BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHELE VERGNE

La structure de Poisson sur l'algèbre symétrique d'une algèbre de Lie nilpotente

Bulletin de la S. M. F., tome 100 (1972), p. 301-335
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1972__100__301_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
100, 1972, p. 301 à 335.

LA STRUCTURE DE POISSON SUR L'ALGÈBRE SYMÉTRIQUE D'UNE ALGÈBRE DE LIE NILPOTENTE

PAR

MICHÈLE VERGNE

RÉSUMÉ. — Cet article traite du problème suivant : Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, et G le groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$; les orbites de G dans $\mathfrak{g}^*$ sont munies canoniquement d'une structure de variété symplectique. Il existe donc sur chaque orbite $\mathcal{O}$ des coordonnées locales $p_1^{\mathcal{O}}, p_2^{\mathcal{O}}, \ldots, p_m^{\mathcal{O}}, q_1^{\mathcal{O}}, q_2^{\mathcal{O}}, \ldots, q_m^{\mathcal{O}}$ telles que la 2-forme symplectique canonique sur $\mathcal{O}$ soit égale à $\Sigma_i\, dp_i^{\mathcal{O}} \wedge dq_i^{\mathcal{O}}$, $1 \leqq i \leqq m$. L'algèbre des fonctions différentiables sur l'orbite $\mathcal{O}$ est munie d'une structure de Lie par le crochet de Poisson, et on a les relations $[p_i^{\mathcal{O}}, q_j^{\mathcal{O}}] = \delta_i^j$. Peut-on recoller les fonctions $p_i^{\mathcal{O}}$, $q_j^{\mathcal{O}}$ en des fonctions définies sur un ouvert de $\mathfrak{g}$? Ceci est possible dans le cas d'une algèbre de Lie nilpotente, et on peut démontrer qu'il existe $2m$ fonctions $p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_m$ rationnelles qui engendrent le corps des fractions rationnelles $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ sur le corps des fractions rationnelles G-invariantes et dont les restrictions $p_i^{\mathcal{O}}$, $q_j^{\mathcal{O}}$ à chaque orbite $\mathcal{O}$ vérifient les relations de commutation $[p_i^{\mathcal{O}}, q_j^{\mathcal{O}}] = \delta_i^j$. On déduit de ces considérations géométriques la structure de corps $\mathcal{D}_{n,k}$ du corps des fractions $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ qui avait été étudiée par GEL'FAND et KIRILLOV.

Table des matières

Index des notations

$\mathfrak{g}$	désignera une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps commutatif;
$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$	son algèbre enveloppante;
$\mathcal{D}(\mathfrak{g})$	le corps des fractions de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$;
$Z(\mathfrak{g})$	le centre de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$;
$C(\mathfrak{g})$	le centre de $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$;
$\mathcal{S}(\mathfrak{g})$	l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}$;
$\mathcal{S}^n(\mathfrak{g})$	le sous-espace des éléments de degré n de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$;
$\mathcal{R}(\mathfrak{g})$	le corps des quotients de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$;
$I(\mathfrak{g})$	l'anneau des invariants de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$, i. e. l'ensemble des éléments annulés par toutes les dérivations de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ prolongeant les dérivations ad X de $\mathfrak{g}$;
$J(\mathfrak{g})$	l'anneau des invariants de $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$, i. e. l'ensemble des éléments annulés par toutes les dérivations de $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ prolongeant les dérivations ad X de $\mathfrak{g}$;
f	un élément de $\mathfrak{g}^*$;
B_f	la forme bilinéaire alternée sur $\mathfrak{g}$, définie par $B_f(X, Y) = f([X, Y])$;
$\mathfrak{g}(f)$	le noyau de la forme B_f, i. e. l'ensemble des X tels que $f([X, Y]) = 0$ pour tout $y \in \mathfrak{g}$;
$S = (\mathfrak{g}_i)$, $0 \leq i \leq n$	une suite croissante d'idéaux de $\mathfrak{g}$ avec dim $\mathfrak{g}_i = i$ pour tout i avec $n =$ dimension de $\mathfrak{g}$;
$\mathfrak{p}(f; S)$	la sous-algèbre $\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{g}_i(f_i)$ de $\mathfrak{g}$;
$\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S)$	la sous-algèbre associative de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ engendrée par la réunion des $I(\mathfrak{g}_i)$ pour $0 \leq i \leq n$;
$\mathcal{U}^0(\mathfrak{g}; S)$	la sous-algèbre associative de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ engendrée par la réunion des $Z(\mathfrak{g}_i)$ pour $0 \leq i \leq n$;
λ	l'épimorphisme canonique de l'espace vectoriel $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ appelé symétrisation ([6]);
$\mathcal{S}^1(\mathfrak{g}; S)$	désignera le sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ formé des polynômes P de la forme $\sum_{i=1}^{p} P_i X_i$, où les P_i appartiennent à $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S)$ et les X_i appartiennent à $\mathfrak{g}$.
$\mathcal{U}^1(\mathfrak{g}; S)$	désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ formé des éléments $\mathbf{Q}$ de la forme $\mathbf{Q} = B_0 + \sum_{i=1}^{q'} B_i X_i$, où les éléments B_0 et B_i appartiennent à $\mathcal{U}^0(\mathfrak{g}; S)$ et les X_i appartiennent à $\mathfrak{g}$;

β désigne l'application [pour son existence, *voir* (3.11)] de $\mathcal{S}^1(\mathfrak{g}; S)$ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ qui à un élément

$$P = A_0 + \Sigma_{i=1}^q A_i X_i$$

fait correspondre l'élément

$$\beta(P) = \lambda(A_0) + \Sigma_{i=1}^q \lambda(A_i) X_i.$$

Introduction

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps k de caractéristique zéro. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie algébrique de dimension n sur k, une conjecture de I. M. GELFAND et A. A. KIRILLOV dans [9] est que le corps des fractions $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ est un corps $\mathcal{D}_{m,r}$ c'est-à-dire un corps non commutatif, tel que son centre soit de degré de transcendance r sur k et engendré sur son centre par $2m$ éléments $p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_m$, vérifiant les relations $[p_i, q_j] = \delta_i^j$. Cette conjecture est démontrée, dans [9], si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie nilpotente, ou si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre $\mathfrak{s}\mathcal{L}(n, k)$ ou $\mathfrak{g}\mathcal{L}(n, k)$. D'autre part, un article des mêmes auteurs [10] étudie la structure de $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple quelconque, et aboutit à une conclusion très proche de cette conjecture.

La philosophie d'une telle structure du corps $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ dans le cas nilpotent s'explique en grande partie par la théorie des représentations. Supposons $k = \mathbf{R}$, alors on sait que les représentations génériques du groupe G s'effectuent dans un espace $L^2(\mathbf{R}^m)$, où $m = (1/2)(n - r)$ et les opérateurs infinitésimaux de l'algèbre de Lie fournissent l'algèbre de tous les opérateurs différentiels à coefficients polynômiaux sur $\mathbf{R}^m$, algèbre engendrée par les opérateurs $P_i = x_i$ et $Q_j = \partial/\partial x_j$.

L'analogue algébrique de ce résultat dit que si I est un idéal primitif « générique » de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, alors l'algèbre quotient $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I$ est une algèbre de Weyl A_n [7].

Donc pour tout idéal primitif « générique » I *de* $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, il existera des éléments p_i^I et q_j^I dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I$ vérifiant les relations $[p_i^I, q_j^I] = \delta_i^j$.

GEL'FAND et KIRILLOV ([9], lemme 9) démontrent qu'on peut remonter globalement ces éléments dans $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$; plus précisément, qu'il existe un élément non nul c de $Z(\mathfrak{g})$, centre de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, et $2m$ éléments p_i, q_j de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ vérifiant les relations $[p_i, q_j] = \delta_i^j c$.

On sait, d'autre part, que la théorie des représentations d'un groupe de Lie G est fortement liée à l'étude des orbites de G dans l'espace vectoriel dual $\mathfrak{g}^*$ de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (*voir* [11], [2] et [13]).

On peut formuler un analogue géométrique de la conjecture de Gel'fand-Kirillov : soient $\mathfrak{g}$ une algèbre algébrique réelle, et G le groupe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, les orbites de G dans $\mathfrak{g}^*$ sont munies canoniquement d'une structure de variété symplectique ([11], ou [4], chap. II).

La dimension maximale d'une orbite $\mathcal{O}$ est $2m$. Soit $\omega_{\mathcal{O}}$ la 2-forme canonique sur $\mathcal{O}$, alors, d'après la théorie générale des variétés symplectiques, il existe des coordonnées locales $p_1^{\mathcal{O}}, \ldots, p_m^{\mathcal{O}}, q_1^{\mathcal{O}}, \ldots, q_m^{\mathcal{O}}$, de telle sorte que $\omega_{\mathcal{O}}$ soit localement égale à $\sum_{i=1}^m dp_i^{\mathcal{O}} \wedge dq_i^{\mathcal{O}}$. Ceci revient à dire que le crochet de Poisson des fonctions $p_i^{\mathcal{O}}$ et $q_j^{\mathcal{O}}$ vérifient les relations $[p_i^{\mathcal{O}}, q_j^{\mathcal{O}}] = \delta_i^j$.

Peut-on trouver un ouvert de Zariski V de $\mathfrak{g}^*$, et $2m$ fonction rationnelles $p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_m$, définies sur V, telles que si $\mathcal{O}$ est une orbite rencontrant V, la forme $\omega_{\mathcal{O}}$ sur $\mathcal{O} \cap V$ soit égale à la restriction à $\mathcal{O} \cap V$ de $\sum_{i=1}^m dP_i \wedge dQ_i$.

Ce problème est aussi en étroit rapport avec la détermination de la mesure de Plancherel du groupe G (*voir* en particulier [12], si G est nilpotent).

Nous montrerons dans cet article que si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie nilpotente, on peut en effet « recoller » les coordonnées locales $p_i^{\mathcal{O}}$. Précisément, il existe $2m$ fonctions polynômiales $(p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_m)$, un polynôme c G-invariant non nul, un ouvert de Zariski U non vide, G-invariant, sur lequel c ne s'annule pas, tels que si $\mathcal{O}$ est une orbite contenue dans U, les restrictions $p_i^{\mathcal{O}}$ et $q_j^{\mathcal{O}}$ de p_i et q_j à $\mathcal{O}$ réalisent un isomorphisme algébrique de $\mathcal{O}$ sur $\mathbf{R}^{2m}$ et telles que $\omega_{\mathcal{O}}$ soit égale à $1/c(\mathcal{O}) \sum_{i=1}^m dp_i^{\mathcal{O}} \wedge dq_i^{\mathcal{O}}$.

Formulons de manière légèrement différente ce résultat :

L'algèbre $\mathcal{C}^{\mathcal{O}}$ des fonctions différentiables sur $\mathcal{O}$ est munie (grâce à la forme $\omega_{\mathcal{O}}$) d'un crochet de Poisson. Ceci permet de définir un crochet de Poisson sur $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$, algèbre des polynômes sur $\mathfrak{g}^*$.

Si a et b appartiennent à $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$, la fonction $[a, b]$ est la fonction sur $\mathfrak{g}^*$ telle que

$$[a, b]^{\mathcal{O}} = [a^{\mathcal{O}}, b^{\mathcal{O}}], \quad \text{pour toute } \mathcal{O}$$

(On démontrera que $[a, b]$ est encore un polynôme.)

Alors la structure de l'algèbre $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$, ou plutôt de son corps des fractions $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$, muni de ce crochet de Poisson, est tout à fait analogue à la structure du corps des fractions $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ [1].

L'algèbre de Poisson $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ est engendrée sur son centre $J(\mathfrak{g})$, corps des fonctions rationnelles G-invariantes sur $\mathfrak{g}^*$, par les $2m$ éléments $p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_m$, et ils vérifient les relations $[p_i, q_j] = \delta_i^j c$.

La démonstration de ce fait est calquée sur la démonstration de Gel'fand et Kirillov pour le corps enveloppant.

Cependant, il n'est pas clair *a priori* que notre « conjecture géométrique » sur la structure de l'algèbre de Poisson $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ est entraînée, ou entraîne, la structure du corps enveloppant $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$.

Il est clair que ces conjectures sont reliées l'une à l'autre : en effet soit $(\mathcal{U}_n(\mathfrak{g}))$ la filtration canonique de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Alors si $a \in \mathcal{U}_n(\mathfrak{g})$ et $b \in \mathcal{U}_m(\mathfrak{g})$, on a $[a, b] = ab - ba \in \mathcal{U}_{n+m-1}(\mathfrak{g})$. Ceci permet de munir

$$\mathcal{S}(\mathfrak{g}) = \Sigma\, \mathcal{U}_n(\mathfrak{g})/\mathcal{U}_{n-1}(\mathfrak{g})$$

d'une structure d'algèbre de Lie qui n'est autre que la structure du crochet de Poisson [en fait, dans cet article, on définira le crochet sur $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ de cette façon, puis on prouvera l'identité $[a^{\mathcal{O}}, b^{\mathcal{O}}] = [a, b]^{\mathcal{O}}$].

On peut ainsi dire que la structure de crochet de Poisson sur $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ est « la première approximation » du crochet sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Mais les structures de corps $\mathcal{D}_{m,r}$ de $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ n'étant en aucune façon compatible avec la filtration, on ne peut déduire de la structure de $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ la structure de l'algèbre de Poisson $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$.

— Nous montrerons dans cet article, et ceci en sera l'un des points essentiels, que, dans le cas nilpotent, la conjecture géométrique entraîne la conjecture algébrique.

Ceci nécessite la construction d'un isomorphisme β d'algèbres de Lie entre une sous-algèbre $\mathcal{S}^1(\mathfrak{g})$ de Poisson de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$, engendrant $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ en tant qu'algèbre associative, et une sous-algèbre de Lie $\mathcal{U}^1(\mathfrak{g})$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ engendrant $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ en tant qu'algèbre associative. [On sait bien qu'un isomorphisme d'algèbre de Lie entre tout $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ et $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ n'existe pas en général.] On s'inspirera de la théorie des représentations du groupe G :

Rappelons la méthode de KIRILLOV permettant d'associer à toute orbite $\mathcal{O}$ de G dans $\mathfrak{g}^*$ une représentation unitaire irréductible du groupe G [11] :

Soient $\mathcal{O}$ une orbite de G dans $\mathfrak{g}^*$, et f un point de $\mathcal{O}$. Soit $G(f)$ le stabilisateur de f dans G, d'algèbre de Lie :

$$\mathfrak{g}(f) = \{ x \in \mathfrak{g} ; f([x, y]) = 0 \text{ pour tout } y \in \mathfrak{g} \}.$$

On a $\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}(f) = 2k = \dim \mathcal{O}$. Il existe une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ telle que

$$f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0 \qquad \text{et} \qquad \dim \mathfrak{h} - \dim \mathfrak{g}(f) = 1/2 \dim \mathcal{O}.$$

Alors la représentation unitaire $\rho(f, \mathfrak{h})$ du groupe G, induite par le caractère χ_f du groupe analytique $H = \exp \mathfrak{h}$ de différentielle if sur $\mathfrak{h}$, est irréductible, et définit une classe de représentations unitaires irréductibles $\rho(\mathcal{O})$ de G.

On désire construire $\mathfrak{h}$, variant rationnellement en fonction de f, sur un ouvert de $\mathfrak{g}^*$.

Soit $S = (\mathfrak{g}_i)_{0 \leq i \leq n}$ une suite de Jordan-Hölder du $\mathfrak{g}$-module $\mathfrak{g}$. Soient $f \in \mathfrak{g}^*$, et f_i la restriction de f à $\mathfrak{g}_i$. Alors on peut choisir, comme sous-algèbre $\mathfrak{h}$ vérifiant les propriétés voulues,

$$\mathfrak{p}(f; s) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{g}_i(f_i) \qquad ([17], \text{ ou } [4] \text{ chap. } 4).$$

Soit $I(\mathfrak{g})$ l'anneau des polynômes G-invariants sur $\mathfrak{g}^*$, et soit z un élément de $I(\mathfrak{g})$; alors la différentielle $d_f z$, de la fonction z au point f, définit un élément de $\mathfrak{g}$ qui appartient à $\mathfrak{g}(f)$, et il existe un ouvert de Zariski U_1 de $\mathfrak{g}^*$ tel que si $f \in U_1$, $\mathfrak{g}(f)$ soit égale au sous-espace vectoriel constitué des éléments $d_f a$ pour $a \in I(\mathfrak{g})$ [8].

Donc, si on introduit la sous-algèbre $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}, s)$ de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ engendrée par la réunion des $I(\mathfrak{g}_i)$ pour $i \leq i \leq n$, il est clair que sur un ouvert de Zariski de $\mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{p}(f; s)$ est égale au sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ formé des éléments $d_f a$ pour $a \in \mathcal{S}^0(\mathfrak{g}, s)$.

On étudiera cette algèbre $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}, s)$; on montrera que les m éléments $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ peuvent être choisis dans $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}, s)$, et que le corps des fractions $\mathcal{R}^0(\mathfrak{g}, s)$ de $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}, s)$ est engendré sur $J(\mathfrak{g})$ par $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$.

Étant donnés un point f et la sous-algèbre $\mathfrak{p}(f; s)$ subordonnée à f, on peut définir la notion de fonction quantifiable sur l'orbite $\mathcal{O}_f$ de f par rapport à $\mathfrak{p}(f; s)$, et à toute fonction quantifiable, on sait faire correspondre un opérateur non borné dans l'espace de la représentation $\rho(\mathcal{O}_f)$.

Si $(p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m)$ est un système de coordonnées symplectique sur l'orbite $\mathcal{O}_f$ l'algèbre de Poisson des fonctions quantifiables est formée de l'algèbre des fonctions linéaires en q_i (*voir* [14]).

On introduit alors la sous-algèbre de Poisson $\mathcal{S}^1(\mathfrak{g}; S)$ de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ formée des polynômes de la forme $A_0 + \sum_{i=1}^{q} A_i X_i$, où les éléments A_0, A_i appartiennent à $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; s)$, et où les éléments X_i appartiennent à $\mathfrak{g}$. Alors toute fonction de $\mathcal{S}^1(\mathfrak{g}; s)$ donne, par restriction à toute orbite $\mathcal{O}_f$, une fonction quantifiable sur $\mathcal{O}_f$ par rapport à $\mathfrak{p}(f; s)$, et l'opérateur non borné correspondant provient d'un élément de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Nous n'utiliserons pas, dans cet article, les notions relatives aux fonctions quantifiables, mais il est clair que ce sont ces notions qui conduisent à la définition de l'homomorphisme β de $\mathcal{S}^1(\mathfrak{g}; s)$ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ défini en (3.11).

On montrera que les m éléments $q_1, q_2, \ldots, q_m$ peuvent être choisis dans $\mathcal{S}^1(\mathfrak{g}; s)$; alors les éléments $(\beta(p_1), \ldots, \beta(p_m), \beta(q_1), \ldots, \beta(q_m))$ sont des éléments de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ qui vérifieront les relations

$$[\beta(p_i), \beta(q_j)] = \delta_i^j \beta(c),$$

où $\beta(c)$ sera un élément non nul du centre $Z(\mathfrak{g})$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, et on pourra montrer que le corps $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ est engendré sur son centre $C(\mathfrak{g})$ par les $2m$ éléments $(\beta(p_i), \beta(q_i))$.

Je remercie Nicole Conze, Mustapha Raïs et Pierre Renouard pour l'aide qu'ils m'ont apporté dans ce travail.

1. Rappels sur la représentation coadjointe d'un groupe de Lie et sur le crochet de Poisson

(1.1) Soient G un groupe de Lie réel connexe, et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, G opère dans $\mathfrak{a}$ au moyen de la représentation adjointe et dans le dual $\mathfrak{a}^*$ de l'espace vectoriel $\mathfrak{a}$ au moyen de la représentation contragrédiente de la représentation précédente : si $f \in \mathfrak{a}^*$ et $g \in G$, $g.f$ est la forme linéaire sur $\mathfrak{a}$ définie par

$$\langle g.f, Y \rangle = \langle f, g^{-1}.Y \rangle \quad \text{pour tout } Y \in \mathfrak{a}.$$

Il en résulte une représentation linéaire de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{a}^*$. Si $f \in \mathfrak{a}^*$ et $X \in \mathfrak{g}$, $X.f$ est l'élément de $\mathfrak{a}^*$ tel que

$$\langle X.f, Y \rangle = \langle f, [X, Y] \rangle \quad \text{pour tout } Y \in \mathfrak{g}.$$

Dans le cas particulier où $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$, la représentation linéaire de G (resp. $\mathfrak{g}$) dans $\mathfrak{g}^*$ ainsi définie est appelée représentation coadjointe de G (resp. de $\mathfrak{g}$).

(1.2) Comme tout espace vectoriel réel de dimension finie, $\mathfrak{g}^*$ est une variété C^∞ (dans la suite, une fonction sera dite différentiable si elle est indéfiniment différentiable). L'espace tangent en chaque point de $\mathfrak{g}^*$ s'identifie canoniquement à $\mathfrak{g}^*$, et l'espace cotangent à $\mathfrak{g}$. Si donc φ est une fonction différentiable définie au voisinage de f, la différentielle $d_f\,\varphi$ au point f de la fonction φ est un élément de $\mathfrak{g}$. On notera indifféremment $\langle \varphi, f \rangle$, $\langle f, \varphi \rangle$, ou $\varphi(f)$ la valeur de φ au point f.

On a, par définition,

$$\langle l, d_f\,\varphi \rangle = \frac{d}{dt}\varphi(f + tl)\Big|_{t=0} \quad \text{pour tout } l \in \mathfrak{g}^*.$$

(1.3) A la représentation coadjointe de G dans $\mathfrak{g}^*$ correspond une représentation de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre opposée à l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur $\mathfrak{g}$:

Si $X \in \mathfrak{g}$, on désignera par $\sigma(X)$ le champ de vecteurs sur $\mathfrak{g}^*$ définie de la manière suivante :

Si $f \in \mathfrak{g}^*$ et si φ est une fonction différentiable définie au voisinage de f,

$$\sigma(X)_f.\varphi = \frac{d}{dt}\varphi(\exp tX.f)\Big|_{t=0}.$$

Comme $\exp tX.f = f + tX.f$ modulo t^2,

$$\sigma(X)_f.\varphi = \langle X.f, d_f\,\varphi \rangle$$

Ou encore le champ de vecteurs $\sigma(X)$ s'identifie au champ de vecteurs $f \mapsto X.f$.

(1.4) Soit Y un élément de $\mathfrak{g}$, et soit ψ^Y la fonction sur $\mathfrak{g}^*$ définie par $\langle \psi^Y, l \rangle = \langle l, Y \rangle$. Alors on a

$$\sigma(X).\psi^Y = -\psi^{[X, Y]}.$$

(1.5) Soit f un point de $\mathfrak{g}^*$. On notera B_f la forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}$ définie par $B_f(X, Y) = f([X, Y])$.

Si W est un sous-espace de $\mathfrak{g}$, on notera W^f l'orthogonal de W par rapport à la forme bilinéaire B_f.

Soit $G(f)$ le stabilisateur de f dans G, il a comme algèbre de Lie $\mathfrak{g}(f)$, où

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(f) &= \{ X \in \mathfrak{g}; X.f = 0 \} \\ &= \{ X \in \mathfrak{g};\ f([X, Y]) = 0 \text{ pour tout } Y \in \mathfrak{g} \}. \end{aligned}$$

(1.6) LEMME. — *Soient $f \in \mathfrak{g}^*$, $X \in \mathfrak{g}(f)$, et φ une fonction différentiable définie au voisinage de f; alors*

$$d_f(\sigma(X).\varphi) = -[X, d_f \varphi].$$

Démonstration. — Soit $l \in \mathfrak{g}^*$, alors

$$\begin{aligned} \langle l, d_f(\sigma(X).\varphi) \rangle &= \frac{d}{dt}(\sigma(X)\varphi)(f + tl)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{du}(f + tl + u\,X.f + ut\,X.l)\Big|_{u=0}\right)\Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Intervertissons l'ordre des dérivations, et remarquons que $X.f = 0$, car $X \in \mathfrak{g}(f)$. Il vient

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{du}\left(\frac{d}{dt}\varphi(f + t(l + u\,X.l))\Big|_{t=0}\right)\Big|_{u=0} \\ &= \frac{d}{du}(\langle l + u\,X.l, d_f\varphi \rangle)\Big|_{u=0} \\ &= -\langle l, [X, d_f\varphi] \rangle. \end{aligned}$$

(1.7) LEMME. — *Soient $f \in \mathfrak{g}^*$, et φ une fonction différentiable définie au voisinage de f et localement invariante par G, c'est-à-dire telle que $\sigma(X)_f\,\varphi = 0$ quel que soit $X \in \mathfrak{g}$. Alors $d_f\varphi$ appartient au centre de $\mathfrak{g}(f)$.*

Démonstration. — On a $\langle X.f, d_f\varphi \rangle = \sigma(X)_f.\varphi = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$ ce qui prouve que $d_f\varphi$ appartient à $\mathfrak{g}(f)$.

D'autre part, (1.6) montre que $d_f\varphi$ appartient au centre de $\mathfrak{g}(f)$.

(1.8) Soit U l'ensemble des $f \in \mathfrak{g}^*$ tels que $\mathfrak{g}(f)$ soit de dimension minimale égale à r.

Cet ensemble est un ouvert de Zariski. Si $f \in U$, il existe un voisinage ouvert V de f dans U, et des fonctions différentiables localement invariantes par G, $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ définies sur V telles que les différentielles au point f des fonctions φ_i soient linéairement indépendantes. Il en résulte donc le lemme suivant :

(1.9) LEMME [8]. — *Si $f \in U$, l'algèbre $\mathfrak{g}(f)$ est égale à l'espace vectoriel formé des $d_f \varphi$, où φ parcourt l'espace des fonctions localement invariantes par G définies au voisinage de f. En particulier, si $f \in U$, $\mathfrak{g}(f)$ est commutative.*

Remarque. — Une démonstration simple de CARMONA ([4], chap. II) prouve que quelle que soit l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur un corps de base infini, alors si $f \in \mathfrak{g}^*$ est tel que $\mathfrak{g}(f)$ soit de dimension minimale, l'algèbre $\mathfrak{g}(f)$ est commutative.

(1.10) Soit $f \in \mathfrak{g}^*$; alors l'orbite $\mathcal{O}$ de f est isomorphe à $G/G(f)$ par l'application $g \mapsto g.f$.

Elle est de dimension paire $= 2k$.

On considérera sur l'orbite $\mathcal{O}$ la structure de variété héritée de la structure d'espace homogène de G, la topologie sous-jacente à cette structure C^∞ est en général plus fine que celle induite par $\mathfrak{g}^*$ [toutefois, les résultats essentiels de cet article étant obtenus dans le cas où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie nilpotente, l'orbite par G d'un élément de $\mathfrak{g}^*$ est alors fermée (*voir* [15]), et c'est une sous-variété de $\mathfrak{g}^*$].

Soit $X \in \mathfrak{g}$, on notera $\sigma(\mathcal{O}, X)$ le champ de vecteurs sur $\mathcal{O}$ défini par

$$\sigma(\mathcal{O}, X)_l . \varphi = \frac{d}{dt} \varphi(\exp t X . l)\Big|_{t=0}$$

où φ est une fonction C^∞ sur l'orbite $\mathcal{O}$ et l un point de $\mathcal{O}$.

En tout point l de $\mathcal{O}$, l'espace tangent à $\mathcal{O}$ est l'espace $(\sigma(\theta, \mathfrak{g}))_l$ qui s'identifie à $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(l)$.

(1.11) La variété $\mathcal{O}$ est munie d'une 2-forme différentielle canonique ω qui est fermée, G-invariante et partout non dégénérée (*voir* [4], chap. II). Si X et Y appartiennent à $\mathfrak{g}$ et $l \in \mathcal{O}$, alors

$$\omega(\sigma(\mathcal{O}, X_l), \sigma(\mathcal{O}, Y)_l) = \langle l, [X, Y] \rangle.$$

Soit $\tilde{\omega}$ l'isomorphisme canonique défini par ω entre l'espace des 1-formes sur $\mathcal{O}$ et l'espace des champs de vecteurs. Si α est une 1-forme sur $\mathcal{O}$, par définition $\tilde{\omega}(\alpha)$ est l'unique champ de vecteurs sur $\mathcal{O}$, tel que $\omega(\tilde{\omega}(\alpha), \xi) = \langle \alpha, \xi \rangle$ quel que soit le champ de vecteurs ξ sur $\mathcal{O}$.

Soit ψ une fonction différentiable sur $\mathfrak{g}^*$, et soit $i_{\mathcal{O}}^*(d\psi)$ la 1-forme sur $\mathcal{O}$, image réciproque de la 1-forme $d\psi$ sur $\mathcal{O}$ par l'injection canonique $i_{\mathcal{O}}$ de $\mathcal{O}$ dans $\mathfrak{g}^*$.

(1.12) LEMME. — $\tilde{\omega}\,(i^*_{\mathcal{O}}\,(d\psi))_l = \sigma\,(d_l\,\psi)_l$.

Démonstration. — Il suffit de vérifier que, quel que soit $Y \in \mathfrak{g}$,

$$\omega\,(\sigma\,(d_l\,\psi)_l, \sigma\,(Y)_l) = \langle d_l\,\psi,\, Y.l \rangle,$$

or

$$\begin{aligned}\omega\,(\sigma\,(d_l\,\psi)_l, \sigma\,(Y)_l) &= \langle l, [d_l\,\psi,\, Y] \rangle \\ &= \langle Y.l,\, d_l\,\psi \rangle.\end{aligned}$$

(1.13) On définit le crochet de Poisson de deux fonctions φ et ψ différentiables sur $\mathcal{O}$, par $[\varphi, \psi] = \tilde{\omega}\,(d\psi).\varphi$.

La loi $(\varphi, \psi) \mapsto [\varphi, \psi]$ définit alors une structure d'algèbre de Lie sur l'espace $\mathcal{C}^{\mathcal{O}}$ des fonctions différentiables sur l'orbite $\mathcal{O}$ [14], de plus on a

$$[\varphi_1\,\varphi_2, \psi] = [\varphi_1, \psi].\varphi_2 + [\varphi_2, \psi].\varphi_1.$$

Naturellement si φ et ψ sont deux fonctions définies sur un ouvert U de $\mathcal{O}$, $[\varphi, \psi]$ peut se définir sur l'ouvert U.

(1.14) LEMME. — *Soient φ et ψ deux fonctions différentiables sur* $\mathfrak{g}^*$, *et notons $\varphi_{\mathcal{O}}$ et $\psi_{\mathcal{O}}$ les restrictions de φ et ψ à $\mathcal{O}$. Alors, quelles que soit $l \in \mathcal{O}$, on a*

$$\langle l, [\varphi_{\mathcal{O}}, \psi_{\mathcal{O}}] \rangle = \langle l, [d_l\,\varphi, d_l\,\psi \rangle].$$

En effet :

$$\begin{aligned}\langle [\varphi_{\mathcal{O}}, \psi_{\mathcal{O}}], l \rangle &= \tilde{\omega}\,(d\psi_{\mathcal{O}})_l.\varphi_{\mathcal{O}} \\ &= \sigma\,(d_l\,\psi)_l.\varphi \qquad \text{d'après (1.12)} \\ &= \langle (d_l\,\psi).l,\, d_l\,\varphi \rangle \\ &= \langle l, [d_l\,\varphi, d_l\,\psi] \rangle\end{aligned}$$

(1.15) COROLLAIRE. — *Soient X et Y appartenant à* $\mathfrak{g}$, *alors*

$$[\psi^X_{\mathcal{O}}, \psi^Y_{\mathcal{O}}] = \psi^{[X,Y]}_{\mathcal{O}}.$$

(1.16) On sait que, pour tout point f de $\mathcal{O}$, il existe un ouvert U de $\mathcal{O}$ contenant f, et $2\,k$-fonctions $p_1, p_2, \ldots, p_k, q_1, q_2, \ldots, q_k$ de U dans $\mathbf{R}$ formant un système de coordonnées sur U et telles que la restriction de ω à U soit égale à la 2-forme $\sum_{i=1}^{k} dp_i \wedge dq_i$ (*voir* [1]). On a alors

$$\tilde{\omega}\,(dp_i) = -\frac{\partial}{\partial q_i}, \qquad \tilde{\omega}\,(dq_i) = \frac{\partial}{\partial p_i}$$

et par conséquent

$$[p_i, p_j] = [q_i, q_j] = 0 \qquad \text{et} \qquad [p_i, q_j] = \delta_i^j.$$

2. Crochet de Poisson sur l'algèbre symétrique d'une algèbre de Lie

(2.1) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps k. Soient $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante $\mathfrak{g}$, et $(\mathcal{U}_n(\mathfrak{g}))_{n \geq 0}$ sa filtration canonique.

Alors l'algèbre symétrique $\mathcal{S}(\mathfrak{g}) = \sum_{n \geq 0} \mathcal{S}^n(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ est canoniquement isomorphe au gradué associé à la filtration $(\mathcal{U}_n(\mathfrak{g}))$ de $\mathfrak{g}$. Notons j_n la surjection canonique de $\mathcal{U}_n \mathfrak{g}$ sur $\mathcal{S}^n \mathfrak{g}$. Si $P \in \mathcal{U}_n(\mathfrak{g})$ et $Q \in \mathcal{U}_m(\mathfrak{g})$, alors $PQ - QP \in \mathcal{U}_{n+m-1}(\mathfrak{g})$.

On définit alors *le crochet de Poisson* sur $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ de la manière suivante ([3], § 7) :

(2.2) Définition. — Soient

$$P \in \mathcal{S}^n(\mathfrak{g}) \quad \text{et} \quad \tilde{P} \in \mathcal{U}_n(\mathfrak{g}) \qquad \text{tel que} \quad P = j_n(\tilde{P}),$$
$$Q \in \mathcal{S}^m(\mathfrak{g}) \quad \text{et} \quad \tilde{Q} \in \mathcal{U}_m(\mathfrak{g}) \qquad \text{tel que} \quad Q = j_m(\tilde{Q}).$$

Alors on pose $[P, Q] = j_{n+m-1}(\tilde{P}\tilde{Q} - \tilde{Q}\tilde{P})$. Il est clair que $[P, Q]$ ne dépend pas des choix de $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$. On prolonge ce crochet à $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ par bilinéarité. On dira que $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$, muni de ce crochet, est l'algèbre de Poisson de $\mathfrak{g}$.

(2.3) Lemme ([3], § 7) :

(*a*) *Le crochet ainsi défini sur $\mathcal{S}(\mathfrak{g}) = \sum \mathcal{S}^n(\mathfrak{g})$ fait de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ une algèbre de Lie, et on a*

$$[\mathcal{S}^n(\mathfrak{g}), \mathcal{S}^m(\mathfrak{g})] \subset \mathcal{S}^{n+m-1}(\mathfrak{g}).$$

(*b*) *Sur $\mathcal{S}^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, le crochet redonne la loi d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.*

(*c*) *Le crochet vérifie, pour tout triplet (P_1, P_2, P_3) d'éléments de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$, la relation*

$$[P_1 P_2, P_3] = [P_1, P_3] P_2 + [P_2, P_3].P_1.$$

(2.4) Lemme. — *On peut prolonger de manière unique cette loi au corps $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ des fractions de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ en une loi vérifiant*

$$[R_1 R_2, R_3] = [R_1, R_3].R_2 + R_1.[R_2, R_3],$$

et ce prolongement est encore une loi d'algèbre de Lie sur $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$. On dira que $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$, muni de ce crochet, est l'algèbre de Poisson rationnelle de $\mathfrak{g}$.

La démonstration de ces lemmes se fait sans aucune difficulté. Démontrons par exemple que la loi prolongée est encore une loi d'algèbre de Lie sur $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$. Si R_1 et R_2 sont fixés dans $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ l'application qui à R_3 fait correspondre

$$[[R_1, R_2], R_3] + [[R_2, R_3], R_1] + [[R_3, R_1], R_2]$$

est une dérivation pour la structure associative de $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$. Pour qu'elle soit nulle, il suffit qu'elle soit nulle sur $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$.

On se ramène donc à démontrer l'identité de Jacobi dans le cas où un élément appartient à $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$, puis deux éléments, et finalement tous les trois.

(2.5) Lemme. — *Notons* $\varepsilon(X)$ *l'unique dérivation de* $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ *qui prolonge l'endomorphisme* $\operatorname{ad} X$ *de* $\mathfrak{g}$, *alors si* $Q \in \mathcal{R}(\mathfrak{g})$,

$$\varepsilon(X).Q = [X, Q].$$

En effet, $\varepsilon(X)$ et $\operatorname{ad}_{\mathcal{R}(\mathfrak{g})} X$ sont deux dérivations de $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$, muni de sa structure associative, qui coïncident sur $\mathfrak{g}$.

En particulier, le centre de l'algèbre de Poisson $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ [resp. $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$] coïncide avec l'algèbre $I(\mathfrak{g})$ [resp. $J(\mathfrak{g})$] des éléments de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ [resp. de $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$] annulés par l'ensemble des dérivations $\varepsilon(\mathfrak{g})$.

(2.6) Lemme. — *On suppose* $k = R$, *et on identifie* $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ *à l'algèbre des polynômes sur* $\mathfrak{g}^*$. *Soit* G *un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$. *Soient* $f \in \mathfrak{g}^*$, *et* $\mathcal{O}$ *l'orbite de* f *par* G. *Alors la restriction à* $\mathcal{O}$ *de la fonction polynôme* $[P, Q]$ *est le crochet de Poisson* [*défini en* (1.13)] *des restrictions* $P_{\mathcal{O}}$ *et* $Q_{\mathcal{O}}$ *des fonctions* P *et* Q *à* $\mathcal{O}$.

Démonstration. — Ceci est vrai si P et Q appartiennent tous deux à $\mathcal{S}^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, d'après (2.3, *b*) et (1.15).

On en déduit le résultat d'après (2.3, *c*) et (1.13).

(2.7) On suppose $k = R$, et soit G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Si P est un polynôme sur $\mathfrak{g}^*$, on notera $g.P$ le polynôme défini par $(g.P)(f) = P(g^{-1} f)$.

Il résulte de (2.5) que le centre $I(\mathfrak{g})$ de l'algèbre de Poisson $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ coïncide avec l'anneau des polynômes G-invariants; et que de même le centre $J(\mathfrak{g})$ de l'algèbre de Poisson $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ coïncide avec le corps des fractions rationnelles G-invariantes.

Lemme. — *Supposons* $\mathfrak{g}$ *nilpotente, ou* $k = R$. *Alors* $\exp \operatorname{ad}_{\mathcal{S}(\mathfrak{g})} X$ *définit un automorphisme de* $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ *pour la structure d'algèbre associative et d'algèbre de Poisson, et* $(\exp \operatorname{ad}_{\mathcal{S}(\mathfrak{g})} X)(P)$ *n'est autre que le polynôme* $(\exp X).P$.

(2.8) Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique sur un corps k de caractéristique 0. Puisque k est un corps infini, on identifie $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ à l'algèbre des fonctions rationnelles sur $\mathfrak{g}^*$.

Si $f \in \mathfrak{g}^*$, on note $(\mathcal{S}(\mathfrak{g}))_f$ l'anneau des fonctions rationnelles définies en f, et si $P \in (\mathcal{S}(\mathfrak{g}))_f$, on notera indifféremment $P(f)$, $\langle P, f \rangle$ ou $\langle f, P \rangle$ la valeur en f de la fonction P.

Soient B_f la forme bilinéaire alternée sur $\mathfrak{g}$ définie par

$$B_f(X, Y) = \langle f, [X, Y] \rangle,$$

et $\mathfrak{g}(f)$ son noyau. On note d_f l'unique application de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})_f$ dans $\mathfrak{g}$ telle que

$$d_f(X) = X \qquad \text{si} \quad X \in \mathfrak{g},$$
$$d_f(PQ) = \langle f, P \rangle d_f Q + \langle f, Q \rangle d_f P.$$

Des analogues algébriques des lemmes (1.6) et (1.7) prouvent que si $R \in J(\mathfrak{g})$, et est défini en f, alors $d_f(R)$ appartient au centre de $\mathfrak{g}(f)$.

On a aussi $\langle f, [d_f \mathrm{P}, d_f Q] \rangle = \langle f, [P, Q] \rangle$ quels que soient P et Q dans $(\mathcal{S}(\mathfrak{g}))_f$.

Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $\mathfrak{g}$, et soit d le rang sur $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ de la matrice $([e_i, e_j])_{i,j}$. Alors le degré de transcendance r de $J(\mathfrak{g})$ sur k est égal à $n - d$ ([5], chap. 3, lemme 7).

Or ce rang est aussi égal au rang maximal sur k des matrices $(\langle f, [e_i, e_j] \rangle)_{i,j}$ pour tout $f \in \mathfrak{g}^*$. Comme $\mathfrak{g}(f)$ est l'ensemble des $X = \sum x^i e$ tels que $\sum x^i \langle f, [e_i, e_j] \rangle = 0$, on a aussi $r =$ dimension minimale des $\mathfrak{g}(f)$ pour $f \in \mathfrak{g}^*$, et on obtient l'analogue du lemme (1.9).

LEMME. — *Il existe un ouvert de Zariski non vide U de $\mathfrak{g}^*$ tel que, si $f \in U$, $\mathfrak{g}(f)$ est l'ensemble des $d_f(P)$ pour $P \in J(\mathfrak{g}) \cap (\mathcal{S}(\mathfrak{g}))_f$.*

(2.9) On dira qu'un système d'éléments $(p_1, p_2, \ldots, p_k, q_1, q_2, \ldots, q_k)$ de $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ vérifie les relations (R) si

$$\begin{cases} [p_i, q_j] = \delta_i^j, \\ [p_i, p_j] = 0, \\ [q_i, q_j] = 0, \end{cases}$$

quels que soient i et j.

LEMME. — *Si $(p_1, p_2, \ldots, p_k, q_1, q_2, \ldots, q_k)$ vérifient les relations (R), alors $(p_1, p_2, \ldots, p_k, q_1, q_2, \ldots, q_k)$ sont algébriquement indépendants sur $J(\mathfrak{g})$.*

Démonstration. — Supposons pour simplifier que $k = 1$. Soit alors $A = \sum a_{ij} p^i q^j = 0$ une relation algébrique sur $J(\mathfrak{g})$. Montrons, par récurrence sur le degré de total de A en p et q que $a_{ij} = 0$; on a $[A, p] = [A, q] = 0$, ceci entraîne que tous les a_{ij} sont nuls si i ou $j \neq 0$. Donc $A = a_{0,0} = 0$.

(2.10) On suppose $k = R$, et $\mathfrak{g}$ algébrique, et soit G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Si f est un point de $\mathfrak{g}^*$, on désignera par $\mathcal{O}_f$ l'orbite de f par G, et $i_{\mathcal{O}_f}$ l'injection canonique de $\mathcal{O}_f$ dans $\mathfrak{g}^*$.

PROPOSITION. — *Soient* $(p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_m)$ *des éléments de* $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ *vérifiant les relations* (R), *et supposons que* $r + 2m = n$.

Soit U *l'ouvert de définition des fonctions* p_i *et* q_j. *Alors si* $f \in U$, *la forme* $\omega_{\mathcal{O}_f}$ *est l'image réciproque par* $i_{\mathcal{O}_f}$ *de la 2-forme* $\sum_{i=1}^m dp_i \wedge dq_i$ *définie sur* U. *De plus, en tout point* f *de* U, *les restrictions* $(p_i^{\mathcal{O}}f, q_j^{\mathcal{O}}f)$ *des fonctions* p_i *et* q_j *à* $\mathcal{O}_f$ *forment un système de coordonnées locales sur* $\mathcal{O}_f$.

Démonstration. — Soit $f \in U$, posons $x_i = d_f\, p_i$, $y_i = d_f\, q_j$.

On a alors, d'après (1.14), les relations (R_f) :

$$\langle f, [x_i, y_i] \rangle = \delta_i^j,$$
$$\langle f, [x_i, x_j] \rangle = 0,$$
$$\langle f, [y_i, y_j] \rangle = 0.$$

Si donc $f \in U$, les relations (R_f) prouvent que $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_m$ sont linéairement indépendants et que la restriction B_f à $V_f = \sum_{i=1}^m \mathrm{R}\, x_i + \sum_{i=1}^m R\, y_i$ est non dégénérée. Puisque $r + 2m = n$ et que $\dim \mathfrak{g}(f) \geqq r$, on a $\mathfrak{g} = V_f \oplus \mathfrak{g}(f)$.

L'application $X \mapsto \sigma(X)_f$ est alors un isomorphisme de V_f sur l'espace tangent au point f à l'orbite de f, ce qui prouve que les restrictions des fonctions $p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_m$ sont localement bijectives de $\mathcal{O}_f$ sur $\mathbf{R}^{2m}$.

On a par définition

$$\omega_{\mathcal{O}_f}(\sigma(X)_f, \sigma(Y)_f) = \langle f, [X, Y] \rangle,$$

et il s'agit de montrer que ceci est aussi égal à

$$\sum_{i=1}^m dp_i \wedge dq_i\, (X.f, Y.f)$$
$$= \sum_{i=1}^m \langle X.f, d_f\, p_i \rangle \langle Y.f, d_f\, q_i \rangle - \langle X.f, d_f\, q_i \rangle \langle Y.f, d_f p_i \rangle.$$

Il suffit de vérifier sur la base $(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ de V_f l'égalité cherchée. Effectuons la vérification pour $X = x_j$, $Y = y_k$. Alors

$$\omega_{\mathcal{O}_f}(\sigma(x_j)_f, \sigma(y_k)_f) = \delta_j^k$$

et

$$\sum_{i=1}^m (dp_i \wedge dq_i)\, (x_j.f, y_k.f) = \delta_j^k$$

car

$$\langle x_j.f, d_f p_i \rangle = \langle f, [d_f p_i, d_f p_j] \rangle = \langle f, [p_i, p_j] \rangle = 0,$$
$$\langle x_j.f, d_f q_i \rangle = \langle f, [d_f q_i, d_f p_j] \rangle = - \langle f, [p_j, q_i] \rangle = - \delta_i^j,$$
$$\langle y_k.f, d_f p_i \rangle = \langle f, [d_f p_i, d_f q_k] \rangle = \langle f, [p_i, q_k] \rangle = \delta_i^k,$$
$$\langle y_k.f, d_f q_i \rangle = \langle f, [d_f q_i, d_f q_k] \rangle = \langle f, [q_i, q_k] \rangle = 0.$$

Cette proposition admet une réciproque :

(2.11) LEMME. — *Soient* $(p_1, p_2, \ldots, p_k, q_1, q_2, \ldots, q_k)$ *des éléments de* $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$, *V un ouvert de* $\mathfrak{g}^*$, *sur lequel les fonctions* p_i *et* q_j *sont définies, tels que si* $f \in V$ *le forme* $\omega_{\mathcal{O}_f}$ *soit l'image réciproque par* $i_{\mathcal{O}_f}$ *de la forme* $\sum_{i=1}^{k} dp_i \wedge dq_i$. *Alors* $(p_1, p_2, \ldots, p_k, q_1, q_2, \ldots, q_k)$ *vérifient les relations* (*R*). *De plus*, $2k + r = n$.

En effet, si $f \in V$, alors $[p_i^{\mathcal{O}_f}, q_j^{\mathcal{O}_f}] = \delta_j^i$. Ceci entraîne donc que $[p_i, q_j] = \delta_i^j$ sur l'ouvert V d'après (2.6) et par conséquent que $[p_i, q_j] = \delta_i^j$. De plus, sur l'ouvert V, la dimension de l'orbite $\mathcal{O}_f$ est donc égale à $2k$. Or l'ensemble U des $f \in \mathfrak{g}^*$, où $\dim \mathcal{O}_f = n - r$, est un ouvert de Zariski non vide de $\mathfrak{g}^*$, donc partout dense. On a donc $U \cap V \neq \emptyset$ et $n = r + 2k$.

3. Etude de sous-g-modules de l'algèbre symétrique et de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente

Nous supposerons dans ce paragraphe que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie nilpotente de dimension n sur un corps k de caractéristique 0.

(3.1) Comme, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, la dérivation $\operatorname{ad} X$ de $\mathfrak{g}$ est nilpotente, on peut former l'automorphisme $\exp \operatorname{ad} X$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On définit le groupe G de $\mathfrak{g}$ comme étant le sous-groupe du groupe des automorphismes de $\mathfrak{g}$ formé des $\exp \operatorname{ad} X$. G opére sur $\mathfrak{g}^*$; si $f \in \mathfrak{g}^*$, on note $\mathcal{O}_f$ l'orbite de f sous le groupe adjoint G.

C'est une sous-variété fermée de $\mathfrak{g}^*$.

L'anneau $I(\mathfrak{g})$ est alors l'anneau des polynômes sur $\mathfrak{g}^*$ qui sont G-invariants.

Rappelons que $I(\mathfrak{g})$ a pour corps de fractions le corps $J(\mathfrak{g})$ des fonctions rationnelles G-invariantes sur $\mathfrak{g}^*$. Le corps $J(\mathfrak{g})$ est une extension transcendante pure de k de degré de transcendance r et $n - r$ est un entier pair [5].

On pose $n - r = 2m$.

On peut préciser le lemme (2.8).

LEMME. — *Il existe un ouvert de Zariski U non vide de $\mathfrak{g}^*$, tel que si $f \in U$, $\mathfrak{g}(f)$ est l'ensemble des $d_f(P)$ pour $P \in I(\mathfrak{g})$.*

(3.2) Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. On dit que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre subordonnée à f, si $f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$. On note $M(f; \mathfrak{g})$ l'ensemble des sous-algèbres surbordonnées à f et de dimension égale à $1/2(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}(f))$, c'est-à-dire l'ensemble des sous-algèbres $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ dont le sous-espace vectoriel sous-jacent soit totalement isotrope maximal pour la forme B_f.

Il est important de savoir construire des sous-algèbres $\mathfrak{h}$ de $M(f; \mathfrak{g})$. En effet, la représentation $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ induite à $\mathfrak{g}$ par le caractère $f | \mathfrak{h}$ de la sous-algèbre $\mathfrak{h}$ est une représentation irréductible de $\mathfrak{g}$, et son noyau est un idéal primitif de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ qui ne dépend que de f et que nous noterons $I(f)$ [7].

D'autre part, si $k = \mathbf{R}$, la donnée d'un élément $\mathfrak{h}$ de $M(f; \mathfrak{g})$ permet de construire une représentation unitaire irréductible $T(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ du groupe $\exp \mathfrak{g}$ simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Par définition, $T(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ est la représentation induite à $\exp \mathfrak{g}$ par le caractère χ_f du sous-groupe $\exp \mathfrak{h}$, où $\langle \chi_f, \exp H \rangle = e^{if(H)}$. On la réalise par la translation à gauche dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ des fonctions mesurables sur G vérifiant presque partout

$$\varphi(gh) = \chi_f(h)^{-1} \varphi(g) \qquad (g \in \exp \mathfrak{g},\ h \in \exp \mathfrak{h}), \tag{1}$$

$$\int_{G/H} |\varphi|^2 \, d\dot{g} < +\infty, \tag{2}$$

où $d\dot{g}$ désigne une mesure sur l'espace homogène G/H invariante par l'action de G à gauche [11].

On désignera par $\mathcal{H}^\infty(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ l'espace des vecteurs indéfiniment différentiables de la représentation $T(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$. Si $\psi \in \mathcal{H}^\infty(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ et $X \in \mathfrak{g}$, alors on définit l'opérateur $dT(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})(X)$ par

$$dT(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})(X)\psi = \frac{d}{dt}(T(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})(\exp tX).\psi)\Big|_{t=0}$$

On notera $dT(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ la représentation canonique de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}})$ dans $\mathcal{H}^\infty(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur $\mathfrak{h}$, on se permettra de la noter $dT(f)$, ou dT.

On sait qu'il existe une base $e_1, e_2, \ldots, e_m$ supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ telle que l'application γ de $\mathbf{R}^m \times \exp \mathfrak{h}$ dans $\exp \mathfrak{g}$ définie par

$$\gamma(t_1, t_2, \ldots, t_m, h) = \exp t_1 e_1 \times \exp t_2 e_2 \times \ldots \times \exp t_m e_m \times h$$

soit un difféomorphisme.

Ceci permet d'identifier $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ à $\mathcal{L}^2(\mathbf{R}^m)$. L'espace $\mathcal{H}^\infty(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ s'identifie alors à l'espace $\mathcal{S}$ de Schwartz des fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathbf{R}^m$ à décroissance rapide [15].

En particulier, cet espace contient l'espace $\mathcal{D}$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact. Si $A \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}})$, alors dT (A) est la restriction à $\mathcal{S}$ d'un opérateur différentiel à coefficients polynômiaux ([15]). Si $A \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}})$ et si D est un opérateur différentiel à coefficients polynômiaux sur $\mathbf{R}^m$ pour vérifier que $dT(A) = D \mid \mathcal{S}$, il suffira de vérifier que $dT(A)$ et D coïncident sur $\mathcal{D}$.

(3.3) Rappelons le procédé simple de construction d'algèbres $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$ ([4], chap. IV ou [17]).

Soit $S = (\mathfrak{g}_i)_{0 \leq i \leq n}$ une suite croissante d'idéaux de $\mathfrak{g}$ avec $\dim \mathfrak{g}_i = i$.

Alors si f est un point de $\mathfrak{g}^*$, si f_i désigne la restriction de f à $\mathfrak{g}_i$, et $\mathfrak{g}_i(f_i)$ la sous-algèbre correspondante, l'espace $\mathfrak{p}(f; S) = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{g}_i(f_i)$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ appartenant à $M(f; \mathfrak{g})$ qui dépend rationnellement de f, sur un ouvert de Zariski. On considère la sous-algèbre $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S)$ engendrée par la réunion des $I(\mathfrak{g}_i)$ [qu'on distingue soigneusement de $I(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{S}(\mathfrak{g}_i)$]. Alors si $P \in \mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S)$, $d_f P \in \mathfrak{p}(f; S)$, et le lemme (3.1), appliqué à chaque forme f_i, conduit au lemme suivant :

Lemme. — *Il existe un ouvert de Zariski non vide V de* $\mathfrak{g}^*$ *tel que, si* $f \in V$, $\mathfrak{p}(f; S)$ *soit égale à l'ensemble des* $d_f(P)$ *pour* $P \in \mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S)$.

(3.4) Rappelons les résultats suivants sur la comparaison entre $I(\mathfrak{g}_n)$ et $I(\mathfrak{g}_{u-1})$ [5] : les résultats y sont démontrés pour $Z(\mathfrak{g}_n)$ et $Z(\mathfrak{g}_{n-1})$, mais des démonstrations analogues fournissent les résultats pour $I(\mathfrak{g}_n)$ et $I(\mathfrak{g}_{n-1})$; on peut aussi utiliser l'isomorphisme canonique entre $I(\mathfrak{g})$ et $Z(\mathfrak{g})$ (*voir* [5]).

Soit X_n un élément de $\mathfrak{g}_n - \mathfrak{g}_{n-1}$. Deux cas peuvent se produire :

(A) ou bien $I(\mathfrak{g}_n) \not\subset \mathcal{S}(\mathfrak{g}_{n-1})$. Dans ce cas, $I(\mathfrak{g}_{n-1}) \subset I(\mathfrak{g}_n)$, et il existe un élément Z_r de $I(\mathfrak{g}_n)$ de la forme $Z_r = \alpha_r X_n + \beta_r$, où $\alpha_r \neq 0$ et $\alpha_r \in I(\mathfrak{g}_{n-1}) \subset I(\mathfrak{g}_n)$,

$$\beta_r \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_{n-1})$$

et

$$J(\mathfrak{g}_n) = J(\mathfrak{g}_{n-1})(Z_r).$$

(B) ou bien $I(\mathfrak{g}_n) \subset \mathcal{S}(\mathfrak{g}_{n-1})$. Dans ce cas, $I(\mathfrak{g}_n)$ est évidemment contenu dans $I(\mathfrak{g}_{n-1})$, et il existe un élément y de $I(\mathfrak{g}_{n-1})$ tel que :

1° si on pose $[x_n, y] = z$, alors $z \neq 0$ et $z \in I(\mathfrak{g}_n)$;

2° y est transcendant sur $I(\mathfrak{g}_n)$ et

$$J(\mathfrak{g}_n) = J(\mathfrak{g}_{n-1})(y);$$

(3.5) Proposition :

(*a*) $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S)$ *est un sous-*$\mathfrak{g}$*-module de* $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$. *Plus précisément,* $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}, S)$ *est stable pour toute dérivation* $\delta(D)$ *de* $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ *prolongeant une dérivation D* *de* $\mathfrak{g}$ *telle que*

$$D(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{g}_i \qquad (0 \leq i \leq n).$$

(*b*) *Le corps de fractions* $\mathcal{R}^0(\mathfrak{g}; S)$ *de* $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S)$ *est une sous-algèbre commutative de l'algèbre de Poisson rationnelle* $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$.

(*c*) *Le corps* $\mathcal{R}^0(\mathfrak{g}; S)$ *est une extension transcendante pure de k de degré de transcendance* $= r + m = (1/2)(r + n)$.

Démonstration. — (*a*) résulte immédiatement de la définition de $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S)$. Démontrons (*b*) et (*c*) par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Nous poserons $S_{n-1} = (\mathfrak{g}_i)_{0 \leq i \leq n-1}$. C'est une suite d'idéaux de $\mathfrak{g}_{n-1}$. Soit r_{n-1} le degré de transcendance sur k de $J(\mathfrak{g}_{n-1})$.

Deux cas peuvent se produire :

(A) ou bien $I(\mathfrak{g}_n) \not\subset \mathcal{S}(\mathfrak{g}_{n-1})$. Alors $r_{n-1} = r - 1$. Soit Z_r un élément de $I(\mathfrak{g}_n)$ tel que

$$J(\mathfrak{g}_n) = J(\mathfrak{g}_{n-1})(Z_r),$$

alors $\mathcal{R}^0(\mathfrak{g}_n; S_n) = \mathcal{R}^0(\mathfrak{g}_{n-1}; S_{n-1})(Z_r)$. Donc si $\mathcal{R}^0(\mathfrak{g}_{n-1}; S_{n-1})$ est une sous-algèbre de Poisson commutative de $\mathcal{R}(\mathfrak{g}_{n-1})$, $\mathcal{R}^0(\mathfrak{g}_n; S_n)$ est une sous-algèbre commutative de l'algèbre de Poisson rationnelle de $\mathfrak{g}$, car Z_r est dans le centre de $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$. De plus si $\mathcal{R}^0(\mathfrak{g}_{n-1}; S_{n-1})$ est une extension transcendante pure de k de degré de transcendance $(1/2)((r-1) + (n-1))$, $\mathcal{R}^0(\mathfrak{g}_n; S_n)$ est une extension transcendante pure de k de degré de transcendance

$$(1/2)((r-1) + (n-1)) + 1 = (1/2)(r + n);$$

(B) ou bien $I(\mathfrak{g}_n) \subset \mathcal{S}(\mathfrak{g}_{n-1})$. Dans ce cas, $r_{n-1} = r + 1$ et

$$\mathcal{R}^0(\mathfrak{g}_n; S_n) = \mathcal{R}^0(\mathfrak{g}_{n-1}; S_{n-1})$$

est une sous-algèbre de Poisson commutative de $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$; et $\mathcal{R}^0(\mathfrak{g}_n; S_n)$ est une extension transcendante pure de k de degré de transcendance égal à $(1/2)((n-1) + (r+1)) = (1/2)(n + r)$.

(3.6) Soient $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, et $Z(\mathfrak{g})$ son centre On introduit la sous-algèbre $\mathcal{U}^0(\mathfrak{g}; S)$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ engendrée par la réunion des $Z(\mathfrak{g}_i)$ pour $1 \leq i \leq n$ [on distingue soigneusement $Z(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g}_i)$ et $Z(\mathfrak{g}_i)$].

Soit λ l'isomorphisme canonique de l'espace vectoriel $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ sur l'espace $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ qui à tout monôme $X_1 X_2 \ldots X_p$ par rapport aux éléments $X_1, X_2, \ldots, X_p$ de $\mathfrak{g}$ fait correspondre l'élément

$$(p!)^{-1} \sum X_{\sigma(1)} \times \ldots \times X_{\sigma(p)}$$

calculé dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, la sommation portant sur toutes les permutations σ de $\{1, 2, \ldots, p\}$. λ est fonctoriel par rapport aux morphismes d'algèbres de Lie.

On sait, d'autre part, que cet isomorphisme d'espace vectoriel est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules. On a donc $\lambda(I(\mathfrak{g})) = Z(\mathfrak{g})$. On démontre dans [6] que la restriction de λ à $I(\mathfrak{g})$ est un isomorphisme d'algèbres associatives. Par la même méthode que dans [6], on peut démontrer la proposition suivante :

Proposition. — *L'application de symétrisation λ réalise un isomorphisme d'algèbres associatives entre $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S)$ et $\mathcal{U}^0(\mathfrak{g}; S)$.*

Démonstration. — Si $\mathfrak{g}$ est abélienne, le théorème est évidemment vrai. On raisonnera par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$ qu'on peut donc supposer supérieure ou égale à 2, et il suffit de démontrer que λ est un morphisme d'algèbres associatives.

Soit $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{g}$. On distinguera deux cas :

(A) $\dim \mathfrak{z} > 1$. Soit $\mathfrak{l}$ une droite contenue dans $\mathfrak{z}$; c'est un idéal de $\mathfrak{g}$. Soient $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathfrak{l}$, et π la projection canonique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}'$. On pose $\mathfrak{g}'_i = \pi(\mathfrak{g}_i)$. Alors les idéaux $\mathfrak{g}'_i$ forment une suite croissante d'idéaux de $\mathfrak{g}'$, qui ne sont pas tous distincts, mais en supprimant les termes superflus de cette suite, on obtient une suite $S' = (\mathfrak{g}'_{\alpha(i)})$ croissante d'idéaux de $\mathfrak{g}'$ avec $\dim \mathfrak{g}'_{\alpha(i)} = i$.

Considérons le diagramme canonique

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{U}(\mathfrak{g}') \\ \uparrow{\scriptstyle \lambda_{\mathfrak{g}}} & & \uparrow{\scriptstyle \lambda_{\mathfrak{g}'}} \\ \mathcal{S}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{S}(\mathfrak{g}') \end{array}$$

évidemment commutatif.

Soient P et Q des éléments de $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S)$, il est clair que $\eta(P)$ et $\eta(Q)$ sont des éléments de $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}'; S')$. On a donc

$$\lambda_{\mathfrak{g}'}(\eta(PQ)) = \lambda_{\mathfrak{g}'}(\eta(P)\,\eta(Q)) = \lambda_{\mathfrak{g}'}(\eta(P)).\lambda_{\mathfrak{g}'}(\eta(Q))$$

par hypothèse de récurrence.

Ceci s'écrit

$$\theta\,(\lambda_{\mathfrak{g}}(PQ)) = \theta\,(\lambda_{\mathfrak{g}}(P))\,\theta\,(\lambda_{\mathfrak{g}}(Q)) = \theta\,(\lambda_{\mathfrak{g}}(P).\lambda_{\mathfrak{g}}(Q))$$

et par conséquent :

$$\lambda_{\mathfrak{g}}(PQ) - \lambda_{\mathfrak{g}}(P).\lambda_{\mathfrak{g}}(Q)$$

appartient à $\operatorname{Ker}\theta$, c'est-à-dire est divisible par tous les éléments de $\mathfrak{l}$, et ceci pour toute droite $\mathfrak{l}$ contenue dans $\mathfrak{z}$. Comme $\dim \mathfrak{z} > 1$ et que k est un corps infini, ceci n'est possible que si

$$\lambda_{\mathfrak{g}}(PQ) - \lambda_{\mathfrak{g}}(P).\lambda_{\mathfrak{g}}(Q) = 0;$$

(B) $\dim \mathfrak{z} = 1$. On a alors $\mathfrak{z} = \mathfrak{g}_1$ et $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_2] = \mathfrak{g}_1$.

Soit y_1 un élément non nul de $\mathfrak{g}_1$ et y_2 un élément de $\mathfrak{g}_2 - \mathfrak{g}_1$. Soit $\mathfrak{g}'$ l'annulateur de $\mathfrak{g}_2$. Alors $\mathfrak{g}'$ est un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{g}_2$. On pose $\mathfrak{g}'_i = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{g}_i$. On a alors $I(\mathfrak{g}_i) \subset I(\mathfrak{g}'_i)$ pour tout i. En effet, si $\mathfrak{g}'_i = \mathfrak{g}_i$, ceci est clair. Sinon il existe un élément $x_i \in \mathfrak{g}_i$ tel que $[x_i, x_2] = y_1$, et on a $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}'_i \oplus k x_i$, et on peut supposer $i > 2$.

Soit alors P un polynôme appartenant à $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_i)$. P s'écrit d'une manière unique sous la forme

$$P = \sum P_n x_i^n, \qquad \text{avec} \quad P_n \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}'_i).$$

Supposons que $P \in I(\mathfrak{g}_i)$, en particulier $[y_2, P] = 0$. Comme y_2 commute à $\mathfrak{g}'_i$, il vient $0 = \sum n X_1 X^{n-1} P_n$, et ceci prouve que $P_n = 0$ si $n \neq 0$, et donc que $P \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}'_i)$.

Les idéaux $\mathfrak{g}'_i$ forment une suite croissante d'idéaux de $\mathfrak{g}'$ qui ne sont pas tous distincts; en supprimant les termes superflus de cette suite, on obtient une suite $S' = (\mathfrak{g}'_{\alpha(i)})$ croissante d'idéaux de $\mathfrak{g}'$ et telle que $\dim \mathfrak{g}'_{\alpha(i)} = i$.

On a donc $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S) \subset \mathcal{S}^0(\mathfrak{g}'; S') \subset \mathcal{S}(\mathfrak{g}')$, et comme $\lambda_{\mathfrak{g}} \mid \mathcal{S}(\mathfrak{g}') = \lambda_{\mathfrak{g}}$; la proposition est évidemment vraie dans ce cas.

(3.7) Supposons $k = \mathbf{R}$. Soit S une suite d'idéaux de $\mathfrak{g}$, on note $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ la complexifiée de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $S^{\mathbf{C}}$ la suite $(\mathfrak{g}_i^{\mathbf{C}})_{1 \leq i \leq n}$ d'idéaux de $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$. Alors $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}, S^{\mathbf{C}})$ s'identifie à $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S) \otimes \mathbf{C}$. Soit f un point de $\mathfrak{g}^*$, qu'on prolonge par linéarité en une forme linéaire sur $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$, alors, si $P \in \mathcal{S}^0(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}, S^{\mathbf{C}})$, $d_{if}(P)$ est un élément de $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ appartenant à

$$\mathfrak{p}(if; S^{\mathbf{C}}) = (\mathfrak{p}(f; S))^{\mathbf{C}}.$$

LEMME. — *Soient* $P \in \mathcal{S}^0(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}, S^{\mathbf{C}})$ *et* $f \in \mathfrak{g}^*$. *Alors la fonction* P^f *sur* $\exp \mathfrak{g}$ *à valeurs complexes définie par* $P^f(g) = \langle P, g^{-1} f \rangle$ *est invariante à droite par le sous-groupe* $\exp \mathfrak{p}(f; S)$.

Démonstration. — Il suffit de démontrer que, quels que soient $Y \in \mathfrak{p}(f; S)$ et $g \in \exp \mathfrak{g}$, $(d/dt) P^f(g \exp t Y)|_{t=0} = 0$. Or ceci s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \langle g^{-1} P, \exp t Y . if \rangle = \langle d_{if}(g^{-1} P), i Y . f \rangle = \langle if, [d_{if}(g^{-1} P), Y] \rangle.$$

Or il est clair que $g^{-1} P \in \mathcal{S}^0(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}, S^{\mathbf{C}})$, car $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}, S^{\mathbf{C}})$ est un sous-$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$-module de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}})$, donc

$$d_{if}(g^{-1} P) \in (\mathfrak{p}(f; S))^{\mathbf{C}} \qquad \text{et} \qquad \langle f, [\mathfrak{p}(f; S), \mathfrak{p}(f; S)] \rangle = 0.$$

(3.8) On suppose toujours $k = \mathbf{R}$. On choisit, pour toute $f \in \mathfrak{g}^*$, l'algèbre $\mathfrak{p}(f; S)$ comme élément de $M(f; \mathfrak{g})$. On notera $\mathcal{H}^\infty(f)$ l'espace $\mathcal{H}(f; \mathfrak{p}(f; S); \mathfrak{g})$, $\mathcal{C}(f)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $\exp \mathfrak{g}$ à valeurs complexes vérifiant

(1) $\varphi(gh) = \chi_f(h)^{-1}\varphi(g) \qquad [g \in \exp \mathfrak{g},\ h \in \exp \mathfrak{p}(f; S)]$,

et $\mathcal{D}(f)$ l'espace des fonctions de $\mathcal{C}(f)$ à support compact modulo $\exp \mathfrak{p}(f; S)$.

On a $\mathcal{D}(f) \subset H^\infty(f) \subset \mathcal{C}(f)$, et on notera $dT(f)$ la représentation $dT(f; \mathfrak{p}(f : S))$.

Si $P \in \mathcal{S}^0(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}, S^{\mathbf{C}})$, puisque P^f est invariante à droite par $\exp \mathfrak{p}(f; S)$, on peut définir un opérateur $\nu_f(P)$ sur l'espace $\mathcal{C}(f)$ en posant

$$(\nu_f(P)\varphi)(g) = P^f(g)\varphi(g).$$

PROPOSITION. — *Si $P \in \mathcal{S}^0(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}, S^{\mathbf{C}})$, l'opérateur $(dT(f))(\lambda(P))$ est la restriction à l'espace $\mathcal{H}^\infty(f)$ de l'opérateur $\nu_f(P)$.*

Démonstration. — Si on identifie au moyen d'une base supplémentaire $e_1, e_2, \ldots, e_m$ de $\mathfrak{p}(f; S)$ et du difféomorphisme γ (3.2) l'espace $\mathcal{C}(f)$ à un espace de fonctions différentiables sur $\mathbf{R}^m$, l'opérateur $\nu_f(P)$ est alors la multiplication par la fonction polynômiale

$$(t_1, t_2, \ldots, t_m) \mapsto \langle P, \exp t_1 e_1 \times \exp t_2 e_2 \times \ldots \times \exp t_m e_m . f \rangle.$$

En particulier c'est un opérateur différentiel.

Il suffira donc de démontrer que $\nu_f(P)$ et $dT(f)(\lambda(P))$ ont même restriction à l'espace $\mathcal{D}(f)$. On raisonnera par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ est abélienne, la formule est évidemment vraie. On peut donc supposer que $\dim \mathfrak{g} \geqq 2$.

Deux cas sont possibles [on reprend les notations de (3.6)].

(A) ou bien $\operatorname{Ker} f \cap \mathfrak{z} \neq 0$. Soit alors $\mathfrak{l}$, une droite contenue dans $\operatorname{Ker} f \subset \mathfrak{z}$; $\mathfrak{l}$ est alors un idéal de $\mathfrak{g}$. Soient, comme dans (3.6), $\mathfrak{g}'$ l'algèbre $\mathfrak{g}/\mathfrak{l}$, $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$, S' la suite définie à partir de S. Soit f' la forme sur $\mathfrak{g}'$ telle que $f' \circ \pi = f$.

On a $\pi(\mathfrak{g}_i(f_i)) = \mathfrak{g}'_i(f'_i)$, et donc $\pi(\mathfrak{p}(f; S)) = \mathfrak{p}(f'; S')$. On notera aussi π l'homomorphisme canonique : $G \to G'$. L'espace $\mathcal{D}(f)$ s'identifie à $\mathcal{D}(f')$: si φ' est une fonction de $\mathcal{D}(f')$, alors $\varphi' \circ \pi$ appartient à $\mathcal{D}(f)$, et toute fonction φ est de ce type, et on a

$$(dT(f))(u)(\varphi' \circ \pi) = (dT(f')\,\theta(u))(\varphi') \circ \pi$$

quel que soit $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}})$.

Donc si $P \in \mathcal{S}^0(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}, S^{\mathbf{C}})$,

$$\begin{aligned}(dT(f))\left(\lambda_{\mathfrak{g}}(P)\right)(\varphi' \circ \pi) &= (dT(f')\left(\theta\left(\lambda_{\mathfrak{g}}(P)\right)\right)(\varphi') \circ \pi \\ &= (\nu_{f'}(\eta(P)).\varphi') \circ \pi \\ &= \nu_f(P).(\varphi' \circ \pi);\end{aligned}$$

(B) Ker $f \cap \mathfrak{z} = 0$. On peut donc supposer $\dim \mathfrak{z} = 1$ et $f \mid \mathfrak{z} \neq 0$.

On pose $\mathfrak{g}' = \operatorname{ann} \mathfrak{g}_2$, $f' = f \mid \mathfrak{g}'$, et S' la suite d'idéaux de $\mathfrak{g}'$ définie à partir de S. On a pour tout i,

$$\mathfrak{g}_i(f_i) \subset \mathfrak{g}'_i(f'_i).$$

En effet, si $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}'_i$, ceci est évident; sinon

$$\mathfrak{g}_i = \mathbf{R}\, X_i \oplus \mathfrak{g}'_i \qquad \text{avec} \quad [X_i, y_2] = y_1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{g}_i.$$

Soit $u = \alpha X_i + y$, avec $y \in \mathfrak{g}'_i$, et $\alpha \in \mathbf{R}$ un élément de $\mathfrak{g}_i(f_i)$, alors $f([u, y_2]) = 0$ entraîne $\alpha = 0$.

On a donc $\mathfrak{p}(f; S) \subset \mathfrak{p}(f'; S')$ et, comme $\mathfrak{p}(f'; S')$ est un sous-espace totalement isotrope pour B_f, $\mathfrak{p}(f'; S') = \mathfrak{p}(f; S)$.

La représentation $T(f)$ s'identifie à la représentation induite par $T(f')$ à $\exp \mathfrak{g}$.

Soit X un élément de $\mathfrak{g}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{g}'$; alors tout élément de $\exp \mathfrak{g}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\exp uX.g'$ ou $g' \in \exp \mathfrak{g}'$.

Si $\varphi \in \mathcal{D}(f)$, alors quel que soit $u \in \mathbf{R}$, la fonction

$$\Phi(u)(g') = \varphi(\exp u X.g')$$

appartient à $\mathcal{D}(f')$. Soient alors $Y \in \mathfrak{g}'$ et $\varphi \in \mathcal{D}(f)$.

On a

$$\begin{aligned}
&(dT(f)(Y).\varphi)(\exp u X.g') \\
&\quad = \frac{d}{dt}\varphi(\exp - t\, Y \times \exp u X.g')\Big|_{t=0} \\
&\quad = \frac{d}{dt}\varphi(\exp u X \times \exp - t((\exp - u X).Y).g')\Big|_{t=0} \\
&\quad = (dT(f')(\exp - u X.Y).\Phi(u))(g').
\end{aligned}$$

On en déduit que si $A \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}'^{\mathbf{C}})$ et $\varphi \in \mathcal{D}(f)$,

$$(dT(f)(A).\varphi)(\exp u X.g') = (dT(f')(\exp - u X.A).\Phi(u))(g').$$

Soit donc $P \in \mathcal{S}^0(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}, S^{\mathbf{C}}) \subset \mathcal{S}^0(\mathfrak{g}'^{\mathbf{C}}; S'^{\mathbf{C}}) \subset \mathcal{S}(\mathfrak{g}'^{\mathbf{C}})$, on a donc

$$\big(dT(f)\big(\lambda_{\mathfrak{g}}(P)\big).\varphi\big)(\exp u X.g') = (dT(f')\big(\exp - u X.\lambda_{\mathfrak{g}}(P)\big).(\varphi(u))(g').$$

Or comme $\lambda_{\mathfrak{g}}$ commute à l'action de G et que $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}'^{\mathbf{C}}, S'^{\mathbf{C}})$ est stable sous l'action de G, on en déduit que ceci s'écrit aussi

$$\begin{aligned}
(\nu_{f'}(\exp - u X.P)\,\Phi(u))(g') &= \langle \exp - u X.P, g'.f' \rangle (\Phi(u))(g') \\
&= \langle P, \exp u X.g'.f \rangle\, \varphi(\exp u X.g') \\
&= (\nu_f(P).\varphi)(\exp u X.g').
\end{aligned}$$

(3.9) PROPOSITION :

(*a*) $\mathcal{U}^0(\mathfrak{g}; S)$ *est un sous-*$\mathfrak{g}$*-module de* $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. *De plus,* $\mathcal{U}^0(\mathfrak{g}; S)$ *est stable par toute dérivation* $\delta(D)$ *de* $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ *qui prolonge une dérivation* D *de* $\mathfrak{g}$ *telle que* $D(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{g}_i$.

(*b*) *Le corps de fractions* $\mathcal{D}^0(\mathfrak{g}; S)$ *de* $\mathcal{U}^0(\mathfrak{g}; S)$ *est un sous-corps commutatif de* $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$.

(*c*) $\mathcal{D}^0(\mathfrak{g}; S)$ *est une extension transcendante pure de degré de transcendance* $(1/2)(r+n)$.

Ceci est un corollaire évident de la proposition (3.6).

(3.10) On considère l'application $c_{\mathcal{S}}$ de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{S}(\mathfrak{g})$ dans $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ définie par $c_{\mathcal{S}}(P \otimes Q) = PQ$.

On note $V^1(\mathfrak{g})$ le sous-espace vectoriel $k \oplus \mathfrak{g}$ de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ et $\mathcal{S}^1(\mathfrak{g}; S)$ l'image par $c_{\mathcal{S}}$ de $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S) \otimes V^1(\mathfrak{g})$. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $\mathfrak{g}$. Alors tout élément de $\mathcal{S}^1(\mathfrak{g}; S)$ peut s'écrire sous la forme (mais l'écriture n'est pas unique) :

$$P_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{n} P_i e_i, \quad \text{avec } P_0 \text{ et } P_i \qquad (1 \leq i \leq n)$$

appartenant à $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S)$.

LEMME :

(*a*) $\mathcal{S}^1(\mathfrak{g}; S)$ *est un sous-*$\mathfrak{g}$*-module de* $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$. *Plus précisément,* $\mathcal{S}^1(\mathfrak{g}; S)$ *est stable par toute dérivation* $\delta(D)$ *de* $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ *prolongeant une dérivation* D *de* $\mathfrak{g}$ *telle que* $D(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{g}_i$.

(*b*) $\mathcal{S}^1(\mathfrak{g}; S)$ *est stable par la multiplication par les éléments de* $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S)$.

(*c*) $\mathcal{S}^1(\mathfrak{g}; S)$ *est une sous-algèbre de Poisson de* $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ *et* $\mathcal{S}^1(\mathfrak{g}; S)$ *normalise* $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S)$.

Tout ceci se démontre sans difficultés.

Démontrons par exemple le point (*c*) : Il suffit de démontrer que si P et Q appartiennent à $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S)$, et X et Y appartiennent à $\mathfrak{g}$, alors

$$[PX, Q] \text{ appartient à } \mathcal{S}(\mathfrak{g}; S)$$

et

$$[PX, Qy] \text{ appartient à } \mathcal{S}^1(\mathfrak{g}; S).$$

Or $[PX, Q] = P[X, Q]$, car $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S)$ est une sous-algèbre de Poisson commutative de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$, et donc, comme $[X, Q]$ appartient à $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S)$, $[PX, Q]$ appartient à $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S)$ et

$$[PX, Qy] = P[X, Q]\, Y + [Y, P]\, QX + PQ[X, Y]$$

appartient à $\mathcal{S}^1(\mathfrak{g}; S)$.

(3.11) On introduit de même l'application $c_{\mathfrak{U}}$ de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ définie par $c_{\mathfrak{U}}(P \otimes Q) = PQ$, le sous-espace $W^1(\mathfrak{g}) = k \oplus \mathfrak{g}$ de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ et l'image $\mathfrak{U}^1(\mathfrak{g}; S)$ de $\mathfrak{U}^0(\mathfrak{g}; S) \otimes W^1(\mathfrak{g})$ par $c_{\mathfrak{U}}$.

Si on considère l'application $c_{\mathfrak{U}} \circ (\lambda \otimes \lambda)$ de $\mathfrak{S}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{S}(\mathfrak{g})$ dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, il est clair que l'image de $\mathfrak{S}^0(\mathfrak{g}; S) \otimes V^1(\mathfrak{g})$ par cette application est $\mathfrak{U}^1(\mathfrak{g}; S)$.

Théorème :

(*a*) *Il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels, et un seul,* β *de* $\mathfrak{S}^1(\mathfrak{g}; S)$ *sur* $\mathfrak{U}^1(\mathfrak{g}; S)$ *tel que*

$$\beta \circ c_{\mathfrak{S}} = c_{\mathfrak{U}} \circ (\lambda \otimes \lambda)$$

sur $\mathfrak{S}^0(\mathfrak{g}; S) \otimes V^1(\mathfrak{g})$, *et* β *est un isomorphisme pour les structures de* $\mathfrak{g}$*-modules.*

(*b*) *La restriction de* β *à* $\mathfrak{S}^0(\mathfrak{g}; S)$ *est l'application* λ *de symétrisation; si* P *appartient à* $\mathfrak{S}^0(\mathfrak{g}; S)$ *et* Q *appartient à* $\mathfrak{S}^1(\mathfrak{g}; S)$, *alors*

$$\beta(PQ) = \lambda(P)\,\beta(Q).$$

(*c*) β *vérifie* $\beta([P, Q]) = [\beta(P), \beta(Q)]$ *quels que soient* P *et* Q *appartenant à* $\mathfrak{S}^1(\mathfrak{g}; S)$.

Démonstration. — Si $\mathfrak{g}$ est abélienne, le théorème est évidemment vrai.

Pour démontrer l'existence de β, il s'agit de prouver que si un élément A de $\mathfrak{S}^0(\mathfrak{g}; S) \otimes V^1(\mathfrak{g})$ est tel que $c_{\mathfrak{S}}(A) = 0$, alors $c_{\mathfrak{U}}((\lambda \otimes \lambda)(A)) = 0$.

Soient $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $\mathfrak{g}$, et $(A_0, A_i)_{1 \leq i \leq n}$ des éléments de $\mathfrak{S}^0(\mathfrak{g}; S)$. Il s'agit donc de prouver que si l'élément

$$A_0 \otimes 1 + \sum A_i \otimes e_i$$

est tel que

$$A_0 + \sum A_i e_i = 0 \quad \text{dans } \mathfrak{U}(\mathfrak{g}),$$

alors

$$\lambda(A_0) + \sum \lambda(A_i) e_i = 0 \quad \text{dans } \mathfrak{S}(\mathfrak{g}).$$

L'application β associera alors à un élément $Q = Q_0 + \sum_{i=1}^{q} Q_i X_i$ [Q_0 *et* Q_i dans $\mathfrak{S}^0(\mathfrak{g}; S)$ et X_i dans $\mathfrak{g}$], l'élément $\lambda(Q_0) + \sum_{i=1}^{q} \lambda(Q_i) X_i$.

On reprend les notations de (3.6).

1° On suppose que $\dim \mathfrak{z} > 1$. Soit $\mathfrak{l}$ une droite contenue dans $\mathfrak{z}$. Soient $\mathfrak{g}'$ l'algèbre $\mathfrak{g}/\mathfrak{l}$, et S' la suite d'idéaux de $\mathfrak{g}'$ obtenue à partir de S.

Supposons que $A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i e_i = 0$ dans $\mathfrak{S}(\mathfrak{g})$, donc

$$\eta(A_0) + \sum_{i=1}^{n} \eta(A_i)\,\eta(e_i) = 0 \quad \text{dans } \mathfrak{S}(\mathfrak{g}')$$

et $\eta(A_0)$, $\eta(A_i)$ appartiennent à $\mathfrak{S}^0(\mathfrak{g}'; S')$.

Donc

$$\theta\left(\lambda_{\mathfrak{g}}(A_0)\right) + \sum_{i=1}^{n} \theta\left(\lambda_{\mathfrak{g}}(A_i)\right) \theta(e_i) = 0$$

et $\lambda(A_0) + \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i) e_i$ appartient au noyau de θ, ceci quel que soit $\mathfrak{l}$; donc

$$\lambda(A_0) + \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i) e_i = 0.$$

2° Supposons maintenant que dim $\mathfrak{z} = 1$. Soient $\mathfrak{g}' = \operatorname{ann} \mathfrak{g}_2$, S' la suite d'idéaux de $\mathfrak{g}'$ obtenue à partir de S. On a

$$\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S) \subset \mathcal{S}^0(\mathfrak{g}'; S') \subset \mathcal{S}(\mathfrak{g}').$$

Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $\mathfrak{g}$ telle que $(e_2. \ldots . e_n)$ forme une base de $\mathfrak{g}'$, alors si $A_0 + A_1 e_1 + \sum_{i=2}^{n} A_i e_i = 0$, comme $A_0 + \sum_{i=2}^{n} A_i e_i$ appartient à $\mathcal{S}(\mathfrak{g}')$, ceci implique que $A_1 = 0$ et que $A_0 + \sum_{i=2}^{n} A_i e_i = 0$.

On a alors par récurrence

$$\lambda(A_0) + \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i) e_i = 0 = \lambda(A_0) + \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i) e_i,$$

ce qu'il fallait démontrer.

On peut donc construire une application β de $\mathcal{S}^1(\mathfrak{g}; S)$ dans $\mathcal{U}^1(\mathfrak{g}; S)$ telle que $\beta \circ c_{\mathcal{S}} = c_{\mathcal{U}} \circ (\lambda \otimes \lambda)$. Il est clair que β est surjective; on démontre que β est injective en utilisant un raisonnement par récurrence entièrement analogue au précédent.

Les autres points du théorème se vérifient aisément sur la formule donnant l'image $\beta(U) = \lambda(A_0) + \sum_{i=1}^{q} \lambda(A_i) X_i$ d'un élément

$$U = A_0 + \sum_{i=1}^{q} A_i X_i \qquad [A_0, A_i \in \mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S),\ X_i \in \mathfrak{g}]$$

de $\mathcal{S}^1(\mathfrak{g}; S)$.

En utilisant le fait que l'application λ est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules et que sa restriction à $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S)$ est un homomorphisme d'algèbres associatives, démontrons par exemple que

$$\beta([P, Q]) = [\beta(P), \beta(Q)]$$

pour P et Q dans $\mathcal{S}^1(\mathfrak{g}; S)$. Il suffit de le vérifier pour les couples

$$\begin{cases} P = A, & Q = BX \\ P = AX, & Q = BY \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{où } A \text{ et } B \in \mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S) \\ \text{et } X \text{ et } Y \in \mathfrak{g}. \end{cases}$$

On a $[A, BX] = B.[A, X]$, et donc

$$\begin{aligned} \beta([A, BX]) &= \lambda(B.[A, X]) = \lambda(B)\,\lambda[A, X] = \lambda(B)\,[\lambda(A), X] \\ &= [\lambda(A), \lambda(B) X] = [\beta(A), \beta(BX)]. \end{aligned}$$

Écrivons $[AX, BY] = A[X, B]\, Y + B[A, Y]\, X + AB[X, Y]$ et

$$\begin{aligned}\beta[AX, BY] &= \lambda(A[X, B])\, Y + \lambda(B.[A, Y]).X + \lambda(AB)[X, Y]\\ &= \lambda(A)\lambda([X, B])\, Y + \lambda(B)\lambda([A, Y])\, X + \lambda(A)\lambda(B)[X, Y]\\ &= \lambda(A)[X, \lambda(B)]\, Y + \lambda(B)[\lambda(A), Y]\, X + \lambda(A)\lambda(B)[X, Y]\\ &= [\lambda(A)\, X, \lambda(B)\, Y] = [\beta(AX), \beta(BY)].\end{aligned}$$

(3.12) Soit $f \in \mathfrak{g}^*$, on note $J(f)$ l'idéal de la variété $\mathcal{O}_f$, c'est-à-dire l'idéal formé des polynômes P nuls sur l'orbite de f.

D'autre part, $I(f)$ désigne l'idéal primitif de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ associé à f (3.2).

Proposition. — *Soient P un élément de $\mathcal{S}^1(\mathfrak{g}; S)$, et f un point de $\mathfrak{g}^*$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *P appartient à $J(f)$;*

(*b*) *$\beta(P)$ appartient à $I(f)$.*

Démonstration. — On reprend la notation de (3.6). On raisonnera par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$.

Si $\mathfrak{g}$ est abélienne le théorème est évidemment vrai. On peut donc supposer $\dim \mathfrak{g} \geq 2$.

On distingue deux cas :

(A) On suppose $\operatorname{Ker} f \cap \mathfrak{z} \neq 0$. Soient $\mathfrak{l}$ une droite de $\mathfrak{g}$ contenue dans $\operatorname{Ker} f \cap \mathfrak{z}$, $\mathfrak{g}'$ l'algèbre $\mathfrak{g}/\mathfrak{l}$, π la projection de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}'$, S' la suite d'idéaux de $\mathfrak{g}'$ obtenue à partir de S, f' la forme sur $\mathfrak{g}'$, telle que $f' \circ \pi = f$.

L'idéal $I(f)$ est alors l'image réciproque par θ de l'idéal $I(f')$; de même $J(f)$ est l'image réciproque par η de $J(f')$ [14].

Soit $P \in \mathcal{S}^1(\mathfrak{g}; S)$. Alors $\eta(P)$ appartient à $\mathcal{S}^1(\mathfrak{g}'; S')$ et donc si P appartient à $J(f)$, $\eta(P)$ appartient à $J(f')$ et $\beta(\eta(P))$ appartient à $I(f')$; or on a $\beta(\eta(M)) = \theta(\beta(P))$, et par conséquent $\beta(P)$ appartient à $I(f)$.

De même, si $\beta(P)$ appartient à $I(f)$, on voit que P appartient à $J(f)$.

(B) On suppose $\operatorname{Ker} f \cap \mathfrak{z} = 0$. On a alors $\mathfrak{z} = \mathfrak{g}_1$. Soient $\mathfrak{g}' = \operatorname{ann} \mathfrak{g}_2$, S' la suite d'idéaux de $\mathfrak{g}'$ construite à partir de S, f' la restriction de f à $\mathfrak{g}'$.

Soit X un élément de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus kX$. Si s est un élément de k notons f_s la forme $\exp sX.f$, alors dans ce cas $J(f)$ est l'idéal engendré par $J(f) \cap \mathcal{S}(\mathfrak{g}')$ et

$$J(f) \cap \mathcal{S}(\mathfrak{g}') = \textstyle\bigcap_{s \in k} J(f_s).$$

De même $I(f)$ est l'idéal engendré par $I(f) \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g}')$ et

$$I(f) \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g}') = \textstyle\bigcap_{s \in k} I(f_s) \quad [14].$$

Soit donc P un élément de $\mathcal{S}^1(\mathfrak{g}; S)$, on peut écrire P sous la forme $P = AX + B$, où A appartient à

$$\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S) \subset \mathcal{S}^0(\mathfrak{g}'; S')$$

et B appartient à

$$\mathcal{S}^1(\mathfrak{g}; S) \cap \mathcal{S}(\mathfrak{g}') \subset \mathcal{S}^1(\mathfrak{g}'; S').$$

Alors, si P appartient à $J(f)$, A et B appartiennent à

$$J(f) \cap \mathcal{S}(\mathfrak{g}') = \bigcap_{s \in k} J(f_s).$$

$\beta(A)$ et $\beta(B)$ appartiennent à $\bigcap_{s \in k} I(f_s) = I(f) \cap \mathcal{S}(\mathfrak{g}')$, et donc $\beta(P) = \beta(A) + \beta(B)$ appartient à $I(f)$. De même, on démontre que si $\beta(P)$ appartient à $I(f)$, alors P appartient à $I(f)$.

(3.13) *Remarque.* — Supposons $k = \mathbf{R}$, et soit G_1 le groupe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Si pour toute f de $\mathfrak{g}^*$, on choisit comme sous-algèbre subordonnée à f de dimension maximale l'algèbre $\mathfrak{p}(f; S)$, alors toute fonction de $\mathcal{S}^1(\mathfrak{g}; S)$ donne par restriction à l'orbite $\mathcal{O}_f$ une fonction quantifiable sur l'orbite [14].

4. **Structure comparée de l'algèbre de Poisson $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ et de l'algèbre associative $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$**

Dans tout ce paragraphe, $\mathfrak{g}$ désigne une algèbre de Lie nilpotente de dimension finie sur un corps k de caractéristique zéro.

(4.1) On dira qu'une suite d'éléments $b = (p_1, p_2, \ldots, p_k, q_1, q_2, \ldots, q_k)$ de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ vérifie les relations $(R; c)$ si c est un élément non nul de $I(\mathfrak{g})$ et si on a les relations $[p_i, q_j] = \delta_i^j c$, quels que soient i et j. Alors la sous-algèbre associative de $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ engendrée sur $J(\mathfrak{g})$ par $(p_1, p_2, \ldots, p_k, q_1, q_2, \ldots, q_k)$ est une algèbre de polynômes à $2k$-variables d'après (2.9). On la notera $A(b)$. On notera $A^0(b)$ la sous-algèbre engendrée sur $J(\mathfrak{g})$ par $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ et $A^1(b)$ le sous-espace vectoriel de $A(b)$ formé des polynômes ayant un degré inférieur ou égal à 1 par rapport à chaque variable q_i, on a donc

$$A^1(b) = A^0(b) \oplus \textstyle\sum_{i=1}^k A^0(b)\, q_i.$$

On notera $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ le corps des quotients de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, et $C(\mathfrak{g})$ le centre de $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$; on sait que $C(\mathfrak{g})$ est le corps des quotients du centre $Z(\mathfrak{g})$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

On désire prouver le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie nilpotente de dimension* n *sur un corps* k *de caractéristique* 0, G *le groupe adjoint de* $\mathfrak{g}$, r *le degré de transcendance sur* k *de* $J(\mathfrak{g})$, *et* m *l'entier tel que* $r + 2m = n$.

Soit $S = (\mathfrak{g}_i)_{0 \leq i \leq n}$ *une suite croissante d'idéaux de* $\mathfrak{g}$ *tels que* $\dim \mathfrak{g}_i = i$ *pour* $0 \leq i \leq n$.

Il existe alors dans $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ *des éléments* $(p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_m)$, *un élément* c *non nul de* $I(\mathfrak{g})$, *un ouvert de Zariski* U *de* $\mathfrak{g}^*$ *G-invariant, tels que :*

1° $(p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_m)$ *vérifient les relations* $(R; c)$;

2° $p_1, p_2, \ldots, p_m$ *appartiennent à* $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S)$ *et* $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S) \subset A^0(b)$;

3° $q_1, q_2, \ldots, q_m$ *appartiennent à* $\mathcal{S}^1(\mathfrak{g}; S)$ *et* $\mathcal{S}^1(\mathfrak{g}; S) \subset A^1(b)$;

4° $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ *est engendré par* $p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_m$ *sur* $I(\mathfrak{g})$ *et* $\mathcal{S}(\mathfrak{g}) \subset A(b)$;

5° *le corps* $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ *est engendré sur* $C(\mathfrak{g})$ *par les éléments* $\beta(p_1)$, $\beta(p_2), \ldots, \beta(p_m)$, $\beta(q_1)$, $\beta(q_2), \ldots, \beta(q_m)$ [*où* β *est l'application de* $\mathcal{S}^1(\mathfrak{g}; S)$ *dans* $\mathcal{U}^1(\mathfrak{g}; S)$ *définie en* (3.11)];

6° *Si* f *appartient à* U, *la restriction des fonctions* $p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_m$ à $\mathcal{O}_f$ *définit un isomorphe de variété algébrique entre* $\mathcal{O}_f$ *et* k^{2m}.

Il est clair que l'énoncé de ce théorème comme sa démonstration s'inspire du théorème de Gel'fand et Kirillov ([9], lemme 9), et l'entraîne comme corollaire. On s'inspirera aussi de [15] (Part 2, chap. II, § 6). La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Soient $S_{n-1} = (\mathfrak{g}_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ qui est une suite d'idéaux de $\mathfrak{g}_{n-1}$, r_{n-1} le degré de transcendance sur k de $J(\mathfrak{g}_{n-1})$, et soit X_n un élément de $\mathfrak{g}_n - \mathfrak{g}_{n-1}$.

Deux cas peuvent se produire :

(*A*) $I(\mathfrak{g}_n) \not\subset \mathcal{S}(\mathfrak{g}_{n-1})$. Alors $I(\mathfrak{g}_{n-1}) \subset I(\mathfrak{g}_n)$, donc

$$J(\mathfrak{g}_{n-1}) \subset J(\mathfrak{g}_n) \quad \text{et} \quad C(\mathfrak{g}_{n-1}) \subset C(\mathfrak{g}_n),$$

et il existe un élément Z_r de $I(\mathfrak{g}_n)$ de la forme $Z_r = \alpha_r X_r + \beta_r$, où α_r appartient à $I(\mathfrak{g}_{n-1}) \subset I(\mathfrak{g}_n)$, et $\alpha_r \neq 0$ et $\beta_r \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_{n-1})$, alors $r_{n-1} = r - 1$ et $m_{n-1} = m$.

Soient $(U_{n-1}, p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_m, c)$ les éléments vérifiant les conditions du théorème pour $(\mathfrak{g}_{n-1}; S_{n-1})$. Soit π la projection canonique de $\mathfrak{g}_n^*$ sur $\mathfrak{g}_{n-1}^*$, et soit U_1 l'ouvert de Zariski G-invariant de $\mathfrak{g}_n^*$ défini par $\alpha_r \neq 0$.

Soit $f \in U_1$, alors la restriction de π à $\mathcal{O}_f$ est injective. En effet, si $\pi(l) = \pi(l')$ avec l et $l' \in \mathcal{O}_f$, ceci veut dire que l et l' coïncident sur $\mathfrak{g}_{n-1}$, mais l'égalité

$$\langle Z_r, l \rangle = \langle Z_r, l' \rangle \qquad \text{entraîne que } \langle l, X_n \rangle = \langle l', X_n \rangle.$$

D'autre part, si $f \in U_1$, alors

$$d_f Z_r = \langle f, \alpha_r \rangle X_n + \langle f, X_n \rangle d_f \alpha_r + d_f \beta_r$$

n'appartient pas à $\mathfrak{g}_{n-1}$; comme $d_f Z_r$ appartient à $\mathfrak{g}(f)$, on a donc

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n-1} + \mathfrak{g}(f).$$

Si on note G_{n-1} le sous-groupe de G engendré par les exp ad X pour $X \in \mathfrak{g}_{n-1}$, et $G(f)$ le sous-groupe de G engendré par les exp ad X pour $X \in \mathfrak{g}(f)$; on a $G = G_{n-1} . G(f)$, car $\mathfrak{g}_{n-1}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. L'orbite de f sous G est donc aussi l'orbite de f sous G_{n-1}, et π est une surjection de $\mathcal{O}_f$ sur $\mathcal{O}_\pi(f)$. Donc π réalise un isomorphisme algébrique de $\mathcal{O}_f$ sur $\mathcal{O}_\pi(f)$ si f appartient à U_1.

Soit alors $U_n = \pi^{-1}(U_{n-1}) \cap U_1$, et soient $(p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_m)$ qui sont des éléments de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$, et c qui est un élément de $I(\mathfrak{g})$. Alors on vérifie aisément que les conditions 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, 6°, sont satisfaites.

(B) Supposons $I(\mathfrak{g}_n) \subset \mathcal{S}(\mathfrak{g}_{n-1})$. On a alors $I(\mathfrak{g}_n) \subset I(\mathfrak{g}_{n-1})$, et il existe un élément y de $I(\mathfrak{g}_{n-1})$ n'appartenant pas à $I(\mathfrak{g}_n)$ tel que :

1° $[X_n, y] = z$ avec $z \neq 0$ et $z \in I(\mathfrak{g}_n)$;

2° $J(\mathfrak{g}_{n-1}) = J(\mathfrak{g}_n)(y)$.

On a alors $r_{n-1} = r + 1$ et $m_{n-1} = m - 1$.

Soient $(U_{n-1}, p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}, q_1, q_2, \ldots, q_{m-1}, c)$ les éléments vérifiant les conditions du théorème pour $(\mathfrak{g}_{n-1}, s_{n-1})$.

Soit U_z l'ouvert de $\mathfrak{g}_n^*$ défini par $\langle f, z \rangle \neq 0$. Remarquons qu'on peut remplacer l'élément y vérifiant les conditions 1° et 2°, par n'importe quel élément $y + \tau z$ avec $\tau \in k$. Donc, pour un choix approprié de τ, le fermé F_y, défini par $y = 0$, rencontre l'ouvert non vide $U_{n-1} \cap U_z \cap U_c$.

Montrons qu'on peut construire un isomorphisme algébrique α entre U_z et $k \times k \times (F_y \cap U_z)$. On posera $\alpha(f) = (t(f), u(f), \varphi(f))$, où $t(f)$ et $u(f) \in k$, et $\varphi(f) \in F_y \cap U_z$.

Si $f \in U_z$, il existe un élément t unique tel que

$$\langle \exp t X_n . f, y \rangle = 0.$$

En effet,

$$\langle f, \exp - t X_n . y \rangle = \langle f, y - tz \rangle.$$

On a donc $t = \langle yz^{-1}, f \rangle$. On pose

$$t(f) = \langle yz^{-1}, f \rangle,$$
$$u(f) = \langle X_n, f \rangle$$

et

$$\varphi(f) = \pi(\exp t(f) X_n . f).$$

Montrons que α est un isomorphisme de variétés algébriques. Il suffit de calculer γ l'application inverse et de montrer que γ est un morphisme algébrique.

Appelons f_0 la forme linéaire sur $\mathfrak{g}_n$ définie par $f_0(\mathfrak{g}_{n-1}) = 0$ et $f_0(X_n) = 1$, et soit i l'injection canonique de $\mathfrak{g}_{n-1}^*$ dans $\mathfrak{g}_n^*$ définie par $i(f) \mid \mathfrak{g}_{n-1} f$ et $i(f)(X_n) = 0$.

Alors on calcule facilement que

$$\gamma(t, u, \varphi) = u f_0 + (\exp - t X_n).i(\varphi)$$

est l'application inverse de α.

Montrons que, si $f \in U_z$, α réalise par restriction un isomorphisme entre $\mathcal{O}_f$ et $k \times k \times \mathcal{O}_{\varphi(f)}$.

Il suffit de voir que $\alpha(\mathcal{O}_f) = k \times k \times \mathcal{O}_{\varphi(f)}$.

On peut supposer en remplaçant f par $\exp(t(f).X_n).f$ que $\langle y, f \rangle = 0$. Soit alors l appartenant à $\mathcal{O}_f$. On a

$$l = \exp t X_n . g_{n-1}.f.$$

On calcule alors facilement que $\langle y z^{-1}, l \rangle = -t$ et que, par conséquent, $\varphi(l) = g_{n-1}.\varphi(f)$; donc on a

$$\alpha(\mathcal{O}_f) \in k \times k \times \mathcal{O}_{\varphi(f)}.$$

Pour démontrer que α est surjective sur $k \times k \times \mathcal{O}_{\varphi(f)}$, il s'agit de montrer que $f + \mathfrak{g}_{n-1}^{\perp} \subset \mathcal{O}_f$. Soit $y_1 = d_n y$, alors y_1 appartient à $\mathfrak{g}_{n-1}(f_{n-1})$, et on a donc $y_1.f \in \mathfrak{g}_{n-1}$.

D'autre part,

$$\langle y_1.f, X_n \rangle = \langle f, [X_n, y_1] \rangle = \langle f, [X_n, d_f y] \rangle = \langle f, X_n, y] \rangle = \langle f, z \rangle \neq 0,$$

donc $y_1.f = \langle f, z \rangle . f_0$. Or comme $\mathfrak{g}_{n-1}$ contient $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, car $\mathfrak{g}_{n-1}$ est un idéal de codimension 1, et que y_1 appartient à $\mathfrak{g}_{n-1}(f_{n-1})$, on a simplement

$$(\exp v y_1).f = f + v\, y_1.f$$

et donc

$$f + \mathfrak{g}_{n-1}^{\perp} \subset \mathcal{O}_f$$

Considérons l'ouvert U_n des f dans U_z tels que $\varphi(f) \in U_{n-1}$; c'est un ouvert de Zariski G-invariant non vide de $\mathfrak{g}_n^*$, et si $f \in U_n$, alors les $2m$-fonctions de $\mathcal{O}_f$ dans k,

$$p_1 \circ \varphi, \quad \ldots, \quad p_m \circ \varphi, \quad q_1 \circ \varphi, \quad \ldots, \quad q_m \circ \varphi, \quad y z^{-1}, \quad X_n,$$

réalisent un isomorphisme de $\mathcal{O}_f$ sur k^{2m}.

Soit a une fonction de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_{n-1})$. La fonction $\varphi(a) = a \circ \varphi$ définie sur U_z est donc une fonction appartenant à $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_{n-1})[z^{-1}]$. Calculons précisément l'expression de l'homomorphisme φ de l'algèbre associative $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_{n-1})$ dans $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_{n-1})[z^{-1}]$. On a

$$\begin{aligned}\langle \varphi(a), f \rangle = \langle \varphi(f), a \rangle &= \left\langle a, \exp \frac{f(y)}{f(z)} X_n . f \right\rangle \\ &= \left\langle \exp - \frac{f(y)}{f(z)} X_n . a, f \right\rangle \\ &= \left\langle \Sigma \frac{(-1)^k}{k!} \frac{y^k}{z^k} (\mathrm{ad}_{\mathcal{S}(\mathfrak{g})} x_n)^k . a, f \right\rangle\end{aligned}$$

[la notation $\mathrm{ad}_{\mathcal{S}(\mathfrak{g})}\, x$ est relative à la structure de Poisson de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$].

On a donc

$$\varphi(a) = \Sigma \frac{(-1)^k}{k!} \frac{y^k}{z^k} (\mathrm{ad}_{\mathcal{S}(\mathfrak{g})} x_n)^k . a.$$

Montrons que φ est un homomorphisme de l'algèbre de Poisson $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_{n-1})$ dans l'algèbre de Poisson $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_{n-1})[z^{-1}]$.

En effet, on a

$$\begin{aligned}\varphi([a, b]) &= \Sigma \frac{(-1)^k}{k!} \frac{y^k}{z^k} (\mathrm{ad}\, x_n)^k ([a, b]) \\ &= \Sigma \frac{(-1)^k}{k!} \frac{y^k}{z^k} \Sigma_{i+j=k} \frac{k!}{i!\,j!} [(\mathrm{ad}\, x_n)^i\, a, (\mathrm{ad}\, x_n)^j\, b] \\ &= \Sigma_{i,j} \frac{(-1)^{i+j}}{i!\,j!} \frac{y^{i+j}}{z^{i+j}} [(\mathrm{ad}\, x_n)^i\, a, (\mathrm{ad}\, x_n)^j\, b].\end{aligned}$$

Comme $y/z \in J(\mathfrak{g}_{n-1})$ et que $(\mathrm{ad}\, x_n)^i\, a$ et $(\mathrm{ad}\, x_n)^i\, b$ appartiennent à $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_{n-1})$, on a bien

$$\varphi[(a, b]) = \Sigma_{i,j} \frac{(-1)^{i+j}}{i!\,j!} \left[\frac{y^i}{z^i} (\mathrm{ad}\, x_n)^i\, a, \frac{y^j}{z^j} (\mathrm{ad}\, x_n)^j\, b\right] = [\varphi(a), \varphi(b)].$$

On pose alors

$$\begin{aligned}\tilde{p}_i &= z^N \varphi(p_i) && \text{pour } 1 \leqq i \leqq m-1, \\ \tilde{p}_m &= y, \\ \tilde{q}_i &= z^N \varphi(q_i) && \text{pour } 1 \leqq i \leqq m-1, \\ \tilde{q}_m &= z^{2N-1} X_n \varphi(c), \\ \tilde{c} &= z^{2N} \varphi(c),\end{aligned}$$

et on choisit N assez grand pour que tous les éléments ainsi définis appartiennent à $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$.

Remarquons que, comme $F_y \cap U_z \cap U_c \neq \emptyset$, l'élément $\varphi(c)$ n'est pas nul.

D'autre part, montrons que φ applique $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_{n-1})$ dans le sous-corps de $\mathcal{R}(\mathfrak{g}_{n-1})$ formé par les éléments qui commutent à X_n. en effet, on a

$$\begin{aligned}[X_n, \varphi(a)] &= \Sigma_k \frac{(-1)^k}{k!} \mathrm{ad}\, X_n \left(\left(\frac{y}{z}\right)^k (\mathrm{ad}\, X_n)^k . a\right) \\ &= \Sigma_k \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \left(\frac{y}{z}\right)^{k-1} (\mathrm{ad}\, X_n)^k . a \\ &\qquad + \Sigma_k \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{y}{z}\right)^k (\mathrm{ad}\, X_n)^{k+1} . a = 0.\end{aligned}$$

Donc φ applique $I(\mathfrak{g}_{n-1})$ dans $J(\mathfrak{g}_n)$, et $\tilde{c}$ appartient bien à $I(\mathfrak{g})$.

Alors montrons que les conditions 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, 6° du théorème sont vérifiées.

On vérifie aisément la condition 1°, en utilisant le fait que φ est un homomorphisme d'algèbre de Poisson et les faits que

$$[y, \mathcal{S}(\mathfrak{g}_{n-1})] = [X_n, \varphi(\mathcal{S}(\mathfrak{g}_{n-1}))] = 0.$$

Montrons ensuite que la condition 4° est réalisée, c'est-à-dire que $\mathcal{S}(\mathfrak{g}) \subset A(b)$, ou encore que $\mathcal{S}(\mathfrak{g}) \subset J(\mathfrak{g})[\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_m, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \ldots, \tilde{q}_m]$; on a sur $\mathfrak{g}_{n-1}$,

$$\varphi(X_i) = X_i + \Sigma_{j>i} P_{i,j}\left(\frac{y}{z}\right)\cdot X_j.$$

Donc

$$\mathfrak{g}_{n-1} \subset \varphi(\mathfrak{g}_{n-1})\left[\frac{y}{z}\right]$$

et

$$\mathcal{S}(\mathfrak{g}_{n-1}) \subset \varphi(\mathcal{S}(\mathfrak{g}_{n-1}))\left[\frac{y}{z}\right],$$

or

$$\mathcal{S}(\mathfrak{g}_{n-1}) \subset J(\mathfrak{g}_{n-1})[p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}, q_1, q_2, \ldots, q_{m-1}].$$

Montrons que ceci entraîne que

$$\varphi(\mathcal{S}(\mathfrak{g}_{n-1})) \subset J(\mathfrak{g}_n)[\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots \tilde{p}_{m-1}, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \ldots, \tilde{q}_{m-1}].$$

Remarquons que φ est l'identité sur $I(\mathfrak{g}_n)$ et que $\varphi(y) = 0$.

Soient $z_1, z_2, \ldots, z_{r-1}$ des éléments de $I(\mathfrak{g}_n)$ tels que $(z_1, z_2, \ldots, z_{r-1})$ forment une base de transcendance de $J(\mathfrak{g}_n)$ sur k. On a alors $J(\mathfrak{g}_{n-1}) = k(z_1, z_2, \ldots, z_{r-1}, y)$ d'après le choix de y.

Soit A un élément de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_{n-1})$, alors A s'écrit sous la forme

$$A = N_1(p_1, \ldots, p_{m-1}, q_1, \ldots, q_{m-1}, z_1, \ldots, z_{r-1}, y).N_2(z_1, \ldots, z_{r-1}, y)^{-1}$$

où N_1 et N_2 désignent des polynômes en les variables $(p_1, \ldots, p_{m-1}, q_1, \ldots, q_{m-1}, z_1, \ldots, z_{r-1}, y)$.

Il s'agit de montrer que $\varphi(A)$ s'écrit sous la forme

$$\varphi(A) = N'_1(\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_{m-1}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{m-1}, z_1, \ldots, z_{r-1}).N'_2(z_1, \ldots, z_{r-1})^{-1}.$$

On a

$$A.N_2(z_1, \ldots, z_{r-1}, y) = N_1(p_1, \ldots, p_{m-1}, q_1, \ldots, q_{m-1}, z_1, \ldots, z_{r-1}, y).$$

En appliquant φ, il vient

$$\begin{aligned}&\varphi(A).N_2(z_1, \ldots, z_{r-1}, 0)\\ &\quad = N_1(\varphi(p_1), \ldots, \varphi(p_{m-1}), \varphi(q_1), \ldots, \varphi(q_{m-1}), z_1, \ldots, z_{r-1}, 0).\end{aligned}$$

Par conséquent si $N_2(z_1, z_2, \ldots, z_{r-1}, 0) \neq 0$, notre assertion est démontrée car $\varphi(p_i) = p_i/z^N$, et z appartient à $k(z_1, z_2, \ldots, z_{r-1})$.

Si $N_2(z_1, z_2, \ldots, z_{r-1}, 0) = 0$, N_2 est divisible par y, il suffit alors de démontrer que N_1 l'est aussi (on terminerait le raisonnement par une récurrence sur le degré).

On supposera, pour simplifier la démonstration, que seules les variables (p, q, z, y) interviennent.

Soit $N = \sum a_{ij}(y, z) P^i Q^j$, où les a_{ij} sont des polynômes en y et z, et raisonnons par récurrence sur le degré total de N.

On a $\varphi(N) = 0$, donc $[\varphi(N), \varphi(P)] = 0 = \varphi([N, P])$, or

$$[N, P] = -\sum a_{ij}(y, z)\, j\, P^i Q^{j-1}.$$

Par conséquent, $[N, P]$ est divisible par y, ce qui prouve que les $a_{i,j}(y, z)$ pour $j \neq 0$ sont divisibles par y.

De même, en considérant $[N, Q]$, on prouve que tous les $a_{ij}(y, z)$ sont divisibles par y sauf peut-être $a_{0,0}(y, z)$.

Mais alors $\varphi(N) = a_{0,0}(0, z) = 0$, et $a_{0,0}$ est divisible par y. On a donc bien

$$\varphi(\mathcal{S}(\mathfrak{g}_{n-1})) \subset J(\mathfrak{g}_n)[\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_{m-1}, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \ldots, \tilde{q}_{m-1}]$$

et donc

$$\mathcal{S}(\mathfrak{g}_n) \subset \mathcal{S}(\mathfrak{g}_{n-1}[X_n] \subset J(\mathfrak{g}_n)[\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_{m-1}, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \ldots, \tilde{q}_m].$$

Démontrons que la condition 2° est satisfaite. Il est clair que les éléments $\tilde{p}_i$ $(1 \leq i \leq m)$ appartiennent à $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S)$, car $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}_{n-1}; S_{n-1})$ est stable par les dérivations $\operatorname{ad}_{\mathcal{S}(\mathfrak{g})} X_n$.

Soit donc a un élément de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_n)$ appartenant à $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S)$. Soit ν un élément de $\mathbf{N}^m$ si $\nu = (n_1, n_2, \ldots, n_m)$, alors on écrit symboliquement

$$\tilde{p}^\nu = \tilde{p}_1^{n_1}.\tilde{p}_2^{n_2}.\ \ldots\ .\tilde{p}_m^{n_m} \qquad \text{et} \qquad \tilde{q}^\nu = \tilde{q}_n^{n_1}.\ \ldots\ .\tilde{q}_m^{n_m}.$$

D'après le point 4° que nous venons d'établir, a s'écrit sous la forme

$$a = \sum a_{\nu_\alpha \nu_\beta}\, \tilde{p}^{\nu_\alpha}\, \tilde{q}^{\nu_\beta}$$

où les $a_{\nu_\alpha \nu_\beta}$ sont des éléments de $J(\mathfrak{g})$.

Montrons que a appartient à $J(\mathfrak{g})[\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_m]$. En effet, a commute aux $\tilde{p}_i$, puisque $\tilde{p}_i$ appartient à $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S)$, et que $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S)$ est une algèbre de Poisson commutative.

On en déduit par une récurrence sur le degré de a le résultat voulu. De même pour la condition 3°, on remarque d'abord que les éléments $\tilde{q}_i$, $1 \leq i \leq m$, appartiennent à $\mathcal{S}^1(\mathfrak{g}; S)$ et si un élément a de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ appartient à $\mathcal{S}^1(\mathfrak{g}; S)$, a normalise la sous-algèbre $\mathcal{S}^0(\mathfrak{g}; S)$, donc $[a, p_i] \in J(\mathfrak{g})[p_1, p_2, \ldots, p_m] = A^0(b)$. On en déduit que a appartient à $A^1(b)$.

Démontrons le point 4°. Soit β l'isomorphisme de $\mathcal{S}^1(\mathfrak{g}; S)$ sur $\mathcal{U}^1(\mathfrak{g}; S)$, alors $\beta(y)$ appartient à $Z(\mathfrak{g}_{n-1})$, et $\beta(z)$ appartient à $Z(\mathfrak{g}_n)$. Soit φ^1

l'application de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{n-1})$ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{n-1})[\beta(z)^{-1}]$, défini par

$$\varphi'(a) = \Sigma \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\beta(y)}{\beta(Z)}\right)^k (\mathrm{ad}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} X_n)^k . a.$$

Alors on vérifie aisément (*voir* [9]) que φ' est un homomorphisme d'algèbres associatives, et on a

$$\beta(\tilde{p}_i) = \beta(Z)^N \varphi'(\beta(p_i)) \qquad (1 \leqq i \leqq m-1),$$
$$\beta(\tilde{q}_i) = \beta(Z)^N \varphi'(\beta(q_i)) \qquad (1 \leqq i \leqq m-1).$$

On vérifie de la même façon que, dans la démonstration du point 4°, que si

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{n-1}) \subset C(\mathfrak{g}_{n-1})[\beta(p_1), \ldots, \beta(p_{m-1}), \beta(q_1), \ldots, \beta(q_{m-1})],$$

alors

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}_n) \subset C(\mathfrak{g}_n)[\beta(\tilde{p}_1), \ldots, \beta(\tilde{p}_m), \beta(\tilde{q}_1), \ldots, \beta(\tilde{q}_m)].$$

Enfin la condition 6° est clairement réalisée, car si $f \in U_n$, $\varphi(f) \in U_{n-1}$ et les $2m$-fonctions

$$(\varphi(p_1), \ldots, \varphi(p_{m-1}), \varphi(q_1), \ldots, \varphi(q_{m-1}), yz^{-1}, x_n)$$

réalisent pour chaque f appartenant à U_n un isomorphisme de $\mathcal{O}_f$ sur k^{2m}. Or comme la restriction de z à toute orbite $\mathcal{O}_f$, pour $f \in U_n$, est une constante non nulle, les $2m$-fonctions $(p_1, \ldots, \tilde{p}_{m-1}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{m-1}, \tilde{p}_m, \tilde{q}_m)$ sont proportionnelles aux précédentes.

(4.2) Corollaire. — *Supposons $k = \mathbf{R}$. Soit U_c l'ouvert de Zariski G-invariant défini par $c \neq 0$; alors, si $f \in U_c$, la forme $\omega_{\mathcal{O}_f}$ est induite par la forme*

$$\frac{1}{c}\Sigma_{i=1}^{m} dp_i\, dq_i.$$

Ceci est un corollaire du théorème (4.1) et de la proposition (2.10).

(4.3) Corollaire :

(*a*) *Le corps $\mathcal{R}^0(\mathfrak{g}; s)$ est un sous-corps commutatif maximal de $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ [pour la structure de Poisson de $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$].*

(*b*) *Le corps $\mathcal{D}^0(\mathfrak{g}; s)$ est un sous-corps commutatif maximal de $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$.*

Ceci se déduit immédiatement du théorème (4.1).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Abraham (R.). — *Foundations of mechanics.* — New York, W. A. Benjamin, 1967 (*Mathematical Physics Monograph Series*).

[2] Auslander (L.) and Kostant (B.). — Polarization and unitary representations of solvable Lie groups, *Invent. Math.*, Berlin, t. 14, 1971, p. 255-354.

[3] BEREZIN (F. A.). — Quelques remarques sur l'enveloppe associative d'une algèbre de Lie [en russe], *Funkcional'nyj Analiz*, t. 1, 1967, fasc. 2, p. 1-14.

[4] BERNAT (P.), CONZE (N.), VERGNE (M.) [etc.]. — *Représentations des groupes de Lie résolubles*. — Paris, Dunod, 1972 (*Monographies de la Société mathématique de France*, 4).

[5] DIXMIER (J.). — Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, *Bull. Soc. math. France*, t. 85, 1957, p. 325-388.

[6] DIXMIER (J.). — Sur l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente, *Archiv der Math.*, Basel, t. 10, 1959, p. 321-326.

[7] DIXMIER (J.). — Représentations irréductibles des algèbres de Lie nilpotentes, *Anais Acad. Brasil. Ciencias*, t. 35, 1963, p. 491-519.

[8] DUFLO (M.) et VERGNE (M.). — Une propriété de la représentation coadjointe d'une algèbre de Lie, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 268, 1969, Série A, p. 583-585.

[9] GEL'FAND (I. M.) et KIRILLOV (A. A.). — *Sur les corps liés aux algèbres enveloppantes des algèbres de Lie*. — Paris, Presses universitaires de France, 1966 (*Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications mathématiques*, 31, p. 5-20).

[10] GEL'FAND (I. M.) et KIRILLOV (A. A.). — Structure du corps de Lie d'une algèbre de Lie semi-simple déployée [en russe], *Funkcional'nyj Analiz*, t. 3, 1969, fasc. 1, p. 7-26.

[11] KIRILLOV (A. A.). — Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents [en russe], *Uspekhi mat. Nauk*, 1962, p. 57-110.

[12] KIRILLOV (A. A.). — Mesure de Plancherel pour groupes nilpotents, *Funkcional'nyj Analiz*, t. 1, 1967, fasc. 4, p. 84-85.

[13] KIRILLOV (A. A.). — Caractères des représentations unitaires des groupes de Lie... [en russe], *Funkcional'nyj Analiz*, t. 3, 1969, fasc. 1, p. 36-41.

[14] KOSTANT (B.). — Quantization and unitary representations, *Lectures in modern analysis and applications*, III, p. 87-208. — Berlin, Springer-Verlag, 1970 (*Lecture Notes in Mathematics*, 170).

[15] PUKANSZKY (L.). — *Leçons sur les représentations des groupes*. — Paris, Dunod, 1967 (*Monographies de la Société mathématique de France*, 2).

[16] RENTSCHLER (R.). — Propriétés fonctorielles de la bijection canonique entre Spec $U(\mathfrak{g})$ et $(\mathrm{Spec}\, S(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}}$ pour les algèbres de Lie nilpotentes, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 271, 1970, Série A, p. 868-871.

[17] VERGNE (M.). — Construction de sous-algèbres subordonnées à un élément du dual d'une algèbre de Lie résoluble, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 270, 1970, Série A, p. 173-175.

[18] VERGNE (M.). — Construction de sous-algèbres subordonnées à un élément du dual d'une algèbre de Lie résoluble, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 270, 1970, Série A, p. 704-707.

[19] VERGNE (M.). — La structure de Poisson sur l'algèbre symétrique d'une algèbre de Lie nilpotente, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 269, 1969, Série A, p. 950-952.

(Texte reçu le 6 décembre 1971.)

Mme Michèle VERGNE,
11, rue Quatrefages,
75005 Paris.