BULLETIN DE LA S. M. F.

FRANÇOIS NORGUET

Remarques sur la cohomologie des variétés analytiques complexes

Bulletin de la S. M. F., tome 100 (1972), p. 435-447
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1972__100__435_0>

Bull. Soc. math. France,
100, 1972, p. 435 à 447.

A Monsieur le Professeur K. Stein,
pour son soixantième anniversaire.

REMARQUES SUR LA COHOMOLOGIE DES VARIÉTÉS ANALYTIQUES COMPLEXES

PAR

François NORGUET

Résumé. — Deux suites exactes cohomologiques précisent les relations entre les d, d', d'' et $d'\,d''$-cohomologies d'une variété analytique complexe quelconque. Exprimées modulo certaines classes d'espaces vectoriels, elles fournissent des énoncés plus maniables. L'introduction d'hypothèses de finitude ou de nullité pour la d''-cohomologie entraîne alors des propriétés simples des autres cohomologies. Ceci généralise et synthétise des résultats connus.

0. Introduction

Les deux suites exactes fondamentales du paragraphe 2 sont écrites en cohomologie de formes différentielles, et se vérifient aisément; les résultats correspondants en cohomologie de faisceaux figurent au paragraphe 4.

Serre, dans [9], a montré que la cohomologie de de Rham des variétés de Stein est celle des formes holomorphes; dans [6], Frenkel et Norguet ont étendu ce résultat (partie du corollaire 7) en remplaçant cette dernière cohomologie par d'autres ($K_0^{p,q}$ et $\Lambda^{p,q}$ du § 2); une nouvelle extension (fin du corollaire 7) a été réalisée par Aeppli [1] pour les espaces $V^{p,q}$ du paragraphe 2.

La conséquence topologique indiquée par Serre a été généralisée par Sorani [10] et par Sorani et Villani [11] au cas des variétés cohomologiquement q-complètes (partie du corollaire 5); Le Potier [7] a étendu ce nouveau résultat aux espaces.

Bigolin a entrepris l'étude générale des diverses cohomologies; il a établi (dans [3] pour $p + q + 2 > n$, dans [4] en général) de façon directe la seconde résolution fine du paragraphe 4, antérieurement prouvée par Dolbeault ([5], p. 99-100) pour $q = 0$; dans [3], il a obtenu les propriétés de $\Lambda^{p,q}$ et de $V^{p,q}$ que fournit l'application des corollaires 6 et 7 respectivement aux variétés compactes et aux variétés de Stein.

Le calcul modulo certaines classes d'espaces vectoriels, utilisé par SERRE dans [8], a permis à ANDREOTTI et NORGUET [2] d'étudier $V^{p,q}$ dans certains cas particuliers en négligeant les espaces vectoriels de dimension finie; il est ici systématiquement employé, et l'étude de $V^{p,q}$ étend celle abordée dans [2].

Le texte initialement présenté est celui qui figure dans le Séminaire F. Norguet, U. E. R. de Mathématiques, Université de Paris 7. La rédaction du paragraphe 3 a été reprise et améliorée le 6 juin 1972. Le paragraphe 5, relatif à la cohomologie des courants, a été ajouté à cette même date, selon une suggestion de P. DOLBEAULT; la possibilité de définir les espaces $\Lambda^{p,q}$ et $V^{p,q}$ indifféremment à l'aide des formes différentielles ou des courants a été prouvée par BIGOLIN dans [4].

Comme le remarque P. DOLBEAULT, les conclusions de ce travail s'étendent à la cohomologie à supports dans une famille paracompactifiante (par exemple, la cohomologie à supports compacts), et peuvent être explicitées pour des formes différentielles et des courants à valeurs dans des fibrés vectoriels.

1. Notations

Les formes différentielles extérieures considérées sont toutes à valeurs complexes et de classes C^∞. Dans une variété analytique complexe X de dimension n, on désigne par $\mathcal{A}^p$ (resp. $\mathcal{Z}^p$) le faisceau des germes de formes de degré p (resp. de degré p et fermées), et par $\mathcal{A}^{p,q}$ (resp. $\mathcal{Z}^{p,q}$, $\mathcal{O}^{p,q}$, $\bar{\mathcal{O}}^{q,p}$, $\mathcal{H}^{p,q}$) le faisceau des germes de formes de type (p, q) [resp. de type (p, q) et d, d'', d', $d'\,d''$-fermées]; on pose encore

$$\mathfrak{A}_r^{p,q} = \bigoplus_{i,j\in\mathbf{N},\, i+j=r} \mathcal{A}^{p+i,q+j};$$

pour $r + \min(p, q) \geqq n$, on a donc $\mathfrak{A}_r^{p,q} = \mathcal{A}^{p+q+r}$; en particulier, $\mathfrak{A}_{2n-p-q}^{p,q} = \mathcal{A}^{2n}$ et, pour p et $q < n$, $\mathfrak{A}_{2n-p-q-1}^{p,q} = \mathcal{A}^{2n-1}$. Pour tout faisceau $\mathcal{F}$ sur X, $\mathcal{F}(X)$ désigne l'espace des sections de $\mathcal{F}$ dans X.

Un ensemble non vide Φ d'espaces vectoriels sera appelé classe de Serre si, pour toute suite exacte $E \to F \to G$ d'espaces vectoriels dont les termes E et G appartiennent à Φ, F appartient aussi à Φ. Une application linéaire d'un espace vectoriel E, dans un espace vectoriel F, sera dite Φ-injective (resp. Φ-surjective) si son noyau (resp. son conoyau) est dans Φ; elle sera dite Φ-bijective si elle est à la fois Φ-injective et Φ-surjective. Si Ψ est une famille non vide d'espaces vectoriels, on appelle classe de Serre, engendrée par Ψ, la plus petite classe de Serre qui contient Ψ.

2. Cohomologie des formes différentielles

On pose $H^p(X) = \mathcal{Z}^p(X)/d\mathcal{A}^{p-1}(X)$, $H_{d''}^{p,q}(X) = \mathcal{O}^{p,q}(X)/d''\mathcal{A}^{p,q-1}(X)$ et $H_{d'}^{p,q}(X) = \bar{\mathcal{O}}^{q,p}(X)/d'\mathcal{A}^{p-1,q}(X)$; on désigne par $\Phi_r^{p,q}(X)$ la classe de Serre engendrée par les espaces vectoriels $H_{d''}^{p+i,q+j}(X)$, $i, j \in \mathbf{N}$, $i+j=r$, et par $\Theta_r^{p,q}(X)$ la classe de Serre engendrée par $\Phi_{q-1}^{0,p+r+1}(X)$ et $\Phi_{p-1}^{0,q+r+1}(X)$, c'est-à-dire par les espaces vectoriels $H_{d''}^{s,p+q+r-s}(X)$, $0 \leq s < \max(p, q)$. On pose encore

$$H_r^{p,q}(X) = \operatorname{Ker}\left[\mathfrak{A}_r^{p,q}(X) \xrightarrow{d} \mathfrak{A}_{r+1}^{p,q}(X)\right] / d\mathfrak{A}_{r-1}^{q,p}(X);$$

vu la remarque qui suit la définition de $\mathfrak{A}_r^{p,q}$, l'homomorphisme de $H_r^{p,q}(X)$ dans $H^{p+q+r}(X)$, induit par l'inclusion de $\mathfrak{A}_r^{p,q}(X)$ dans $\mathcal{A}^{p+q+r}(X)$, est bijectif si $r+\min(p, q) > n$, surjectif si $r+\min(p, q) = n$.

(*a*) *Première suite exacte.* — La suite

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{p,q}(X) \xrightarrow{d'} \mathfrak{A}_0^{p+1,q}(X) \rightarrow \mathfrak{A}_1^{p,q}(X) \rightarrow \mathcal{A}^{p,q+1}(X) \xrightarrow{d'} \dots \\ \rightarrow \mathcal{A}^{p,q+r}(X) \xrightarrow{d'} \mathfrak{A}_r^{p+1,q}(X) \rightarrow \mathfrak{A}_{r+1}^{p,q}(X) \rightarrow \mathcal{A}^{p,q+r+1}(X) \xrightarrow{d'} \dots,\end{aligned}$$

où les homomorphismes $\mathfrak{A}_r^{p+1,q}(X) \rightarrow \mathfrak{A}_{r+1}^{p,q}(X)$ sont des inclusions, et les homomorphismes $\mathfrak{A}_{r+1}^{p,q}(X) \rightarrow \mathcal{A}^{p,q+r+1}(X)$ des projections, induit la première suite exacte

$$\begin{aligned}\mathcal{O}^{p,q}(X) \xrightarrow{d} H_0^{p+1,q}(X) \rightarrow H_1^{p,q}(X) \rightarrow H_{d''}^{p,q+1}(X) \xrightarrow{d} \dots \\ \rightarrow H_{d''}^{p,q+r}(X) \xrightarrow{d} H_r^{p+1,q}(X) \rightarrow H_{r+1}^{p,q}(X) \rightarrow H_{d''}^{p,q+r+1}(X) \xrightarrow{d} \dots;\end{aligned}$$

on le vérifie à partir des définitions; selon une remarque de G. Roos, cette suite n'est autre que la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de complexes cohomologiques

$$0 \rightarrow \mathfrak{A}_{-1+\cdot}^{p+1,q}(X) \rightarrow \mathfrak{A}_{\cdot}^{p,q}(X) \rightarrow \mathcal{A}^{p,q+\cdot}(X) \rightarrow 0;$$

les différentielles de ces complexes sont respectivement d, d' et d''; les deux homomorphismes médians sont définis, comme ci-dessus, par inclusion et projection.

En posant

$$K_r^{p,q}(X) = H_r^{p,q}(X)/dH_{d''}^{p-1,q+r}(X) \qquad \text{pour} \quad r > 0,$$
$$K_0^{p,q}(X) = H_0^{p,q}(X)/d\mathcal{O}^{p-1,q}(X)$$

et

$$L_r^{p,q}(X) = \operatorname{Ker}\left[H_r^{p,q}(X) \rightarrow H_{d''}^{p,q+r}(X)\right],$$

on a un isomorphisme

$$K_r^{p+1,q}(X) \approx L_{r+1}^{p,q}(X).$$

De la première suite exacte résultent les propositions suivantes :

PROPOSITION 1. — *L'inclusion de* $\mathfrak{A}_r^{p+s+1,q}(X)$ dans $\mathfrak{A}_{r+s+1}^{p,q}(X)$ *induit un homomorphisme*

$$K_r^{p+s+1,q}(X) \to L_{r+s+1}^{p,q}(X),$$

qui est $\Phi_{s-1}^{p,q+r+1}(X)$*-injectif et* $\Phi_{s-1}^{p+1,q+r+1}(X)$*-surjectif.*

PROPOSITION 2. — *L'inclusion de* $\mathfrak{A}_r^{p,q}(X)$ *dans* $\mathcal{A}^{p+q+r}(X)$ *induit un homomorphisme*

$$K_r^{p,q}(X) \to H^{p+q+r}(X),$$

qui est $\Theta_r^{p-1,q}(X)$*-injectif et* $\Theta_r^{p,q}(X)$*-surjectif, et un homomorphisme*

$$H_r^{p,q}(X) \to H^{p+q+r}(X)$$

qui est $\Theta_{r-1}^{p,q}(X)$*-injectif et* $\Theta_r^{p,q}(X)$*-surjectif pour* $r > 0$.

On obtient évidemment des résultats analogues en remplaçant d'' par d'. En particulier, on pose

$$\overline{K}_r^{q,p}(X) = H_r^{p,q}(X)/dH_{d'}^{p+r,q-1}(X) \qquad \text{pour} \quad r > 0;$$

$$\overline{K}^{q,p}(X) = H_0^{p,q}(X)/d\overline{\mathcal{O}}^{q-1,p}(X)$$

et

$$\overline{L}_r^{q,p}(X) = \operatorname{Ker}[H_r^{p,q}(X) \to H_{d'}^{p+r,q}(X)].$$

(*b*) *Seconde suite exacte.* — On pose

$$\Lambda^{p+1,q+1}(X) = \mathfrak{Z}^{p+1,q+1}(X)/d'\,d''\,\mathcal{A}^{p,q}(X),$$

$$\Lambda^{p,0}(X) = K_0^{p,0}(X), \qquad \Lambda^{0,q}(X) = \overline{K}_0^{q,0}(X).$$

La suite

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{p,q}(X) \oplus \mathcal{A}^{p,q}(X) &\xrightarrow{u} \mathfrak{A}_0^{p,q}(X) \xrightarrow{d'-d''} \mathfrak{A}_1^{p,q}(X) \to \mathcal{A}^{p,q+1}(X) \oplus \mathcal{A}^{p+1,q}(X) \\
&\xrightarrow{d'\oplus d''} \mathfrak{A}_0^{p+1,q+1}(X) \to \mathfrak{A}_2^{p,q}(X) \to \dots \\
&\longrightarrow \mathcal{A}^{p,q+r}(X) \oplus \mathcal{A}^{p+r,q}(X) \xrightarrow{d'\oplus d''} \mathfrak{A}_{r-1}^{p+1,q+1}(X) \\
&\longrightarrow \mathfrak{A}_{r+1}^{p,q}(X) \to \mathcal{A}^{p,q+r+1}(X) \oplus \mathcal{A}^{p+r+1,q}(X) \to \dots,
\end{aligned}$$

où $u(\varphi \oplus \psi) = \varphi - \psi$, les homomorphismes $\mathfrak{A}_r^{p+1,q+1} \to \mathfrak{A}_{r+2}^{p,q}$ sont des inclusions, et les homomorphismes $\mathfrak{A}_r^{p,q}(X) \to \mathcal{A}^{p,q+r}(X) \oplus \mathcal{A}^{p+r,q}(X)$ des projections, induit la seconde suite exacte

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^{p,q}(X) \oplus \overline{\mathcal{O}}^{q,p}(X) &\to \mathcal{H}^{p,q}(X) \xrightarrow{d'-d''} H_1^{p,q}(X) \to H_{d''}^{p,q+1}(X) \oplus H_{d'}^{p+1,q}(X) \\
&\xrightarrow{d} \Lambda^{p+1,q+1}(X) \to H_2^{p,q}(X) \to \dots \\
&\to H_{d''}^{p,q+r}(X) \oplus H_{d'}^{p+r,q}(X) \xrightarrow{d} H_{r-1}^{p+1,q+1}(X) \\
&\to H_{r+1}^{p,q}(X) \to H_{d''}^{p,q+r+1}(X) \oplus H_{d'}^{p+r+1,q}(X) \to \dots;
\end{aligned}$$

on le vérifie à partir des définitions; selon une remarque de G. Roos également, cette suite est, aux premiers termes près, la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de complexes

$$0 \to \mathfrak{A}^{p+1,q+1}_{-1+\cdot}(X) \to \mathfrak{A}^{p,q}_{1+\cdot}(X) \to \mathcal{A}^{p,q+1+\cdot}(X) \oplus \mathcal{A}^{p+1+\cdot,q}(X) \to 0;$$

les différentielles des quatre complexes sont respectivement d, d, d'' et d'; les deux homomorphismes médians sont définis, comme ci-dessus, par inclusion et projection.

En posant

$$W^{p,q}_0(X) = \mathcal{H}^{p,q}(X)/[\mathcal{O}^{p,q}(X) + \bar{\mathcal{O}}^{q,p}(X)],$$
$$W^{p,q}_1(X) = \Lambda^{p+1,q+1}(X)/d\,[H^{p,q+1}_{d''}(X) + H^{p+1,q}_{d'}(X)]$$

et, pour $r > 1$,

$$W^{p,q}_r(X) = H^{p+1,q+1}_{r-1}(X)/d\,[H^{p,q+r}_{d''}(X) + H^{p+r,q}_{d'}(X)],$$

on a un isomorphisme

$$W^{p,q}_r(X) \approx L^{p,q}_{r+1}(X) \cap \overline{L}^{q,p}_{r+1}(X).$$

De la suite exacte ci-dessus résulte la proposition suivante :

Proposition 3. — *L'homomorphisme*

$$W^{p,q}_r(X) \to H^{p+q+r+1}(X)$$

induit, pour $r = 0$, par $d' - d''$: $\mathcal{H}^{p,q}(X) \to \mathcal{A}^{p+q+1}(X)$ et, pour $r > 0$, par l'inclusion de $\mathfrak{A}^{p+1,q+1}_{r-1}(X)$ dans $\mathcal{A}^{p+q+r+1}(X)$, est $\Theta^{p,q}_r(X)$-injectif et $\Theta^{p+1,q+1}_{r-1}(X)$-surjectif. Il est en particulier bijectif si $r + \min(p, q) \geqq n$.

(c) *Applications de la seconde suite exacte.* — Pour $r = 1$, et compte tenu de la définition de $W^{p,q}_1(X)$, on obtient

Corollaire 1. — *La suite*

$$H^{p-1,q}_{d''}(X) \oplus H^{p,q-1}_{d'}(X) \xrightarrow{d} \Lambda^{p,q}(X) \to H^{p+q}(X) \to 0,$$

dans laquelle l'homomorphisme $\Lambda^{p,q}(X) \to H^{p+q}(X)$ est induit par l'inclusion de $\mathcal{A}^{p,q}(X)$ dans $\mathcal{A}^{p+q}(X)$, est $\Theta^{p-1,q-1}_1(X)$-exacte au terme $\Lambda^{p,q}(X)$, et $\Theta^{p,q}_0(X)$-exacte au terme $H^{p+q}(X)$. Elle est exacte, en particulier, si $p = q = n$.

Pour $r = 0$, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 2. — *La suite*

$$\mathcal{O}^{p,q}(X) \oplus \bar{\mathcal{O}}^{q,p}(X) \xrightarrow{u} \mathcal{H}^{p,q}(X) \to H^{p+q+1}(X) \to 0,$$

où $u(\varphi \oplus \psi) = \varphi - \psi$, *et où l'homomorphisme* $\mathcal{H}^{p,q}(X) \to H^{p+q+1}(X)$ *est induit par* $d' - d''$: $\mathcal{A}^{p,q}(X) \to \mathcal{A}^{p+q+1}(X)$, *est* $\Theta_0^{p,q}(X)$*-exacte au terme* $\mathcal{H}^{p,q}(X)$, *et* $\Theta_{-1}^{p+1,q+1}(X)$*-exacte au terme* $H^{p+q+1}(X)$.

On pose encore

$$V^{p,q}(X) = \mathcal{H}^{p,q}(X)/[d'\,\mathcal{A}^{p-1,q}(X) + d''\,\mathcal{A}^{p,q-1}(X)],$$

définition où l'on convient de remplacer $d'\,\mathcal{A}^{-1,q}(X)$ par $\bar{\mathcal{O}}^{q,0}(X)$, et $d''\,\mathcal{A}^{p,-1}(X)$ par $\mathcal{O}^{p,0}(X)$; on a la suite exacte :

$$\Lambda^{p,q}(X) \to H_{d''}^{p,q}(X) \oplus H_{d'}^{p,q}(X) \xrightarrow{u} V^{p,q}(X) \to W_0^{p,q}(X) \to 0,$$

où le premier homomorphisme est induit par l'application qui à φ associe $\varphi \oplus \varphi$, le second par u, le troisième par l'application identité de $\mathcal{A}^{p,q}$. On obtient donc le résultat ci-dessous :

Corollaire 3. — *La suite*

$$\Lambda^{p,q}(X) \to H_{d''}^{p,q}(X) \oplus H_{d'}^{p,q}(X) \xrightarrow{u} V^{p,q}(X) \xrightarrow{d'-d''} H^{p+q+1}(X) \to 0,$$

où l'homomorphisme $V^{p,q}(X) \to H^{p+q+1}(X)$ *est induit par*

$$d' - d'' \;:\; \mathcal{A}^{p,q}(X) \to \mathcal{A}^{p+q+1}(X),$$

est $\Theta_0^{p,q}(X)$*-exacte au terme* $V^{p,q}(X)$, *et* $\Theta_{-1}^{p+1,q+1}(X)$*-exacte au terme* $H^{p+q+1}(X)$.

Les suites d'homomorphismes des corollaires 1 et 3 s'assemblent en un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H_{d''}^{p-1,q}(X) \oplus H_{d'}^{p,q-1}(X) \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "d' \oplus d''"'] & \Lambda^{p,q}(X) \arrow[r] \arrow[d] & H^{p+q}(X) \arrow[r] & 0 \\
& H_{d''}^{p,q}(X) \oplus H_{d'}^{p,q}(X) \arrow[d, "u"] & & \\
& V^{p,q}(X) \arrow[d, "d'-d''"] & & \\
& H^{p+q+1}(X) \arrow[d] & & \\
& 0 & &
\end{tikzcd}$$

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 4. — *Si* $H^{p+q}(X) = 0$, *la suite*

$$H_{d''}^{p-1,q}(X) \oplus H_{d'}^{p,q-1}(X) \xrightarrow{d' \oplus d''} H_{d''}^{p,q}(X) \oplus H_{d'}^{p,q}(X) \xrightarrow{u} V^{p,q}(X) \xrightarrow{d'-d''} H^{p+q+1}(X) \to 0$$

est exacte, au terme $H_{d''}^{p,q}(X) \oplus H_{d'}^{p,q}(X)$, *modulo la classe de Serre engendrée par* $\Theta_1^{p-1,q-1}(X)$ *et* $\Theta_0^{p,q}(X)$, $\Theta_0^{p,q}(X)$*-exacte au terme* $V^{p,q}(X)$, *et* $\Theta_{-1}^{p+1,q+1}(X)$*-exacte au terme* $H^{p+q+1}(X)$.

On a encore le résultat suivant, de vérification immédiate :

PROPOSITION 4. — *On a une suite exacte*

$$H_{d''}^{p,q}(X) \to V^{p,q}(X) \xrightarrow{d''} \Lambda^{p,q+1}(X) \to H_{d''}^{p,q+1}(X)$$

dont les homomorphismes extrêmes sont induits par l'application identité de $\mathcal{A}^{p,q}(X)$ *et celle de* $\mathcal{A}^{p,q+1}(X)$, *et l'homomorphisme noté* d'' *par* $d'' : \mathcal{A}^{p,q}(X) \to \mathcal{A}^{p,q+1}(X)$. *On a de même une suite exacte*

$$H_{d'}^{p,q}(X) \to V^{p,q}(X) \xrightarrow{d'} \Lambda^{p+1,q}(X) \to H_{d'}^{p+1,q}(X).$$

3. Application à des variétés vérifiant certaines conditions de finitude

Soit Φ une classe de Serre d'espaces vectoriels; dans les applications, ce sera le plus souvent la classe des espaces de dimension finie ou la classe réduite à $\{0\}$. Dans les énoncés ci-dessous, n désignant la dimension complexe de la variété considérée, on suppose toujours implicitement $0 \leqq p \leqq n$, $0 \leqq q \leqq n$.

(*a*) *Hypothèse du type « s-convexité »*

PROPOSITION 5. — *Soit X une variété analytique complexe, et soit s un nombre entier* $\geqq -1$, *tels que* $H_{d''}^{p,q}(X) \in \Phi$ *pour* $p \geqq 0$, $q > s$. *Alors :*

(i) *L'homomorphisme* $K_r^{p+u,q}(X) \to K_{r+u}^{p,q}(X)$ *est* Φ*-bijectif si* $r + q \geqq s$;

(ii) *L'homomorphisme* $K_r^{p,q}(X) \to H^{p+q+r}(X)$, $r > 0$, *est* Φ*-bijectif si* $r + \min(p-1, q) \geqq s$, *et* Φ*-surjectif si* $p \leqq q$ *et* $r + p = s$;

(iii) *L'homomorphisme* $H_r^{p,q}(X) \to H^{p+q+r}(X)$, $r > 0$, *est* Φ*-bijectif si* $r + \min(p, q) > s$, *et* Φ*-surjectif si* $r + \min(p, q) = s$;

(iv) *L'homomorphisme* $W_r^{p,q}(X) \to H^{p+q+r+1}(X)$ *est* Φ*-bijectif si* $r + \min(p, q) \geqq s$;

(v) *Les homomorphismes* $\Lambda^{p,q}(X) \to H^{p+q}(X)$ *et* $V^{p,q}(X) \to H^{p+q+1}(X)$ *sont* Φ*-bijectifs si* $\min(p, q) > s$;

(vi) *Les suites*

$$H_{d''}^{p-1,q}(X) \oplus H_{d'}^{p,q-1}(X) \xrightarrow{d} \Lambda^{p,q}(X) \to H^{p+q}(X) \to 0,$$

$$\Lambda^{p,q}(X) \to H_{d''}^{p,q}(X) \oplus H_{d'}^{p,q}(X) \xrightarrow{u} V^{p,q}(X) \xrightarrow{d'-d''} H^{p+q+1}(X) \to 0$$

sont Φ*-exactes si* $\min(p, q) = s$.

C'est une application immédiate des résultats du paragraphe 2.

COROLLAIRE 5. — *Sous les mêmes hypothèses, et pour* $r > n + s$, *où* n *est la dimension de* X, *on a* $H^r(X) \in \Phi$.

En effet, de (v) et (vi) résulte la Φ-surjectivité de l'application $\Lambda^{n+1,q-1}(X) \to H^{n+q}(X)$ pour $q - 1 \geqq s$; or $\Lambda^{n+1,q-1}(X) = 0$.

Vu le corollaire 5, on peut préciser comme suit la proposition 5 :

THÉORÈME 1. — *Soit* X *une variété analytique complexe, et soit* s *un nombre entier* $\geqq -1$, *tels que* $H^{p,q}_{d''}(X) \in \Phi$ *pour* $q > s$, $p \geqq 0$. *Alors :*

(i) *L'homomorphisme* $K^{p+u,q}_r(X) \to K^{p,q}_{r+u}(X)$ *est* Φ*-bijectif si* $r + q \geqq s$;

(ii) $K^{p,q}_r(X) \in \Phi$ *si* $p + q + r > n + s$;
l'homomorphisme $K^{p,q}_r(X) \to H^{p+q+r}(X)$
est Φ*-bijectif si* $p + q + r - n \leqq s \leqq r + \min(p-1, q)$, Φ*-surjectif si* $p \leqq q$ *et* $p + r = s$;

(iii) $H^{p,q}_r(X) \in \Phi$ *si* $p + q + r > n + s$;
l'homomorphisme $H^{p,q}_r(X) \to H^{p+q+r}(X)$, $r > 0$,
est Φ*-bijectif si* $p + q + r - n \leqq s < r + \min(p, q)$, Φ*-surjectif si* $s = r + \min(p, q)$;

(iv) $W^{p,q}_r(X) \in \Phi$ *si* $p + q + r \geqq n + s$;
l'homomorphisme $W^{p,q}_r(X) \to H^{p+q+r+1}(X)$
est Φ*-bijectif si* $p + q + r - n < s \leqq r + \min(p, q)$;

(v) $\Lambda^{p,q}(X) \in \Phi$ *si* $p + q > n + s$;
l'homomorphisme $\Lambda^{p,q}(X) \to H^{p+q}(X)$
est Φ*-bijectif si* $p + q - n \leqq s < \min(p, q)$;

(vi) $V^{p,q}(X) \in \Phi$ *si* $p + q > n + s$ *ou si* $p + q - n = s < \min(p, q)$;
l'homomorphisme $V^{p,q}(X) \to H^{p+q+1}(X)$
est Φ*-bijectif si* $p + q - n < s < \min(p, q)$;

(vii) *Les suites*

$$H^{p-1,q}_{d''}(X) \oplus H^{p,q-1}_{d'}(X) \xrightarrow{d} \Lambda^{p,q}(X) \to H^{p+q}(X) \to 0,$$

$$\Lambda^{p,q}(X) \to H^{p,q}_{d''}(X) \oplus H^{p,q}_{d'}(X) \xrightarrow{u} V^{p,q}(X) \xrightarrow{d'-d''} H^{p+q+1}(X) \to 0$$

sont Φ*-exactes si* $\min(p, q) = s$.

Pour $s = -1$ et pour $s = 0$, on obtient en particulier les résultats suivants :

COROLLAIRE 6. — *Si $H^{p,q}_{d''}(X) \in \Phi$ pour $p \geqq 0$ et $q \geqq 0$, les homomorphismes de $K^{p,q}_r(X)$ pour $r > 0$, et de $H^{p,q}_r(X)$ dans $H^{p+q+r}(X)$, de $\Lambda^{p,q}(X)$ dans $H^{p+q}(X)$, de $W^{p,q}_r(X)$ et de $V^{p,q}(X)$ dans $H^{p+q+1}(X)$, sont Φ-bijectifs, et $H^r(X) \in \Phi$ pour $r \geqq n$.*

COROLLAIRE 7. — *Si $H^{p,q}_{d''}(X) \in \Phi$ pour $p \geqq 0$ et $q > 0$, les homomorphismes de $K^{p,q}_0(X)$ pour $p > 0$, et de $\Lambda^{p,q}(X)$ dans $H^{p+q}(X)$, de $H^{p,q}_r(X)$ dans $H^{p+q+r}(X)$ pour $r > 0$, de $W^{p,q}_r(X)$ dans $H^{p+q+r+1}(X)$ et de $V^{p,q}(X)$ dans $H^{p+q+1}(X)$ sont Φ-bijectifs, et $H^r(X) \in \Phi$ pour $r > n$.*

(*b*) *Hypothèse du type « $(n - s - 1)$-concavité ».*

PROPOSITION 6. — *Soit X une variété analytique complexe, et soit s un nombre entier > 0, tels que $H^{p,q}_{d''}(X) \in \Phi$ pour $p \geqq 0$ et $0 \leqq q < s$. Alors :*

(i) *L'homomorphisme $K^{p+u,q}_r(X) \to K^{p,q}_{r+u}(X)$*

est Φ-bijectif si $q + r + u < s$, Φ-injectif si $q + r + u = s$ et $u > 0$;

(ii) *Les homomorphismes $K^{p,q}_r(X) \to H^{p+q+r}(X)$ pour $r \geqq 0$*

et $H^{p,q}_r(X) \to H^{p+q+r}(X)$ pour $r > 0$

sont Φ-bijectifs si $p + q + r < s$, Φ-injectifs si $p + q + r = s$;

(iii) *L'homomorphisme $W^{p,q}_r(X) \to H^{p+q+r+1}(X)$*

est Φ-bijectif si $p + q + r + 1 < s$, Φ-injectif si $p + q + r + 1 = s$;

(iv) *L'homomorphisme $\Lambda^{p,q}(X) \to H^{p+q}(X)$*

est Φ-bijectif si $p + q < s$, Φ-injectif si $p + q = s$;

(v) *L'homomorphisme $V^{p,q}(X) \to H^{p+q+1}(X)$*

est Φ-bijectif si $p + q + 1 < s$, Φ-injectif $p + q + 1 = s$.

C'est encore une application immédiate des résultats du paragraphe 2

4. Cohomologie des faisceaux

De la résolution fine

$$0 \to \mathcal{O}^{p,q} \to \mathcal{A}^{p,q} \xrightarrow{d''} \mathcal{A}^{p,q+1} \xrightarrow{d''} \mathcal{A}^{p,q+2} \to \dots$$

résulte l'isomorphisme canonique

$$H^r(X, \mathcal{O}^{p,q}) \approx H^{p,q+r}_{d''}(X) \qquad \text{pour} \quad r > 0$$

généralisant celui de Dolbeault; on a de même l'isomorphisme

$$H^r(X, \bar{\mathcal{O}}^{q,p}) \approx H^{p+r,q}_{d'}(X) \qquad \text{pour} \quad r > 0.$$

De la résolution fine

$$0 \to \mathfrak{Z}^{p,q} \to \mathfrak{A}^{p,q}_0 \xrightarrow{d} \mathfrak{A}^{p,q}_1 \xrightarrow{d} \mathfrak{A}^{p,q}_2 \to \dots \to \mathfrak{A}^{p,q}_{2n-p-q-1} \xrightarrow{d} \mathfrak{A}^{p,q}_{2n-p-q} \to 0$$

(qui est une conséquence du corollaire 8) résulte l'isomorphisme canonique

$$H^r(X, \mathfrak{Z}^{p,q}) \approx H^{p,q}_r(X) \qquad \text{pour} \quad r \geq 0$$

que nous appellerons isomorphisme de Dolbeault et Bigolin.

La suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathfrak{Z}^{p,q} \to \mathcal{O}^{p,q} \xrightarrow{d'} \mathfrak{Z}^{p+1,q} \to 0$$

donne naissance à une suite exacte de cohomologie

$$\dots \to H^r(X, \mathcal{O}^{p,q}) \to H^r(X, \mathfrak{Z}^{p+1,q}) \to H^{r+1}(X, \mathfrak{Z}^{p,q}) \to H^{r+1}(X, \mathcal{O}^{p,q}) \to \dots$$

qui, compte tenu des isomorphismes de Dolbeault et de Dolbeault et Bigolin, est canoniquement isomorphe (aux signes près) à la première suite exacte du paragraphe 2.

Cela résulte de l'injection naturelle de résolutions

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathfrak{Z}^{p,q} & \longrightarrow & \mathcal{O}^{p,q} & \xrightarrow{d} & \mathfrak{A}^{p+1,q}_0 & \xrightarrow{d} & \mathfrak{A}^{p+1,q}_1 & \longrightarrow \dots \longrightarrow & \mathfrak{A}^{p+1,q}_r & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathfrak{Z}^{p,q} & \longrightarrow & \mathfrak{A}^{p,q}_0 & \xrightarrow{d} & \mathfrak{A}^{p,q}_1 & \xrightarrow{d} & \mathfrak{A}^{p,q}_2 & \longrightarrow \dots \longrightarrow & \mathfrak{A}^{p,q}_{r+1} & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

et du diagramme commutatif (ci-dessous) de résolutions, où les flèches verticales de la première à la seconde ligne sont des projections (sauf la première qui est l'injection naturelle) :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathfrak{Z}^{p,q} & \longrightarrow & \mathfrak{A}^{p,q}_0 & \xrightarrow{d} & \mathfrak{A}^{p,q}_1 & \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} & \mathfrak{A}^{p,q}_r & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}^{p,q} & \longrightarrow & \mathcal{A}^{p,q} & \xrightarrow{d''} & \mathcal{A}^{p,q+1} & \xrightarrow{d''} \dots \xrightarrow{d''} & \mathcal{A}^{p,q+r} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathfrak{Z}^{p+1,q} & \longrightarrow & \mathfrak{A}^{p+1,q}_0 & \xrightarrow{d} & \mathfrak{A}^{p+1,q}_1 & \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} & \mathfrak{A}^{p+1,q}_r & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

Vu le corollaire 8, on a la suite exacte

$$0 \to \mathcal{H}^{p,q} \to \mathcal{A}^{p,q} \xrightarrow{d'\,d''} \mathfrak{Z}^{p+1,q+1} \to 0;$$

de la suite exacte de cohomologie associée résultent des isomorphismes canoniques

$$H^1(X, \mathcal{H}^{p,q}) \approx \Lambda^{p+1,q+1}(X),$$
$$H^{r+1}(X, \mathcal{H}^{p,q}) \approx H^r(X, \mathfrak{Z}^{p+1,q+1}) \approx H_r^{p+1,q+1}(X) \qquad \text{pour} \quad r > 0.$$

La suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathfrak{Z}^{p,q} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}^{p,q} \oplus \overline{\mathcal{O}}^{q,p} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}^{p,q} \to 0,$$

où $\alpha(\varphi) = \varphi \oplus \varphi$ et $\beta(\varphi \oplus \psi) = \varphi - \psi$, donne naissance à une suite exacte de cohomologie

$$\ldots \to H^r(X, \mathcal{O}^{p,q}) \oplus H^r(X, \overline{\mathcal{O}}^{q,p}) \to H^r(X, \mathcal{H}^{p,q})$$
$$\to H^{r+1}(X, \mathfrak{Z}^{p,q}) \to H^{r+1}(X, \mathcal{O}^{p,q}) \oplus H^{r+1}(X, \overline{\mathcal{O}}^{q,p}) \to \ldots$$

qui, compte tenu des isomorphismes de Dolbeault, de Dolbeault et Bigolin, et de ceux établis ci-dessus, est canoniquement isomorphe, à des coefficients constants près, à la seconde suite exacte du paragraphe 2.

En ce qui concerne la flèche médiane, cela résulte de l'homomorphisme de résolutions

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{Z}^{p,q} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & \mathcal{O}^{p,q} \oplus \overline{\mathcal{O}}^{q,p} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"] & \mathcal{A}^{p,q} \arrow[r, "d'\,d''"] \arrow[d, "\eta"] & \mathfrak{A}_0^{p+1,q+1} \arrow[r, "d"] \arrow[d] & \mathfrak{A}_1^{p+1,q+1} \arrow[r, "d"] \arrow[d] & \ldots \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{Z}^{p,q} \arrow[r] & \mathfrak{A}_0^{p,q} \arrow[r, "d"] & \mathfrak{A}_1^{p,q} \arrow[r, "d"] & \mathfrak{A}_2^{p,q} \arrow[r, "d"] & \mathfrak{A}_3^{p,q} \arrow[r, "d"] & \ldots
\end{tikzcd}$$

où $\gamma(\varphi \oplus \psi) = \varphi + \psi$, $\eta(\varphi) = 1/2\,(d'\varphi - d''\varphi)$, la première flèche verticale est l'identité, et les autres flèches verticales sont les inclusions changées de signes. En ce qui concerne les deux autres flèches, cela résulte du diagramme commutatif de résolutions

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{Z}^{p,q} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \mathfrak{A}_0^{p,q} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\alpha"] & \mathfrak{A}_1^{p,q} \arrow[r, "d"] \arrow[d] & \ldots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}^{p,q} \oplus \overline{\mathcal{O}}^{q,p} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & \mathcal{A}^{p,q} \oplus \mathcal{A}^{p,q} \arrow[r, "d''\oplus d'"] \arrow[d, "\beta"] & \mathcal{A}^{p,q+1} \oplus \mathcal{A}^{p+1,q} \arrow[r, "d''\oplus d'"] \arrow[d] & \ldots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{H}^{p,q} \arrow[r] & \mathcal{A}^{p,q} \arrow[r, "d'\,d''"] & \mathfrak{A}_0^{p+1,q+1} \arrow[r, "d"] & \ldots \\
 & & {} \arrow[r, "d"] & \mathfrak{A}_r^{p,q} \arrow[r, "d"] \arrow[d] & \ldots \\
 & & {} \arrow[r, "d''\oplus d'"] & \mathcal{A}^{p,q+r+1} \oplus \mathcal{A}^{p+r+1,q} \arrow[r, "d''\oplus d'"] \arrow[d, "(-1)^r(d'{,}\,d'')"] & \ldots \\
 & & {} \arrow[r, "d"] & \mathfrak{A}_r^{p+1,q+1} \arrow[r, "d"] & \ldots
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales de la première à la seconde ligne (à l'exception des deux premières) sont des projections, et où

$$(-1)^r (d', d'')(\varphi \oplus \psi) = (-1)^r (d' \varphi + d'' \psi).$$

5. Cohomologie des courants

Des notions analogues aux précédentes peuvent être définies à l'aide des courants, et possèdent des propriétés analogues; on les désignera par $\tilde{\mathcal{O}}^{p,q}$, $\tilde{\mathfrak{A}}_r^{p,q}$, $\tilde{H}_r^{p,q}$, etc.

On a $\tilde{\mathcal{O}}^{p,0} = \mathcal{O}^{p,0}$, donc

$$H^r(X, \tilde{\mathcal{O}}^{p,0}) \approx H^r(X, \mathcal{O}^{p,0}) \qquad \text{et} \qquad \tilde{H}_{d''}^{p,r}(X) \approx H_{d''}^{p,r}(X)$$

pour $r \geqq 0$; on en déduit $H^r(X, \tilde{\mathcal{O}}^{p,q}) \approx H^r(X, \mathcal{O}^{p,q})$ pour $r > 0$.

On a de même $\tilde{\mathfrak{Z}}^{p,0} = \mathfrak{Z}^{p,0}$, donc

$$H^r(X, \tilde{\mathfrak{Z}}^{p,0}) \approx H^r(X, \mathfrak{Z}^{p,0}) \qquad \text{et} \qquad \tilde{H}_r^{p,0}(X) \approx H_r^{p,0}(X)$$

pour $r \geqq 0$; de façon analogue, on a $\tilde{H}_r^{0,q}(X) \approx H_r^{0,q}(X)$ pour $r \geqq 0$. Supposons que l'on ait $\tilde{H}_r^{p,q}(X) \approx H_r^{p,q}(X)$ pour un certain couple (p, q) et pour tout $r > 0$; pour $r > 0$, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_r^{p,q}(X) & \longrightarrow & H_{d''}^{p,q+r}(X) & \longrightarrow & H_r^{p+1,q}(X) & \longrightarrow & H_{r+1}^{p,q}(X) & \longrightarrow & H_{d''}^{p,q+r+1}(X) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\tilde{H}_r^{p,q}(X) & \longrightarrow & \tilde{H}_{d''}^{p,q+r}(X) & \longrightarrow & \tilde{H}_r^{p+1,q}(X) & \longrightarrow & \tilde{H}_{r+1}^{p,q}(X) & \longrightarrow & \tilde{H}_{d''}^{p,q+r+1}(X)
\end{array}$$

résulte de la première suite exacte du paragraphe 2, écrite pour les formes différentielles et pour les courants; compte tenu de l'hypothèse, et des isomorphismes déjà prouvés, toutes les flèches verticales, sauf celle du milieu, sont des isomorphismes; on a donc aussi $\tilde{H}_r^{p+1,q}(X) \approx H_r^{p+1,q}(X)$. En utilisant aussi le diagramme analogue où intervient la d'-cohomologie, on établit donc par récurrence l'isomorphisme $\tilde{H}_r^{p,q}(X) \approx H_r^{p,q}(X)$ pour $r > 0$; on en déduit

$$H^r(X, \tilde{\mathfrak{Z}}^{p,q}) \approx H^r(X, \mathfrak{Z}^{p,q}) \qquad \text{pour} \quad r > 0.$$

De la seconde suite exacte du paragraphe 2, et de l'examen direct des cas $p = 0$ et $q = 0$, on déduit de même $\tilde{\Lambda}^{p,q}(X) \approx \Lambda^{p,q}(X)$; l'isomorphisme $\tilde{W}_r^{p,q}(X) \approx W_r^{p,q}(X)$ s'obtient alors aisément pour $r \geqq 0$. De la suite exacte qui précède le corollaire 3, on déduit alors aussi

$$\tilde{V}^{p,q}(X) \approx V^{p,q}(X).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] AEPPLI (A.). — On the cohomology structure of Stein manifolds, *Proceedings of the conference on complex analysis* [Minneapolis, 1964], p. 58-70. — Berlin, Springer-Verlag, 1965.

[2] ANDREOTTI (A.) et NORGUET (F.). — Cycles of algebraic manifolds and $\partial\bar{\partial}$-cohomology, *Ann. Scuola norm. sup. di Pisa*, t. 25, 1971, p. 59-114.

[3] BIGOLIN (B.). — Gruppi di Aeppli, *Ann. Scuola norm. sup. di Pisa*, t. 23, 1969, p. 259-287.

[4] BIGOLIN (B.). — Osservazioni sulla coomologia del $\partial\bar{\partial}$, *Ann. Scuola norm. sup. di Pisa*, t. 24, 1970, p. 571-583.

[5] DOLBEAULT (P.). — Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe, I, *Annals of Math.*, t. 64, 1956, p. 83-130 (*Thèse Sc. math. Paris*, 1955).

[6] FRENKEL (J.) et NORGUET (F.). — Sur la cohomologie à coefficients complexes des variétés de Stein, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 256, 1963, p. 2988-2989.

[7] LE POTIER (J.). — Une propriété topologique des espaces q-convexes, *Bull. Soc. math. France*, t. 98, 1970, p. 319-328.

[8] SERRE (J.-P.). — Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens, *Annals of Math.*, t. 58, 1953, p. 258-294.

[9] SERRE (J.-P.). — Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein, *Colloque sur les fonctions de plusieurs variables* [Bruxelles, 1953], p. 57-68. — Liège, G. Thone; Paris, Masson, 1953 (*Centre belge de Recherches mathématiques*).

[10] SORANI (G.). — Homologie des q-paires de Runge, *Ann. Scuola norm. sup. di Pisa*, t. 17, 1963, p. 319-332.

[11] SORANI (G.) and VILLANI (V.). — q-complete spaces and cohomology, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 125, 1966, p. 432-448.

(Texte reçu le 5 juin 1971,
complété le 6 juin 1972.)

François NORGUET,
U. E. R. de Mathématiques,
Université de Paris 7,
2, place Jussieu,
75230 Paris-Cedex 05.