BULLETIN DE LA S. M. F.

HENRI BERLIOCCHI
JEAN-MICHEL LASRY

Intégrandes normales et mesures paramétrées en calcul des variations

Bulletin de la S. M. F., tome 101 (1973), p. 129-184
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1973__101__129_0>

Bull. soc. math. France,
101, 1973, p. 129-184.

INTÉGRANDES NORMALES ET MESURES PARAMÉTRÉES EN CALCUL DES VARIATIONS

PAR

HENRI BERLIOCCHI ET JEAN-MICHEL LASRY

RÉSUMÉ. — Soient X et Y deux espaces localement compacts polonais, et dx une mesure de Radon sur X. Une mesure paramétrée μ est une application mesurable de X dans $M_1^+(Y)$. A toute fonction mesurable y de X dans Y, on associe la mesure paramétrée $\alpha(y) : x \to \delta_{y(x)}$. Une intégrande normale (positive) est une fonction borélienne f de $X \times Y$ dans $[0, +\infty]$ s. c. i. par rapport à la deuxième variable. L'intégrale $\mu(f) = \iint f(x, y)\, d\mu_x(y)\, dx$ est une fonction affine s. c. i. de μ, et se réduit lorsque $\mu = \alpha(y)$ à $\mu(f) = F(y) = \int f(x, y(x))\, dx$. Cette construction permet d'étudier la fonctionnelle F; on résout ainsi un problème variationnel provenant de l'économie mathématique, on donne une extension du théorème de convexité de Ljapunov, et une caractérisation des compacts faibles de $L^1(dx)$.

On étudie ensuite de la même façon (c'est-à-dire par prolongement aux mesures paramétrées) la fonctionnelle

$$G(y, u) = \int f(x, y(x), u(x))\, dx$$

où y et u sont liés par un système différentiel (exemple : $u = \operatorname{grad} y$, $u = \Delta y$, $u = \Box y$, ...). On montre l'existence de solutions généralisées pour le problème du calcul des variations « minimiser G », et la possibilité d'approcher ces solutions par des fonctions ordinaires. On en déduit l'existence d'un problème relaxé.

Table des matières

II. Espaces de mesures paramétrées

III. Images des espaces de mesures paramétrées

IV. Contrôle optimal

Introduction

Nous étudions deux types de problèmes variationnels que l'on schématise ainsi :

$$(\mathrm{P}_1) \quad \text{minimiser} \int_X f(x, y(x), u(x))\, dx \qquad \text{pour} \quad A\, y(x) = u(x),$$

$$(\mathrm{P}_2) \quad \text{minimiser} \int_X f(x, u(x))\, dx \qquad \text{pour} \quad \int_X g_i(x, u(x))\, dx \leqq 1.$$

Les problèmes (P_1) sont des problèmes du calcul des variations classique ($A\, y = \operatorname{grad} y = u$) et des problèmes de contrôle des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles (quand A est un opérateur elliptique, parabolique, hyperbolique, non linéaire, etc.). Les problèmes (P_2) se rencontrent en économie mathématique (modèle d'AUMANN-SHAPLEY [1]).

L'existence de solutions pour (P_1) est liée à la convexité de la fonction f par rapport à u. L'étude des problèmes non convexes du calcul des variations classique a été abordée par YOUNG [31], qui a introduit des « surfaces généralisées » (on trouvera un exposé moderne dans Young [32] et Ekeland-Temam [17]), dont il montre qu'elles sont en un sens naturel des solutions généralisées de (P_1). L'idée est de plonger l'espace des fonctions mesurables (par exemple : les fonctions mesurables de $[0, +1]$ dans $[-1, +1]$ dans un espace de mesures (l'espace des mesures de Radon positives sur $[0, 1] \times [-1, +1]$ qui se projettent sur $[0, 1]$ suivant la mesure de Lebesgue). Cette méthode a été reprise par Ghouila-Houri [18], et I. Ekeland a montré son lien avec l'analyse convexe [16].

L'étude (chapitres I et II) dans un cadre abstrait de convexes compacts de mesures du type précédent et des fonctionnelles affines, définies sur ces espaces par une classe d'intégrandes que nous introduisons, fournit des outils qui permettent la résolution sous une forme générale des problèmes posés (chapitres III et IV). On obtient en outre des résultats sur les compacts faibles de L^1 et une extension du théorème de convexité de Ljapunov.

Pour le problème (P_1) (chapitre IV), nous utiliserons une formulation valable pour les systèmes cités ci-dessus qui repose sur une idée dégagée précédemment [2] : la propriété de l'équation $A\,y = u$ utile pour l'existence de solutions de (P_1) (usuelles dans le cas convexe, généralisées dans le cas non convexe) est la compacité de l'opérateur A^{-1}. Cesari utilise d'autre part une formulation similaire pour démontrer des théorèmes d'existence de solutions (usuelles) de (P_1) [13].

Nous remercions Ivar Ekeland qui nous a donné goût à la matière, qui nous a inculqué les connaissances nécessaires, notamment, à travers son cours de Théorie des jeux et de nombreux entretiens, et qui nous a sans cesse fourni les références appropriées.

Nous remercions C. Castaing qui nous a indiqué que nos méthodes pouvaient s'appliquer au cas où la mesure dx est abstraite (*cf.* Commentaires).

Notations

On se donne, dans toute la suite, deux espaces X et Y, et une mesure m (notée aussi dx) sur lesquels on fait (sauf au chapitre I) les hypothèses suivantes :

— X et Y sont localement compacts polonais (c'est-à-dire localement compacts métrisables séparables);

— m est une mesure de Radon positive sur X.

On écrira « mesurable » pour « m-mesurable », « presque partout » ou « (p. p.) » pour « m-presque partout » (etc.).

Les définitions sont donc relatives aux espaces X et Y, ce qui n'est pas toujours rappellé dans le texte.

I. Intégrandes normales

1. Théorème de Scorza-Dragoni

Soient $\mathcal{A}$ une tribu sur un ensemble A, et B un espace topologique. Une application g de A dans B est mesurable si $g^{-1}(F)$ appartient à $\mathcal{A}$ pour tout fermé F de B. Mesurable par rapport à une mesure de Radon signifie mesurable par rapport à la tribu complète associée.

DÉFINITION 1. — *Soient $\mathcal{T}$ une tribu sur un espace X, m une mesure sur $\mathcal{T}$ positive, Y et A deux espaces topologiques, et f une application de $X \times Y$ dans A telle que*

$$x \to f(x, u) \text{ est } \mathcal{T}\text{-mesurable pour tout } u \in Y,$$
$$u \to f(x, u) \text{ est continue pour presque tout } x \in X.$$

On dit que f une fonction est de Carathéodory.

On appelle intégrande positive normale (ou encore intégrande normale de $X \times Y$ dans $[0, +\infty]$) une application f de $X \times Y$ dans $[0, +\infty]$ telle qu'il existe une suite de fonctions de Carathéodory f_n de $X \times Y$ dans $[0, +\infty[$ vérifiant

$$f(x, u) = \sup_{n \in \mathbf{N}} f_n(x, u)$$

pour presque tout x.

THÉORÈME 1. — *Soient X un espace topologique, $\mathcal{T}$ une tribu sur X qui contient les boréliens, m une mesure sur $\mathcal{T}$ positive, bornée, extérieurement régulière, c'est-à-dire telle que*

$$m(A) = \inf \{ m(V);\ V \text{ ouvert} \supset A \}, \qquad \forall A \in \mathcal{T}.$$

Soit Y un espace topologique à base dénombrable, et f une application de Carathéodory de $X \times Y$ dans $\mathbf{R}$ (déf. 1).

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé $F \subset X$ tel que f, restreint à $F \times Y$, est continue, et $m(X - F) < \varepsilon$.

Le premier énoncé du type du théorème 1 est dû à DRAGONI et SCORZA. Le théorème 1 étend les résultats de CASTAING [10].

Démonstration. — Comme F est homéomorphe à $]0, 1[$, on peut supposer f à valeurs dans $[0, 1]$.

Soient $(\mathcal{O}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une base d'ouverts de Y, et $1_{\mathcal{O}_n}$ la fonction caractéristique de $\mathcal{O}_n$. Soit $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite partout dense dans Y.

Pour tout rationnel $q \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbf{N}$, soit $\varphi_{n,q}$ la fonction s. c. i. de Y dans $[0, 1]$ définie par $\varphi_{n,q}(u) = q\,1_{\mathcal{O}_n}(u)$. Les $\varphi_{n,q}$ forment une famille dénombrable telle que, pour toute fonction s. c. i. (en particulier pour toute fonction continue) g de Y dans $[0, 1]$, on a

$$g(u) = \sup_{\varphi_{n,q} \leq g} \varphi_{n,q}(u), \qquad \forall u \in Y.$$

Posons $E_{n,q,k} = \{ x \in X;\ f(x,\ u_k) \geqq \varphi_{n,q}(u_k) \}$. Par hypothèse sur f, $E_{n,q,k}$ appartient à $\mathcal{T}$; donc aussi $E_{n,q} = \bigcap_{k \in \mathbf{N}} E_{n,q,k}$. Or, par densité des u_k, continuité de $f(x,\ u)$ par rapport à u, semi-continuité inférieure de φ, on a

$$E_{n,q} = \{ x \in X,\ f(x,\ u) \geqq \varphi_{n,q}(u),\ \forall\ u \in Y \}.$$

Posons $\psi_{n,q}(x,\ u) = 1_{E_{n,q}}(x) . \varphi_{n,q}(u)$, on a

$$\psi_{n,q} \leqq f \qquad \text{et, pour } (x,\ u) \in X \times Y,\quad f(x,\ u) = \sup \psi_{n,q}(x,\ u).$$

Comme $\mathbf{N} \times (Q \cap [0,\ 1])$ est dénombrable, on peut écrire

$$f = \sup_{k \in \mathbf{N}} 1_{G_k} \gamma_k,$$

où G_k est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ (les $E_{n,q}$ renumérotés), γ_k une suite de fonctions s. c. i. (les $\varphi_{n,q}$ renumérotés). Pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe un ouvert V_k est un fermé F_k tels que

$$V_k \supset G_k \supset F_k \qquad \text{et} \qquad m(V_k - F_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k+2}},$$

(on applique la régularité extérieure de m à G_k et à son complémentaire). La restriction de 1_{G_k} au fermé $H_k = (X - V_k) \cup F_k$ est continue, donc la restriction de $1_{G_k} \times \gamma_k$ à $H_k \times Y$ est s. c. i. Soit $H = \bigcap_{k \in \mathbf{N}} H_k$, on a $m(X - H) < \varepsilon/2$ et la restriction de f à $H \times Y$ est s. c. i. comme enveloppe supérieure de fonctions s. c. i.

Le même raisonnement appliqué à $1 - f$ montre l'existence d'un fermé K tel que $m(X - K) < \varepsilon/2$ et que la restriction de f à $K \times Y$ soit s. c. i.

Soit $F = H \cap K$, on a $m(X - F) < \varepsilon$, et f restreint à $F \times Y$ est continue.

C. Q. F. D.

Remarque 1. — On ne peut pas affaiblir les hypothèses du théorème 1 :

(*a*) Soit $E \in \mathcal{T}$; la fonction $(x,\ u) \to 1_E(x)$ est de Carathéodory. Si le théorème est vérifié, il existe un fermé F de X tel que 1_E restreint à F est continue, et $m(X - F) < \varepsilon$. C'est-à-dire qu'il existe deux fermés $F_1 \subset E$ et $F_2 \subset (X - E)$ tels que $F = F_1 \cup F_2$. Soit $V = X - F_2$, on a $V \supset E$, et $m(V - E) < m(V - F_2) < \varepsilon$. Comme V est ouvert, m est extérieurement régulière.

(*b*) Soient $X = [0,\ 1]$ avec sa topologie naturelle, m la mesure de Lebesgue; $Y = [0,\ 1]$ avec la topologie discrète : Y n'est pas à base dénombrable, et le théorème n'est pas vérifié pour la fonction de Carathéodory f de $X \times Y$ dans $[0,\ 1]$ suivante : $f(x,\ u) = 0$ si $x \neq u$, 1 si $x = u$.

Remarque 2. — On peut remplacer $\mathbf{R}$ par un espace métrisable séparable Z. Car alors Z est homéomorphe à un sous-espace de

$[0, 1]^{\mathbf{N}}$, et il suffit de montrer le théorème pour $[0, 1]^{\mathbf{N}}$. Pour montrer la théorème dans ce dernier cas, il suffit d'appliquer le théorème 1 à chaque projection $P_n \circ f$, qui est de Carathéodory. On trouve une suite de fermés F_n tels que $m(X - F_n) < \varepsilon/2^n$ et $P_n \circ f$ restreint à $F_n \times Y$ est continue. Donc f est restreinte à $(\bigcap F_n) \times Y$ est continue.

Remarque 3. — Soient X un espace localement compact, m une mesure de Radon sur X, Y un espace topologique à base dénombrable, Z métrisable séparable, et $f : X \times Y \to Z$ une application de Carathéodory. Pour tout compact K et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $H \subset K$ tel que $|m|(K - H) < \varepsilon$, et f restreint à $H \times Y$ est continue. Ceci résulte du théorème 1 et de la remarque 2 appliqués au compact K et à la restriction de $|m|$ à K.

Remarque 4. — Soient $\mathcal{C}$ une tribu sur un espace X, Y un espace métrisable séparable (d une distance sur Y), et soit f une intégrande normale de $X \times Y$ dans $[0, +\infty]$. Alors il existe une suite croissante de fonctions de Carathéodory f_n de la forme

$$f_n(x, y) = \sum_{k=0}^{k_n} 1_{G_{k,n}}(x)\, \varphi_{k,n}(y)$$

où les $G_{k,n}$ sont mesurables disjoints et les $\varphi_{k,n}$ sont continues positives. En outre, si la mesure m sur $\mathcal{C}$ est σ-finie et si Y est localement compact, on peut prendre les $G_{k,n}$ intégrables et les $\varphi_{k,n}$ continues à support compact.

En effet, d'après la définition 1, $f = \sup g_n$, où les g_n sont de Carathéodory; la démonstration du théorème 1 montre que

$$g_n = \sup 1_{E_k} \times 1_{O_k}$$

où $E_k \in \mathcal{C}$ et où O_k est un ouvert de Y. Comme

$$1_{O_k}(y) = \sup \psi_{n,k}(y), \qquad \text{avec} \quad \psi_{n,k}(y) = \inf(1, k\, d(y, Y - O_n)),$$

posant

$$g_{n,k}(x, y) = 1_{E_n}(x) \times \psi_{n,k}(y),$$

on a $f = \sup g_{n,k}$. Soit $f_p = \sup_{n+k \leq p} g_{n,k}$, alors $f = \sup f_n$. On voit que f_n est de la forme annoncée : les $G_{k,n}$ sont des intersections de E_q et de $X - E_q$ $(0 \leq q \leq n)$ et les $\varphi_{k,n}$ sont des enveloppes supérieures de sous-famille de $\{\psi_{q,k};\ q + k \leq n\}$.

Si Y est localement compact et si m est une mesure σ-finie sur X, on remplace f_n par $g_n = f_n \times 1_{F_n} \times \alpha_n$, où F_n est une suite croissante d'éléments intégrables de $\mathcal{C}$ tels que $X = \bigcup F_n$ et α_n, et une suite croissante de fonctions continues à support compact telle que $1 = \sup \alpha_n(y)$.

Remarque 5. — Soient $\mathcal{C}$ une tribu sur un espace X, Y un espace compact métrisable. Soit f une fonction de $X \times Y$ dans $\mathbf{R}$. Il est équivalent de dire :

(a) f est de Carathéodory;

(b) l'application $x \to f(x, .)$ est mesurable de X dans $C(Y)$, muni de la topologie de la convergence uniforme.

En effet, supposons f de Carathéodory. On a $f = \sup f_n$ (*cf.* remarque 4 ci-dessus). Pour x fixé, $f_n(x, .)$ est une suite croissante de fonctions continues qui converge simplement vers la fonction continue $f(x, .)$, donc uniformément (lemme de Dini). L'application $\tilde{f}_n : x \to f_n(x, .)$ est mesurable de X dans $C(Y)$ muni de la norme uniforme, et la suite $\tilde{f}_n$ converge simplement vers l'application $\tilde{f} : x \to f(x, .)$. Donc f est mesurable, ce qui montre $(a) \Rightarrow (b)$; la réciproque est évidente.

Proposition 1. — *Soient* $(X, \mathcal{C})$, $(Z, \mathcal{C}')$ *deux espaces munis d'une tribu, Y un espace topologique à base dénombrable, f une application de $X \times Y$ dans* $\mathbf{R}$ *telle que*

$$x \to f(x, u) \text{ est mesurable}, \quad \forall\, u \in Y,$$
$$u \to f(x, u) \text{ est continue}, \quad \forall\, x \in X.$$

Alors, pour toute application $\mathcal{C}'$-mesurable u de Z dans Y, l'application

$$(x, z) \in X \times Z \to f(x, u(z)) \text{ est mesurable pour la tribu } \mathcal{C} \times \mathcal{C}'.$$

En particulier, $(x, u) \to f(x, u)$ est mesurable pour $\mathcal{C} \times B$, où B est la tribu des boréliens de Y.

D'après la démonstration du théorème 1, on a

$$f(x, u) = \sup_{k \in \mathbf{N}} 1_{G_k}(x)\, \gamma_k(u),$$
$$\forall\, (x, u) \in X \times Y, \quad \text{avec } \gamma_k \text{ s. c. i. pour tout } k,$$

donc borélienne, et $G_k \in \mathcal{C}$. Donc, si $z \to u(z)$ est $\mathcal{C}'$-mesurable de Z dans Y, $f(x, u(z)) = \sup_{k \in \mathbf{N}} 1_{G_k}(x)\, \gamma_k(u(z))$ et les fonctions $z \to \gamma_k(u(z))$ sont $\mathcal{C}'$-mesurable.

Par suite $(x, z) \to f(x, u(z))$ est $(\mathcal{C} \times \mathcal{C}')$-mesurable.

Remarque. — Il résulte de la proposition que si $x \to u(x)$ est $\mathcal{C}$-mesurable de X dans Y, $x \to f(x, u(x))$ est $\mathcal{C}$-mesurable.

Corollaire 1. — (*Hypothèses du théorème* 1). — *Soit g une intégrande normale de $X \times Y$ dans* $[0, +\infty]$. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé F tel que g restreinte à $F \times Y$ est s. c. i., et $m(X - F) < \varepsilon$.*

Soit g_n une suite d'application de Carathéodory de $X \times Y$ dans $[0, +\infty[$ telles que $g = \sup_{n \in \mathbf{N}} g_n$ (p. p. x) D'après le théorème, il existe des fermés F_n tels que $m(X - F_n) < \varepsilon/2^n$, et g_n restreint à $F_n \times Y$ est continue. Soit $F = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} F_n$: c'est un fermé; $m(X - F) < 2\varepsilon$; g restreinte à $F \times Y$ est s. c. i. comme enveloppe supérieure de fonctions continues.

2. Multi-applications mesurables

Pour plus de commodité, nous rappelons les propriétés des multi-applications mesurables dont nous aurons besoin par la suite, et leurs démonstrations. On trouvera une étude systématique des multi-applications dans CASTAING [11].

DÉFINITION 2. — *Soient* $\mathcal{E}$ *une tribu sur un espace* X, *et* Γ *une multi-application de* X *dans un espace topologique* Y [*c'est-à-dire une application de* X *dans* $\mathcal{P}(Y)$]. *On dit que* Γ *est mesurable si*

$$\{ x \in X;\ \Gamma(x) \cap F \neq \emptyset \} = \Gamma^{-}(F)$$

appartient à $\mathcal{E}$ *pour tout fermé* F *de* Y.

A toute multi-application de X dans Y, on associe sa fonction indicatrice f_Γ de $X \times Y$ dans $[0, +\infty]$, définie par $f_\Gamma(x, u) = 0$ si $u \in \Gamma(x)$, $+\infty$ si $u \notin \Gamma(x)$.

Remarque. — Soit Y un espace métrisable, soit d une distance compatible avec la topologie, et soit Γ une multi-application mesurable de X dans Y; la fonction $(x, u) \to d(\Gamma(x), u)$ est de Carathéodory.

Il suffit de montrer que $A \in \mathcal{E}$ où $A = \{ x \in X;\ d(\Gamma(x), u) \leq r \}$ (pour u et r fixé). Or

$$A = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left\{ x \in X;\ \Gamma(x) \cap B\left(r + \frac{1}{n}\right) \neq \emptyset \right\},$$

où

$$B\left(r + \frac{1}{n}\right) = \left\{ v \in Y;\ d(u, v) \leq r + \frac{1}{n} \right\}.$$

Comme $B[r + (1/n)]$ est fermé, et Γ mesurable, on a $A \in \mathcal{E}$.

Soit $\overline{\Gamma}$ la multi-application définie par $\overline{\Gamma} : x \to \overline{\Gamma(x)}$. Comme

$$f_{\overline{\Gamma}}(x, u) = \sup_{n \in \mathbf{N}} n\, d(\Gamma(x), u),$$

$f_{\overline{\Gamma}}$ est une intégrande normale (déf. 1).

LEMME (*Hypothèses du théorème* 1). — *On suppose de plus* Y *métrisable. Soit* Γ *une multi-application mesurable de* X *dans* Y, *telle que* $\Gamma(x)$ *est un fermé* (p. p. x). *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un fermé* $F \subset X$ *tel que la restriction de* Γ *à* F *a un graphe fermé, et* $m(X - F) < \varepsilon$.

Démonstration. — On applique le théorème 1 à la fonction de Carathéodory $(x, u) \to d(\Gamma(x), u)$, et on remarque que le graphe de la restriction de Γ à F, est

$$\{(x, u) \in F \times Y;\ d(\Gamma(x), u) = 0\}.$$

PROPOSITION 2. — *Soient X un espace localement compact dénombrable à l'infini, Y un espace localement compact polonais, m une mesure de Radon positive sur X, et soit Γ une multi-application de X dans Y. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Γ est mesurable à valeurs fermées,*

(ii) *Pour tout compact $K \subset X$ et tout ε positif, il existe un compact $H \subset K$ avec $m(K - H) < \varepsilon$, et Γ/H a un graphe fermé.*

(i) $\Rightarrow$ (ii) Cela résulte du lemme ci-dessus.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Soit G le graphe de Γ. On a $G = G' \cup (N \times Y)$ où $G' \subset X \times Y$ est un K_σ et $N \subset X$ a une mesure nulle. Si F est un fermé de Y, $\Gamma^-(F)$ est alors la réunion d'un ensemble de mesure nulle et de la projection sur X du K_σ : $G' \cap (X \times F)$. Donc $\Gamma^-(F)$ est mesurable.

THÉORÈME de section (KURATOWSKI). — *Soit $\mathscr{C}$ une tribu sur un ensemble X. Soit Y un espace métrisable séparable. Soit Γ une multi-application mesurable de X dans Y telle qu'il existe une distance d compatible avec la topologie pour laquelle $\Gamma(x)$ est complet pour tout x. Alors, il existe une section mesurable de Γ [c'est-à-dire une application mesurable f de X dans Y, telle que $f(x) \in \Gamma(x)$ pour tout $x \in X$].*

Démonstration (KURATOWSKI) [20]. — Quitte à remplacer d par $\inf(d, 1)$, on peut supposer $d \leqq 1$. Notons $B(a, r)$ la boule $\{u \in Y;\ d(u, a) \leqq r\}$.

Soit (a_n) une suite de points dense dans Y. Nous allons construire par récurrence une suite d'applications (s_n) mesurables de X dans Y.

1° On pose $s_0(x) = a_0$ pour tout $x \in X$.

2° On suppose construits $s_0, \ldots, s_n$ tels que

$$d(s_k(x), s_{k+1}(x)) \leqq \frac{1}{2^k}, \qquad \forall\, x \in X \quad \text{et} \quad k = 0, \ldots, n-1,$$

et

$$B\left(s_k(x), \frac{1}{2^k}\right) \cap \Gamma(x) \neq \emptyset, \qquad \forall\, x \in X, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Posons, pour $p \in \mathbf{N}$,

$$E_p = \left\{x \in X;\ B\left(a_p, \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cap \Gamma(x) \neq \emptyset\right\},$$

$$F_p = \left\{x \in X;\ s_n(x) \in B\left(a_p, \frac{1}{2^{n-1}}\right)\right\}$$

et

$$G_p = E_p \cap F_p.$$

Comme $B(a_p, 1/2^{n+1})$ et $B(a_p, 1/2^{n-1})$ sont des fermés, on a $E_p \in \mathcal{C}$ et $F_p \in \mathcal{C}$, puis $G_p \in \mathcal{C}$.

Pour tout $x \in X$, il existe $u \in \Gamma(x)$ tel que $d(s_n(x), u) \leqq 1/2^n$ par hypothèse de récurrence.

Comme la suite (a_m) est dense dans Y, il existe un entier m tel que $d(u, a_m) \leqq 1/2^{n+1}$, donc tel que

$$B\left(a_m, \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cap \Gamma(x) \neq \emptyset \qquad \text{et} \qquad s_n(x) \in B\left(a_m, \frac{1}{2^{n-1}}\right),$$

c'est-à-dire $x \in G_m$. Autrement dit,

$$X = \bigcup_{m \in \mathbf{N}} G_m.$$

On peut donc définir l'application s_{n+1} par $s_{n+1}(x) = a_m$ pour $x \in (G_m - \bigcup_{k<n} G_k)$. On constate que s_{n+1} est mesurable, et vérifie les hypothèses de récurrence.

Pour chaque x, $(s_n(x))$ est une suite de Cauchy, et $d(s_n(x), \Gamma(x)) \to 0$ quand $n \to \infty$. Comme $\Gamma(x)$ est complet, il existe un point $s(x) \in \Gamma(x)$ tel que $s_n(x) \to s(x)$ quand $n \to \infty$. La fonction s est mesurable comme limite d'une suite de fonctions mesurables : c'est la section cherchée.

COROLLAIRE 1. — *Soient X un espace localement compact dénombrable à l'infini, m une mesure de Radon sur X, Γ une multi-application mesurable à valeurs fermées de X dans un polonais Y telle que $\Gamma(x)$ est fermé non vide pour presque tout x. Il existe une section mesurable de Γ.*

3. Caractérisations des intégrandes normales

THÉORÈME 2. — *Soient X un espace localement compact polonais, m une mesure de Radon positive sur X. Soit Y un espace souslinien. Soit f une application de $X \times Y$ dans $[0, +\infty]$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *f est une intégrande positive normale* (déf. 1);

(*b*) *Pour tout compact $K \subset X$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $H \subset K$ tel que $m(K - H) < \varepsilon$, et f restreint à $H \times Y$ est s. c. i.*;

(*c*) *La multi-application*

$$x \to \operatorname{Epi}_f(x) = \{ (u, \lambda) \in Y \times [0, +\infty] ;\ f(x, u) \leqq \lambda \}$$

est mesurable à valeurs fermées (p. p. x).

(*d*) *Il existe une fonction borélienne g de $X \times Y$ dans $[0, +\infty]$ telle que $u \to g(x, u)$ est s. c. i.* (p. p. x) et $f(x, u) = g(x, u)$ (p. p. x).

On va montrer $(d) \Rightarrow (a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (d)$, puis $(c) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$.

Par restriction et recollements, on voit qu'il suffit de démontrer le théorème 2 sur un compact de X. On suppose donc X compact.

1° $(a) \Rightarrow (b)$: Les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées, car tout souslinien est à base dénombrable. Le point résulte donc du corollaire 1 du théorème 1.

2° $(b) \Rightarrow (d)$: Soit, pour tout n, un compact $H_n \subset X$ tel que $m(X - H_n) < 1/n$, et f restreint à $H_n \times Y$ est s. c. i. Soit g_n la fonction borélienne définie par

$$g_n(x, u) = \begin{cases} f(x, u) & \text{pour} \quad (x, u) \in H_n \times Y, \\ 0 & \text{pour} \quad (x, u) \notin H_n \times Y \end{cases}$$

et soit g définie par $g(x, u) = \sup_{n \in \mathbf{N}} g_n(x, u)$; g est borélienne et $f(x, u) = g(x, u)$ pour $x \notin N$, où N est l'ensemble de mesure nulle $N = X - \bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_n$.

3° $(d) \Rightarrow (a)$.

LEMME. — *Il existe une famille dénombrable de fonctions continues* φ_n *de* Y *dans* $[0, +\infty[$ *telles que pour toute fonction s. c. i.* h *de* Y *dans* $[0, +\infty]$, *on a*

$$h(u) = \sup_{\varphi_n \leq h} \varphi_n(u), \qquad \forall\, u \in Y.$$

Soit O_n une base dénombrable d'ouverts de Y. Soit h une fonction s. c. i. de Y dans $[0, +\infty]$. Alors

$$h(u) = \sup_{\varphi_{q,n} \leq h} \varphi_{q,n},$$

où q est un rationnel positif, n un entier, et $\varphi_{n,q}$ la fonction s. c. i. qui vaut q sur O_n, et 0 ailleurs. Reste à montrer le lemme pour $\varphi_{n,q}$. Or si F_n est le complémentaire de O_n, et si d est une distance sur Y compatible avec la topologie, on a

$$\varphi_{n,q}(u) = \sup_{m \in \mathbf{N}} \inf(q, md(u, F_n)).$$

Revenons à la démonstration de $(d) \Rightarrow (a)$. — Soit φ_n une suite de fonctions comme annoncée dans le lemme. Soit E_n,

$$E_n = \{ x \in X;\ g(x, u) \geq \varphi_n(u),\ \forall\, u \in Y \}.$$

Le complémentaire de E_n dans X est la projection sur X de G_n,

$$G_n = \{ (x, u) \in X \times Y;\ g(x, u) < \varphi_n(u) \}.$$

Comme g est borélienne et φ_n continue, G_n est un borélien de $X \times Y$. Comme X est métrisable et $X \times Y$ souslinien la projection de G_n est un souslinien (BOURBAKI [9], chap. 9, § 6, n° 3, prop. 11, corollaire), donc mesurable (pour m). Il en résulte que E_n est mesurable. Donc $(x, u) \to 1_{E_n}(x)\, \varphi_n(u)$ est une fonction de Carathéodory de $X \times Y$ dans

$[0, +\infty[$. Or, comme $u \to g(x, u)$ est s.c.i. (p. p. x), on a

$$g(x, u) = \sup_{n \in \mathbf{N}} 1_{E_n}(x)\, \varphi_n(u) \quad (\text{p. p. } x).$$

Ainsi g est une intégrande normale.

4° $(c) \Rightarrow (b)$: On applique le corollaire de la proposition 1 à la multi-application Epi_f : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé $F \subset X$ (Comme X est compact, F aussi) tel que Epi_f restreint à F a un graphe fermé, et $m(X - F) < \varepsilon$. Mais dire que $\{(x, u, \lambda) \in F \times Y \times [0, +\infty[\,; f(x, u) \leqq \lambda\}$ est fermé, c'est dire que f, restreinte à F, est s. c. i.

5° $(b) \Rightarrow (c)$: Soient pour tout n un fermé compact $K_n \subset X$ tel que $m(X - K_n) < 1/n$, et f restreint à $K_n \times Y$ est s. c. i. Donc Epi_f restreint à K_n à un graphe fermé.

Soient H un fermé de $Y \times [0, +\infty]$. A un ensemble de mesure nulle près, $\mathrm{Epi}_f^{\bullet}(H)$ est la projection sur X du F_σ : $S = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} (G_n \cap (X \times H))$, où G_n est le graphe de Epi_f restreint à K_n. Comme $X \times Y^{\bullet} \times [0, +\infty]$ est souslinien, S est souslinien, et sa projection est mesurable (BOURBAKI, ibidem, *cf.* 3°).

Le théorème 2 est démontré.

Remarque 1. — Si Y est localement compact polonais, les quatre propriétés du théorème 2 ci-dessus sont équivalentes à la cinquième suivante : il existe une suite f_n de fonctions de Carathéodory positives bornées nulles en dehors d'un compact (qui dépend de n) telles que

$$f(x, u) = \sup_{n \in \mathbf{N}} f_n(x, u) \quad (\text{p. p. } x).$$

Cela résulte du 3° de la démonstration, mais cela se voit plus simplement directement sur la définition des intégrandes normales. En effet, si $f = \sup f_n$, où les f_n sont de Carathéodory positives, alors

$$f = \sup_{n,k,p,m} [\inf(m, f_n\, \varphi_k\, \psi_p)],$$

où (φ_k) [resp. (ψ_p)] est une suite de fonctions continues à support compact de X (resp. Y) dans $[0, 1]$ telle que

$$1 = \sup_{k \in \mathbf{N}} \varphi_k(x), \quad \forall\, x \in X \qquad [\text{resp. } 1 = \sup_{p \in \mathbf{N}} \psi_p(u), \ \forall\, u \in Y].$$

Remarque 2 (Hypothèses du théorème 2). — Soient Γ une multi-application, et f_Γ la fonction indicatrice du graphe de Γ (*cf.* déf. 2) : c'est une intégrande normale si, et seulement si, Γ est mesurable à valeurs fermées (p. p. x). Cela résulte de l'équivalence $(a) \Leftrightarrow (c)$ du théorème 2, car $x \to \mathrm{Epi}_f(x) = \Gamma(x) \times [0, +\infty[$ est mesurable si, et seulement si, Γ l'est.

Remarque 3. — Soit $x \to \Gamma(x)$ une multi-application mesurable. D'après la remarque qui suit la définition 2, $f_{\overline{\Gamma}}$ est une intégrande normale. Donc, d'après la remarque 2 ci-dessus, la multi-application $x \to \overline{\Gamma}(x)$ est mesurable.

II. Espaces de mesures paramétrées

Rappelons que, dans toute la suite, X et Y sont deux espaces localement compacts polonais, $m\,(= dx)$ une mesure de Radon positive sur X.

Le paragraphe 1 regroupe les définitions et les premières propriétés. Au paragraphe 2, on démontre les propriétés de structure importantes (prop. 5, 6 et 7).

1. Définitions. Dualité

DÉFINITION 1. — *On appelle mesure paramétrée une mesure de Radon positive sur $X \times Y$ qui se projette sur X selon la mesure m. On note M l'ensemble des mesures paramétrées muni de la topologie vague.*

Pour toute mesure $\mu \in M$, il existe une famille $(\mu_x)_{x \in X}$ de mesures de probabilités sur Y unique modulo l'égalité presque partout telle que $x \to \mu_x$ est mesurable de X dans $M_1^+(Y)$ vague et $\mu = \int_X \delta_x \otimes \mu_x \, dx$ (BOURBAKI [7] et [8]). Ceci nous parait justifier le terme de « mesure paramétrée ».

Soit u une fonction mesurable de X dans Y. Alors $x \to \delta_{u(x)}$ est mesurable de X dans $M_1^+(Y)$, car la topologie induite sur Y par l'injection $u \to \delta_u$ de Y dans $M_1^+(Y)$ coïncide avec la topologie de Y. Soit $\nu \in M$ la mesure définie par $\nu = \int \delta_x \otimes \delta_{u(x)} \, dx$. Pour toute fonction $g \in C_c(X \times Y)$ (resp. $X \times Y \to [0, +\infty]$). On a

$$\int_{X \times Y} g(x, y) \, d\nu(x, y) = \int_X g(x, u(x)) \, dx$$

(BOURBAKI [7], § 4). D'autre part, si

$$\int_X \delta_x \otimes \delta_{u(x)} \, dx = \int_X \delta_x \otimes \delta_{v(x)} \, dx, \qquad \text{on a} \quad u = v \text{ (p. p.)}$$

d'après l'unicité de la désintégration.

DÉFINITION 2. — *On note B l'ensemble des applications mesurables de X dans Y.*

DÉFINITION 3. — *On note α l'injection de l'ensemble B des fonctions mesurables de X dans Y, dans M définie par*

$$\langle \alpha(u), g \rangle = \int_X g(x, u(x)) \, dx \quad \textit{pour tout} \ g \in C_c(X \times Y).$$

Remarque. — Si $u_n(x) \to u(x)$ (p. p.), alors $\alpha(u_n) \to \alpha(u)$ dans M puisque, pour tout $g \in C_c(X \times Y)$,

$$\int_X g(x, u_n(x))\, dx \to \int_X g(x, u(x))\, dx$$

d'après le théorème de Lebesgue.

PROPOSITION 2. — *Soit f une fonction de Carathéodory (resp. une intégrande normale) de $X \times Y$ dans* $\mathbf{R}$ *(resp. dans $[0, +\infty]$) et soit $\mu \in M$. Alors f est μ-mesurable.*

Il suffit de montrer la proposition pour les fonctions de Carathéodory puisque les intégrandes normales sont des limites dénombrables de telles fonctions. D'après le théorème 1 (chap. I, § 1), pour tout compact $K \subset X$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $H \subset K$, tel que $m(K - H) < \varepsilon$, et f restreinte à $H \times Y$ est continue. Comme μ se projette sur X selon m, on a $\mu((K - H) \times Y) = m(K - H) < \varepsilon$, et la fonction f est mesurable en vertu du critère de Lusin.

Remarque. — Cette proposition permet d'appliquer la proposition 4, son corollaire, et le théorème 1 du paragraphe 4 (n° 4) de BOURBAKI [7]. Il en résulte les propriétés suivantes, dont nous ferons dorénavant implicitement usage :

1° Soit $f : XXY \to \mathbf{R}$ de Carathéodory;

$$\mu \in M \qquad \text{avec} \quad \mu = \int_X \delta_x \otimes \mu_x\, dx.$$

— $f \in L^1(\mu)$ si, et seulement si, $\int_X dx \int_Y |f(x, u)|\, d\mu_x(u) < +\infty$;

— si $f \in L^1(\mu)$, alors, pour presque tout x, $u \to f(x, u)$ est μ_x mesurable, $x \to \int_Y f(x, u)\, d\mu_x$ est intégrable, et

$$\int_{X \times Y} f(x, u)\, d\mu(x, u) = \int_X dx \int_Y f(x, u)\, d\mu_x(u).$$

2° Soient $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ une intégrande normale, et $\mu \in M$ avec $\mu = \int_X \delta_x \otimes \mu_x\, dx$; la fonction $x \to \int_Y f(x, u)\, d\mu_x(u)$ est mesurable, et

$$\int_{X \times Y} f(x, u)\, d\mu(x, u) = \int_X dx \int_Y f(x, u)\, d\mu_x(u).$$

LEMME 1. — *Soit $f : X \times Y \to$* $\mathbf{R}$ *une fonction de Carathéodory bornée, nulle en dehors d'un compact, alors $\mu \to \int_{X \times Y} f(x, u)\, d\mu(x, u)$ est continue de M dans* $\mathbf{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soient K un compact de X et H un compact de Y tels que $f = 0$ en dehors de $K \times H$. Soit $K_1 \subset K$ un compact tel que $m(K - K_1) < \varepsilon / \| f \|_\infty$ et f restreinte à $K_1 \times Y$ est continue. Soit V un ouvert relativement compact de Y tel que $V \supset H$. Soit W un ouvert relativement compact de X tel que $W \supset K$, et $m(W - K) < \varepsilon / \| f \|_\infty$. Soit F le fermé $F = X \times Y - V \times (W - K_1)$. La restriction de f à F est continue : elle admet donc un prolongement g continu de f à $X \times Y$ tel que $\| g \|_\infty \leq \| f \|_\infty$. Comme $f = 0$ sur $X \times Y - W \times V$ ($\subset F$).

g est nulle en dehors du compact $\overline{W} \times \overline{V}$.

Donc $\mu \to \int_{X \times Y} g(x, u)\, d\mu(x, u)$ est continue de M dans $\mathbf{R}$.

D'autre part

$$\left| \int f\, d\mu - \int g\, d\mu \right| \leq \int_{W - K_1} (\| f \|_\infty + \| g \|_\infty)\, d\mu \leq 2m(W - K_1)\, \| f \|_\infty \leq \varepsilon.$$

Donc $\mu \to \int_{X \times Y} f(x, u)\, d\mu(x, u)$ est continue comme limite uniforme de fonctions continues.

PROPOSITION 3. — *Si $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ est une intégrande normale l'application $\mu \to \int_{X \times Y} f(x, u)\, d\mu(x, u)$ est linéaire s. c. i. de M dans $[0, +\infty]$.*

Il suffit de montrer que $f(x, u) = \sup_{n \in \mathbf{N}} f_n(x, u)$ (pour presque tout x) où les f_n sont des fonctions de Carathéodory bornées nulles en dehors d'un compact (qui dépend de n) et $f_{n+1} \geq f_n$ car alors $\int (\sup f_n)\, d\mu = \sup \int f_n\, d\mu$. Or cela a déjà été montré (*cf.* remarque 1 qui suit le théorème 3, chap. I, § 3).

DÉFINITION 4. — *Soit $f_1, \ldots, f_k$ des intégrandes normales de $X \times Y$ dans $[0, +\infty)$. On note $M(f_1, \ldots, f_k)$ le convexe fermé de M défini par*

$$M(f_1, \ldots, f_k) = \left\{ \mu \in M ;\ \int_{X \times Y} f_i\, d\mu \leq 1 \text{ pour } i = 1, \ldots, k \right\}.$$

Remarque. — On ne gagnerait pas en généralité en considérant $\left\{ \mu \in M,\ \int f_i\, d\mu \leq \alpha_i,\ i = 1, \ldots, k \right\}$.

En effet, si $\alpha_i > 0$, on remplace f_i par $(1/\alpha_i) f_i$. Si $\alpha_i = 0$, on remplace f_i par $f_i + \varphi$, où φ est une fonction continue positive de X dans $\mathbf{R}$ telle que $\int_X \varphi(x)\, dx = 1$.

DÉFINITION 5. — *On note $B(f_1, \ldots, f_k)$ l'ensemble des fonctions u mesurables de X dans Y telles que*

$$\int_X f_i(x, u(x))\, dx \leqq 1 \qquad \textit{pour} \quad i = 1, \ldots, k.$$

Remarque 1. — Compte tenu des propriétés de α (déf. 3),

$$B(f_1, \ldots, f_k) = \{ u \in B;\ \alpha(u) \in M(f_1, \ldots, f_k) \},$$

où B est l'ensemble des applications mesurables de X dans Y (*cf.* déf. 2).

Remarque 2 — Soit Γ une multi-application mesurable à valeurs fermées (p. p. x) de X dans Y. Soit f_Γ la fonction indicatrice de son graphe : $f_\Gamma(x, u) = 0$ si $u \in \Gamma(x)$, $+\infty$ si $u \notin \Gamma(x)$. C'est une intégrande normale (*cf.* déf. 2, remarque, chap. I, § 2). Pour u mesurable de X dans Y, on a

$$\int_X f(x, u(x))\, dx \leqq 1 \quad \Leftrightarrow \quad u(x) \in \Gamma(x) \quad \text{(p. p.)},$$

$$\int_{X \times Y} f(x, u)\, d\mu(x, u) \leqq 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\text{Support } \mu_x) \text{ inclus dans } \Gamma(x) \quad \text{(p. p.)}.$$

Donc $B(f_\Gamma)$ est l'ensemble des sections de Γ, et $B(f_\Gamma, f_1, \ldots, f_k)$ est l'ensemble des sections qui vérifient $\int_X f_i(x, u(x))\, dx \leqq 1$, $i = 1, \ldots, k$. Ainsi l'utilisation des intégrandes normales permet une formulation commune des contraintes locales [du type $|u(x)| \leqq 1$] et des contraintes globales $\left[\text{du type } \int |u(x)|^2\, dx \leqq 1\right]$.

2. Géométrie et topologie

Pour la commodité de la démonstration, nous établirons d'abord les résultats dans le cas particulier où Y est compact, puis nous en déduirons le cas général. Les énoncés de (B) recouvrent donc ceux de (A).

(A) CAS OU L'ESPACE Y EST COMPACT.

Dans tout le (A), Y est supposé compact (polonais).

(A.1) *Propriétés de compacité.*

PROPOSITION 1. — *Si Y est compact et $f_1, \ldots, f_k$ des intégrandes normales,*

(i) M (déf. 1, § 1) *est un convexe compact métrisable;*

(ii) $M(f_1, \ldots, f_k)$ (déf. 4, § 1) *est un convexe compact métrisable.*

Comme (ii) résulte de (i), d'après la proposition 3, § 1, nous allons montrer (i).

Soit U un ultrafiltre sur M. Montrons qu'il admet une limite.

Pour tout $\mu \in M$, tout compact $K \subset X$ et toute fonction $f \in C_c(X \times Y)$ telle que (Support $f) \subset K \times Y$, on a

(1) $\left| \int_{X \times Y} f\, d\mu \right| \leqq m(K) \| f \|_\infty$, puisque μ se projette sur X selon m.

Posons $\nu(f) = \lim_U \int_{X \times Y} f\, d\mu$.

D'après (1), cette limite existe, et $|\nu(f)| \leqq m(K) \| f_\infty \|$. Comme ν est clairement linéaire, cette inégalité montre que ν est une mesure de Radon. Enfin, par passage à la limite,

$$\int_{X \times Y} f(x)\, d\nu(x, u) = \int_X f(x)\, dx.$$

Donc ν se projette selon m; ainsi $\nu \in M$ et $\nu = \lim_U \mu$.

La convexité de M est évidente. La métrisabilité résulte de la séparabilité de $C_c(X \times Y)$.

(A.2) *Points extrémaux.*

PROPOSITION 2. — *Soient K un convexe compact d'un espace topologique séparé, et $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des fonctions affines de K dans $]-\infty, +\infty]$ [c'est-à-dire $\varphi(ax + by) = a\varphi(x) + b\varphi(y)$ pour x et y dans K, a* et *b positifs, $a + b = 1$; l'égalité ayant lieu dans $]-\infty, +\infty]$]. Les points extrémaux de*

$$G = \{ x \in K;\ \varphi_i(x) \leqq 0 \text{ pour } i = 1, \ldots, n \}$$

sont des combinaisons convexes d'au plus $n + 1$ points extrémaux de K.

Démonstration. — Soit y un point extrémal de G, et soit $\{ I, J \}$ une partition de $\{ 1, \ldots, n \}$ telle que $\varphi_i(y) = 0$ pour $i \in I$ et $\varphi_i(y) < 0$ pour $i \in J$. Alors y est extrémal dans

$$H = \{ x \in K,\ \varphi_i(x) = 0 \text{ pour } i \in I \text{ et } \varphi_i(x) < 0 \text{ pour } i \in J \}$$

puisque $H \subset G$. On peut supposer que $I = \{ 1, \ldots, k \}$ et $J = \{ k + 1, \ldots, n \}$.

Pour $x_1, \ldots, x_m$ appartenant à K, notons $A(x_1, \ldots, x_m)$ la variété affine engendrée par $\{ x_1, \ldots, x_m \}$ et

$$I(x_1, \ldots, x_m) = \{ \Sigma_{i=1}^m \lambda_i x_i;\ \lambda_i > 0;\ \Sigma_1^m \lambda_i = 1 \}.$$

Soit $x_1, \ldots, x_m$ des points de K tels que $y \in I(x_1, \ldots, x_m)$. Comme $\varphi_i(y) < +\infty$, on a $\varphi_i(x_j) < +\infty$ pour $1 \leqq j \leqq m$. Supposons que

$\dim A(x_1, \ldots, x_m) \geqq n+1$. L'espace

$$F = \{ x \in A(x_1, \ldots, x_m);\ \varphi_1(x) = \ldots = \varphi_k(x) = 0 \}$$

est une variété affine de dimension $\geqq 1$ qui contient y. Soit $z = \sum_1^m \mu_i x_i$ un point de F distinct de y, soit

$$z_1 = (1+t)\, y - tz = \textstyle\sum_1^m ((1+t)\lambda_i - t\mu_i)\, x_i$$

et

$$z_2 = (1-t)\, y + tz = \textstyle\sum_1^m ((1-t)\lambda_i + t\mu_i)\, x_i \qquad \text{pour} \quad t \in \mathbf{R}.$$

Pour tout $t \in \mathbf{R}$ et $1 \leqq i \leqq k$, on a $\varphi_i(z_1) = \varphi_i(z_2) = 0$. Pour $|t|$ assez petit, on a $z_j \in \operatorname{conv}\{ x_1, \ldots, x_m \} \subset K$ et $\varphi_i(z_j) \leqq 0$ pour $k+1 \leqq i \leqq n$, et $j = 1, 2$. Donc, pour $|t|$ assez petit, z_1 et z_2 appartiennent à H, et $y = (1/2)(z_1 + z_2)$ n'est pas extrémal dans H. Ceci montre par l'absurde que $\dim A(x_1, \ldots, x_m) \leqq n$.

Soit $p = \sup \{ \dim A(x_1, \ldots, x_m);\ y \in I(x_1, \ldots, x_m) \}$, et soit $x_1, \ldots, x_m$ réalisant le « sup » c'est-à-dire tels que

$$y = \textstyle\sum_1^m \lambda_i x_i \ (\text{avec } \lambda_i > 0,\ \sum_1^m \lambda_i = 1)$$

et $\dim A(x_1, \ldots, x_m) = p$. Soit $C = A(x_1, \ldots, x_m) \cap K$; C est un convexe compact dans un espace de dimension p, et y appartient à C, donc d'après le théorème de Carathéodory (Pallu de la Barrière, [25], chap. 12, th. 7), on peut écrire

$$y = \textstyle\sum_1^r \mu_i a_i \qquad \text{avec} \quad \mu_i > 0, \qquad \sum_1^r \mu_i = 1, \qquad r \leqq p+1$$

et a_i extrémal dans C $(1 \leqq i \leqq r)$. Supposons que a_1 n'est pas extrémal dans K. Alors $a_1 = (b+c)/2$, où b et c sont deux points distincts de K qui n'appartiennent pas à $A(x_1, \ldots, x_m)$. D'où

$$y = \frac{1}{2}(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m) + \frac{1}{2}(\mu_2 a_2 + \ldots + \mu_r a_r) + \frac{\mu_1}{2}(b+c)$$

c'est-à-dire $y \in I(x_1, \ldots, x_m, a_2, \ldots, a_r, b, c)$, avec

$$\dim A(x_1, \ldots, x_m, a_2, \ldots, a_r, b, c) > \dim A(x_1, \ldots, x_m)$$

contrairement à l'hypothèse de maximalité faite pour $(x_1, \ldots, x_m)$. Ceci montre par l'absurde que a_1 est extrémal dans K, et de même pour $a_2, \ldots, a_r$. Comme

$$y = \textstyle\sum_1^r \mu_i a_i \qquad \text{avec} \quad r \leqq k+1 \leqq n+1,$$

on a montré un résultat un peu plus précis que l'énoncé.

Proposition 3 :

(i) *l'ensemble $\mathcal{E}(M)$ des points extrémaux de M est $\alpha(B)$* (déf. 3, § 1).

(ii) *Les points extrémaux de* $M(f_1, \ldots, f_k)$ (*où* $f_1, \ldots, f_k$ *sont des intégrandes normales*) *sont des combinaisons convexes d'au plus* $(k+1)$ *mesures de* $\alpha(B)$.

Comme (ii) résulte de (i) d'après la proposition 2, montrons (*i*) :

En vertu du théorème de désintégration des mesures $\mu \in M$ (*cf.* remarques qui suivent la définition 1), le convexe M est isomorphe au convexe des (classes modulo l'égalité p. p. d') applications mesurables de X dans $M_1^+(Y)$. Les points extrémaux sont donc, d'après le lemme 1 ci-dessous, les applications à valeurs dans les points extrémaux de $M_1^+(Y)$. Comme $\mathcal{E}(M_1^+(Y))$ est l'ensemble des masses de Dirac, les points extrémaux de M sont les $\int_X \delta_x \otimes \delta_{u(x)}\, dx$ avec $x \to \delta_{u(x)}$ mesurable de Y dans $M_1^+(Y)$ vague. Comme $M_1^+(Y)$ induit sur Y la topologie initiale de Y, $x \to u(x)$ est mesurable, et

$$\int_X \delta_x \otimes \delta_{u(x)}\, dx = \alpha(u).$$

LEMME 1. — *Soit K un convexe compact métrisable d'un e. l. c. s. Les points extrémaux de l'ensemble des* (*classes d'*) *applications mesurables de X dans K, sont les* (*classes d'*) *applications à valeurs dans les points extrémaux de K.*

Ce lemme est un cas particulier du théorème de CASTAING [11].

Démonstration :

1° Si $f(x)$ est extrémal pour presque tout x, alors f est évidemment extrémal.

2° Comme $\mathcal{E}(K)$ est un G_δ, $E = f^{-1}(K - \mathcal{E}(K))$ est mesurable. Supposons que $m(E) > 0$.

Soit F un compact inclus dans E tel que $m(F) > 0$ et f restreint à F est continue. Soit G la multi-application de X dans l'espace localement compact polonais $Z = \{(u, v) \in K \times K;\ u \neq v\}$ définie par

$$G(x) = \left\{(u, v) \in Z;\ f(x) = \frac{1}{2}(u+v)\right\},$$

qui est non vide pour tout $x \in F$. Le graphe de G est fermé dans $F \times Z$, donc G est mesurable. D'après le corollaire du théorème de section (chap. I, § 2), il existe une section mesurable de G. Il existe donc deux applications mesurables s_1 et s_2 de F dans K telles que, pour tout $x \in F$, on a $s_1(x) \neq s_2(x)$ et $f(x) = (1/2)(s_1(x) + s_2(x))$. Posons

$$h(x) = g(x) = f(x),$$

pour $x \in F$, et $h(x) = s_1(x)$ [resp. $g(x) = s_2(x)$], pour $x \notin F$. Alors h et g sont mesurables, $h \neq g$ et $f = (1/2)(h+g)$ contrairement à l'hypothèse sur F.

(A.3) *Propriétés de densité.* — Rappelons le théorème (*cf.* [21] ou [22]) :

THÉORÈME DE LJAPUNOV. — *Soit* $(r_1, \ldots, r_k)$ *des mesures bornées sans atomes sur une tribu* $\mathcal{T}$, *l'ensemble*

$$\{ (r_1(A), \ldots, r_k(A)) ; \mathrm{A} \in \mathcal{T} \} \text{ est un convexe compact de } \mathbf{R}^k.$$

Nous utiliserons le corollaire suivant :

COROLLAIRE. — *Soit, pour* $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq n$, *des fonctions* $f_{ij} \in L^1(dx)$, *et soit* $(\lambda_i)_{i=1,\ldots,p}$ *tels que* $\lambda_i \geq 0$, $\Sigma_i^p \lambda_i = 1$. *Si dx est sans atomes il existe une partition* $(E_i)_{i=1,\ldots,n}$ *de X en ensembles mesurables tels que*

$$\Sigma_{i=1}^p \lambda_i \int_X f_{ij}(x)\, dx = \Sigma_{i=1}^p \int_{E_i} f_{ij}(x)\, dx, \qquad \forall j \in \{ 1, \ldots, n \}.$$

Par récurrence, on se ramène au cas $p = 2$.

Soit r_j la mesure de Radon bornée définie par

$$r_j(A) = \int_A [f_{1,j}(x) - f_{2,j}(x)]\, dx \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Soit λ_1, λ_2 positifs tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. D'après le théorème de Ljapunov, il existe A tel que

$$\lambda_1 r_j(\mathrm{X}) + \lambda_2 r_j(\emptyset) = r_j(\mathrm{A}) \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

D'où

$$\lambda_1 \int_X [f_{1,j}(x) - f_{2,j}(x)]\, dx = \int_A [f_{1,j}(x) - f_{2,j}(x)]\, dx,$$

$$\lambda_1 \int_X f_{1,j}(x)\, dx + \lambda_2 \int_X f_{2,j}(x)\, dx = \int_A f_{1,j}(x)\, dx + \int_{X-A} f_{2,j}(x)\, dx.$$

PROPOSITION 4. — *Si m est sans atomes et* $f_1, \ldots, f_k$ *sont des intégrandes normales, l'image de* $B(f_1, \ldots, f_k)$ *par* α *est dense dans* $M(f_1, \ldots, f_k)$.

D'après le théorème de Krejn-Mil'man les combinaisons convexes de points extrémaux de $M(f_1, \ldots, f_k)$ sont denses dans $M(f_1, \ldots, f_k)$.

Compte tenu de la proposition 3, les mesures $\mu \in M(f_1, \ldots, f_k)$ de a forme

$$\mu = \Sigma_{\lambda=1}^n \lambda_i \, \alpha(u_i) \qquad (u_i \in B)$$

sont denses dans $M(f_1, \ldots, f_k)$.

Soit maintenant $\mathcal{V}$ un voisinage de $\mu = \Sigma_{i=1}^n \lambda_i \, \alpha(u_i)$, défini par

$$v \in \mathcal{V} \iff \left| \int_{X \times Y} g_j \, d\mu - \int_{X \times Y} g_j \, d\nu \right| < 1 \qquad = 1, \ldots, p),$$

où

$$g_j \in C_c(X \times Y).$$

Soit f_{ij} fonctions définies par

$$f_{i,j}(x) = g_j(x, u_i(x)) \quad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, p, \quad i = 1, \ldots, n;$$

$$f_{i,j}(x) = f_j(x, u_i(x)) \quad \text{pour} \quad j = p+1, \ldots, p+k, \quad i = 1, \ldots, n.$$

On applique le corollaire ci-dessus à ces fonctions : il existe une partition $(E_i)_{i=1,\ldots,n}$ mesurables, telle que pour $j = 1, \ldots, p$,

$$\Sigma_{i=1}^n \lambda_i \int_X g_j(x, u_i(x))\, dx = \Sigma_{i=1}^n \int_{E_i} g_j(x, u_i(x))\, dx;$$

pour $j = 1, \ldots, k$,

$$\Sigma_{i=1}^n \lambda_i \int_X f_j(x, u_i(x))\, dx = \Sigma_{i=1}^n \int_{E_i} f_j(x, u_i(x))\, dx.$$

Posons

$$u(x) = \Sigma_{i=1}^n 1_{E_i}(x)\, u_i(x),$$

on déduit des égalités précédentes que $\alpha(u) \in B(f_1, \ldots, f_k)$, car

$$\Sigma_{i=1}^n \lambda_i \int_X f_j(x, u_i(x))\, dx = \int_X f_j\, d\mu \leq 1 \qquad \text{et que} \quad \alpha(u) \in \mathcal{V}.$$

D'où la densité énoncée.

(B) Cas général.

On revient au cas général où Y est localement compact polonais, non nécessairement compact. On note $\tilde{Y} = Y \cup \{\infty\}$. le compactifié d'Aleksandrov de Y; $\tilde{Y}$ est un compact polonais. On peut construire des espaces de mesures paramétrées sur $X \times Y$ d'une part et sur $X \times \tilde{Y}$ d'autre part. On distinguera à l'aide d'un signe $\sim$ les espaces construits sur $X \times \tilde{Y}$ selon les définitions 1, 2, 3, 4, du paragraphe 1. Par exemple :

$$M = \{\mu,\ \mu \text{ mesure de Radon positive sur } X \times Y \text{ qui se projette sur } X \text{ selon } m\},$$

$$\tilde{M} = \{\mu,\ \mu \text{ mesure de Radon positive sur } X \times \tilde{Y} \text{ qui se projette sur } X \text{ selon } m\},$$

$$B = \{u,\ u \text{ application mesurable de } X \text{ dans } Y\},$$

$$\tilde{B} = \{u;\ u \text{ application mesurable de } X \text{ dans } \tilde{Y}\}.$$

On a une injection canonique de B dans $\tilde{B}$, et une injection naturelle de M dans $\tilde{M}$, puisque toute fonction de $C_c(X \times \tilde{Y})$ restreinte à $X \times Y$ est intégrable pour tout $\mu \in M$.

(B.1) *Propriété de compacité.*

PROPOSITION 5. — *Soit $f_1, \ldots, f_k$ des intégrandes normales de $X \times Y$ dans $[0, +\infty]$ telles que*

$$\Sigma_{i=1}^{k} f_i(x, u) \to +\infty \quad \textit{quand} \quad u \to \infty \text{ (p. p. } x),$$

alors $M(f_1, \ldots, f_k)$ est convexe compact métrisable.

Comme $M(f_1, \ldots, f_k) = M(f_1, \ldots, f_k, g)$, où g est l'intégrande normale

$$g = \frac{1}{k} \Sigma_{i=1}^{k} f_i,$$

on peut supposer que $f_1(x, u) \to +\infty$ quand $u \to \infty$.

Soit g_1 la fonction de $X \times \tilde{Y}$ dans $[0, +\infty]$ définie par

$$g_1(x, u) = \begin{cases} f_1(x, u) & \text{quand } u \neq \infty, \\ +\infty & \text{quand } u = \infty. \end{cases}$$

Comme pour presque tout x, f_1 est égale à une borélienne, g est égale pour presque tout x à une borélienne. De plus $u \to g(x, u)$ de $\tilde{Y}$ dans $[0, +\infty]$ est s. c. i. pour presque tout x. Donc g est une intégrande normale, d'après le théorème 2 (§ 3, chap. I).

De même les fonctions g_i suivantes (pour $i = 2, \ldots, k$) sont des intégrandes normales de $X \times \tilde{Y}$ dans $[0, +\infty]$:

$$g_i(x, u) = \begin{cases} f_i(x, u) & \text{quand } u \neq \infty, \\ 0 & \text{quand } u = \infty. \end{cases}$$

A toute mesure $\mu \in \tilde{M}(g_1, \ldots, g_k)$, on associe sa restriction θ (μ à l'ouvert $X \times Y$ de $X \times \tilde{Y}$. Comme $g_1(x, \infty) = +\infty$, une mesure $\mu \in \tilde{M}(g_1, \ldots, g_k)$ est portée par $X \times Y$. Donc $\theta(\mu)$ se projette encore sur X selon la mesure m et $\langle f_i, \theta(\mu) \rangle = \langle g_i, \mu \rangle \leq 1$. Autrement dit, $\theta(\mu)$ appartient à $M(f_1, \ldots, f_k)$. Or θ est continue pour les topologies vagues [par l'inclusion naturelle de $C_c(X \times Y)$ dans $C_c(X \times \tilde{Y})$]. D'autre part, θ est surjectif de $\tilde{M}(g_1, \ldots, g_k)$ sur $M(f_1, \ldots, f_k)$.

Enfin $\tilde{M}(g_1, \ldots, g_k)$ est compact, d'après la proposition 1. Donc $M(f_1, \ldots, f_k)$ est compact comme image continue d'un compact.

(B.2) *Points extrémaux.*

PROPOSITION 6. — *Les points extrémaux de $M(f_1, \ldots, f_k)$, où $f_1, \ldots, f_k$ sont des intégrandes normales de $X \times Y$ dans $[0, +\infty]$, sont de la forme*

$$\mu = \Sigma_{i=1}^{k+1} \lambda_i \, \alpha(u_i), \quad \lambda_i \geq 0, \qquad \Sigma_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1,$$

où les u_i sont mesurables de X dans Y.

Soit g l'application de $X \times \tilde{Y}$ dans $[0, +\infty]$ définie par

$$g(x, u) = \begin{cases} +\infty & \text{si } u = \infty, \\ 0 & \text{si } u \neq \infty. \end{cases}$$

Et soit $g_1, \ldots, g_k$ les intégrandes normales de $X \times \tilde{Y}$ dans $[0, +\infty]$ obtenues en prolongeant $f_1, \ldots, f_k$ par 0 pour les points (x, ∞) (*cf.* démonstration de la proposition 5).

Le convexe $M(f_1, \ldots, f_k)$ est isomorphe au convexe,

$$H = \left\{ \mu \in \tilde{M};\ \int_{X \times Y} g_i \, d\mu \leq 1,\ i = 1, \ldots, k, \text{ et } \int_{X \times Y} g \, d\mu < 1 \right\}.$$

Car la dernière contrainte est vérifiée si, et seulement si, μ est portée par $X \times Y$. Or les points extrémaux de H sont des combinaisons convexes de points extrémaux de $\tilde{M}$, d'après la proposition 2. Or les points extrémaux de $\tilde{M}$ sont les $\alpha(u)$ pour $u \in \tilde{B}$, d'après la proposition 3. Enfin une combinaison convexe

$$\Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha(u_i) \quad \text{où } \lambda_i > 0, \qquad \text{et} \qquad \Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \quad (\text{et } n \leq k + 1)$$

appartient à H si, et seulement si, $\langle \alpha(u_i), g \rangle < +\infty$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Donc si, et seulement si, $u_i \in B$ pour $i = 1, \ldots, n$.

(B.3) *Propriété de densité.*

PROPOSITION 7. — *Soit $f_1, \ldots, f_k$ des intégrandes normales de $X \times Y$ dans $[0, +\infty]$ telles que*

$$\Sigma_{i=1}^{k} f_i(x, u) \to +\infty \qquad \textit{quand} \quad u \to \infty.$$

Si m est sans atomes l'image de $B(f_1, \ldots, f_k)$ par α est dense dans $M(f_1, \ldots, f_k)$.

Reprenons les notations de la démonstration de la proposition 5. Comme $\tilde{B}(g_1, \ldots, g_k)$ est dense dans $\tilde{M}(g_1, \ldots, g_k)$ d'après la proposition 4, et comme θ est continue l'image de $\tilde{B}(g_1, \ldots, g_k)$ par θ est dense. Or celle-ci n'est autre que $B(g_1, \ldots, g_k)$. En effet $g_1(x, \infty) = +\infty$ p. p. x donc

$$\int_X g_1(x, u(x))\, dx \leq 1 \qquad \text{implique} \quad u(x) \neq \infty \text{ p. p. } x.$$

III. Images des espaces de mesures paramétrées

Nous allons introduire une relation de domination entre fonctions (§ 1) qui fournit des applications affines continues ou s. c. i. sur les espaces de mesures paramétrées (§ 1, prop. 1; § 3, prop. 3). En considérant les images dans $\mathbf{R}^h$ (§ 2), ou dans L^1 (§ 3), de ces espaces par ces applications, nous obtiendrons différents résultats dont l'énoncé ne fait plus intervenir les mesures paramétrées.

1. Relation de majoration intégrale

DÉFINITION 1. — *Soient f et g deux applications de* $X \times Y$ *dans* $[0, +\infty]$. *On dit que g majore intégralement f, et on écrit* $g \gg f$ *si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une fonction positive* $b \in L^1(m)$ telle que

$$f(x, u) \geqq b(x) \quad \Rightarrow \quad f(x, u) \leqq \varepsilon\, g(x, u) \quad (\text{p. p. } x).$$

Il est équivalent de dire que pour tout ε, *il existe* $a \in L^1(m)$ *tel que* $f \leqq a + \varepsilon g$.

Exemples :

1° Si m est finie et si $g(x, u)/f(x, u) \to \infty$ quand $f(x, u) \to \infty$, c'est-à-dire si $\forall n$, $\exists p$ tel que $f(x, u) \geqq p \Rightarrow g(x, u) \geqq nf(x, u)$, alors $f \ll g$.

2° Si $0 \leqq h(x, u) \leqq a(x)$, avec $a \in L^1(m)$ (en particulier si m est finie et h bornée), on a $h \ll g$ pour tout g, en particulier pour $g = 0$.

Propriétés élémentaires. — Soient f, g, h trois applications de $X \times Y$ dans $[0, +\infty]$.

1° Si $a \in L^\infty(m)$ et $a \geqq 0$; si $f \gg g$, alors $f \gg ag$.

2° Si $f \geqq g$ et $g \gg h$, alors $f \gg h$.

3° Si $f \leqq h$ et $g \gg h$, alors $g \gg f$.

4° Si $f \gg g$ et $g \gg h$, alors $f \gg h$: $\gg$ est transitive.

5° On a $f \gg f$ si, et seulement si, il existe $a \in L^1(m)$ tel que $f(x, u) \leqq a(x)$ c'est-à-dire si $f \ll 0$.

6° Si $f \geqq g$ et $h \gg k$, et si λ et μ sont des réels positifs ($\mu > 0$)

$$\lambda f + \mu h \gg \lambda g + \mu k.$$

La « majoration intégrale » entraîne des propriétés de continuité que nous allons établir.

PROPOSITION 1. — *Soit f une application borélienne de* $X \times Y$ *dans* $[-\infty, +\infty]$ *s. c. s. par rapport à la deuxième variable, soit* $f^+ = \sup(0, f)$ *et* $f^- = f^+ - f$. *Si* $f^+ \ll g$, *alors pour tout* $\mu \in M(g)$, *on a* $f^+ \in L^1(\mu)$, *et on pose* $\int f\, d\mu = \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu$: *l'application* $\mu \to \int f\, d\mu$ *est s. c. s. de* $M(g)$ *dans* $[-\infty, +\infty[$.

Démonstration. — Comme f^- est une intégrande positive normale sur $X \times Y$, l'application $\mu \to \int f^-\, d\mu$ est s. c. i. (prop. 3, § 1, chap. II).

Comme pour tout $(x, u) \in X \times Y$,

$$f^+(x, u) \leqq \sup(b_\varepsilon(x), \varepsilon\, g(x, u)),$$

on a $f^+ \in L^1(\mu)$ pour tout $\mu \in M(g)$. On peut supposer $b_\varepsilon \geqq 0$; soit

$$h(x, u) = \operatorname{Inf}(f^+(x, u), b_\varepsilon(x)).$$

On a $h \leqq f^+ \leqq h + \varepsilon\, g$. Donc, pour tout $\mu \in M(g)$,

$$0 \leqq \int h\, d\mu \leqq \int f^+\, d\mu \leqq \int h\, d\mu + \varepsilon.$$

Comme $b_\varepsilon - h$ est une intégrande positive normale, l'application

$$\mu \to \int (b_\varepsilon - h)\, d\mu = \int b_\varepsilon(x)\, dx - \int h\, d\mu$$

est s. c.i. de $M(g)$ dans $\mathbf{R}^+$. L'application $\mu \to \int f^+\, d\mu$ est donc s. c. s. comme enveloppe inférieure d'applications s. c. s.

COROLLAIRE 1. — *Soient f une fonction de Carathéodory de $X \times Y$ dans $[-\infty, +\infty]$,* et *g une intégrande normale de $X \times Y$ dans $[0, +\infty]$ telle que $|f| \leqslant g$. Alors, pour tout $\mu \in M(g)$, f est μ-intégrable, et $\mu \to \int_{X \times Y} f\, d\mu$ est continue de $M(g)$ dans $\mathbf{R}$.*

Il suffit d'appliquer la proposition 1 à f et à $-f$ puisque, quite à modifier f sur $N \times Y$ où $N \subset X$ est un ensemble négligeable, f est borélienne d'après le théorème 1 (ou le théorème 2 puisque $[-\infty, +\infty]$, et $[0, +\infty]$ sont homéomorphes).

2. Extension du théorème de Ljapunov

Dans tout ce paragraphe on suppose m sans atomes.

THÉORÈME 3. — *Supposons la mesure $m\,(= dx)$ sur X sans atomes Soit $f_1, \ldots, f_k$ des fonctions de Carathéodory de $X \times Y$ dans $[-\infty, +\infty]$, soit $g_1, \ldots, g_n$ des intégrandes normales de $X \times Y$* dans $[0, +\infty]$, et soit *$h = \sum_{i=1}^n g_i$. Si $\lim_{u \to \infty} h(x, u) = +\infty$* (p. p.), *et si $|f_j| \leqslant h$* pour *$j = 1, \ldots, k$, alors l'ensemble des points de $\mathbf{R}^k$, de la forme*

$$\left(\int_X f_1(x, u(x))\, dx, \ldots, \int_X f_k(x, u(x))\, dx\right),$$

où u est mesurable de X dans Y et vérifie

$$\int_X g_i(x, u(x))\, dx \leqq 1 \qquad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n,$$

est un convexe compact de $\mathbf{R}^k$.

Remarque. — Si Y est compact, on peut ne prendre aucune contrainte (« pas de g_i »). Il suffit que $f_i \ll 0$, c'est-à-dire que $|f_i(x, u)| \leqq a_i(x)$ avec $a_i \in L^1(m)$ (pour $i = 1, \ldots, k$).

Démonstration. — Posons $K = M(g_1, \ldots, g_n)$ et $G = B(g_1, \ldots, g_n)$ (*cf.* déf. 3, 4, § 1, chap. II). D'après la proposition 5 (§ 2, chap. II), K est un convexe compact. D'après le corollaire de la proposition 1 ci-dessus, l'application φ suivante est définie, linéaire et continue de K dans $\mathbf{R}^k$,

$$\Phi(\mu) = \left(\int_{X\times Y} f_1(x, u)\, d\mu(x, u), \ldots, \int_{X\times Y} f_k(x, u)\, d\mu(x, u)\right).$$

Il en résulte que $\Phi(K)$ est un convexe compact. Montrons que $\Phi(K) = \Phi(\alpha(G))$ (pour α, *cf.* déf. 3, § 1, chap. II). Soit $\mu_0 \in K$, et soit $\Phi(\mu_0) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbf{R}^k$. L'ensemble

$$H = \left\{\begin{array}{l} \mu \in M; \quad \displaystyle\int_{X\times Y} f_i(x, u)\, d\mu(x, u) = \lambda_i \text{ pour } i = 1, \ldots, k \\ \qquad\quad \displaystyle\int_{X\times Y} g_i(x, u)\, d\mu(x, u) \leqq 1 \text{ pour } i = 1, \ldots, n \end{array}\right\}$$

est un convexe compact d'après la proposition 1 ci-dessus et la proposition 3 (§ 1, chap. I). Les points extrémaux de H sont des combinaisons convexes de $n + k + 1$ points extrémaux de M d'après la proposition 6 (§ 2, chap. II). Or les points extrémaux de M sont les éléments de $\alpha(B)$ (B, ensemble des applications mesurables de X dans Y) d'après la proposition.

Comme H est non vide ($\mu_0 \in H$), H a au moins un point extrémal. Soit

$$\nu = \Sigma_{i=1}^{n+k+1}\, \theta_i \int_X \delta_x \otimes \delta_{u_i(x)}\, dx \text{ un tel point.}$$

On a donc

$$\int_{X\times Y} f_j\, d\nu = \Sigma_{i=1}^{n+k+1}\, \theta_i \int_X f_j(x, u_i(x))\, dx = \lambda_j, \qquad j = 1, \ldots, k;$$

$$\int_{X\times Y} g_j\, d\nu = \Sigma_{i=1}^{n+k+1}\, \theta_i \int_X g_j(x, u_i(x))\, dx \leqq 1, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

En appliquant le corollaire du théorème de Ljapunov (chap. II, § 2, A.3) comme dans la démonstration de la proposition 4 (§ 2, chap. II), on obtient une fonction v mesurable de X dans Y telle que

$$\int_X f_j(x, v(x))\, dx = \lambda_j \qquad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, k,$$

$$\int_X g_j(x, v(x))\, dx \leq 1 \qquad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, n.$$

Autrement dit, $v \in B(g_1, \ldots, g_n)$ et $\Phi(\alpha(v)) = \Phi(\mu_0)$, ce que nous voulions montrer.

COROLLAIRE (*Notations et hypothèses du théorème* 3). — *Soit A une application continue de $\mathbf{R}^k$ dans $\mathbf{R}$. Le problème :*

$$\textit{maximiser } A\left(\int_X f_1(x, u(x))\, dx, \ldots, \int_X f_k(x, u(x))\, dx\right),$$

sous les contraintes

$$\int_X g_i(x, u(x))\, dx \leq 1,$$

pour $i = 1, \ldots, n$, a une solution optimale.

Remarque. — Le théorème 3 est une extension du théorème de Ljapunov, On suppose $|m|$ finie; on prend pour Y l'espace compact $\{0, 1\}$. On ne met pas de contraintes ($n = 0$); l'ensemble des fonctions mesurables de X dans $\{0, 1\}$ est l'ensemble des fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables; on prend $f_1(x, u) = \ldots = f_k(x, u) = u$; le théorème 3 se réduit alors au théorème de Ljapunov.

PROPOSITION 1. — (*On suppose m sans atomes.*) *Soit f une application borélienne de* $X \times Y$ dans $[-\infty, +\infty]$ *telle que* $u \to f(x, u)$ *est s. c. s.* (p. p.), *et soient $g_1, \ldots, g_n$ des intégrandes normales de $X \times Y$ dans* $[0, +\infty]$. *On suppose que $f^+ \leqslant (g_1 + \ldots + g_n)$ et que*

$$\lim_{u \to \infty} (g_1 + \ldots + g_n)(x, u) = +\infty \text{ (p. p.)},$$

alors le problème P suivant a une solution optimale :

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} \textit{maximiser} \displaystyle\int_X f(x, u(x))\, dx \\ \textit{pour } u \textit{ mesurable de } X \textit{ dans } Y \textit{ telle que} \\ \displaystyle\int_X g_i(x, u(x))\, dx \leq 1 \qquad \textit{pour} \quad i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Démonstration. — D'après la proposition 5 (§ 2, chap. II), $M(g_1, \ldots, g_n)$ est un convexe compact. Comme $\mu \to \int_{X \times Y} f\, d\mu$ est linéaire s. c. s. d'après la proposition 1 (§ 1, chap. III), elle attend son maximum en un point extrémal ν au moins. D'après la proposition 6 (§ 2, chap. II), on a $\nu = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i\, \alpha(u_i)$. On applique encore le corollaire du théorème de Ljapunov (chap. II, § 2, A.3) comme dans la démonstration de la proposition 4 (§ 2, chap. II), et on trouve v tel que

$$\int_X f(x, v(x))\, dx = \int_{X \times Y} f\, d\nu = \max_{\mu \in M(g_1, \ldots, g_n)} \int_{X \times Y} f\, d\mu$$

$$\geqq \sup_{u \in B(g_1, \ldots, g_n)} \int_X f(x, u(x))\, dx,$$

$$\int_X g_j(x, u(x))\, dx = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \int_X g_j(x, u_i(x))\, dx \leqq 1,$$

c'est-à-dire une solution optimale de (P).

Exemple 1. — Les premiers résultats dans la direction de la proposition 1 sont dus à AUMANN et PERLES [1]. Montrons à titre d'exemple comment ils découlent de la proposition 1.

(*a*) (« *Main theorem* ».) *Soit* $f : [0, 1] \times (\mathbf{R}^+)^n \to [0, +\infty[$ *une application borélienne telle que*

$$u \to f(t, u) \text{ est s. c. s. et croissante pour tout } t \in [0, 1].$$

Supposons que, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, b \in L^1(0, 1)$, *telle que*

$$\| u \| \geqq b(x) \quad \Rightarrow \quad f(x, u) \leqq \varepsilon \| u \|$$

[où $\| u \| = (\sum_{i=1}^n u_i^2)^{1/2}$ est la norme euclidienne dans $(\mathbf{R}^+)^n$].

Soit (P) *le problème :*

$$\text{maximiser} \int_0^1 f(t, u(t))\, dt \qquad \text{avec} \qquad \int_0^1 u(t)\, dt = a \qquad \text{pour} \quad u \in U,$$

où U est l'ensemble des applications mesurables de $[0, 1]$ *dans* $(\mathbf{R}^+)^n$.

Alors (P) *a une solution optimale*

Démonstration. — L'hypothèse de croissance de f permet de remplacer

$$\int_0^1 u(t)\, dt = a \qquad \text{par} \qquad \int_0^1 u(t)\, dt \leqq a.$$

Le seul point à vérifier est que $f \ll \varphi$, où $\varphi : (t, u) \to \| u \|$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $b_1 \in L^1(0, 1)$ (avec $b_1 \geqq 0$) tel que

$$\| u \| \geqq b_1(x) \;\Rightarrow\; f(x, u) \leqq \| u \|, \qquad \text{et} \qquad b \in L^1(0, 1) \qquad (\text{avec } b \geqq 0)$$

tel que

$$\| u \| \geqq b(x) \quad \Rightarrow \quad f(x, u) \leqq \varepsilon \| u \|.$$

On a, en posant

$$v(x) = (b(x) + b_1(x), \quad \ldots, \quad b(x) + b_1(x)) \in (\mathbf{R}^+)^n,$$
$$f(x, v) \leqq \| v \| \leqq \sqrt{n}\,(b(x) + b_1(x));$$

par croissance, on a

$$f(x, w) \leqq \sqrt{n}\,(b(x) + b_1(x)) \qquad \text{dès que} \quad w \leqq v$$

[c'est-à-dire dès que

$w_1 \leqq b(x) + b_1(x), \quad \ldots, \quad w_n \leqq b(x) + b_1(x)$ avec $w = (w_1, \ldots, w_n)$].

Donc

$$f(x, u) > \sqrt{n}\,(b(x) + b_1(x)) \qquad \text{implique} \quad \| u \| \geqq b(x).$$

Donc

$$f(x, u) > \sqrt{n}\,(b(x) + b_1(x) \qquad \text{implique} \quad f(x, u) \leqq \varepsilon \| u \|.$$

(*b*) Le théorème 6.1 établit un résultat semblable sous les hypothèses (H_1) (ci-dessus) et (H_2) : Pour tout $a \in L^1(0, 1)$, il existe $b \in L^1(0, 1)$, tel que $[\| u \| \geqq a(t)] \Rightarrow [| f(x, t) | \leqq b(t)]$. On voit facilement que $(H_1) + (H_2)$ est équivalent à $f \ll \varphi$ $(\varphi(t, u) = \| u \|)$.

Exemple. 2. — Soit dt la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$.

Soit A l'ensemble des mesures de Radon sur $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_u$ positives qui se projettent sur $\mathbf{R}_t$ selon dt, et qui vérifient

$$(\text{Support } \mu) \subset F,$$
$$\int_{\mathbf{R}^2} | u |^2 \, d\mu(t, u) \leqq k,$$

où F est un fermé de $\mathbf{R}^2$, et k un réel positif. Soit B l'ensemble des $v \in L^2(\mathbf{R})$ tels que $\| v \|_2 \leqq k$ et $(t, v(t)) \in F$ dt-presque-partout.

Comme $A = M(F)$ avec $F(x, u) = | u |^2$ si $(x, u) \in F$ et $+\infty$ sinon, Il résulte de ce qui précéde que :

— A est un convexe compact métrisable pour la topologie vague;

— l'ensemble $\left\{ \int_{\mathbf{R}} \delta_t \otimes \delta_{u(t)}, \; u \in A \right\}$ est dense dans A;

— Les points extrémaux de A sont de la forme

$$\mu = \theta \int_{\mathbf{R}} \delta_t \otimes \delta_{u(t)} \, dt + (1 - \theta) \int_{\mathbf{R}} \delta_t \otimes \delta_{v(t)} \, dt$$

où u et v sont des fonctions mesurables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et $0 \leqq \theta \leqq 1$.

Exemple 3. — Soit $u_0 \in L^1(\mathbf{R})$. Il existe une application mesurable u de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $u \in B_{1/2}$, où $B_{1/2} = \left\{ v : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ mesurable}; \int_{\mathbf{R}} \sqrt{|v(t)|}\, dt \leq 1 \right\}$ et telle que $\| u - u_0 \|_1 \leq \| v - v_0 \|_1$, $\forall v \in B_{1/2}$.

---

3. Compacts faibles de $L^1(X, m, \mathbf{R}^l)$

Dans tout ce paragraphe, on prend pour Y l'espace $\mathbf{R}^l$. Pour $u \in \mathbf{R}^l$, on note $|u|$ la norme euclidienne de u : $|u| = (u_1^2 + \ldots + u_l^2)^{1/2}$.

(A) *Régularisée convexe s. c. i. d'une intégrande positive normale par rapport à la deuxième variable.*

DÉFINITION 1. — Soit Φ l'ensemble des fonctions affines de $\mathbf{R}^l$ dans $\mathbf{R}$. Pour $g : \mathbf{R}^l \to [0, +\infty]$, on note g^{**} (régularisée convexe s. c. i. de g) (*cf.* MOREAU [24]) l'enveloppe supérieure des fonctions affines minorant g : c'est la plus grande fonction convexe s. c. i. minorant g. Pour $f : X \times \mathbf{R}^l \to [0, +\infty]$ on note encore f^{**} (par abus de langage) la régularisée convexe s. c. i. de f par rapport à u c'est-à-dire

$$f^{**}(x, u) = \sup_{\varphi \leq f(x, .), \varphi \in \Phi} \varphi(u).$$

LEMME (ROCKAFELLAR [26]). — *Si Γ est une multi-application mesurable à valeurs fermées de X dans $\mathbf{R}^l$, alors $x \to \overline{\text{conv}}\, \Gamma(x)$ est mesurable.*

D'après la remarque 3 du théorème 2 (chap. 1, § 3), il suffit de montrer que $x \to \text{conv}\, \Gamma(x)$ est mesurable.

Soit

$$\Lambda_{l+1} = \{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_{l+1}) \in \mathbf{R}^{l+1}; \alpha_i \geq 0 \; \textstyle\sum_{i=1}^{l+1} \alpha_i = 1 \},$$

et soit φ l'application continue de $\Lambda_{l+1} \times (\mathbf{R}^l)^{l+1}$ dans $\mathbf{R}^l$, définie par

$$\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_{l+1}, y_1, \ldots, y_{l+1}) = \textstyle\sum_{i=1}^{l+1} \alpha_i y_i.$$

D'après le théorème de Carathéodory (*cf.* prop. 2, démons., chap. II, § 2), $\varphi(\Lambda_{l+1} \times (\Gamma(x)^{l+1})$ est convexe, et, comme il contient $\Gamma(x)$, on a

$$\text{conv}\, \Gamma(x) = \varphi(\Lambda_{l+1} \times \Gamma(x)^{l+1}).$$

La multi-application $x \to \Lambda_{l+1} \times (\Gamma(x))^{l+1}$ est mesurable, donc aussi

$$x \to \varphi(\Gamma_{l+1} \times \Gamma(x)^{l+1}).$$

Remarque. — Le lemme est encore vrai lorsqu'on remplace $\mathbf{R}^l$ par un Fréchet séparable F, car

$$\text{conv}\, \Gamma(x) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \psi_n(\Lambda_n \times (\Gamma(x))^n),$$

où ψ_n est l'application continue de $\Lambda_n \times F^n$ dans F définie par

$$\psi_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, y_1, \ldots, y_n) = \Sigma_{i=1}^n \alpha_i y_i.$$

[Une réunion de multi-applications mesurables est mesurable, et on applique à nouveau la remarque 3 du théorème 2 (chap. I, § 3).] Ceci étend le résultat de ROCKAFELLAR.

PROPOSITION 1. — *Si $f : X \times \mathbf{R}^l \to [0, +\infty]$ est une intégrande normale, f^{**} aussi.*

Démonstration. — Pour tout x, $\mathrm{Epi}_{f^{**}}(x)$ est l'enveloppe convexe fermée de $\mathrm{Epi}_f(x)$. (Pour la définition de Epi_f, *cf.* th. 2, chap. I.) Comme la multi-application $x \to \mathrm{Epi}_f(x)$ est mesurable, la multi-application $x \to \overline{\mathrm{conv}}\,\mathrm{Epi}_f(x)$ est mesurable (d'après le lemme). Donc f^{**} est une intégrande normale d'après le théorème 2 (chap. I, § 3).

PROPOSITION 2. — *Soient f et g deux intégrandes normales de $X \times Y$ dans $[0, +\infty]$. Si f majore intégralement g, f^{**} majore intégralement g^{**}.*

Comme $g \geqq g^{**}$, $f \gg g$ implique $f \gg g^{**}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $a \in L^1(m)$, $a \geqq 0$, tel que

$$g^{**}(x, u) \geqq a(x) \quad \Rightarrow \quad g^{**}(x, u) \leqq \varepsilon f(x, u).$$

Comme f est positive, on a, pour tout (x, u),

$$f(x, u) \geqq \frac{1}{\varepsilon}(g^{**}(x, u) - a(x)),$$

d'où

$$f^{**}(x, u) \geqq \frac{1}{\varepsilon}(g^{**}(x, u) - a(x))$$

puisque $u \to f^{**}(x, u)$ est la plus grande fonction convexe s. c. i. minorant f. D'où

$$g^{**}(x, u) \leqq \varepsilon f^{**}(x, u) + a(x).$$

(B) *Barycentre paramétré.* — La définition suivante est justifiée par les remarques qui suivent la proposition 2 (§ 1, chap. II).

DÉFINITION 2. — *Pour $\mu \in M$ tel que $\int |u|\, d\mu(x, u) < +\infty$, on note v la fonction mesurable de X dans $\mathbf{R}^l$, définie par $v_\mu(x) = \int_{\mathbf{R}^l} u\, d\mu_x(u)$ $\left(\text{où } \mu = \int_X \delta_x \otimes \mu_x\, dx\right)$. On dit que v_μ est le barycentre paramétré de μ.*

Remarque. — Pour $u \in L^1(X, m, \mathbf{R}^l)$, on a $v_{\alpha(u)} = u$ (*cf.* pour la définition de α, chap. II, § 1, déf. 3).

PROPOSITION 3. — *Si g est une intégrande normale de $X \times \mathbf{R}^l$ dans $[0, +\infty]$ qui majore intégralement la fonction $(x, u) \to |u|$, alors $\mu \to v_\mu$ est continue de $M(g)$ dans $L^1(X, m, \mathbf{R}^l)$ faible.*

Soit $a \in L^\infty(X, m, \mathbf{R}^l)$, il suffit de montrer (et il faut) que $\mu \to \int_X a(x) . v_\mu(x)\, dx$ (où le point désigne le produit scalaire dans $\mathbf{R}^l$) est continue de $M(g)$ dans $\mathbf{R}$. Soit la fonction de Carathéodory h : $(x, u) \to a(x) . u$ de $X \times \mathbf{R}^l$ dans $\mathbf{R}$. Comme $|h(x, u)| \leq \| a \|_\infty |u|$, on a $h \ll g$. La continuité cherchée résulte donc de la proposition 1 (§ 1).

(C) *Trois lemmes techniques pour établir un rapport entre mesures paramétrées et régularisée convexe s. c. i. par rapport à la deuxième variable.*

LEMME 1. — *Soit $h : \mathbf{R}^l \to [0, +\infty]$ une application s. c. i. telle que $\lim_{|u| \to \infty} h(u)/|u| = +\infty$, alors pour tout $v \in \mathbf{R}^l$ tel que $h^{**}(v) < +\infty$ l'ensemble des mesures $\lambda \in M_1^+(\mathbf{R}^l)$ telles que*

$$h^{**}(v) = \int_{\mathbf{R}^l} h(u)\, d\lambda(u),$$

et

$$\int_{\mathbf{R}^l} u\, d\lambda(u) = v$$

est un convexe compact non vide.

La deuxième condition a un sens, car la première implique que $\int_{\mathbf{R}^l} |u|\, d\lambda(u) < +\infty$. Posons

$$k(v) = \operatorname{Inf}\left\{ \int_{\mathbf{R}^l} h(u)\, d\lambda(u);\ \lambda \in \mathrm{M}_1^+(\mathbf{R}^l), \int_{\mathbf{R}^l} |u|\, d\lambda(u) < +\infty \text{ et } v = \int_{\mathbf{R}^l} u\, d\lambda(u) \right\}.$$

La fonction k est convexe, minore h, et majore toutes les fonctions affines qui minorent h. On va montrer que k est s. c. i. ce qui impliquera $k = h^{**}$ par définition de h^{**} [déf. 1 de (A)].

Comme $h = \sup h_n$ avec $h_n \in C_c(\mathbf{R}^l)$ et $h_n \geq 0$, et que

$$\lambda \to \int h_n(u)\, d\lambda(u)$$

est continue de $M^+(\mathbf{R}^l)$ dans $\mathbf{R}^+$, comme

$$\int h(u)\, d\lambda(u) = \sup_{n \in \mathbf{N}} \int h_n\, d\lambda,$$

l'application $\lambda \to \int_{\mathbf{R}^l} h(u)\, d\lambda(u)$ est s. c. i. de $M_1^+(\mathbf{R}^l)$ dans $[0, +\infty]$ pour tout $A \in [0, +\infty[$, $K(A) = \left\{ \lambda \in M_1^+(\mathbf{R}^l);\ \int_{\mathbf{R}^l} h(v)\, d\lambda(v) \leqq A \right\}$ est un convexe compact de $M_1^+(\mathbf{R}^l)$, pour tout $\lambda \in K(A)$, on a $\int_{\mathbf{R}^l} |u|\, d\lambda(u) < +\infty$ et $\lambda \to v_\lambda = \int_{\mathbf{R}} u\, d\lambda(u)$ est continue de $K(A)$ dans $\mathbf{R}$. Il résulte de ces propriétés (par un simple raisonnement de topologie générale) que k est s. c. i. (donc $k = h^{**}$) et que

$$\left\{ \lambda \in M_1^+(\mathbf{R}^l);\ \int_{\mathbf{R}^l} h(v)\, d\lambda(v) = k(v) = h^{**}(v) \right\}$$

est un compact non vide dès que $h^{**}(v) < +\infty$.

LEMME 2. — *Soit g une intégrande normale telle que $g \gg |u|$, pour tout compact $K \subset X$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé F et une fonction $\varphi : \mathbf{R}^l \to [0, +\infty[$ telle que $\varphi(u)/|u| \to \infty$ quand*

$$|u| \to \infty \qquad \text{et} \qquad g(x, u) \geqq \varphi(u), \quad \forall\ (x, u) \in F \times \mathbf{R}^l.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $a_n \in L^1(X)$ tel que

$$|u| \geqq a_n(x) \quad \Rightarrow \quad |u| \leqq \frac{1}{n}\, g(x, u).$$

Soient K un compact et $\varepsilon > 0$, il existe un fermé $F \subset K$ tel que $m(K - F) < \varepsilon$, et tous les a_n sont bornés sur F. Si

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \| a_n \|_\infty = A < +\infty \qquad (\text{où } \| a_n \|_\infty = \sup_{x \in F} | a_n(x) |)$$

on a

$$f(x, u) = 0 \qquad \text{pour} \quad |u| \geqq A \quad \text{et} \quad x \in F.$$

On pose, par exemple, $\varphi(u) = \sup(0, |u|^2 - A^2)$. Sinon, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer $\| a_{n+1} \|_\infty \geqq \| a_n \|_\infty$. On pose alors

$$\Phi(u) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad |u| \leqq \| a_0 \|_\infty, \\ \sqrt{n}\, |u| & \text{pour} \quad \| a_n \|_\infty \leqq |u| \leqq \| a_{n+1} \|_\infty. \end{cases}$$

LEMME 3. — *Soit g une intégrande normale telle que g majore intégralement la fonction $(x, u) \to |u|$ (brièvement $g \gg |u|$), alors pour tout $u \in B(g^{**})$, il existe $\mu \in M(g)$ tel que*

$$g^{**}(x, u(x)) = \int_{\mathbf{R}^l} g(x, u)\, d\mu_x(u), \qquad \textit{et} \qquad v_\mu = u.$$

De $g \geqslant |u|$, on déduit que, pour presque tout $x \in X$,

$$\lim_{|u| \to \infty} \frac{g(x, u)}{|u|} = +\infty.$$

Comme $\int_X g^{**}(x, u(x))\, dx < \infty$, on a

$$g^{**}(x, u(x)) < +\infty \quad \text{(p. p.)}.$$

Soit Γ la multi-application de X à valeurs (p. p.) dans les compacts non vides de $M_1^+(\mathbf{R}^l)$ (d'après le lemme 1) définie par

$$\Gamma(x) = \left\{ \lambda \in M_+^1(\mathbf{R}^l);\ g^{**}(x, u(x)) = \int_{\mathbf{R}^l} g(x, u)\, d\lambda(u) \text{ et } u(x) = \int_{\mathbf{R}^l} u\, d\lambda(u) \right\}.$$

Soient K un compact de X et $\varepsilon > 0$. Il existe un fermé $F \subset K$ tel que $m(K - F) < \varepsilon$, u restreint à F est continue, $(x \to g^{**}(x, u(x)))$ est continue, g restreinte à $F \times \mathbf{R}^l$ est s. c. i. (*cf.* th. 2), il existe φ selon le lemme 2.

L'application $(x, \lambda) \to \int g(x, u)\, d\lambda(u)$ est s. c. i. de $F \times M_1^+(\mathbf{R}^l)$ dans $[0, +\infty]$, car $g = \sup g_n$ avec $g_n \in C_c(F \times \mathbf{R}^l)$ (et $g_n \geqq 0$) et que $(x, \lambda) \to \int g_n(x, u)\, d\lambda(u)$ est continue.

Soit $A = \sup_{x \in F} g^{**}(x, u(x))$, On a

$$\int \varphi(u)\, d\lambda(u) \leqq \int g(x, u)\, d\lambda(u) \leqq A \quad \text{pour tout } \lambda \in \Gamma(x) \quad \text{et tout } x \in F.$$

Autrement dit, $\Gamma(x)$ est inclus ($\forall\, x \in F$) dans le compact

$$H = \left\{ \lambda \in M_1^+(\mathbf{R}^l); \int \varphi(u)\, d\lambda(u) \leqq A \right\}.$$

Comme sur ce compact l'application $\lambda \to \int u\, d\lambda(u)$ est continue, le graphe de Γ restreint à F est fermé. Ceci montre que Γ est mesurable de X dans $M_1^+(\mathbf{R}^l)$. On peut lui appliquer le théorème de section (§ 2, chap. I). Il existe donc une section mesurable de Γ : $x \to \mu_x$. On pose $\mu = \int_X \delta_x \otimes \mu_x\, dx$, et on a $\mu \in M(g)$ puisque

$$\int_{X \times \mathbf{R}^l} g\, d\mu = \int_X dx \int_{\mathbf{R}^l} g(x, u)\, d\mu_x(u) = \int_X g^{**}(x, u(x))\, dx \leqq 1.$$

(D) *Structure de certains relativement faiblement compacts de* L^1.

Proposition 4. — *Si g est une intégrande normale de $X \times \mathbf{R}^l$ dans $[0, +\infty]$, et si g majore intégralement la fonction $(x, u) \to |u|$, alors*

$$B(g^{**}) = \left\{ u : X \to \mathbf{R}^l,\ u \text{ mesurable et } \int_X g^{**}(x, u(x))\, dx \leqq 1 \right\}$$

est un convexe compact faible de $L^1(X, m, \mathbf{R}^l)$ et si m est sans atomes

$$B(g) = \left\{ u : X \to \mathbf{R}^l,\ u \text{ mesurable et } \int_X g(x, u(x))\, dx \leqq 1 \right\}$$

est dense dans $B(g^{**})$.

Comme g majore intégralement la fonction $(x, u) \to |u|$ (brièvement : $g \gg |u|$), en particulier $\lim_{|u| \to \infty} g(x, u) = +\infty$. D'après la proposition 5 (§ 2, chap. II), $M(g)$ est un convexe compact.

Comme $g \gg |u|$, $v : \mu \to v_\mu$ est continue de $M(g)$ dans $L^1(X, m, \mathbf{R}^l)$ faible d'après la proposition 3 ci-dessus. Comme $g^{**}(x, u)$ est convexe en u, comme $g^{**} \leqq g$ et $v_\mu(x) = \int_{\mathbf{R}^l} u\, d\mu_x(u)$, on a

$$g^{**}(x, v_\mu(x)) \leqq \int_{\mathbf{R}^l} g^{**}(x, u)\, d\mu_x(u),$$

$M(g) \subset M(g^{**})$ et, pour tout μ appartenant à $M(g^{**})$, v_μ appartient à $B(g^{**})$. Inversement, pour tout $u \in B(g^{**})$, il existe $\mu \in M(g)$ tel que $v_\mu = u$ et $\mu \in M(g)$.

Donc $B(g^{**})$ est convexe compact dans $L^1(X, m, \mathbf{R}^l)$ comme image par une application linéaire continue v du convexe compact $M(g)$.

Si m est sans atomes, $\alpha(B(g))$ est dense dans $M(g)$ d'après la proposition 7 (§ 2, chap. II), et $B(g)$ est dense dans $B(g^{**})$ comme image par V de $\alpha(B(g))$.

Corollaire 1 (*Hypothèses de la proposition* 4). — *Désignons par $\int B(g)$ et $\int B(g^{**})$ les sous-ensembles suivants de $\mathbf{R}^l$,*

$$\int B(g) = \left\{ \int_X u(x)\, dx;\ u \in B(g) \right\},$$
$$\int B(g^{**}) = \left\{ \int u(x)\, dx;\ u \in B(g^{**}) \right\}.$$

Alors $\int B(g^{**})$ est un convexe compact, et si m est sans atomes, on a

$$\int B(g) = \int B(g^{**}).$$

On a vu au cours de la démonstration de la proposition 4 que $\mu \to v_\mu$ était continue surjective de $M(g)$ sur $B(g^{**})$. Comme $g \geqslant |u|$, on sait d'après la démonstration du théorème 4, que $E = F$ où

$$E = \left\{ \int_{X \times \mathbf{R}^l} u \, d\mu(x, u);\ \mu \in M(g) \right\} \subset \mathbf{R}^l,$$
$$F = \left\{ \int_X u(x)\, dx;\ u \in B(g) \right\} \subset \mathbf{R}^l.$$

Comme

$$\int_{X \times \mathbf{R}^l} u \, d\mu(x, u) = \int_X dx \int_{\mathbf{R}^l} u \, d\mu_x(u) = \int_X v_\mu(x)\, dx,$$

on a

$$E = \int B(g^{**}).$$

D'où le corollaire.

Exemples :

1° Soit Γ une multi-application de X dans $\mathbf{R}^l$ à valeurs fermées (p. p.), et soit $f_\Gamma : X \times \mathbf{R}^l \to [0, +\infty]$ l'intégrande normale (*cf.* remarque 2, théorème 2), définie par

$$f_\Gamma(x, u) = 0 \quad \text{si } u \in \Gamma(x), \qquad +\infty \quad \text{si } u \notin \Gamma(x).$$

La condition $f_\Gamma \geqslant |u|$ a lieu si, et seulement si, il existe $a \in L^1(dx)$ tel que $|\Gamma(x)| \leqq a(x)$.

On remarque que

$$B(f_\Gamma) = \left\{ u : X \to \mathbf{R}^l,\ u \text{ mesurable et } \int_X f_\Gamma(u(x))\, dx \leqq 1 \right\},$$
$$B(f_\Gamma) = \{ u \in X \to \mathbf{R}^l;\ u \text{ mesurable et } u(x) \in \Gamma(x) \text{ p. p.} \}.$$

D'autre part $f_\Gamma^{**} = f_{\hat\Gamma}$, où $\hat\Gamma$ est la multi-application mesurable définie par $\hat\Gamma(x) = \overline{\text{conv}}\,(x)$.

L'égalité $\int B(f_\Gamma) = \int B(f_\Gamma^{**})$ s'écrit donc $\int \Gamma\, dm = \int \hat\Gamma\, dm$, où $\int \Gamma\, dm \left(\text{resp. } \int \hat\Gamma\, dm\right)$ désigne l'ensemble des $\int_X u(x)\, dx$ pour toutes es sections u mesurables de Γ (resp. $\hat\Gamma$).

2° On reprend les notations de l'exemple sur 1°. On ne suppose plus $\Gamma \geqslant |u|$. On suppose m finie, alors $|u|^2 \geqslant |u|$. On pose $g = f_\Gamma + |u|^2$. On a $g \geqslant |u|$ et $g^{**}(x, u) = +\infty$ pour $u \notin \hat\Gamma(x) = \overline{\text{conv}}\,\Gamma(x)$. On a donc l'égalité $\int B(g) = \int B(g^{**})$ avec

$$B(g) \quad = \left\{ \int_X u(x)\,dx;\ u \text{ section mesurable de } \Gamma \text{ et } \| u \|_2 \leq 1 \right\},$$

$$B(g^{**}) = \left\{ \int_X u(x)\,dx;\ u \text{ section mesurable de } \hat{\Gamma} \right.$$

$$\left. \text{et} \int g^{**}(x,\ u(x))\,dx \leq 1 \right\}.$$

Un cas particulier : $\Gamma(x) = \{0,\ f(x)\}$, où f mesurable de X dans $\mathbf{R}$. On a

$$g^{**}(x,\ u) = \begin{cases} uf(x) & \text{pour} \quad u \in [0,\ f(x)], \\ +\infty & \text{pour} \quad u \notin [0,\ f(x)]. \end{cases}$$

D'où

$$\left\{ \int_A f(x)\,dx;\ A \in \mathcal{B} \text{ et} \int_A f^2(x)\,dx \leq 1 \right\}$$

(où $\mathcal{B}$ et la tribu des boréliens)

$$= \left\{ \int_X f(x)\,g(x)\,dx;\ g \text{ mesurable } g(x) \in [0,\ f(x)] \right.$$

$$\left. \text{et} \int_X g(x)\,f(x) \leq 1 \right\}$$

$= \text{convexe compact de } \mathbf{R}^l.$

[Si $f(x) = 1$ pour tout $x \in X$, on trouve le théorème de Ljapunov, *cf.* § 2, A.3, chap. II].

(E) *Extension du théorème de la Vallée Poussin.*

DÉFINITION 4. — *Soit* $g : X \times \mathbf{R}^l \to [0,\ +\infty]$, *on dit que* g *est une intégrande normale convexe si* g *est une intégrande normale et si* $u \to g(x,\ u)$ *est convexe* p. p. x.

La relation de majoration intégrale permet d'énoncer dans le cas d'une mesure non bornée un résultat analogue au théorème de la Vallée Poussin [23].

THÉORÈME 4. — *Une partie* A *de* $L^1(X,\ m,\ \mathbf{R}^l)$ *est relativement faiblement compacte si, et seulement si, il existe une intégrande normale convexe :*

$$g : \quad X \times \mathbf{R}^l \to [0,\ +\infty] \qquad \textit{telle que} \quad g \geq |u|,$$

$$\sup_{u \in A} \int_X g(x,\ u(x))\,dx \leq 1.$$

Si g est une intégrande normale convexe et si $g \gg |u|$ (prop. 4, notation) d'après la proposition 4 précédente :

$$B(g) = \left\{ u : X \to \mathbf{R}^l,\ u \text{ mesurable et } \int_X g(x, u(x))\, dx \leqq 1 \right\}$$

est un convexe faiblement compact.

Inversement, supposons A relativement faiblement compacte. D'après DIEUDONNÉ [15] :

1° A est borné;

2° $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tel que $m(E) < \delta \Rightarrow \int_E |u|\, dm \leqq \varepsilon$, pour tout $u \in A$;

3° $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, K$ compact de X tel que $\int_{X-K} |u|\, dm \leqq \varepsilon$, pour tout $u \in A$.

Pour tout $u \in A$, on a $\|u\|_1 \leqq k < \infty$ d'après le 1°. Soit, pour $a \in [0, +\infty[$, $E_a(u) = \{ x \in X;\ |u(x)| \geqq a \}$.

On a

$$m(E_a(u)) \leqq \frac{\|u\|_1}{a} \leqq \frac{k}{a},$$

donc $m(E_a(u)) \to 0$ quand $a \to \infty$ uniformément par rapport à $u \in A$. Il existe une suite croissante de réels positifs a_n tels que $\beta_n < 3^{-n}$ où

$$\beta_n = \sup_{u \in A} \int_{E_{a_n}(u)} |u(x)|\, dx.$$

Soit X_n une suite de compacte de X tels que $X^0_{n+1} \supset X_n$ et $X = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} X_n$.

D'après le 3°,

$$\delta_n = \sup_{u \in A} \int_{X - X_n} |u(x)|\, dx \to 0 \qquad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Quitte à extraire une sous-suite de (X_n), on peut supposer que $\delta_n < 3^{-n}$.

Posons $\gamma_n = 2^n$; la suite γ_n est croissante, et on a

$$\textstyle\sum_0^\infty \gamma_n \delta_n < +\infty, \qquad \sum_0^\infty \gamma_n \beta_n < +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to \infty} \gamma_n = +\infty.$$

Soit φ l'application de $X \times \mathbf{R}^l \to [0, +\infty[$ définie par $\varphi_n(x, u) = \gamma_n |u|$ pour

$$(x, u) \in [X_{n+1} \times \{ |u| < a_{n+1} \}] - [X_n \times \{ |u| \leqq a_n \}].$$

Comme φ est borélienne en (x, u), et s. c. i. en u, φ est une intégrande normale.

D'autre part, pour $u \in A$,

$$\int_X \varphi(x, u(x))\, dx \leqq k = \Sigma_0^\infty \gamma_n \beta_n + \Sigma_0^\infty \gamma_n \delta_n < +\infty.$$

Montrons enfin que $\varphi \geqslant |u|$. Or, pour $|u| \geqq a_n 1_{X_n}(x)$, on a

$$\varphi(x, u) \geqq \gamma_{n-1} |u| \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to \infty} \gamma_n = +\infty.$$

L'intégrande normale convexe cherchée est $(1/k)\ \varphi^{**}$ d'après la proposition 2.

(F) *Une réciproque.* — Nous allons déduire du théorème 4, une réciproque de la proposition 1 (§ 1, chap. III).

PROPOSITION 5. — *Soient f une fonction de Carathéodory de $X \times Y$ dans $\mathbf{R}$, g une intégrande normale telle que $g(x, u) \to +\infty$ quand $u \to \infty$ (p. p. x). Alors $\mu \to \int_{X \times Y} f\, d\mu$ est définie continue de $M(g)$ dans $\mathbf{R}$ si, et seulement si, il existe une intégrande normale h telle que $h(x, u) \to \infty$ quand $u \to \infty$ (p. p. x), $h \geqslant f$ et $M(g) \subset M(h)$ (en supposant m sans atomes).*

Démonstration. — Nous démontrerons d'abord le lemme.

LEMME. — *Si $\mu \to \int f\, d\mu$ est définie continue sur $M(g)$, alors*

$$\mu \to \int_{\mathbf{R}^l} f(x, u)\, d\mu_x(u)$$

est définie continue de $M(g)$ dans L^1 faible.

Si $a \in L^\infty$, la fonction $(x, u) \to a(x) f(x, u)$ est dans $L^1(\mu)$ pour tout $\mu \in M(g)$, d'après l'hypothèse du lemme. Montrons que

$$\mu \to \int_{X \times \mathbf{R}^l} a(x) f(x, u)\, d\mu(x, u)$$

est continue sur $M(g)$, pour tout $a \in L^\infty(X, m, \mathbf{R})$.

On peut se contenter de démontrer cette propriété, pour $0 \leqq a(x) \leqq 1$.

Grâce au théorème 2 et au théorème de section, on peut trouver une fonction $u : X \to Y$ mesurable telle que

$$g(x, u(x)) = \min_{u \in \mathbf{R}^l} g(x, u).$$

Pour toute $\mu \in M(g)$, la mesure

$$\Pi(\mu) = \int_X \delta_x \otimes (a(x)\, \mu_x + [1 - a(x)]\, \delta_{u(x)})\, dx$$

appartient à $M(g)$.

L'application $\mu \to \Pi(\mu)$ est continue, car si $\psi \in C_c(X \times Y)$,

$$(x, u) \to a(x)\,\psi(x, u)$$

est une fonction de Carathéodory bornée nulle en dehors d'un compact, et on peut donc appliquer le lemme de la proposition 3 (§ 1, chap. II).

Soit μ_n une suite de mesures de $M(g)$ avec $\mu_n \to \mu_0$. Alors

$$\Pi(\mu_n) \in M(g) \to \Pi(\mu_0) \in M(g),$$

donc

$$\int f\,d(\Pi(\mu_n)) \to \int f\,d(\Pi(\mu_0)),$$

d'où

$$\int a(x)\,f(x, u)\,d\mu_n(x, u) \to \int a(x)\,f(x, u)\,d\mu_0(x, u).$$

C. Q. F. D.

Supposons $\mu \to \int f\,d\mu$ définie continue sur $M(g)$. Comme $M(g)$ est compact, il résulte du lemme que

$$K = \left\{ \left(x \to \int f(x, u)\,d\mu_x(u) \right) \;\middle|\; \mu \in M(g) \right\}$$

est un compact de L' faible. L'ensemble

$$H = \{ (x \to f(x, u(x))) \mid u \in B(g) \}$$

est donc relativement compact dans L^1 faible.

D'après le théorème 4, il existe une intégrande normale :

$$\varphi : \quad (x, v) \in X \times \mathbf{R} \to \varphi(x, v) \in [0, +\infty] \qquad \text{telle que} \quad \varphi \geqslant |v|$$

et

$$\sup_{v \in H} \int_X \varphi(x, v(x))\,dx \leq 1.$$

On a donc

$$\sup_{u \in B} \int_X \varphi(x, f(x, u(x)))\,dx \leq 1.$$

Comme φ est une intégrande normale, et f une fonction de Carathéodory, on voit en utilisant le point (d) du théorème 2 et le théorème 1 que la fonction.

$$h' : \quad (x, u) \in X \times Y \to \varphi(x, f(x, u)) \in [0, +\infty]$$

est une intégrande normale. Comme $\varphi(x, v) \geqslant |v|$, on a

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, a(x) \in L^1 : \quad |v| > a(x) \quad \Rightarrow \quad |v| < \varepsilon\,\varphi(x, v).$$

Donc :

$$\forall\, \varepsilon, \quad \exists\, a(x) : \quad |f(x, u)| > a(x) \quad \Rightarrow \quad |f(x, u)| < \varepsilon\, h'(x, u),$$

c'est-à-dire que $f \ll h'$.

La fonction $h = (1/2)(h' + g)$ majore intégralement f et $h(x, u) \to \infty$, quand $u \to \infty$ (p. p. x), donc $M(h)$ est un compact.

De plus, $\forall\, u \in B(g)$, $\alpha(u) \in M(h)$.

Mais les $\alpha(u)$ sont denses dans $M(g)$ d'après la proposition 7 (§ 2, chap. II), donc $M(g) \subset M(h)$, ce qui achève la démonstration de la proposition.

IV. Contrôle optimal

Montrons sur un exemple élémentaire comment nous formulons les problèmes de contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles.

Soit le problème (P) :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{minimiser } \| y - z \|_{L^2(\Omega)} + \| \Delta y \|_{(L^2\Omega)} \qquad \text{pour} \quad y \in H_0^1(\Omega), \quad \Delta y \in L^2(\Omega), \\ \qquad\qquad \text{sous la contrainte : } \; y^2(x) + (\Delta y)^2(x) \leqq 1, \end{array}\right.$$

où $\Omega = \{ x \in \mathbf{R}^2, \; |x| \leqq 1 \}$ et $z \in L^2(\Omega)$.

L'équation $\Delta y = u$, $y \in H_0^1(\Omega)$, $u \in L^2(\Omega)$ a une solution unique que nous notons y_u. Posons

$$\left\{\begin{array}{l} \qquad\quad \mathcal{U} = L^2(\Omega), \\ f(x, y, u) = (y - z(x))^2 + u^2, \\ g(x, y, u) = +\infty \quad \text{si } y^2 + u^2 > 1, \quad 0 \text{ sinon.} \end{array}\right.$$

Le problème (P) s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} \qquad\qquad \text{minimiser} \displaystyle\int f(x, y_u(x), u(x))\, dx, \\ \text{sous la contrainte : } \quad \displaystyle\int g(x, y_u(x), u(x))\, dx \leqq 1. \end{array}\right.$$

C'est sous cette forme que nous allons étudier les problèmes de contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations différentielles ou aux problèmes de surfaces optimales (*cf.* commentaires et [3]).

Pour traiter le problème (P), nous prolongeons l'équation d'état et le critère à des espaces de mesures paramétrées, et nous obtenons un problème (PR) :

$$\begin{cases} \text{minimiser } \int f(x, y_{v_\mu}(x), u)\, d\mu(x, u) \quad \text{pour} \quad u \in \mathcal{M}, \\ \text{sous la contrainte : } \int g(x, y_{v_\mu}(x), u)\, d\mu(x, u), \end{cases}$$

avec

$$v_\mu(x) = \int u\, d\mu_x(u), \qquad \mathcal{M} = \{ \mu \in M \mid v\, v \in \mathcal{U} \}.$$

L'hypothèse essentielle que nous ferons est la compacité de l'application $u \to y_u$ propriété qui est vérifiée dans de nombreux cas (*cf.* commentaires; *cf.* [2] et [3]).

Suivant les hypothèses faites sur les intégrandes f, nous obtiendrons l'existence de solutions usuelles ou généralisées.

1. Propriétés de continuité des critères distribués

LEMME 1. — *Soit f une fonction de Carathéodory de $X \times (\mathbf{R}^l \times Y)$ dans $\mathbf{R}$ de la forme $f(x, y, u) = 1_E(x) \times \varphi(y, u)$ avec $m(E) < +\infty$ et φ continue à support compact. L'application*

$$F : \quad (y, \mu) \to \int f(x, y(x), u)\, d\mu(x, u)$$

est continue de $L^p(X, m, \mathbf{R}^l) \times M$ dans $\mathbf{R}$ $(p \geq 1)$.

(i) Soient (y_n) une suite de L^p convergeant fortement vers y, et ε positif. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $y_n(x) \to y_0(x)$ presque-partout.

Il existe $F \subset E$ tel que $m(E - F) < \varepsilon / \| \varphi \|_\infty$ et tel que $y_n(x)$ tend vers $y_0(x)$ uniformément pour $x \in F$ (théorème d'Egoroff). Pour tout $\mu \in M$, on a l'inégalité

$$\left| \int f(x, y_n(x), u)\, d\mu(x, u) - \int f(x, y_0(x), u)\, d\mu(x, u) \right| = A_n,$$

$$\begin{aligned} A_n \leq{} & 2\, m(E - F) \times \| \varphi \|_\infty \\ & + m(F) \times \sup_{(x, u) \in F \times Y} | \varphi(y_n(x), u) - \varphi(y_0(x), u) |. \end{aligned}$$

Comme φ est uniformément continue, pour n assez grand $A_n \leq 3\,\varepsilon$, pour tout $\mu \in M$. Donc F est continue en y uniformément par rapport à $\mu \in M$.

(ii) Pour $y \in L^p(X, m, \mathbf{R}^l)$ fixé, l'application $(x, u) \to f(x, y(x), u)$ est de Carathéodory bornée à support compact. D'après le lemme de la proposition 3 (§ 1, chap. II), l'application $\mu \to F(y, \mu)$ est continue

Il résulte de (i) et (ii) que F est continue sur $L^p \times M$.

Proposition 1. — *Soit f une intégrande normale de $X \times (\mathbf{R}^l \times Y)$ dans $[0, +\infty]$. Alors l'application $(y, \mu) \to \int f(x, y(x), u)\, d\mu(x, u)$ est s. c. i. sur $L^p(X, \mathbf{R}^l) \times M$ à valeurs dans $[0, +\infty]$.*

La proposition résulte du lemme et de la remarque 4 (th. 1, chap. I).

Proposition 2. — *Soient f une fonction de Carathéodory de $X \times (\mathbf{R}^l \times Y)$ dans $\mathbf{R}$, g et h deux intégrandes normales sur $X \times \mathbf{R}^m$. On suppose :*

$$|f(x, y, u)| \leq a(x) + b\,|y|^p + g(x, u),$$

avec

$$a(x) \in L^1(X, \mathbf{R}), \qquad b \geq 0, \qquad g \ll h.$$

Alors l'application

$$(y, \mu) \to \int f(x, y(x), u)\, d\mu(x, u)$$

est définie continue de $L^p(X, \mathbf{R}^l) \times M(h)$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Démonstration. — D'après la proposition 1, l'application

$$(y, \mu) \to \int [a(x) + b\,|y(x)|^p + g(x, u) - f(x, y(x), u)]\, d\mu(x, u)$$

est s. c. i. sur $L^p \times M$.

L'application

$$(y, \mu) \to \int [a(x) + b\,|y(x)|^p + g(x, u)]\, d\mu(x, u)$$
$$= \int a(x)\, dx + b \int |y|^p\, dx + \int g\, d\mu$$

est continue sur $L^p \times M(h)$ d'après le corollaire de la proposition 1 (§ 1, chap. III).

Comme, de plus, la fonction $(x, u) \to f(x, y(x), u)$ est dans $L^1(\mu)$ pour tout $y \in L^p$ et tout $\mu \in M(h)$, grâce à la majoration de l'hypothèse, l'application

$$(y, \mu) \to -\int f(x, y(x), u)\, d\mu(x, u) \text{ est s. c. i. sur } L^p \times M(h).$$

On achève la démonstration de la proposition en appliquant le même raisonnement à la fonction $-f$.

2. Existence

LEMME. — *Soit g une intégrande positive normale sur $X \times \mathbf{R}^l$, telle que $g \gg |u|$ (notation, prop. 4, chap.* III). *Pour toute suite (u_n) d'éléments de $B(g)$, $\alpha(u_n) \to \alpha(u)$ dans $M(g)$ si, et seulement si, $u_n \to u$ dans $L^1(X \times \mathbf{R}^l)$.*

Si $u_n \to u$ dans L^1 fort et si $u_n \in B(g)$, alors $\alpha(u_n) \to \alpha(u)$ dans M d'après la remarque qui suit la définition 3 (§ 1, chap. II), et $\alpha(u) \in M(g)$ d'après la proposition 5 (§ 2, chap. II).

Inversement, si $\alpha(u) \in M(g)$, u est intégrable puisque $g \gg |u|$. Comme $\mu \to \int |v - u(x)| \, d\mu(x, v)$ est continue sur $M(g)$ d'après le corollaire 1 de la proposition 1 (chap. III, § 1), on a $\| u_n - u \|_1 \to 0$.

THÉORÈME 5. — *On considère le problème de contrôle :*

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} \text{minimiser} \int f(x, y_u(x), u(x)) \, dx + \varphi(y_u) \qquad \text{pour} \quad u \in U, \\ \textit{sous les contraintes:} \\ \qquad \int f_i(x, y_u(x), u(x)) \, dx \leqq 1 \qquad (i = 1, \ldots, p) \end{cases}$$

avec les hypothèses suivantes :

(i) *Les fonctions f, f_i $(i = 1, \ldots, p)$ sont des intégrandes positives normales sur $X \times (\mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^m)$ convexes en la troisième variable.*

(ii) *La fonction φ est une application s. c. i. de $L^p(X, \mathbf{R}^l)$ fort $(p \geqq 1)$ dans $]-\infty, +\infty]$.*

(iii) *L'espace des contrôles U est un fermé faible de $L^1(X, \mathbf{R}^l)$.*

(iv) *La fonction d'état $u \to y_u$ est continue de U munie de la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$ dans $L^p(X, \mathbf{R}^l)$ fort.*

On suppose qu'il existe une suite minimisante u_n et une intégrande positive normale g sur $X \times \mathbf{R}^m$, telles que

$$g \gg |u| \qquad \text{(Notation, prop. 4, chap. III)},$$

$$\sup_n \int g(x, u_n(x)) \, dx \leqq 1.$$

Alors il existe un contrôle optimal. On peut extraire de u_n une sous-suite convergeant dans L^1 faible vers un contrôle optimal.

Si f est strictement convexe en u, on peut extraire de u_n une sous suite convergeant dans L^1 fort vers un contrôle optimal.

Soit u_n et g comme dans l'énoncé. On a $u_n \in M(g)$. On peut extraire de u_n une sous-suite u_{n_k} convergeant vers une mesure $\mu \in M(g)$. (prop. 5, § 2, chap. II).

De plus on a

$$\begin{cases} \int f_i(x, y_{v_\mu}(x), u)\, d\mu(x, u) \leqq 1 \quad (i = 1, \ldots, p) & \text{pour} \quad v_\mu \in U, \\ \qquad \varphi(y_{v_\mu}) + f(x, y_{v_\mu}(x), u)\, d\mu(x, u) \leqq \inf P \end{cases}$$

en vertu de la proposition 1 (§ 1, chap. IV), de la proposition 3 (§ 3, chap. IV) et de l'hypothèse sur la fonction d'état $u \rightarrow y_u$.

Mais grâce à la convexité des intégrandes f et f_i, on a

$$\begin{cases} \int f(x, y_{v_\mu}(x), v_\mu(x))\, dx \leqq \int f(x, y_{v_\mu}(x), u)\, d\mu(x, u) \\ \qquad\qquad \leqq \operatorname{Inf} P - \varphi(y_{v_\mu}) \qquad \text{pour} \quad v_\mu \in U, \\ \int f_i(x, y_{v_\mu}(x), v(x))\, dx \leqq 1 \qquad (i = 1, \ldots, p). \end{cases}$$

Donc v_μ est un contrôle optimal, et $u_{n_k} \rightarrow v_\mu$ faiblement.

Si f est strictement convexe en u, on a

$$\int f(x, y_{v_\mu}(x), v_\mu(x))\, dx < \int f_i(x, y_{v_\mu}(x), u)\, d\mu(x, u) \leqq \operatorname{Inf} P.$$

Si $\mu \neq \alpha(v_\mu)$, ce qui contredit le fait que u_n est une suite minimisante, donc $\mu = \alpha(v_\mu)$ et $\alpha(u_{n_k}) \rightarrow \alpha(v_\mu)$ vaguement, donc d'après le lemme ci-dessus $u_{n_k} \rightarrow v_\mu$ dans L^1 fort.

Remarques :

1° Ce théorème ramène la démonstration de l'existence d'un contrôle optimal à la recherche d'une « estimation *a priori* » sur les suites minimisantes : il suffit de montrer qu'il existe une fonction g : $g \gg |u|$ et

$$\sup_n \int g(x, u_n(x))\, dx \leqq 1.$$

Si la mesure dx est bornée, on a $|u|^p \gg |u|$ pour $p > 1$, donc le théorème s'applique si une suite minimisante est bornée dans L^p, $p > 1$.

2° Le théorème s'applique dans les situations générales suivantes :

(i) Si $\varphi \geqq 0$, et $f + \Sigma_{i=1}^{u} f_i$ est « coercive », c'est-à-dire s'il existe une intégrande normale g telle que

$$g \gg |u| \qquad \text{et} \qquad (f + \Sigma_{i=1}^{n} f_i)(x, y, u) \geqq g(x, u).$$

(ii) Si U est un compact faible de L^1 (th. 4, § 3, chap. III).

3° Citons un exemple élémentaire où l'on obtient une estimation *a priori* sans que (i) ou (ii) soit satisfaisant. X est un ouvert borné Q de $\mathbf{R}^l$, et on prend

$$U = \{ u \mid u \in [L^2(Q)]^l,\ u = \operatorname{grad} y,\ y \in H_0^1(Q) \},$$

U est un fermé faible et l'application $y \to \operatorname{grad} y \in U$ est inversible; son inverse $u \to y_u$ est continue de U faible dans L^2 fort. On considère le problème :

$$\text{minimiser} \int u^2 - \int y_u z \qquad \text{avec} \quad z \in L^2, \qquad \text{pour} \quad u \in U.$$

On a

$$\left| \int y_u z \right| \leqq \| y_u \|_2 \| z \|_2 \leqq A \| u \|_2 \| z \| .$$

Comme $u = 0$ annule le critère, on peut supposer que les suites minimisantes vérifient :

$$\int u_n^2 - \int y_{u_n} z \leqq 0.$$

D'où

$$\| u_n \|_2^2 \leqq A \| u_n \|_2 \| z \|_2,$$
$$\| u_n \|_2 \leqq A \| z \|_2.$$

3. Relaxation

PROPOSITION 1. — *Soit f une fonction de Carathéodory sur $X \times (\mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^m)$ à valeurs dans $\mathbf{R}^+$, g une intégrande positive normale sur $X \times \mathbf{R}^m$. On suppose :*

$$f(x, y, u) \geqq g(x, u),$$
$$g \gg |u| \qquad \text{(Notation, prop. 4, chap. III),}$$

On note $(x, y, u) \to f^{**}(x, y, u)$ la régularisée convexe s. c. i. de f en u.

Alors $[x, (y, u)] \in X \times (\mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^m) \to f^{**}(x, y, u)$ est une intégrande positive normale.

Soient K un compact de X et $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Scorza-Dragoni, il existe un compact $K_0 \subset K$ tel que $m(K_0 - K) < \varepsilon$ et $f|_{K_0 \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^m}$ est continue.

D'après le lemme 2 (§ 3, chap. III), il existe un compact $K' \subset K_0$ tel que $g(x, u)/|u| \to +\infty$ quand $|u| \to \infty$ uniformément par rapport à $x \in K'$ et $m(K_0 - K') < \varepsilon$.

Soit $(x_0, y_0, u_0) \in K' \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^m$ et $u \to \varphi(u)$ une minorante affine de $u \to f(x_0, y_0, u)$ telle que

$$(1) \qquad f(x_0, y_0, u_0) - \varepsilon \leqq \varphi(u_0).$$

On a

$$|\varphi(u)| \leqq A|u| + B \qquad \text{avec} \quad A \geqq 0, \qquad B \geqq 0.$$

D'où

$$\exists\, N > 1, \quad |u| \geqq N \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x, y, u)}{|u|} \geqq A + B, \qquad \forall\, x, y$$
$$\Rightarrow \quad f(x, y, u) \geqq \varphi(u), \qquad \forall\, x, y.$$

D'autre part, la fonction f est uniformément continue sur

$$K' \times \{|y - y_0| \leqq 1\} \times \{|u| \leqq N\},$$

donc si d est une distance sur X :

$$\exists\, \eta > 0, \quad |y - y_0| < \eta, \qquad d(x, x_0) < \eta,$$
$$|u| \leqq N \quad \Rightarrow \quad |f(x, y, u) - f(x_0, y_0, u)| \leqq \varepsilon.$$

D'où

$$\varphi(u) - \varepsilon \leqq f(x, y, u) \qquad \text{pour} \quad |y - y_0| < \eta, \qquad d(x, x_0) |< \eta.$$

Donc

$$(2) \quad \varphi(u) - \varepsilon \leqq f^{**}(x, y, u) \qquad \text{pour} \quad |y - y_0| < \eta, \qquad d(x, x_0) < \eta.$$

De (1) et (2), on déduit que f^{**} est s. c. i. au point (x_0, y_0, u_0). Alors, d'après le théorème 2, f^{**} est une intégrande normale sur $X \times (\mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^m)$.

LEMME 1. — *Soient g une intégrande normale de $X \times Y$ dans $[0, +\infty]$ et $\mu \in M$ telle que $\int g\, d\mu < \infty$. Alors il existe une intégrande normale h telle que $h \geqslant g$ et $\int h\, d\mu < \infty$.*

Soit K_n une suite de compacts telle que

$$K_{n+1} \supset K_n \qquad \text{et} \qquad X = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n.$$

Soit

$$E_n = \{(x, u) \in X \times Y;\; n\, 1_{K_n}(x) \leqq g(x, u) < (n + 1)\, 1_{K_{n+1}}(x)\}$$

et

$$E_\infty = \{ (x, u);\ g(x, u) = \infty \}.$$

On pose

$$\beta_n = \int_{E_n} g(x, u)\, d\mu(x, u).$$

Comme les E_n sont disjoints et que $X \times Y = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} E_n \cup E_\infty$, on a

$$\textstyle\sum_{n \in \mathbf{N}} \beta_n < +\infty.$$

Il existe une suite λ_n de réels positifs telle que

$$\textstyle\sum_{n \in \mathbf{N}} \lambda_n \beta_n < +\infty \qquad \text{et} \qquad \lambda_n \to \infty, \qquad \lambda_n > 0, \qquad \lambda_{n+1} \geqq \lambda_n.$$

Soit φ la fonction mesurable, définie par :

$$\varphi = \begin{cases} \lambda_n g & \text{sur } E_n, \qquad n \in \mathbf{N}, \\ +\infty & \text{sur } E_\infty. \end{cases}$$

Alors, $\mu(\varphi) < \infty$ et $\varphi \gg g$; car, pour $g(x, u) \geqq n\, 1_{K_n}(x)$, on a

$$g(x, u) \leqq \frac{1}{\lambda_n} \varphi(x, u).$$

Mais

$$\mu(\varphi) = \mathrm{Inf}_{h > \varphi,\, h \text{ s. c. i.}}\, \mu(h).$$

Donc il existe une fonction h s. c. i. (c'est donc une intégrande normale) telle que

$$\begin{cases} h \geqq \varphi \ (\Rightarrow h \gg g), \\ \mu(h) < \infty. \end{cases}$$

THÉORÈME 6. — *On suppose la mesure dx sur X sans atomes. Soit $f : X \times (\mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^k) \to \mathbf{R}$ une fonction de Carathéodory, $g_1, \ldots, g_n$ des intégrandes normales positives sur $X \times \mathbf{R}^k$. On suppose qu'il existe une intégrande normale g telle que*

$$\begin{cases} g(x, u) \leqq f(x, y, u) \leqq A\,[g(x, u) + \sum_{i=1}^n g_i(x, u)] + b\,|y|^p + a(x), \\ \qquad\qquad \textit{avec} \quad a \in L^1; \qquad A,\, b \geqq 0, \qquad p \geqq 1. \\ \sum_{i=1}^n g_i(x, u) + g(x, u) \gg |u| \qquad \text{(Notation, prop. 4, chap. III).} \end{cases}$$

Soit $u \to y_u$ une application continue de $B(g_1, \ldots, g_n) \cap L^1(X, \mathbf{R}^k)$ muni de la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$ dans $L^p(X, \mathbf{R}^l)$ fort.

On considère les problèmes :

$$
\text{(PO)}\quad \begin{cases} \textit{minimiser} \displaystyle\int_X f(x, y_u(x), u(x))\, dx & \text{pour} \quad u \in L^1, \\ \textit{sous les contraintes :} \displaystyle\int g_i(x, u(x))\, dx \leqq 1 & (i = 1, \ldots, n); \end{cases}
$$

$$
\text{(PR)}\quad \begin{cases} \textit{minimiser} \displaystyle\int_{X \times \mathbf{R}^k} f(x, y_{v_\mu}(x), u)\, d\nu(x, u) \qquad \text{pour} \quad \mu \in M, \\ \displaystyle\int |u|\, d\mu < \infty, \\ \textit{sous les contraintes :} \displaystyle\int_{X \times \mathbf{R}^k} g_i(x, u)\, d\mu(x, u) \leqq 1 \\ (i = 1, \ldots, n). \end{cases}
$$

Alors le problème (PR) *a une solution optimale et le minimum du problème* (PR) *est égal à la borne inférieure du problème* (PO). *De toute suite minimisante de* (PO), *on peut extraire une sous-suite qui converge vaguement vers un contrôle optimal de* (PR).

Démonstration. — On peut supposer inf (PR) $< \infty$, sinon les propriétés sont trivialement vérifiées.

Soient φ l'application : $M \ni \mu \to \int f(x, y_{v_\mu}(x), u)\, d\mu(x, u)$, et k l'application $1/n\, (\sum_{i=1}^n g_i)$.

On notera encore φ l'application $u \in B \to \varphi(\alpha(B))$. Vu la minoration de f, il existe $\rho \geqq 0$ tel que

$$
\inf \{ \varphi(\mu) \mid \mu \in M(g_1, \ldots, g_n), \int |u| d\mu < \infty \}
$$

$$
= \operatorname{Inf} \left\{ \varphi(\mu) \,\middle|\, \mu \in M(g_1, \ldots, g_n), \frac{g}{\rho} \right\}.
$$

Soit $K = M(g_1, \ldots, g_n, g/\rho)$, alors K est un convexe compact de M, et $\mu \to v_\mu$ est continue sur K, d'après la proposition 3 (§ 3, chap. III).

Donc, l'application φ est s. c. i. sur K d'après la proposition 1 (§ 1, chap. IV), et elle atteint son minimum en un point μ.

On a $\int k\, d\mu < \infty$. D'après le lemme 3, il existe une intégrande normale positive h telle que $h \gg k \int h\, d\mu \leqq 1$.

φ est donc continue sur $M(g_1, \ldots, g_n, h)$ d'après la proposition 2 (§ 1, chap. IV). D'après la proposition 7 (§ 2, chap. II), il existe une suite u_n de fonctions appartenant à $B(g_1, \ldots, g_n, h)$ telle que $\alpha(u_n) \to \mu$. (On a en particulier $u_n \in B(g_1, \ldots, g_n) \cap L^1$.) Donc

$$\varphi(u_n) \to \varphi(\mu).$$

Comme on a d'autre part inf (PR) $\leq$ inf (PO), on a démontré l'égalité.

Soit u_n une suite minimisante de (PO).

Comme $u_n \in K = M(g_1, \ldots, g_n, g/\rho)$, on peut extraire de u_n une sous-suite u_{n_k} telle que $\alpha(u_{n_k}) \to \mu \in K$ dans M.

D'après la proposition 1 (§ 1, chap. IV), on a donc :

$$\int f(x, y_{v_\mu}(x), u)\, d\mu(x, u) \leq \lim_{k \to \infty} \int f(x, y_{u_{n_k}}(x), u_{n_h}(x))\, dx$$
$$= \inf(\text{PO}) = \min(\text{PR}).$$

Par suite, μ est un contrôle optimal pour (PR).

Corollaire. — *On suppose la mesure m sur X sans atomes. Soit f une fonction Carathéodory de* $X \times (\mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^k)$ *dans* $\mathbf{R}$.

On suppose qu'il existe une intégrande positive normale g sur $X \times \mathbf{R}^k$ *telle que*

$$\begin{cases} g(x, u) \leq f(x, y, u) \leq A\, g(x, u) + b\,|y|^p + a(x) \qquad \text{et} \qquad g \geqslant |u|, \\ \qquad b, A \geq 0, \qquad a \in L'(x), \qquad p \geq 1. \end{cases}$$

Soient f^{**} *la convexifiée en u de f* (*cf.* prop. 1, § 3, chap. IV), et $u \to y_u$ *une application continue de* $L^1(X, \mathbf{R}^k)$ *faible dans* $L^p(X, \mathbf{R}^l)$ *fort.*

On considère les problèmes :

(P) *minimiser* $\int f\ (x, y_u(x), u(x))\, dx,$ pour $u \in L^1(X, \mathbf{R}^k)$;

(P**) *minimiser* $\int f^{**}(x, y_u(x), u(x))\, dx,$ pour $u \in L^1(X, \mathbf{R}^k)$.

Alors le problème (P**) *a une solution optimale et le minimum du problème* (P**) *est égal à la borne inférieure du problème* (P).

De toute suite minimisante du problème (P), *on peut extraire une sous-suite convergeant faiblement vers une solution optimale du problème* (P**).

L'existence d'une solution optimale pour (P**) résulte du théorème 6 et de la proposition 1, § 3.

Soit u une solution optimale de (P**).

D'après le lemme 3 (§ 3, chap. III), il existe μ telle que

$$\int |u|\, d\mu < \infty$$

et

$$\int f^{**}(x, y_u(x), u(x))\, dx = \int f(t, y_u(t), u)\, d\mu(t, u),$$

$$\int v\, d\mu_x(v) = u(x).$$

Ceci montre que min (PR) $\leqq$ min (P**), et comme à cause de la convexité de f^{**} en u : min (PR) $\geqq$ min (P**), on a min (PR) $=$ min (P**), et on appliquera alors le théorème 6.

Remarques :

(i) On a le même corollaire si l'espace des contrôles admissibles est un convexe fermé U de $\mathbf{R}^l$.

(ii) Si U est un convexe compact de $\mathbf{R}^l$, et si la mesure m sur X est bornée, alors tout intégrande normale positive g sur $X \times U$ majore intégralement la fonction $(x, u) \to |u|$.

On a donc alors le théorème de relaxation pour les fonctions de Carathéodory f qui vérifient :

$$\exists\, g, \quad 0 \leqq g(x, u) \leqq f(x, y, u) \leqq A\, g(x, u) + b\, |y|^p + a(x);$$

en particulier, pour celles qui vérifient cette relation, avec $g = 0$,

$$0 \leqq f(x, y, u) \leqq a(x) + b\, |y|^p.$$

C'est la condition donnée par I. EKELAND [16].

(iii) Se déduisent aussi du théorème 6, des théorèmes de convexification pour les problèmes où l'espace des contrôles admissibles est

$$U = \{\, u \in L^1(X, \mathbf{R}^l) \mid u(x) \in F_x \text{ p. p. } \},$$

$x \to F_x$ étant une multi-application mesurable à valeurs fermées.

Commentaires

C. Castaing nous a indiqué comment appliquer nos méthodes dans le cas où m est une mesure abstraite σ-finie sur X muni d'une tribu $\mathfrak{T}$ complète. Cela repose sur une version abstraite du théorème de caractérisation des intégrandes normales et sur l'adoption d'un formalisme fournissant une topologie adéquate sur M. Dès lors, les résultats obtenus dans cet article (th. 3, 5, 6; prop. 1, § 2, chap. III, et 4, § 3, chap. III) restent valides dans ce cas.

Intégrandes normales positives. — La propriété utile des intégrandes normales positives est qu'elles sont enveloppe supérieure de fonctions de Carathéodory. En effet, c'est cette propriété qui fournit la semi-continuité de l'application $\mu \to \int f\, d\mu$, qui est à la base des propriétés des espaces $M(f_1, \ldots, f_n)$.

Les intégrandes normales ont été introduites par ROCKAFELLAR [26] dans le cas où $Y = \mathbf{R}^n$, et où $y \to f(x, y)$ est convexe, mais en supposant X seulement muni d'une tribu. Il démontre l'équivalence des propriétés (a), (c), (d) du théorème 2, avec une propriété (a) plus précise dans ce cas particulier [$f(x, y) = \sup (y, b_n(x)) - a_n(x)$ où (,) désigne le produit scalaire dans $Y = \mathbf{R}^n$].

Comme ROCKAFELLAR dans le cas convexe (*ibid.*), on peut considérer des intégrandes normales à valeur dans $]-\infty, +\infty]$ définies par la propriété (b) théorème 2. On a encore le théorème 2 ((b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d)) (mutatis mutandis) par isomorphisme de $[-\infty, +\infty]$ avec $[0, +\infty]$.

C. Castaing nous a signalé qu'en adaptant la démonstration du théorème 2, on obtenait la version abstraite suivante :

THÉORÈME 2'. — *Soit* (Ω, A, m) *un espace mesure, avec* m σ*-finie et* A m*-complète. Soit* Y *souslinien,* $\mathcal{B}$ *la tribu borélienne de* Y. *Il y a équivalence des conditions suivantes :*

(a) *f est normale;*

(b) $\omega \to \mathrm{Epi}_f(\omega)$ *est mesurable;*

(c) *f est* $(A \otimes \mathcal{B})$*-mesurable et s. c. i. sur* Y *pour* ω *fixé dans* Ω.

La démonstration est la même que pour le théorème 2. On utilise un théorème de projection (DEBREU, VALADIER, cité dans [10]) : si $E \in A \otimes \mathcal{B}$ sa projection sur Ω appartient à A. On peut, de la même façon, modifier la proposition 2, § 2, en une proposition 2'.

Espaces de mesures paramétrées. — On a vu (chap. II, § 1), grâce au théorème de désintégration des mesures, que M s'identifie a l'ensemble Σ des classes d'applications mesurables $x \to \mu_x$ de X dans $M_1^+(Y)$ muni de la topologie vague induite par l'espace $M_b(Y) = C_0(Y)'$ des mesures de Radon bornées. Lorsque la mesure m sur X est abstraite, on considère directement Σ. Comme $L^1(X, m, C_0(Y))$ est un Banach, la boule unité de son dual $L^\infty(X, m, M_b(Y))$ est compacte pour la topologie faible; si Y est compact, Σ est fermé dans cette boule, donc compact.

C'est en utilisant cette approche que CASTAING [12], ROUSS [27], WARGA [30] ont introduit les espaces de mesures paramétrées que nous notons M et $M(I_\Gamma)$, et démontré pour ces espaces les propriétés de compacité et de densité (en supposant Y compact non nécessairement métrisable).

D'autre part, d'après la remarque 4 (th. 1, § 1, chap. I), $L^1(X, m, C_0(Y))$ s'identifie à l'ensemble des fonctions de Carathéodory de $X \times Y$ dans $\mathbf{R}$, majorées par une fonction de $L^1(X, m, \mathbf{R})$. On a donc une version 1' du lemme 1 (§ 1, chap. II). A partir de là, la démarche de cet article peut être poursuivie sans encombre dans ce cadre, grâce à l'utilisation du théorème 2'. L'étude générale des espaces $M(f_1, \ldots, f_n)$ nécessite la connaissance de la propriété (*a*) du théorème 2 des intégrandes normales, et l'utilisation de techniques de convexes compacts pour les démonstrations (théorème de Krejn-Mil'mann et proposition 2, § 2, chap. II).

La relation de majoration intégrale. — Pour les applications, l'outil de base est la relation $\gg$ puisqu'elle donne la continuité de l'application $\mu \to \int f\,d\mu$ (prop. 1, § 1, chap. III) dans des conditions générales (la proposition 5, § 3, chap. III montre qu'elles sont en un sens les plus générales). C'est une relation de domination au sens de CHOQUET [14] qui est définie sur le cône des intégrandes normales positives par le cône des fonctions positives de $L^1(dx)$. Cette relation a été inspirée par les hypothèses faites par AUMANN et PERLES dans un cas particulier (*cf.* prop. 1, § 2, chap. III, ex. 1).

On peut interpréter en terme de majoration intégrale les hypothèses de VALADIER dans [28]. Soit f une intégrande normale de $X \times \mathbf{R}^n$ dans $]-\infty, +\infty]$ (*cf.* § 2), et soit $f^*(x, .)$ la fonction duale de $f(x, .)$ c'est-à-dire $f^*(x, y) = \sup_{z \in \mathbf{R}^n} \{ \langle y, z \rangle - f(x, z) \}$. Il est équivalent de dire que $f^*(., y)$ est dx-intégrable pour tout $y \in \mathbf{R}^n$, ou que $f^+ \gg |y|$ et $f^- \ll 0$ [c'est-à-dire f^+ majore intégralement la fonction $(x, y) \to |y|$ = norme de y dans $\mathbf{R}^n$, et $f^-(x, y) \leq a(x)$ avec $a \in L^1(dx)$]. Les résultats de [28], II peuvent donc être démontrés comme la proposition 1 (§ 1, chap. III) [dans [28], m est une mesure abstraite]. Inversement, vu l'équivalence d'hypothèses ci-dessus, la relative compacité de $B(g)$ apparait comme un cas particulier d'un résultat de VALADIER [29] où $\mathbf{R}^n$ est remplacé par un Banach.

Le théorème 4 et la proposition 1 résolvent le problème (P_2) (*cf.* Introduction). On peut donner des conditions nécessaires portant sur les solutions optimales (paramètres de Lagrange) qui ont un intérêt théorique en économie mathématique et pratique pour le calcul de ces solutions [5].

Contrôle optimal. — Les propriétés de continuité des critères distribués et la compacité des espaces $M(f_1, \ldots, f_n)$ entrainent immédiatement des résultats d'équicontinuité qui étendent ceux déjà obtenus ([3] et [16]). Ainsi avec les hypothèses et les notations de la proposition 2 l'ensemble des applications

$$T_u : \quad y \in L^p(X, \mathbf{R}^l) \to f(., y(.), u, .) \in L^1(X, \mathbf{R}),$$

pour u variant dans $B(g) = \left\{ u \;\middle|\; \int g(x, u(x)\,dx \leq 1 \right\}$ est équicontinu pour les topologies fortes.

Nous avons introduit au départ l'hypothèse de compacité sur la fonction d'état (« $u \to y_u$ ») pour étendre les résultats d'I. EKELAND sur la relaxation des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles elliptiques au cas des équations paraboliques et hyperboliques. Les méthodes utilisées nous permettaient en outre d'établir un théorème d'existence pour un espace de commande borné dans L^∞. Reprenant l'hypothèse de compacité sur la fonction d'état, I. EKELAND étendit ce théorème d'existence au cas d'un espace de commande non borné en introduisant une hypothèse de coercivité sur la fonction coût : f est de Carathéodory et vérifie une inégalité du type $f(x, y, u) \geq a(x) + b \mid u \mid^p$. On rejoignait ainsi les théorèmes d'existence de L. CESARI, qui étaient établis en usant d'une transformation assez particulière des équations aux dérivées partielles. Le théorème que nous donnons ici (th. 5) recoupe les travaux récents de L. CÉSARI [13] et M. F. BIDAUT [6]. Son originalité est dans l'emploi des intégrandes normales à la place de fonctions de Carathéodory et dans l'utilisation de la relation de majoration intégrale. Mais dans les théorèmes de M. F. BIDAUT et L. CESARI, l'espace que nous notons Y est un espace de Banach (et non pas $\mathbf{R}^n$).

Les résultats du type du théorème 6 et de son corollaire sont dits « théorèmes de relaxation » selon la terminologie de WARGA et I. EKELAND. On associe à un problème de calcul des variations non convexes qui n'a pas (en général) de solution, un problème dit « problème relaxé » qui a des solutions, et dont les solutions sont les points d'adhérence des suites minimisantes du problème original. On précise ainsi la structure des suites minimisantes.

Le théorème 6 et son corollaire permettent de retrouver les résultats de WARGA sur les équations différentielles [30] et de I. EKELAND sur les équations elliptiques [16]. On trouvera dans [2] d'autres exemples (problèmes paraboliques, hyperboliques, non linéaires).

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUMANN (R. J.) and PERLES (M.). — A variational problem arising in economics, *J. math. Anal. and Appl.*, t. 11, 1965, p. 488-503.

[2] BERLIOCCHI (H.) et LASRY (J.-M.). — Sur le contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 273, 1971, série A, p. 1222-1225.

[3] BERLIOCCHI (H.) et LASRY (J.-M.). — Sur le contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, *Cahiers de Mathématiques de la Décision*, Univ. Paris-IX-Dauphine, U. E. R. Math., 1971.

[4] BERLIOCCHI (H.) et LASRY (J.-M.). — Intégrandes normales et mesures paramétrées en calcul des variations, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 274, 1972, série A, p. 839-842.

[5] BERLIOCCHI (H.) et LASRY (J.-M.). — Nouvelles applications des mesures paramétrées *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 274, 1972, série A, p. 1623-1626.

[6] BIDAUT (Marie-Françoise). — Quelques résultats d'existence pour des problèmes de contrôle optimal, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 274, 1972, série A, p. 62-65.

[7] BOURBAKI (Nicolas). — *Intégration*, Chap. 5. — Paris, Hermann, 1968 (*Act. scient. et ind.*, 1244; *Boubaki*, 21).

[8] BOURBAKI (Nicolas). — *Intégration*, Chap. 6, — Paris, Hermann, 1968 (*Act. scient. et ind.*, 1281; *Bourbaki*, 25).

[9] BOURBAKI (Nicolas). — *Topologie générale*, chap. 9. — Paris, Hermann, 1968 (*Act. scient. et ind.*, 1045; *Bourbaki*, 8).

[10] CASTAING (Charles). — Une nouvelle extension du théorème de Dragoni-Scorza, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 271, 1970, série A, p. 396-398.

[11] CASTAING (Charles). — *Sur les multi-applications mesurables* (*Thèse Sc. math.*, Caen 1967).

[12] CASTAING (Charles). — *Un théorème de densité*, Faculté des Sciences de Caen (multigraphié).

[13] CESARI (Lamberto). — Multidimensional Lagrange problems of optimization in a fixed domain and an application to a problem of magnetohydrodynamics, *Archive for rat. Mech. and Anal.*, t. 29, 1968, p. 81-104.

[14] CHOQUET (Gustave). — *Lectures on analysis*, Vol. 2. — New York, Amsterdam, W. A. Benjamin, 1963 (*Mathematics Lecture Note Series*).

[15] DIEUDONNÉ (Jean). — Sur les espaces de Köthe, *J. Anal. math.*, Jérusalem, t. 1, 1951, p. 81-115.

[16] EKELAND (I.). — Sur le contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations elliptiques, *J. of funct. Anal.*, t. 9, 1972, p. 1-62 (*Thèse Sc. math.*, Paris 1971).

[17] EKELAND (I.) et TEMAM (R.). — *Analyse convexe et problèmes variationnels* (à paraître).

[18] GHOUILA-HOURI (Alain). — Sur la généralisation de la notion de commande d'un système guidable, *Rev. fr. Inform. et Rech. opér.*, t. 4, 1967, p. 7-32.

[19] IOFFE (A. D.) and TIKHOMIROV (V. M.). — Duality of convex functions and extremum problems, *Russian math. Surveys*, t. 23, 1968, p. 53-124.

[20] KURATOWSKI (K.) and RYLL-NARDZEWSKI (C.). — A general theorem on selectors, *Bull. Acad. Sc. polon.*, t. 13, 1965, p. 397-403.

[21] LINDENSTRAUSS (Joram). — A short proof of Liapounoff's convexity theorem- *J. of Math. and Mech.*, t. 15, 1966, p. 971-972.

[22] LJAPUNOV (A. A.). — Sur les fonctions-vecteurs complètement additives, *Izvest., Akad. Nauk SSSR*, Serija Matem., t. 4, 1940, p. 465-478.

[23] MEYER (Paul-André). — *Probabilité et potentiel*. — Paris, Hermann, 1966 (*Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg*, 14).

[24] MOREAU (J.-J.). — Fonctionnelles convexes, *Séminaire Leray : Equations aux dérivées partielles*, Collège de France, 1966-1967, fasc. 2.

[25] PALLU DE LA BARRIÈRE (R.). — *Cours d'automatique théorique*. — Paris, Dunod, 1966 (*Collection universitaire de Mathématiques*, 17).

[26] ROCKAFELLAR (R. T.). — Measurable dependence of convex sets and functions of parameters, *J. Math. Anal. and Appl.*, t. 28, 1969, p. 4-25.

[27] ROUSS. — *Extension d'un théorème de densité*, Université de Montpellier, 1972 (multigraphié).

[28] VALADIER (Michel). — Intégration de convexes fermés notamment d'épigraphes; inf-convolution continue, *Rev. fr. Inform. et Rech. opér.*, t. 4, 1970, Série R-2, p. 57-73.

[29] VALADIER (Michel). — Un théorème d'inf-compacité, *Séminaire d'analyse convexe*, Université de Montpellier, 1970.

[30] WARGA (J.). — Control problems with functional restrictions; Unilateral and minimax control problems defined by integral equations, *SIAM J. on Control*, t. 8, 1970, p. 360-372.

[31] YOUNG (L. C.). — Generalized surfaces in the calculus of variations, *Annals of Math.*, t. 43, 1942, p. 84-103.

[32] YOUNG (L. C). — *Lectures on the calculus of variations*. — Philadelphia, Saunders Compagny, 1969.

(Texte reçu le 18 juillet 1972.)

Henri BERLIOCCHI,
Assistant E. N. S. Saint-Cloud,
174, rue Lecourbe,
75015 Paris;

Jean-Michel LASRY,
Stagiaire de Recherches C. N. R. S., (E. R. A. 249)
18, avenue de la Motte-Picquet,
75007 Paris.