

BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-JACQUES RISLER

Sur les déformations équisingulières d'idéaux

Bulletin de la S. M. F., tome 101 (1973), p. 3-16

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1973__101__3_0

© Bulletin de la S. M. F., 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES DÉFORMATIONS ÉQUISINGULIÈRES D'IDÉAUX

PAR

JEAN-JACQUES RISLER

RÉSUMÉ. — Si I est un idéal primaire de l'anneau $k[[x, y]]$, on définit l'arbre des points infiniment voisins de I , et on montre une formule reliant la multiplicité de I aux ordres des points infiniment voisins. On montre ensuite qu'une famille de tels idéaux est équisingulière si, et seulement si, les arbres des divers éléments de la famille sont égaux. On introduit enfin la notion d'élément général d'un idéal, ce qui permet de relier l'équisingularité d'une famille d'idéaux à l'équisingularité de courbes planes.

Introduction

Dans son article sur les déformations équisingulières des idéaux jacobiens de courbes planes, F. PHAM utilise une notion de « familles équisingulières d'idéaux plans », notion qui généralise l'équisingularité pour les courbes planes étudiée par ZARISKI.

Le but de ce travail est d'essayer de donner des critères algébriques d'équisingularité pour des idéaux, analogues aux critères de Zariski pour les courbes. Ces critères permettent de mieux comprendre la différence entre la trivialité (topologique) d'une famille de courbes et « l'équisingularité universelle », ou « équisingularité stable » (cf. PHAM [6]) : moyennant le théorème de J. P. HENRY, on verra en effet que si une famille F de courbes planes est stablement équisingulière, toutes les familles d'idéaux définies par les extensions jacobiniennes critiques itérées de K sont équisingulières.

Les problèmes étudiés sont de nature locale et algébrique. Sauf pour les propriétés qui utilisent les résultats de ZARISKI sur l'équisingularité, la caractéristique 0 n'est pas indispensable. Cependant, pour des raisons de facilité d'exposition, et pour rester dans l'esprit des articles de F. PHAM nous emploierons le langage de la géométrie analytique complexe dès qu'il sera question de déformations.

1. Éclatements et multiplicités dans les anneaux locaux

Soit A un anneau local noëthérien de dimension 1, de Cohen-Macaulay et de corps résiduel algébriquement clos. Soient I et J deux idéaux primaires pour l'idéal maximal, et \tilde{S} l'éclaté de $S = \text{spec}(A)$ avec pour centre l'idéal J . Posons

$$\nu = \nu_J(I) = \sup \{ n \mid I \subset J^n \} \quad \text{et} \quad I_1 = D^{-\nu} I \mathcal{O}_{\tilde{S}}$$

(I_1 est le transformé faible de I) avec $D = J \mathcal{O}_{\tilde{S}}$.

On sait que \tilde{S} est affine, spectre d'un anneau semi-local B fini sur A (cf. ZARISKI [10], proposition 6.1, p. 998); le support de I_1 est donc fini, et l'on peut parler de la multiplicité de I , que nous noterons $e_{\tilde{S}}(I)$ [$e_{\tilde{S}}(I_1)$ est la somme des multiplicités de I_1 aux points de son support].

Notons $e_A(I)$ la multiplicité de l'idéal I dans A [en suivant la notation de NAGATA [3]; J.-P. SERRE dans *Algèbre locale. Multiplicités*, note ce nombre $e_I(A)$, et l'appelle la multiplicité de A pour l'idéal I]. On a alors :

PROPOSITION 1. — $e_A(I) = \nu e_A(J) + e_{\tilde{S}}(I_1)$.

Démonstration. — A étant de Cohen-Macaulay, il existe un élément $f \in I$ non diviseur de 0 dans A et tel que $e_A(I) = l(A/(f))$, l désignant la longueur du A -module $A/(f)$. On a alors $l(A/(f)) = l(B/fB)$ grâce à un raisonnement classique valable parce que B est fini sur A : on a

$$l(B/fA) = l(B/fB) + l(fB/fA) \quad \text{et} \quad l(B/fA) = l(B/A) + l(A/fA).$$

Mais $l(fB/fA) = l(B/A)$ puisque f est non diviseur de 0 dans A , et donc dans B , d'où le résultat.

Posons dans B : $f_1 = D^{-\nu} f$; il vient

$$l(A/fA) = l(B/fB) = l(B/D^{\nu} f_1) = \nu l(B/D) + l(B/(f_1)).$$

Comme $(D) = JB$ est principal et que B est de Cohen-Macaulay, on a

$$l(B/D) = e_B((D)) = e_B(JB).$$

(Remarquons que les longueurs sur B sont égales aux longueurs sur A , les corps résiduels de ces anneaux étant les mêmes.) Mais $e_B(JB) = e_A(J)$ (« formule de projection »; cf. par exemple : SAMUEL, *Algèbre locale*), ceci parce que le corps résiduel de A est algébriquement clos.

Comme d'autre part $f_1 \in I_1$, on a $l(B/(f_1)) = e_B(f_1) \geq e_B(I_1)$, ce qui donne finalement :

$$e_A(I) = l(A/fA) = \nu e_A(J) + l(B/(f_1)) \geq \nu e_A(J) + e_B(I_1).$$

Pour obtenir l'inégalité inverse, prenons un élément $g_1 \in I_1$ tel que $l(B/(g_1)) = e_B(I_1)$, et posons $g = D^\nu g_1$: on a alors $g \in I$, d'où de même :

$$e_A(I) \leq l(A/gA) = l(B/gB) = \nu e_A(J) + e_B(I_1).$$

Remarque. — La formule de la proposition 1 est encore valable en remplaçant ν par un nombre $\nu' \leq \nu$ à condition de remplacer I_1 par $D^{-\nu'} I \mathcal{O}_S$.

COROLLAIRE 1. — Soient R un anneau local régulier de dimension 2 et de corps résiduel algébriquement clos, I un idéal primaire pour l'idéal maximal M . Posons $\nu = \nu_M(I)$, et $I_1 = D^{-\nu} I \mathcal{O}_S$, S étant l'éclaté de $\text{Spec } R$ avec pour centre le point fermé, et $D = M \mathcal{O}_S$ étant le diviseur exceptionnel.

Alors le support de I_1 est fini dans S , ce qui permet de parler de la multiplicité $e_S(I_1)$, et on a la formule

$$e_R(I) = \nu^2 + e_S(I_1).$$

Démonstration. — Soit $f \in I$ un élément « superficiel », i. e. tel que $e_R(I) = e_{R/(f)}(I/(f))$, et tel que $\nu_M(f) = \nu$. (Il existe toujours un tel élément car le corps résiduel de R est infini; cf. par exemple [3].) R étant régulier, l'éclaté de $R/(f)$, avec pour centre le point fermé, s'identifie au sous-schéma fermé \bar{S} de S défini par la « transformée stricte de f », c'est-à-dire par l'équation $f_1 = D^{-\nu} f$.

Appliquons la proposition 1 à l'anneau $A = R/(f)$ et aux idéaux $\bar{I} = I/(f)$ et $\bar{M} = M/(f)$; puisque $\nu_M(I) = \nu$, on a $\nu_{\bar{M}}(\bar{I}) \geq \nu$, donc $\bar{I}_1 = D^{-\nu} \bar{I} \mathcal{O}_{\bar{S}}$ est un idéal de $\mathcal{O}_{\bar{S}}$ (de support fini); mais $\bar{I}_1 = I_1/(f_1)$, donc I_1 est aussi de support fini.

D'après la remarque qui suit la proposition 1, on peut écrire :

$$e_R(I) = e_A(\bar{I}) = \nu e_A(\bar{M}) + e_{\bar{S}}(\bar{I}_1) = \nu^2 + e_{\bar{S}}(\bar{I}_1),$$

d'où $e_R(I) \geq \nu^2 + e_S(I_1)$, car $e_{\bar{S}}(\bar{I}_1) \geq e_S(I_1)$ puisque $\bar{I}_1 = I_1/(f_1)$.

Pour avoir l'inégalité inverse, on raisonne comme dans la proposition 1; on remarque, en effet, que comme le support de I_1 est fini, il existe un élément $g_1 \in I_1$ tel que $e_S(I_1) = e_S(I_1/(g_1))$, et tel que $g_1 \notin M \mathcal{O}_S = (D)$ (S' est le sous-schéma de S défini par g_1).

Posons $g = D^\nu g_1$; on a $g \in I$ et $\nu_M(g) = \nu$ [car $g \in M^{\nu+1}$ entraînerait $g_1 \in (D)$].

La proposition 1 montre alors que

$$e_{R/(g)}(I/(g)) = \nu^2 + e_S(I_1),$$

d'où le résultat puisque $e_R(I) \leq e_{R/(g)}(I/(g))$.

Remarque. — On pourrait aussi démontrer le corollaire 1 sans la proposition 1, en employant la formule « bien connue » suivante : soient f et g deux éléments de R , f_1 et g_1 leurs transformés stricts dans \mathcal{O}_S ; on a alors :

$$e_R(f, g) = \nu_M(f) \nu_M(g) + e_S(f_1, g_1).$$

A chaque point P_1^i du support de I_1 correspond un entier $\nu_1^i = \nu_{P_1^i}(I_1)$; on peut faire éclater successivement ces points, prendre les transformés faibles de I_1 , et recommencer éventuellement l'opération : on trouvera ainsi des points P_2^j et des entiers ν_2^j , etc.

On peut représenter ces points P_i^j par les sommets d'un arbre, P_i^j étant relié à P_{i-1}^k s'il se projette sur P_{i-1}^k dans l'éclatement de centre P_{i-1}^k (P_0 représente le point fermé de R). Nous appellerons cet arbre *l'arbre des points infiniment voisins de I* .

COROLLAIRE 2. — *L'arbre des points infiniment voisins de I est fini, et si ν_i sont les entiers attachés aux sommets de cet arbre, on a la formule*

$$e_R(I) = \sum \nu_i^2.$$

Cela résulte immédiatement du corollaire 1 par récurrence.

Remarques :

1° Dans chaque branche de l'arbre, la suite des ν_i correspondants est *décroissante*. Cela résulte par exemple de [1], p. 217, ou peut facilement être montré directement.

2° On peut, avec la proposition 1, montrer aussi le résultat suivant, déjà montré par moi-même mais de manière plus compliquée [8] : soient R un anneau local régulier, f_1, \dots, f_p une suite régulière d'éléments de l'idéal maximal; posons $\nu_i = \nu_M(f_i)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- (a) $e(R/(f_1, \dots, f_p)) = \nu_1 \dots \nu_p$;
- (b) la suite $(\text{in}_M(f_i))$ est régulière dans $\text{gr}_M(R)$.

2. Déformations équisingulières d'idéaux plans

Rappelons d'abord deux définitions de F. PHAM :

DÉFINITION 1. — Une famille (\mathcal{J}, π) à un paramètre d'idéaux plans est un couple (\mathcal{J}, π) , où \mathcal{J} est un idéal sur espace analytique lisse Z à 3 dimensions, et $\pi : Z \rightarrow T$ un morphisme analytique lisse de Z sur un ouvert de \mathbf{C} contenant l'origine.

Nous supposons de plus que π restreint au support de \mathcal{J} est *fini* (donc *propre*).

DÉFINITION 2. — Notons $|\mathcal{J}|$ le support (réduit) d'un idéal \mathcal{J} dans Z . La famille (\mathcal{J}, π) est dite équisingulière s'il existe un entier r tel que la suite de conditions (0), (1), ..., (r) suivantes soit satisfaite :

- (0) $\pi \mid |\mathcal{J}|$ est un morphisme lisse (i. e. $|\mathcal{J}|$ est une courbe lisse étale au-dessus de T).
- (1) Soient $\varepsilon_1 : Z_1 \rightarrow Z$ l'éclatement ayant pour centre une composante irréductible $|\mathcal{J}|$, et \mathcal{J}_1 le transformé faible de \mathcal{J} . Alors le morphisme $(\pi \circ \varepsilon_1) \mid |\mathcal{J}_1|$ est lisse.
- ⋮
- (r) Soit $\varepsilon_r : Z_r \rightarrow Z_{r-1}$ l'éclatement de centre $|\mathcal{J}_{r-1}|$. Alors le transformé faible de \mathcal{J}_r est l'idéal (1) de $\mathcal{O} Z_r$ (et son support est vide).

On dira que $\varepsilon = \varepsilon_1 \circ \dots \circ \varepsilon_r$ est une *résolution* de la famille (\mathcal{J}, π) .

Remarques :

1° La situation qui nous intéresse est locale sur T . On dira donc plus généralement que la famille (\mathcal{J}, π) est équisingulière, si les propriétés de la définition 2 sont réalisées pour un ouvert U de T contenant 0 arbitrairement petit [et pour l'idéal $\mathcal{J} \mid \pi^{-1}(U)$].

2° Comme pour $t \in T$ (T étant supposé assez petit) \mathcal{J}_t est de support fini dans Z_t , on peut faire correspondre à chaque \mathcal{J}_t son arbre des points infiniment voisins, et à chaque sommet de cet arbre un entier $\nu_{i,t}$ tel que $e_{Z_t}(\mathcal{J}_t) = \sum \nu_{i,t}$.

La notion d'égalité (ou d'isomorphisme) de deux tels arbres est évidente.

3° Dans le cas où l'on ne suppose plus le support de \mathcal{J}_0 fini, la définition d'une famille équisingulière d'idéaux s'énonce en remplaçant le transformé faible par le transformé total, et le support par le « support singulier ». La dernière condition s'énonce alors : $\mathcal{J} \mathcal{O}_{Z_r}$ est résolu (i. e. est un « diviseur à croisements normaux ») (cf. [4]).

Lorsque \mathcal{J}_0 est l'équation d'une courbe plane réduite, on retrouve le critère d'équisingularité de Zariski par éclatements ([10], p. 1002). On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 2. — Soit (\mathcal{J}, π) une famille à un paramètre d'idéaux plans telle que π restreint à $|\mathcal{J}|$ soit fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) La famille est équisingulière;
- (b) Les arbres (et les entiers correspondants) de \mathcal{J}_0 et de \mathcal{J}_t sont égaux pour t assez petit.

Montrons que (a) \Rightarrow (b).

Comme le support (réduit) de \mathcal{J} est étale au-dessus de T par hypothèse, il y a une bijection canonique entre les points du support de \mathcal{J}_0 et ceux

du support de \mathcal{J}_t (pour t assez petit). Montrons que les entiers ν_i correspondants sont les mêmes : faisons éclater la première composante irréductible de $|\mathcal{J}|$, et soit \mathcal{J}_1 le transformé faible de \mathcal{J} . Si $S_1 \xrightarrow{\varepsilon_1} Z$ est cet éclatement, on a, par définition :

$$\mathcal{J}\mathcal{O}_{S_1} = D_1^{\nu_1} \mathcal{J}_1.$$

En restreignant aux fibres, on obtient les égalités

$$\mathcal{J}_0 \mathcal{O}_{S_{1,0}} = D_{1,0}^{\nu_1} \mathcal{J}_{1,0} \quad \text{et} \quad \mathcal{J}_t \mathcal{O}_{S_{1,t}} = D_{1,t}^{\nu_1} \mathcal{J}_{1,t}.$$

Mais comme par hypothèse le support de \mathcal{J}_1 est étale sur T , $\mathcal{J}_{1,0}$ et $\mathcal{J}_{1,t}$ sont de support fini, ce qui montre que les entiers $\nu_{1,0}$ et $\nu_{1,t}$ (correspondant au premier sommet de l'arbre de \mathcal{J}_0 et \mathcal{J}_t) sont égaux à ν_1 .

Mais d'après la définition 2, la famille $(\mathcal{J}_1, \pi \circ \varepsilon_1)$ est une famille équi-singulière d'idéaux dans S_1 : on peut recommencer le même raisonnement, et montrer ainsi par récurrence que les arbres de \mathcal{J}_0 et de \mathcal{J}_t sont égaux.

Montrons que (b) \Rightarrow (a).

1° Montrons d'abord que le support de \mathcal{J} est étale au-dessus de T . Le support de \mathcal{J} est un ensemble analytique réduit de dimension 1 (puisque'il est fini sur T par hypothèse) : il faut d'abord voir qu'il n'a pas de points isolés (nécessairement au-dessus de 0). Cela va résulter de l'hypothèse (b) : comme les arbres de \mathcal{J}_0 et \mathcal{J}_t sont égaux et que les entiers ν_i correspondants sont les mêmes, les multiplicités $e_{Z_0}(\mathcal{J}_0)$ et $e_{Z_t}(\mathcal{J}_t)$ sont égales d'après le corollaire 2.

Soient $(P_1, \dots, P_n, \dots, P_m)$ les points du support de \mathcal{J}_0 , les points (P_{n+1}, \dots, P_m) étant des points isolés du support de \mathcal{J} . La multiplicité de \mathcal{J}_0 est la somme des multiplicités aux points de son support, ce que nous noterons :

$$e_{Z_0}(\mathcal{J}_0) = \sum_{i=1}^m e_{P_i}(\mathcal{J}_0).$$

Or on a

$$\sum_{i=1}^n e_{P_i}(\mathcal{J}_0) \geq e_{Z_t}(\mathcal{J}_t)$$

(pour t assez petit), car la multiplicité, qui se calcule avec le polynôme de Hilbert-Samuel, donc avec la longueur de modules cohérents, *augmente par spécialisation*.

L'égalité $e_{Z_0}(\mathcal{J}_0) = e_{Z_t}(\mathcal{J}_t)$ implique alors que $e_{P_i}(\mathcal{J}_0) = 0$ pour $i \geq n + 1$, donc que les points P_i (pour $i \geq n + 1$) ne sont pas dans le support de \mathcal{J} : nous arrivons à une absurdité, ce qui montre qu'il n'y a pas de point isolé dans le support de \mathcal{J} .

Mais, au-dessus d'un ouvert de T assez petit et ne contenant pas l'origine, le morphisme π restreint à $|\mathcal{J}|$ est *étale* (car π est étale au-dessus du complémentaire d'un fermé analytique); il s'ensuit que la fibre $|\mathcal{J}|_t$ est un nombre fini n de points *fermés* (i. e. est réduite).

Par hypothèse, le nombre de points de $|\mathcal{J}|_0$ est aussi n ; comme le morphisme $\pi \mid |\mathcal{J}|$ est plat (cf. le lemme 1), il s'ensuit que ces points sont fermés (car la dimension de la fibre est constante), et donc que $|\mathcal{J}|$ est étale au-dessus de T , en vertu du lemme bien connu suivant :

LEMME 1. — Soit C une courbe réduite purement de dimension 1, et soit $\pi : C \rightarrow T$ un morphisme fini. Alors :

1° π est plat;

2° les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) la fibre $\pi^{-1}(0)$ est réduite (et est donc un nombre fini de points fermés);

(b) C est étale (au-dessus d'un voisinage de l'origine dans T).

2° Énonçons un autre lemme

LEMME 2. — Soient Z un espace analytique lisse de dimension 3, $\pi : Z \rightarrow T$ un morphisme lisse sur un voisinage de l'origine dans \mathbf{C} , et \mathcal{J} un idéal cohérent dont le support est isomorphe à T (par π).

Alors $\nu_0(\mathcal{J}) \geq \nu_t(\mathcal{J})$ pour t assez petit.

Revenons à la démonstration de la proposition 2; le fait que $|\mathcal{J}|$ soit étale au-dessus de T donne une bijection des sommets de l'arbre de \mathcal{J}_0 correspondant aux points du support de \mathcal{J}_0 , sur les sommets analogues de l'arbre de \mathcal{J}_t . Les entiers ν_i attachés aux sommets qui se correspondent par cette bijection sont alors égaux, à cause de l'hypothèse (b) (affirmant qu'il existe une bijection entre ces entiers) et du lemme 2 qui dit que ces entiers augmentent par spécialisation.

Si maintenant on fait éclater une des composantes irréductibles de \mathcal{J} , et si \mathcal{J}_1 est le transformé faible de \mathcal{J} , on a

$$\mathcal{J}\mathcal{O}_{S_1} = D^{\nu_1} \mathcal{J}_1$$

(où D est le diviseur exceptionnel de l'éclatement $\varepsilon_1 : S_1 \rightarrow Z$) avec $\nu_1 = \nu_{1,0} = \nu_{1,t}$ d'après le lemme 2.

Il s'ensuit que $\mathcal{J}_{1,0}$ et $\mathcal{J}_{1,t}$ sont de support fini (puisque ce sont les transformés faibles de \mathcal{J}_0 et \mathcal{J}_t), et donc que l'idéal \mathcal{J}_1 vérifie les mêmes hypothèses que l'idéal \mathcal{J} : on peut ainsi montrer de la même manière que $|\mathcal{J}_1|$ est étale au-dessus de T , et par récurrence montrer la condition (a).

C. Q. F. D.

Remarque. — Comme pour les idéaux de support fini, on peut définir l'arbre des points infiniment voisins d'une courbe algébroïde plane. Cet arbre est cette fois infini, les branches infinies correspondant à partir d'un certain rang à des points lisses.

Une des définitions de ZARISKI pour l'équivalence de deux courbes algébroides planes [la « (a)-équivalence » : [9], p. 511] est justement

l'égalité des arbres des points infiniment voisins des deux courbes (avec l'égalité des ν_i correspondants).

La proposition 2 est donc une généralisation directe du théorème de Zariski qui dit qu'une famille de courbes planes est équisingulière si, et seulement si, la fibre spéciale et la fibre générique sont (a)-équivalentes.

COROLLAIRE 3. — Soit le germe de Z à l'origine, et soit

$$F \in \mathcal{O}_S = \mathbf{C} \{ X, Y, T \}$$

une équation qui soit une famille de courbes planes, le morphisme π étant ici la projection sur l'axe des T (i. e. l'idéal F_t est réduit et non trivial pour t assez petit). Soit $\mathcal{J} = (F, F'_X, F'_Y)$ « l'idéal jacobien » de F . Alors si la famille d'idéaux \mathcal{J} est équisingulière (au sens de la définition 2), la famille F de courbes planes est équisingulière (au sens classique : cf. ZARISKI [9] et la remarque 3 plus haut).

Remarque. — C'est le « théorème d'équisingularité jacobienne » démontré par voie topologique par F. PHAM ([4], p. 226).

Démonstration. — Si la famille \mathcal{J} est équisingulière, la multiplicité de \mathcal{J}_t est constante pour t petit (corollaire 2) ainsi que l'entier ν . Or $\nu(J_0) = n_0 - 1$ [resp. $\nu(J_t) = n_t - 1$] où n_0 (resp. n_t) est la multiplicité à l'origine de la courbe F_0 (resp. F_t). La formule $\Delta_t = e(J_t) + n_t - 1$ où Δ_t est l'ordre du discriminant de F_t (cf. par exemple [7]) montre alors que $\Delta_0 = \Delta_t$, donc que la famille est équisingulière par le critère de ZARISKI [9].

C. Q. F. D.

3. Déformations et éléments généraux

Soient Z un espace analytique, \mathcal{J} un faisceau cohérent d'idéaux sur Z de type fini, engendré par f_1, \dots, f_p . On appellera élément général de \mathcal{J} , tout élément de la forme

$$\varphi = \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i$$

avec $\lambda_i \in \mathbf{C}$, le point $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ étant astreint à être dans un ouvert dense de \mathbf{C}^p , ouvert qui ne dépend que de \mathcal{J} , mais qui peut varier suivant la question traitée : il sera donc précisé (ou sous-entendu) par le texte dans chaque cas.

Exemple. — Soit \mathcal{J} un idéal primaire de l'anneau $R = \mathbf{C} \{ z_1, \dots, z_n \}$. Si φ est un élément général de \mathcal{J} , alors

$$e_R(\mathcal{J}) = e_{R/(\varphi)}(\mathcal{J}/(\varphi)),$$

$e_R(\mathcal{J})$ désignant la multiplicité de \mathcal{J} . En recommençant avec $\mathcal{J}/(\varphi)$, on trouve ainsi que si $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont n éléments généraux de \mathcal{J} ,

$$e_R(\mathcal{J}) = e_R((\varphi_1, \dots, \varphi_n))$$

(ici, l'ouvert dense correspondant à φ_i dépend de $\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}$).

On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 3. — Soit (\mathcal{J}, π) une famille à un paramètre d'idéaux plans (cf. la définition 1), où \mathcal{J} est de type fini. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) la famille (\mathcal{J}, π) est équisingulière;

(b) $e(\mathcal{J}_0) = e(\mathcal{J}_t)$ pour t assez petit [\mathcal{J}_0 et \mathcal{J}_t désignant les restrictions de \mathcal{J} aux fibres $\pi^{-1}(0)$ et $\pi^{-1}(t)$], et $e(\mathcal{J}_0)$ la somme des multiplicités de \mathcal{J}_0 aux points de son support] et si φ est un élément général de \mathcal{J} , la famille (φ) est une famille équisingulière de courbes planes au voisinage de chaque point du support de \mathcal{J}_0 .

Remarques :

1° Si \mathcal{J} est engendré par f_1, \dots, f_p , la condition (b) signifie qu'il existe un ouvert dense U de \mathbf{C}^p tel que si $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in U$ et si

$$\varphi = \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i,$$

on ait :

(α) φ_t est réduit pour t assez petit (et pour $t = 0$);

(β) la famille (φ) est une famille équisingulière d'idéaux (cf. la remarque qui suit la définition 2).

2° Il est clair que cette proposition est fautive si φ n'est pas assez général dans \mathcal{J} : dans l'anneau $\mathbf{C}\{x, y, t\}$, prenons $\varphi = y^3 + tx^3y + x^{11}$ et $\mathcal{J} = (\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi)$; la famille (φ) est équisingulière, alors que la famille (\mathcal{J}) ne l'est pas [bien que $e(\mathcal{J}_0) = e(\mathcal{J}_t) = 20$].

Cela signifie que le point $(0, 0, 1)$ n'est pas dans l'ouvert dense de \mathbf{C}^3 dont la proposition 3 assure l'existence.

LEMME 3. — Soient S un espace analytique lisse de dimension 2, \mathcal{J} un idéal sur S de type fini et de support fini, $\varepsilon : Z \rightarrow S$ une résolution de \mathcal{J} (par r éclatements ponctuels).

Posons $\mathcal{J}_{\mathcal{O}_Z} = D_1^{y_1} \dots D_r^{y_r} \mathcal{O}_Z$, où les D_i sont des diviseurs lisses (images dans \mathcal{O}_Z des diviseurs exceptionnels des éclatements de la résolution ε). Alors si φ est un élément général de \mathcal{J} , on a $\varphi_{\mathcal{O}_Z} = D_1^{y_1} \dots D_r^{y_r} \tilde{\varphi}$, où $\tilde{\varphi}$ est l'équation d'une courbe lisse dans un voisinage convenable des points qui se projettent par ε sur les points du support de \mathcal{J} (ce lemme est donc en fait un lemme sur les germes aux points du support de \mathcal{J}).

Nous allons démontrer ce lemme par récurrence sur r .

(α) $r = 1$. — On a alors $\mathcal{J}\mathcal{O}_Z = D_1^{\nu_1}\mathcal{O}_Z$; le support de \mathcal{J} est nécessairement réduit à un seul point P , $\varepsilon : Z \rightarrow S$ étant l'éclatement de centre P . Prenons des coordonnées ayant P pour origine : \mathcal{J} est alors engendré par (f_1, \dots, f_p) avec $f_i \in \mathbf{C}\{x, y\}$.

Posons $\varphi = \sum \lambda_i f_i$ ($\lambda_i \in \mathbf{C}$) et $\tilde{\varphi} = \sum \lambda_i \tilde{f}_i$ avec $f_i = D_1^{\nu_1} \tilde{f}_i$ dans \mathcal{O}_Z . Il existe un ouvert dense U_1 de \mathbf{C}^p tel que $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbf{C}^p \Rightarrow \tilde{\varphi}$ non divisible par D_1 [i. e. $\text{in}_M(\varphi)$ est de degré ν_1] : il suffit d'écrire que $\sum \lambda_i f_i$ n'est pas nul modulo M^{ν_1+1} (M étant l'idéal maximal de $\mathbf{C}\{x, y\}$). Le support de l'idéal $(\tilde{\varphi}, D_1)$ est alors fini, contenu dans une carte affine de l'éclatement ε que l'on peut supposer être définie par le changement de variables : $x = x', y = y'$; l'équation de D_1 est alors x' , et l'intersection de D_1 et de la courbe $\tilde{\varphi}$ est donnée par $\sum \lambda_i \tilde{f}_i(0, y') = 0$, qui est une équation polynômiale de degré $\leq \nu_1$ en y' .

Mais l'hypothèse $\mathcal{J}\mathcal{O}_Z = D_1^{\nu_1}\mathcal{O}_Z$ entraîne que les $\tilde{f}_i(0, y')$ ($i = 1, \dots, p$) n'ont pas de racine commune; il en résulte qu'il existe dans \mathbf{C}^p un ouvert dense U_2 tel que si $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in U_2$, l'équation $\sum \lambda_i \tilde{f}_i(0, y')$ a toutes ses racines distinctes : le fait que les $\tilde{f}_i(0, y')$ n'aient pas de racine commune implique en effet que le polynôme $\sum \lambda_i \tilde{f}_i(0, y')$ est irréductible dans l'anneau $\mathbf{C}[\lambda_1, \dots, \lambda_p, y']$, donc sans facteur multiple. Cela implique que la restriction de la projection canonique : $\mathbf{C}^{p+1} \rightarrow \mathbf{C}^p$ [définie par $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, y') \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$] à l'hypersurface d'équation

$$\sum \lambda_i \tilde{f}_i(0, y') = 0$$

est étale au-dessus du point générique de \mathbf{C}^p : elle est donc étale au-dessus d'un ouvert de Zariski (donc dense) de \mathbf{C}^p . $\tilde{\varphi}$ est alors étale au-dessus de l'axe des x' dans un voisinage de l'origine (lemme 1), donc lisse dans ce voisinage, ce qui démontre le lemme 3 dans ce cas.

(β) r quelconque. — Supposons \mathcal{J} engendré par (f_1, \dots, f_p) ; on a

$$\mathcal{J}\mathcal{O}_Z = D_1^{\nu_1} \dots D_r^{\nu_r} \mathcal{O}_Z$$

et

$$\varphi \mathcal{O}_Z = D_1^{\nu_1} \dots D_r^{\nu_r} \tilde{\varphi}, \quad \text{avec } \varphi = \sum \lambda_i f_i.$$

Soit S_{r-1} l'avant-dernier éclaté de la résolution ε : posons

$$\mathcal{J}\mathcal{O}_{S_{r-1}} = D_1^{\nu_1} \dots D_{r-1}^{\nu_{r-1}} (\mathcal{J}_{r-1})$$

et

$$\varphi \mathcal{O}_{S_{r-1}} = D_1^{\nu_1} \dots D_{r-1}^{\nu_{r-1}} \varphi_{r-1}.$$

Comme \mathcal{J}_{r-1} est résolu par un seul éclatement ε_r , son support est réduit à un seul point P . En appliquant (α), on voit que si φ est assez général dans \mathcal{J} , $\tilde{\varphi}$ est lisse au voisinage des points de son support qui se projettent en P par ε_r . Au voisinage des autres points en question du support

de $\tilde{\varphi}$, i. e. ceux qui se projettent sur les points du support de \mathcal{J} par ε et qui sont en nombre fini si φ est assez général [comme pour le cas (α)], l'éclatement ε_r est un isomorphisme de Z sur S_{r-1} : on peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence.

C. Q. F. D.

Montrons maintenant que (a) \Rightarrow (b) dans la proposition 3. — Il est d'abord clair, à cause de la proposition 2 et du corollaire 2, que si (\mathcal{J}, π) est une famille équisingulière d'idéaux, $e(\mathcal{J}_0) = e(\mathcal{J}_t)$ pour t assez petit. Il suffit donc de montrer que, pour φ assez général dans \mathcal{J} , la famille (φ, π) est une famille équisingulière de courbes planes.

Montrons d'abord que pour φ assez général dans \mathcal{J} , la courbe φ_0 [restriction de φ à $\pi^{-1}(0)$] est réduite : on est ramené à montrer que si $I \subset \mathbf{C}\{x, y\}$ est un idéal primaire, un élément général de I est sans facteur multiple. C'est un raisonnement analogue à celui de la fin du lemme 3 : si I est engendré par f_1, \dots, f_p , l'élément $\varphi = \sum \lambda_i f_i$ (avec $\lambda_i \in \mathbf{C}$) est réduit dans l'anneau $\mathbf{C}\{x, y\} [\lambda_1, \dots, \lambda_p]$, donc « génériquement réduit », donc réduit pour $(\lambda_i, \dots, \lambda_p)$ dans un ouvert dense de \mathbf{C}^p . D'autre part, l'ensemble des points $t \in T$ pour lesquels φ_t est réduite est un ouvert : φ_t donc réduite pour tout t assez petit.

Nous supposons donc que φ est assez général pour que φ_0 soit réduite, et pour que φ_0 satisfasse au lemme 3.

On peut alors, par hypothèse, trouver une suite de r éclatements à centres lisses telle que si S_i est le $i^{\text{ème}}$ éclaté, on ait

$$\mathcal{J} \circ_{S_r} = D_1^{\gamma_1} \dots D_r^{\gamma_r} \circ_{S_r}.$$

On a alors $\varphi \circ_S = D_1^{\gamma_1} \dots D_r^{\gamma_r} \tilde{\varphi}$, et $\tilde{\varphi}_0$ est lisse d'après le lemme 3. On en déduit que $\tilde{\varphi}$ est un diviseur lisse sur S_r (toujours au-dessus d'un voisinage convenable de 0 dans T). Pour montrer que (φ) est une famille équisingulière de courbes planes, il suffit maintenant de montrer que si φ_i est la transformée stricte de φ_{i-1} par le $i^{\text{ème}}$ éclatement, le lieu singulier de φ_i est étale sur T (cf. la remarque qui suit la définition 2).

Montrons par exemple que le lieu singulier de φ est étale sur T (la démonstration sera la même pour tous les φ_i puisque la famille \mathcal{J} est équisingulière).

Remarquons d'abord que le lieu singulier de φ est contenu dans le support $|\mathcal{J}|$ de \mathcal{J} , puisque en dehors de $|\mathcal{J}|$, φ est isomorphe à $\tilde{\varphi}$ et que nous avons vu que $\tilde{\varphi}$ était lisse.

Soit S une composante irréductible de $|\mathcal{J}|$ (S est étale sur T). Pour tout point p dans un ouvert convenable de S , l'entier $\nu_p(\mathcal{J})$ a la même valeur (proposition 2) :

— si $\nu_p(\mathcal{J}) > 1$ pour $p \in S$, on a $\nu_p(\varphi) > 1$ pour tout $p \in S$, donc S fait partie du lieu singulier de φ ;

— si $\nu_p(\mathcal{J}) = 1$ pour $p \in S$, le fait que φ soit général dans \mathcal{J} (i. e. que φ_0 satisfasse aux hypothèses du lemme 3) implique que $\nu_p(\varphi) = 1$, donc qu'aucun point de S ne fait partie du lieu singulier de φ .

C. Q. F. D.

Démonstration de (b) \Rightarrow (a) dans la proposition 3. — Par hypothèse, un élément φ de \mathcal{J} suffisamment général est une famille équisingulière de courbes planes : pour montrer que \mathcal{J} est une famille équisingulière d'idéaux, il suffit, d'après la proposition 2, de montrer que l'arbre de \mathcal{J}_0 est égal à l'arbre de \mathcal{J}_t pour t petit.

Or le lemme 3 dit en fait que si I est un idéal primaire de l'anneau $\mathbf{C}\{x, y\}$ et si φ est assez général dans I , l'arbre des points infiniment voisins de ψ s'obtient en prolongeant celui de I par des branches infinies de points lisses; comme par hypothèse les arbres de φ_0 et de φ_t sont égaux pour t assez petit, on voit ainsi que les parties des arbres de \mathcal{J}_0 et \mathcal{J}_t correspondant aux entiers ν_i qui sont > 1 sont égales (ainsi que les ν_i correspondants).

Mais l'hypothèse $e(\mathcal{J}_0) = e(\mathcal{J}_t)$ et la formule $e(\mathcal{J}_t) = \sum \nu_i^2$ (corollaire 2) impliquent que les sommets de l'arbre de \mathcal{J}_t sont en nombre égal à ceux de l'arbre de \mathcal{J}_0 . Comme à chaque sommet de l'arbre de \mathcal{J}_t correspond par spécialisation un sommet de l'arbre de \mathcal{J}_0 , ceci implique que les arbres de \mathcal{J}_0 et \mathcal{J}_t sont égaux.

C. Q. F. D.

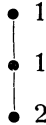
Remarques :

1° L'exemple suivant, qui m'a été communiqué par F. PHAM, montre que l'hypothèse $e(\mathcal{J}_0) = e(\mathcal{J}_t)$ est indispensable dans la proposition 3 : soit $\mathcal{J} \subset \mathbf{C}\{x, y, t\}$, engendré par

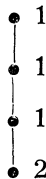
$$\begin{cases} f_1 = 3y^2 + x^3, \\ f_2 = 3x^2y + 4tx^3 \end{cases}$$

(c'est « l'idéal jacobien » associé à la famille de courbes planes : $f = y^3 + x^3y + tx^4$).

Pour t petit mais différent de 0, on a $e(\mathcal{J}_t) = 6$, et l'arbre des points infiniment voisins est



Pour $t = 0$, on a $e(\mathcal{J}_0) = 7$ et l'arbre est



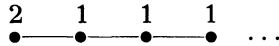
la famille \mathcal{J} n'est donc pas équisingulière. Cependant un élément général de \mathcal{J} s'écrit :

$$\varphi = \lambda (3 y^2 + x^3) + \mu (3 x^2 y + 4 t x^3) \quad (\lambda, \mu \in \mathbf{C}).$$

La multiplicité de φ est constante (égale à 2), et l'idéal jacobien de φ est

$$J(\varphi) = \begin{cases} 3 x^2 (\lambda + 4 t) + 6 \mu x y \\ 6 \lambda y + 3 \mu x^2 \end{cases} = \begin{cases} y \\ x^2 \end{cases};$$

sa multiplicité est évidemment constante, et on peut appliquer le critère discriminant de Zariski qui affirme que la famille (φ) est équisingulière (on peut aussi remarquer que les arbres de φ_0 et φ_t sont égaux, ayant pour dessin :



avec une branche infinie correspondant à des points infiniment voisins lisses).

2° La proposition 3 doit pouvoir permettre de démontrer la réciproque du théorème de trivialité de F. PHAM ([4], p. 221), à savoir que si (\mathcal{J}, π) est une famille d'idéaux plans (telle que les fibres soient de support fini, et peut-être telle que la multiplicité soit constante) telle que l'éclatement de \mathcal{J} soit fibré topologiquement par π , alors la famille est équisingulière.

Nous allons reformuler la proposition 3 de manière plus condensée : si \mathcal{J} est un idéal de type fini et de support fini sur une variété analytique lisse à deux dimensions, appelons $\mu(\mathcal{J})$ l'inf des multiplicités des idéaux jacobiens des éléments de \mathcal{J} . On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 3'. — Soit (\mathcal{J}, π) une famille à un paramètre d'idéaux plans, où \mathcal{J} est de type fini. Alors pour que la famille \mathcal{J} soit équisingulière, il faut et il suffit que les entiers $\mu(\mathcal{J}_t)$ et $e(\mathcal{J}_t)$ soit constants pour t assez petit.

Il est clair en effet que $\mu(\mathcal{J}_t)$ sera la multiplicité de l'idéal jacobien d'un élément général φ_t de \mathcal{J}_t . On applique alors le résultat de LÊ DŨNG TRÁNG [2] comme quoi la constance de $\mu(\mathcal{J}_t)$ implique que la famille (φ) est équisingulière.

Soit maintenant $\mathcal{J} \subset \mathbf{C}\{x, y\}$ un idéal primaire. Soit $\Delta^{k_1}(\mathcal{J})$ la première extension jacobienne critique de (\mathcal{J}) [cf. PHAM [5]; si $\nu(\mathcal{J}) \geq 2$, $k_1 = 2$ et $\Delta^2(\mathcal{J})$ est l'idéal engendré par les dérivées partielles d'un système de générateurs de \mathcal{J}].

Conjecture. — $\mu(\mathcal{J}) = e(\Delta^2(\mathcal{J}))$.

Cette conjecture ayant été démontrée par J. P. HENRY, dans le cas où \mathcal{J} est une extension jacobienne d'une courbe, implique que si une famille

à un paramètre (f) de courbes planes est « stablement équisingulière » (cf. [6]), alors toutes les familles d'idéaux constituées par les extensions jacobiniennes critiques itérées de (f) sont des familles équisingulières d'idéaux : F. PHAM [5] a en effet montré que les multiplicités de ces idéaux étaient constantes : on applique la proposition 3' successivement à toutes les extensions jacobiniennes critiques itérées.

En particulier, la famille des idéaux jacobiniens de (f) est équisingulière, ce qui peut être faux pour une famille équisingulière (au sens de ZARISKI) de courbes (cf. [5] pour un contre-exemple).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] HIRONAKA (H.). — Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, I-II, *Annals of Math.*, Series 2, t. 79, 1964, p. 109-326.
- [2] LÊ DŨNG TRÁNG. — *Sur les singularités des hypersurfaces complexes* (Thèse Sc. math., Paris-VII, 1971).
- [3] NAGATA (M.). — *Local rings*. — New York, Interscience Publishers, 1962 (*Inter-science Tracts in pure and applied Mathematics*, 13).
- [4] PHAM (F.). — Déformations équisingulières des idéaux jacobiniens de courbes planes, *Proceedings of Liverpool singularities Symposium*, II [2. 1969. Liverpool], p. 218-233. — Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Lecture Notes in Mathematics*, 209).
- [5] PHAM (F.). — *Classifications des singularités*, 1971, Faculté des Sciences de Nice (Preprint).
- [6] PHAM (F.). — *Remarque sur l'équisingularité universelle*, Faculté des Sciences de Nice, 1970 (Preprint).
- [7] RISLER (J.-J.). — Sur l'idéal jacobien d'une courbe plane, *Bull. Soc. math. France*, t. 99, 1971, p. 305-311.
- [8] RISLER (J.-J.). — Algèbre symétrique d'un idéal, *Sur quelques problèmes d'algèbre*, Montpellier, 1969.
- [9] ZARISKI (O.). — Studies in equisingularity, I, *Amer. J. of Math.*, t. 87, 1965, p. 507-536.
- [10] ZARISKI (O.). — Studies in equisingularity, II, *Amer. J. of Math.*, t. 87, 1965, p. 972-1006.

(Texte reçu le 8 septembre 1972.)

Jean-Jacques RISLER,
Centre de Mathématiques,
École Polytechnique,
17, rue Descartes,
75230 Paris-Cedex 05.