui est la proposition puisque q peut être choisi arbitrairement grand.

PROPOSITION 2.3. — *Si la mesure des ensembles* $\{x; f'(x) = \lambda\}$ *est portée par un nombre fini d'intervalles, f ne peut définir un endomorphisme de A_α.*

Démonstration. — Soit $\lambda \neq 0$, une valeur de la dérivée. D'après la proposition précédente, il existe $\mu > 0$ tel que, si $f'(x) \neq \lambda$, $|f'(x) - \lambda| > \mu$. S'il existe K intervalles disjoints sur lesquels $f'(x) = \lambda$, il existe aussi, pour $k \leqq K$, des constantes τ_k, φ_k, ψ_k telles que

$$\pi\, a_n = \pi\, \tilde{a}_n + \sum_{k=1}^{K} \frac{\sin(n - N\lambda)\tau_k}{n - N\lambda} \exp(Ni\,\varphi_k + (n - N\lambda)\, i\, \psi_k),$$

où $\tilde{a}_n$ est le coefficient de Fourier de la restriction de $\exp N if$ au complémentaire des K intervalles sur lesquels $f'(x) = \lambda$. Sur ce complémentaire $|f'(x) - \lambda| > \mu$, et on obtient en calculant le coefficient de Fourier de $\exp N if$ sur les $\sqrt{|N|}$ plus grands intervalles de ce complémentaire

$$\pi |\tilde{a}_n| \leqq \frac{2}{\mu\sqrt{|N|}} + \varepsilon_N, \qquad \lim_{N\to\infty} \varepsilon_N = 0 \qquad si \quad |n - N\lambda| < \frac{|N\mu|}{2}.$$

On choisit alors $\nu = \inf\left(\frac{\mu\sqrt{|N|}}{2}, \varepsilon_N^{-1}\right)$ qui augmente indéfiniment avec $|N|$, et pour lequel

$$\sum_{|n - N\lambda| \leq \nu} |n^\alpha a_n| \geq C_f |N|^\alpha \log \nu.$$

Dans la suite, nous noterons par $\lambda \neq 0$, la valeur supérieure (ou inférieure) atteinte par $f'(x)$ sur un ensemble dont la mesure non nulle n'est pas portée par un nombre fini d'intervalles. Cette valeur λ existe, d'après les propositions précédentes, si f définit un endomorphisme non linéaire de A_α, et nous noterons $E_\lambda = \{x; f'(x) = \lambda\}$.

Proposition 2.4. — *Si* E_λ *contient une infinité d'intervalles, f ne peut définir un endomorphisme de A_α.*

Démonstration. — Nous choisissons $2q$ intervalles tels que, si $k \leq q$,

$$f(x) = \lambda x + \beta_k \quad \text{sur} \quad [u_k - l_k, u_k + l_k],$$
$$f(x) = \lambda x + \gamma_k \quad \text{sur} \quad [v_k - l_k, v_k + l_k]$$

et nous définissons $\Omega_k(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} s_n \exp(-nix)$ presque partout, par

$$\Omega_k(x) = \exp(-Nif(x)) \quad \text{sur} \quad [u_k - l_k, u_k + l_k] \cup [v_k - l_k, v_k + l_k],$$
$$\Omega_k(x) = 0 \quad \text{ailleurs.}$$

On peut alors calculer effectivement les coefficients s_n :

$$(2.4) \quad 2\pi |s_n| = 4 \left| \frac{\sin(n - N\lambda) l_k}{n - N\lambda} \cos\left[N \frac{\beta_k - \gamma_k}{2} - (n - N\lambda) \frac{u_k - v_k}{2} \right] \right|.$$

La démonstration de (2.3) s'applique encore ici et nous permet d'écrire

$$(2.5) \qquad 2\pi |n s_n| \leq 2 + 4 |N\lambda| l_k.$$

L'égalité de Parseval est, dans ce cas,

$$4 |N\lambda| l_k = \left| \int_{u_k - l_k}^{u_k + l_k} Nf'(x) \exp(Nif(x)) \Omega_k(x) \, dx + \int_{v_k - l_k}^{v_k + l_k} N f'(x) \, dx \right|$$
$$= 2\pi \left| \sum_{-\infty}^{\infty} n \, a_n \, s_n \right| \leq 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} |n^\alpha a_n| \, . \, |n^{1-\alpha} s_n|,$$

et on déduit de (2.5), si $|N\lambda| l_k \geq 1/2$,

$$(4 |N\lambda| l_k)^\alpha \leq 2\pi^\alpha \sum_{-\infty}^{\infty} |n^\alpha a_n| \, . \, |s_n^\alpha|.$$

On remarque alors qu'il existe une infinité de N tels que, quel que soit $k \leqq q$, $| N(\beta_k - \gamma_k) - (2m+1)\pi | < q^{-1}$, à condition d'avoir pris soin de choisir

$$q^2 | \beta_k - \gamma_k | < | \beta_{k-1} - \gamma_{k-1} |.$$

Dans ce cas, l'égalité (2.4) permet d'assurer l'une des inégalités suivantes :

$$\sum_{-\infty}^{\infty} | n^\alpha a_n | \geqq q^\alpha | N\lambda |^\alpha / 2,$$

$$\sum_{1/(q|u_k - v_k|) < |n - N\lambda| < q/l_k} | n^\alpha a_n | \geqq | N\lambda |^\alpha / 2.$$

Si la première inégalité n'est vérifiée pour aucune valeur de k, on obtient la proposition si l'on a pris soin de choisir

$$q/l_{k-1} \leqq 1/(q | u_k - v_k |),$$

c'est-à-dire

$$| u_k - v_k | \leqq l_{k-1}/q^2.$$

Proposition 2.5. — *Si E_λ contient un ensemble P, parfait discontinu, de mesure positive, f ne peut définir un endomorphisme de A_α.*

Démonstration. — Nous allons montrer que l'on peut adapter la méthode utilisée pour démontrer la proposition 2.4. Le calcul fait pour établir (2.2) donne maintenant, compte tenu de (2.4),

$$\left| 2\pi | s_n | - 4 \left| \frac{\sin (n - N\lambda) l_k}{n - N\lambda} \cos \left[N \frac{\beta_k - \gamma_k}{2} - (n - N\lambda) \frac{u_k - v_k}{2} \right] \right| \right| \\ \leqq 4 | N | l_k^2 \eta_k (l_k).$$

On obtient alors le résultat en recopiant la démonstration 2.4 si l'on peut choisir, pour N convenable des l_k en nombre augmentant indéfiniment avec q et satisfaisant

$$| u_k - v_k | \leqq q^{-2} l_{k-1}, \qquad \eta_k (l_k) \leqq (q | N | l_k)^{-1},$$
$$| N(\beta_k - \gamma_k) - (2m+1)\pi | \leqq q^{-1}.$$

Pour effectuer ce choix, nous pouvons utiliser les résultats de A. Denjoy [2] : il existe un ensemble $P' \subset P$, de mesure positive, tel que, si $u_k \in P'$, si ε est assez petit,

$$\text{mes} \{ P \cap [u_k - \varepsilon, u_k + \varepsilon] \} \geqq 2\varepsilon (1 - q^{-q}).$$

En se restreignant à choisir u_k et v_k dans P', on peut alors choisir des intervalles tels que

$$\operatorname{mes}\left\{[u_k, v_k] \cap \complement P\right\} > |N|^{-1}, \qquad l_k < |N|^{-1} q^{q-1},$$

et il suffit de montrer que l'on peut trouver pour un N convenable, des intervalles en nombre augmentant indéfiniment avec q, tels que

$$|u_k - v_k| < q^{-2}\, l_{k-1}.$$

Cela sera en tout cas possible si la suite des I_p, dont la réunion forme le complémentaire de P, est telle que $\operatorname{mes}\{I_p\} > C^{-p}$, pour des p arbitrairement grands : il suffit en effet de choisir N très grand devant q^q, et de placer les couples (u_k, v_k) de part et d'autre des I_p tels que

$$\frac{1}{N} \leqq \operatorname{mes}\{I_p\} \leqq q^{q-1}/N,$$

dont le nombre augmente indéfiniment avec q.

Si la mesure des I_p décroît plus vite que toute exponentielle, on peut encore utiliser le théorème de Denjoy : P' est alors très voisin du complémentaire de l'union des I_p tels que $\operatorname{mes}\{I_p\} = q^{-q}$; P' est alors contenu dans des intervalles de mesure grande devant q^{-q}, que l'on peut utiliser comme premiers termes de la suite des l_k à condition de choisir N assez petit. En fait, il suffit de choisir $\mathrm{N} = q^q$, et l_k variant entre q^{-q} et $q^{-0(q)}$, $q^{-0(q)}$ étant la mesure du plus grand des intervalles contenant P'; on trouve alors $q/2\,0(q)$ intervalles convenables si le dernier I_p supprimé a exactement pour mesure q^{-q}.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEURLING (A.) et HELSON (H.). — Fourier-Stieltjes transforms with bounded powers, *Math. Scand.*, t. 1, 1953, p. 120-126.

[2] DENJOY (A.). — Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues, *J. Math. pures et appl.*, Sér. 7, t. 1, 1915, p. 105-240.

[3] KATZNELSON (Y.). — Sur le calcul symbolique dans quelques algèbres de Banach, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 76, 1959, p. 83-123 (Thèse S. math., Paris, 1959).

[4] LEBLANC (N.). — Un résultat de type Van der Corput. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 267, 1968, Série A, p. 886-887.

[5] STEIN (E.) et VAROPOULOS (N. Th.). — Communication verbale.

(Texte reçu le 31 mars 1971.)

Noël LEBLANC,
Centre scientifique et polytechnique,
Place du 8 mai 1945,
93-Saint-Denis.