BULLETIN DE LA S. M. F.

GUY RENAULT

Anneaux réguliers auto-injectifs à droite

Bulletin de la S. M. F., tome 101 (1973), p. 237-254
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1973__101__237_0>

Bull. Soc. math. France,
101, 1973, p. 237-254.

ANNEAUX RÉGULIERS AUTO-INJECTIFS A DROITE

PAR

GUY RENAULT

[Université de Poitiers]

RÉSUMÉ. — Les propriétés des anneaux réguliers auto-injectifs à droite sont très voisines de celles des algèbres de von Neumann.

Introduction

On dit qu'un anneau unitaire A est un *anneau de Baer*, si l'annulateur à gauche (ou à droite, c'est équivalent) d'un sous-ensemble non vide de A est engendré par un idempotent. Comme exemples de tels anneaux, citons les algèbres de von Neumann, les anneaux réguliers (absolument plats) auto-injectifs à droite (ou à gauche), les anneaux de matrices $M_n(A)$ sur un anneau de Prüfer. Le but essentiel de cet article est d'adapter les méthodes utilisées par I. KAPLANSKY, pour algébriser la théorie des algèbres de von Neumann, à l'étude des anneaux réguliers auto-injectifs à droite. Pour la commodité du lecteur, nous allons rappeler diverses notions introduites dans [6].

Si S est un sous-ensemble d'un anneau A, on note $r(S)$ [resp. $l(S)$] l'annulateur à droite (resp. à gauche) de S dans A. Soit A un anneau de Baer semi-premier; pour $x \in A$, on a $r(xA) = (1 - c(x))A$, où $c(x)$ est un idempotent central appelé *couverture centrale* de x. Un idempotent e de A est dit *abélien*, si les idempotents de eAe sont centraux, *fidèle* si $c(e) = 1$. L'idempotent e est dit *fini*, si dans l'anneau eAe la relation $xy = e$ implique $yx = e$. Un anneau de Baer A est de type I s'il existe un idempotent abélien et fidèle, de type II s'il existe un idempotent fini et fidèle et si A ne contient pas d'idempotents abéliens $\neq 0$, de type III s'il ne contient pas d'idempotents finis $\neq 0$. Tout anneau de Baer admet une décomposition unique en produit d'anneaux de Baer de types I, II, III. Un anneau A est dit *fini* si la relation $xy = 1$ implique $yx = 1$, *proprement infini* s'il n'admet pas de facteurs directs bilatères finis. Tout anneau de Baer A se décompose de façon unique en produit de deux anneaux A_1 et A_2, où A_1 est fini et A_2 proprement infini [6]. Sauf mention express du contraire, les modules considérés sont des modules à droite sur un anneau unitaire. Pour la théorie des modules injectifs, on pourra se reporter à [3].

Rappelons simplement qu'un anneau A est dit *auto-injectif à droite* si, considéré comme *A-module à droite*, il est injectif, *auto-injectif* s'il est auto-injectif à droite et à gauche.

Une partie des résultats obtenus a fait l'objet d'un exposé au colloque d'algèbre d'Orsay, en juin 1972.

1. Le théorème de comparabilité

Dans ce paragraphe, *A désigne un anneau régulier auto-injectif à droite.*

Si x, y sont des éléments d'un A-module M, la notation $x A \lesssim y A$, signifie que xA est isomorphe à un sous-module de yA. Le théorème qui suit joue un rôle essentiel dans toute l'étude.

THÉORÈME 1.1. — *Soient e, f deux idempotents d'un anneau A. Il existe un idempotent central u tel que l'on ait :*

(*a*) $eu A \lesssim fu A$.

(*b*) $f(1-u) A \lesssim e(1-u) A$.

La famille des couples (X, Y), X sous-module de eA, Y sous-module de fA, tels que X soit isomorphe à Y, admet un élément maximal (X_0, Y_0). Comme A est auto-injectif à droite, X_0 est facteur direct de eA et Y_0 est facteur direct de fA.

On pose alors

$$X_0 = gA, \qquad e = g + k, \qquad gk = kg = 0,$$
$$Y_0 = hA, \qquad f = h + m, \qquad hm = mh = 0,$$

où g, h, k, m sont des idempotents de A.

La maximalité du couple (X_0, Y_0) implique $m A k = 0$, et si u désigne la couverture centrale de m, on a donc $ku = 0$. On en déduit les relations

$$eu = gu, \qquad fu = hu + m.$$

Comme gA et hA sont isomorphes, les modules euA et huA sont isomorphes, d'où (*a*).

L'assertion (*b*) résulte des relations

$$e(1-u) = g(1-u) + h(1-u), \qquad f(1-u) = h(1-u).$$

COROLLAIRE 1.2. — *Soient e, f deux idempotents abéliens et fidèles d'un anneau A. Alors les idéaux eA et fA sont isomorphes.*

Supposons que les idempotents e et f soient abéliens et fidèles. La relation $g\,A \cap k\,A = 0$ implique alors $g\,A\,k = 0 = k\,A\,h$ [1], donc $f\,A\,k = 0$ et par suite $k = 0$. Pour des raisons analogues $m = 0$ et $e\,A$ est isomorphe à $f\,A$.

A. PAGE et J. M. GOURSAUD ont participé à l'élaboration du résultat suivant :

PROPOSITION 1.3. — *Soient e, f deux idempotents d'un anneau A. Il existe un idempotent central u tel que l'on ait :*

$$eu\,A \lesssim fu\,A,$$
$$(1-e)(1-u)\,A \lesssim (1-f)(1-u)\,A.$$

L'idéal à droite $e\,A + f\,A$ est un facteur direct de A, on peut donc trouver des idempotents orthogonaux e', f', g tels que

$$(1)\qquad \begin{cases} e\,A = e'\,A \oplus g\,A = e_1\,A, \\ f\,A = f'\,A \oplus g\,A = f_1\,A, \end{cases}$$

où $e_1 = e' + g$, $f_1 = f' + g$. D'après le théorème de comparabilité, il existe un idempotent central u vérifiant les relations

$$(2)\qquad \begin{cases} e'\,u\,A \lesssim f'\,u\,A, \\ f'\,(1-u)\,A \lesssim e'\,(1-u)\,A. \end{cases}$$

Les relations (1) et (2) impliquent $eu\,A \lesssim fu\,A$. On a d'autre part

$$(3)\qquad \begin{cases} (1-e_1)\,A = f'\,A \oplus k\,A, \\ (1-f_1)\,A = e'\,A \oplus k\,A, \end{cases}$$

où $k = 1 - e' - g - f'$. Les relations (2) et (3) impliquent

$$(1-e_1)(1-u)\,A \lesssim (1-f_1)(1-u)\,A.$$

D'après (1), les idéaux $(1-e)\,A$ et $(1-e_1)\,A$ d'une part, $(1-f)\,A$ et $(1-f_1)\,A$ d'autre part, sont isomorphes, il en résulte alors que l'on a

$$(1-e)(1-u)\,A \lesssim (1-f)(1-u)\,A,$$

d'où l'assertion.

2. Idéaux bilatères et idempotents centraux

LEMME 2.1. — *Soient e, f deux idempotents d'un anneau A qui engendrent des idéaux à droite isomorphes. Si e appartient à un idéal bilatère I, alors $f \in I$.*

Soit φ un isomorphisme de $e\,A$ sur $f\,A$; il existe $a \in A$ tel que

$$\varphi\,(ea) = f = \varphi\,(e)\,ea.$$

Comme $ea \in I$, f est un élément de I.

On dira que deux idéaux à droite xA et yA d'un anneau A sont *comparables* si l'on a

$$xA \lesssim yA \qquad \text{ou} \qquad yA \lesssim xA.$$

COROLLAIRE 2.2. — *Soit A un anneau régulier tel que deux idéaux à droite monogènes soient toujours comparables. Alors :*

(*a*) *Les idéaux bilatères de A sont totalement ordonnés.*

(*b*) *Tout idéal bilatère est premier.*

La propriété (*a*) est une conséquence immédiate du lemme 2.1; (*b*) résulte du fait que tout idéal de A est semi-premier.

Dans toute la suite de ce paragraphe, *A désigne un anneau régulier auto-injectif à droite.*

PROPOSITION 2.3. — *Soient M un idéal bilatère maximal d'un anneau A, I un idéal bilatère qui n'est pas inclus dans M. Alors I contient un idempotent central e qui n'appartient pas à M.*

Il existe un élément x de M tel que $1 - x \in I$, et si h désigne un idempotent de M tel que $xA = hA$, alors $1 - h \in I$. Le théorème 1.1, appliqué aux idempotents h, $1 - h$, assure l'existence d'un idempotent central e tel que l'on ait :

$$heA \lesssim (1 - h)\, eA, \tag{1}$$

$$(1 - h)(1 - e)\, A \lesssim h\, (1 - e)\, A. \tag{2}$$

Comme $1 - h \in I$, la relation (1) et le lemme 2.1 impliquent l'appartenance de he à I, et par suite $e \in I$. Pour des raisons analogues, $(1 - h)(1 - e) \in M$, donc $e \notin M$.

DÉFINITION 2.4. — On dit qu'un anneau A est un *facteur*, si 0, 1 sont les seuls idempotents centraux de A.

Le centre d'un anneau régulier étant un anneau régulier, A est facteur si, et seulement si, son centre est un corps,

Exemples :

— L'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel est un facteur de type I.

— L'enveloppe injective d'un anneau intègre, n'admettant pas de corps de quotients à droite, est un facteur de type III.

— Soient k un corps, A l'anneau produit $\prod_{n=1}^{\infty} M_n(k)$. Si P est un idéal bilatère maximal qui contient le socle de A, alors A/P est un facteur de type II (*cf.* proposition 3.14).

COROLLAIRE 2.5. — *Un facteur A possède un seul idéal bilatère maximal.*

En effet, d'après la proposition 2.3, les idempotents centraux séparent les idéaux bilatères maximaux.

Désignons par $M(A)$ l'ensemble des idéaux bilatères maximaux d'un anneau A muni de la topologie de Jacobson. Le centre $Z(A)$ est un anneau régulier, donc tout idéal premier de $Z(A)$ est maximal. $M \to M \cap Z(A)$ définit une application de $M(A)$ dans spec $Z(A)$.

COROLLAIRE 2.6. — *L'application $M \to M \cap Z(A)$ définit un homéomorphisme de $M(A)$ sur* spec $Z(A)$. *Il en résulte que $M(A)$ est un espace compact totalement discontinu.*

On déduit immédiatement de la proposition 2.3 que cette application est une bijection. Le fait qu'elle soit un homéomorphisme résultera facilement des considérations suivantes. Soient I un idéal bilatère de A, P un idéal maximal de $Z(A)$ contenant $I \cap Z(A)$, M l'unique idéal maximal de A tel que $M \cap Z(A) = P$ (proposition 2.3). Nous allons prouver que M contient I. Sinon, d'après la proposition 2.3, il existe un idempotent central e appartenant à $I \cap Z(A)$, $e \notin M$, ce qui contredit le choix de M. Il est d'autre part bien connu que le spectre d'un anneau commutatif régulier est un espace compact totalement discontinu. En fait, $M(A)$ est un *espace stonien*, car $Z(A)$ est injectif.

On dit qu'un anneau A est *fini*, si la relation $xy = 1$ implique $yx = 1$. On voit facilement que cela est équivalent au fait que A ne contient pas de somme directe infinie d'idéaux à droite $\neq 0$ et tous isomorphes.

PROPOSITION 2.7. — *Dans un anneau A fini, tout idéal bilatère $I \neq 0$ contient un idempotent central non nul.*

Soient $e_1 \neq 0$ un idempotent de I, $fA = \bigoplus_{i=0}^{n} e_i A$ une somme directe maximale d'idéaux à droite $e_i A$, isomorphes à $e_1 A$, $f \in I$ d'après le lemme 2.1. Le théorème 1.1, appliqué aux idempotents e_1 et $1 - f$, montre l'existence d'un idempotent central u tel que l'on ait :

$$(1 - f)\, u A \lesssim e_1\, u A.$$
$$e_1 (1 - u) A \lesssim (1 - f)(1 - u) A.$$

La maximalité de la famille des idéaux $e_i A$ implique $u \neq 0$ et, d'après le lemme 2.1, $(1 - f) u \in I$, $fu \in I$, donc $u \in I$.

COROLLAIRE 2.8. — *Dans un anneau A fini, l'intersection des idéaux bilatères maximaux est nulle.*

Si cette intersection n'est pas nulle, d'après la proposition 2.7, elle contient un idempotent central $u \neq 0$. $1 - u$, qui est différent de 1, n'appartient à aucun idéal bilatère maximal, ce qui est absurde.

Remarques :

1° Si 0, A sont les seuls idéaux bilatères d'un anneau A, on dit que A est *quasi-simple.* D'après la proposition 2.7, un facteur fini est un anneau quasi-simple.

2° Il résulte du théorème de comparabilité que deux idéaux à droite monogènes d'un facteur A sont comparables. Tout idéal bilatère de A est donc premier (corollaire 2.2).

Soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal du centre $Z(A)$ de A ; on pose $S = Z(A) - \mathfrak{M}$. On vérifie facilement que l'on a

$$A\,\mathfrak{M} = \{ x \in A \mid \exists\, s \in S \text{ avec } sx = 0 \}.$$

L'anneau quotient $B = A/A\,\mathfrak{M}$ s'identifie donc à l'anneau localisé $S^{-1} A$.

PROPOSITION 2.9 :

(*a*) *Si A est un anneau fini, B est un anneau fini.*

(*b*) *Les idéaux bilatères de B sont totalement ordonnés, et ce sont des idéaux premiers.*

(*c*) *Si A est un anneau de type* I, *B est un anneau primitif dont le socle est* $\neq 0$.

Nous allons prouver les propriétés (*b*) et (*c*). Soient e, f deux idempotents de $A - A\,\mathfrak{M}$. D'après le théorème de comparabilité, il existe un idempotent central h tel que l'on ait :

$$eh\,A \lesssim fh\,A,$$
$$(1-h)\,f\,A \lesssim (1-h)\,e\,A.$$

Supposons par exemple que $h \in S$. On a alors $e\,S^{-1}A \lesssim f^{-1}\,S^{-1}A$. Il en résulte que deux idéaux à droite monogènes de $S^{-1}A$ sont comparables, et (*b*) résulte du corollaire 2.2. Soient e un idempotent abélien et fidèle de A, $\bar{e}$ son image canonique dans B; $\bar{e}$ est un idempotent abélien $\neq 0$ de l'anneau premier B, donc $\bar{e}\,B$ est simple, ce qui entraîne la propriété (*b*). Sous certaines hypothèses, le socle est de dimension infinie (*cf.* proposition 3.16).

3. **Anneaux réguliers auto-injectifs à droite de type I**

A désigne un anneau régulier auto-injectif à droite.

Si x est un élément d'un anneau A, on rappelle que $c(x)$ désigne la couverture centrale de x.

LEMME 3.1 [6]. — *Soient e un idempotent abélien d'un anneau A, k un idempotent de $e A$. Alors :*

(*a*) $k A = ke A$.

(*b*) $ke = ec(k)$.

(*a*) résulte des relations : $ke A \subset k A$, $k = kek$. ke est un idempotent central de $e A e$ qui vérifie $ke A (e - ke) = 0$. Il existe donc $a \in A$ tel que $e - ke = (1 - c(ke))\, a$, et par suite $ke = ec(ke)$; d'après la propriété (*a*), $c(k) = c(ke)$, d'où l'assertion.

THÉORÈME 3.2. — *Soit $e \neq 0$ un idempotent abélien d'un anneau A. Il existe alors un idempotent central $u \neq 0$ tel que $u A$ soit l'enveloppe injective d'une somme directe de modules tous isomorphes à $eu A$.*

Soit $S = \bigoplus_{i \in I} e_i A$ une somme directe maximale d'idéaux à droite isomorphes à $e A$, $e \in (e_i)_{i \in I}$, et soit $f A$ l'enveloppe injective de S. Si $f A = A$, le théorème est évident; on supposera donc $f A \neq A$. Le théorème 1.1, appliqué aux idempotents e, $1 - f$, assure l'existence d'un idempotent central u_1 tel que l'on ait :

$$(1 - f)\, u_1 A \lesssim eu_1 A,$$
$$e(1 - u_1) A \lesssim (1 - f)(1 - u_1) A.$$

La maximalité de la somme directe S implique $u_1 \neq 0$, et en considérant l'anneau $u_1 A$, on peut supposer que l'on a $(1 - f) A \lesssim e A$. $(1 - f) A$ est isomorphe au sous-module $k A$, $k = k^2$, de $e A$, et, d'après le lemme 3.1, $ke = eu$, où u est la couverture centrale de k et de $1 - f$. On en déduit alors que $(1 - u) A$ est l'annulateur à droite du module

$$T = (1 - f) A \oplus (\oplus_{i \in I} e_i u A).$$

Soit $ua \neq 0$; il existe un idéal à droite essentiel J tel que l'on ait

$$a J \subset (1 - f) A \oplus (\oplus_{i \in I} e_i A)$$

et par suite $au J$ est un sous-module différent de zéro de T; on en déduit sans peine que $u A$ est l'enveloppe injective de T.

Nous allons utiliser la caractérisation suivante des anneaux A de type I : A est de type I si, et seulement si, quel que soit $x \neq 0$, $x \in A$, il existe un idempotent abélien $e \neq 0$, appartenant à $x A$.

PROPOSITION 3.3. — *Un anneau A de type* I *est isomorphe à un produit d'anneaux A_j, $j \in J$, où A_j est l'enveloppe injective d'une somme directe d'idéaux à droite, tous isomorphes, engendrés par des idempotents abéliens.*

Soit $(u_j)_{j \in J}$ une famille maximale d'idempotents centraux orthogonaux vérifiant la conclusion du théorème 3.2. Comme A est de type I, l'application $f : x \to (u_j\, x)_{j \in J}$ est injective (théorème 3.2); l'auto-injectivité à droite de A implique que f est un isomorphisme de A sur l'anneau produit $\prod_j u_j A$.

Supposons que A_j soit l'enveloppe injective de la somme directe $S_j = \bigoplus_{i \in I_j} e_i A_j$; d'après [2] (p. 562), A_j est l'enveloppe injective de l'anneau $B_j = \mathrm{End}_{A_j} S_j$ qui est isomorphe à l'anneau des endomorphismes du D_j-module libre $D_j^{(I_j)}$, où $D_j = \mathrm{End}_{A_j} e_i A_j$. Comme e_i est un idempotent abélien, D_j est un anneau régulier réduit auto-injectif [1].

COROLLAIRE 3.4 [4]. — *Un anneau A de type* I *est isomorphe à un produit d'anneaux A_j, $j \in J$, où A_j est l'anneau des endomorphismes de l'enveloppe injective d'un module libre $D_j^{(I_j)}$, où D_j est un anneau régulier, réduit et auto-injectif.*

COROLLAIRE 3.5 (ROOS). — *Pour un anneau A de type* I, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *A est auto-injectif à gauche.*

(*b*) *A est fini.*

(*c*) *A est isomorphe à un produit d'anneaux de matrices $M_{n_j}(D_j)$, où D_j est un anneau régulier réduit et auto-injectif.*

$(a) \Rightarrow (b)$: C'est une conséquence du théorème 5.1 de [11].

$(b) \Rightarrow (c)$: Reprenons les notations du corollaire 3.4. Il est facile de prouver que l'ensemble I_j est fini. A_j, qui est alors un anneau de matrices de la forme $M_{n_j}(D_j)$, est auto-injectif à gauche, donc l'anneau produit A est auto-injectif à gauche, et $(c) \Rightarrow (a)$.

Un anneau vérifiant les conditions équivalentes du corollaire 3.5 est dit de type $\mathrm{I}_{\mathrm{fin}}$.

PROPOSITION 3.6. — *Soit A un anneau de type* I *tel que $1 = e_1 + \ldots + e_n$, où les e_i sont des idempotents abéliens orthogonaux qui engendrent des idéaux à droite isomorphes. Alors tout ensemble d'idéaux à droite isomorphes $(f_i A)$ engendrés par des idempotents orthogonaux $f_i \neq 0$, a au plus n éléments.*

Soient $f_1, \ldots, f_{n+1}$ des idempotents orthogonaux $\neq 0$ qui engendrent des idéaux à droite isomorphes. Comme e_1 est un idempotent abélien fidèle, on a $e_1 A f_i \neq 0$, et il existe des idempotents abéliens orthogonaux h_i de $f_i A$, $h_i \neq 0$, qui engendrent des idéaux à droite isomorphes, h_1 étant tel que $h_1 A$ soit isomorphe à un sous-module $g A$, $g = g^2$, de $e_1 A$.

D'après le lemme 3.1, on a $g A = g e_1 A$, $g e_1 = e_1 c(g)$. On en déduit les relations

$$c(g) A = \textstyle\sum_{i=1}^{n} e_i c(g) A \supset \sum_{i=1}^{n+1} h_i A,$$

ce qui contredit le fait que l'anneau $c(g) A$ soit fini.

Soient A un anneau de type $\mathrm{I}_{\mathrm{fin}}$, h un idempotent central de A. On dit que $h A$ est un *composant homogène* de A, s'il existe des idéaux à droites isomorphes $(e_i A)$, engendrés par des idempotents abéliens orthogonaux e_i, $1 \leq i \leq n$, tels que $h = e_1 + \ldots + e_n$. L'entier n, qui est indépendant de la décomposition choisie (proposition 3.6), est appelé *l'ordre* du composant homogène, et hA est dit de type I_n. Nous sommes en mesure de préciser la structure des anneaux de type $\mathrm{I}_{\mathrm{fin}}$.

THÉORÈME 3.7. — *Soit A un anneau de type $\mathrm{I}_{\mathrm{fin}}$: Alors*

(a) A est un isomorphe à un produit dénombrable d'anneaux de matrices $M_{n_j}(D_j)$, à coefficients dans un anneau réduit D_j, dont les ordres n_j, forment une suite strictement croissante. Les entiers n_j, les anneaux D_j sont entièrement déterminés par ces conditions.

(b) Si hA est un composant homogène $\neq 0$ de A, il existe un entier n_j tel que $h \in M_{n_j}(D_j)$ et hA est de type I_{n_j}.

Le corollaire 3.5 assure l'existence d'une telle décomposition, on identifie alors A et l'anneau produit $\prod_{j=1} M_{n_j}(D_j)$. Démontrons la propriété (*b*). On a $h = e_1 + \ldots + e_n$, où les e_i sont des idempotents abéliens orthogonaux qui engendrent des idéaux à droite isomorphes. On désigne par e_{ij} (resp. h_j) les composantes de e_i (resp. h) dans l'anneau produit A, et soit j_0 le plus petit indice tel que l'on ait $e_{1j_0} \neq 0$; comme les idéaux $e_i A$ sont isomorphes, on a $e_{ij_0} \neq 0$ pour $1 \leq i \leq n$. Dans $M_{n_j}(D_j)$, on a la relation

$$h_j = \textstyle\sum_{i=1}^{n} e_{ij}, \tag{1}$$

et h_j est un idempotent central de $M_{n_j}(D_j)$, donc de D_j. D'autre part, il existe des idempotents abéliens orthogonaux f_k, $1 \leq k \leq n_j$, qui engendrent des idéaux à droite isomorphes et tels que

$$1_{n_j} = \textstyle\sum_{k=1}^{n_j} f_k,$$

où 1_{n_j} désigne la matrice unité de $M_{n_j}(D_j)$. On a alors

$$h_j = \textstyle\sum_{k=1}^{n_j} h_j f_k. \tag{2}$$

Supposons $h_j \neq 0$. La proposition 3.6 appliquée aux relations (1) et (2) implique l'égalité $n_j = n$; la suite (n_j) étant strictement croissante, on a nécessairement $h_j = 0$ pour $j \neq j_0$, et $h \in M_{j_0}(D_{j_0})$, d'où (*b*).

Soit $A = \prod_{j=1} M_{n'_j}(D'_j)$ une autre décomposition du type considéré. On déduit immédiatement de la propriété (*b*) les relations

$$n_j = n'_j, \qquad M_{n_j}(D_j) = M_{n_j}(D'_j).$$

Le fait que D_j et D'_j soient isomorphes résulte du corollaire 1.2.

Remarques :

1° Soit A un anneau régulier auto-injectif à droite qui vérifie une identité polynomiale dont les coefficients, qui appartiennent au centre de A, engendrent A. On peut prouver que A est un anneau de type $\mathrm{I}_{\mathrm{fin}}$ tel que tout idéal à droite (ou à gauche) irréductible soit maximal.

2° Les facteurs de type I sont les anneaux d'endomorphismes d'espaces vectoriels à droite sur un corps K, les facteurs du type I_{fin} sont les anneaux simples. C'est une conséquence des corollaires 3.4 et 3.5. On a également la propriété suivante :

LEMME 3.8. — *Soit A un anneau régulier quasi-simple contenant un idempotent abélien $e \neq 0$. Alors A est un anneau simple.*

D'après la proposition 1-1 de [1], eA est un idéal à droite simple, et le socle de A est donc égal à A.

Nous allons préciser les propriétés des anneaux quotients A/M, où M décrit l'ensemble des idéaux bilatères maximaux de A. Nous aurons besoin du résultat suivant :

PROPOSITION 3.9. — *Soit M un idéal maximal d'un anneau A auto-injectif. Alors l'anneau quotient A/M est auto-injectif.*

C'est une conséquence immédiate de [7] (Hilfsatz 3.2, p. 167) et de [9] (p. 604).

PROPOSITION 3.10. — *Soit M un idéal maximal d'un anneau A tel que l'anneau quotient $B = A/M$ contienne un idempotent abélien $\neq 0$. Alors :*

(*a*) *B est isomorphe à un anneau de matrices $M_n(K)$, où K est un corps.*

(*b*) *Il existe n idéaux à droite isomorphes $(e_i A)$, engendrés par des idempotents abéliens orthogonaux e_i, $1 \leq i \leq n$, et $h = e_1 + \ldots + e_n$ est un idempotent central qui n'appartient pas à M.*

L'assertion (*a*) résulte du lemme 3.8. Démontrons la propriété (*b*).

Si x est un élément de A, $\bar{x}$ désigne son image canonique dans l'anneau B.

LEMME 3.11. — *Soit f un idempotent d'un anneau A. Il existe des idempotents orthogonaux e_1, e_2, e_3 tels que :*

(*a*) $fA = e_1 A \oplus e_2 A \oplus e_3 A$.

(*b*) *Les idéaux $e_1 A$ et $e_2 A$ sont isomorphes, et e_3 est un idempotent abélien.*

C'est le lemme 4 de [9].

Soit f un idempotent de A tel que $\bar{f} B = u B$, où u est un idempotent abélien $\neq 0$ de B. Avec les notations du lemme 3.11, on a

$$fA = e_1 A \oplus e_2 A \oplus e_3 A.$$

Comme uB est un idéal à droite simple, les idéaux à droite isomorphes $e_1 A$ et $e_2 A$ sont contenus dans M, et A contient donc un idempotent abélien $e_3 \neq 0$. Il est facile de prouver l'existence de n idempotents abéliens orthogonaux g_i, $1 \leq i \leq n$, tels que l'on ait :

$$B = \oplus_{i=1}^{n} \bar{g}_i B.$$

Comme on a nécessairement $\mathrm{Hom}_A(g_i A, g_j A) \neq 0$, il n'est guère difficile de se ramener à la situation suivante :

$$A = (\bigoplus_{i=1}^n g_i A) \oplus h A$$

les idempotents $g_1, \ldots, g_n, h$ sont orthogonaux, les idempotents abéliens g_i engendrent des idéaux à droite tous isomorphes et $B = \bigoplus_{i=1}^n \overline{g}_i B$. On pose alors

$$\begin{array}{lll} g_1 A = s_1 A \oplus e_1 A, & g_1 = s_1 + e_1, & s_1 e = e_1 s_1 = 0, \\ h A = h_1 A \oplus h_2 A, & h = h_1 + h_2, & h_1 h_2 = h_2 h_1 = 0, \end{array}$$

où $(s_1 A, h_1 A)$ est un élément maximal de l'ensemble des couples (X, Y), X sous-module de $g_1 A$, Y sous-module de $h A$, tels que X soit isomorphe à Y. On a alors $h_2 A e_1 = 0$, car le couple $(s_1 A, h_1 A)$ est maximal, $s_1 A e_1 = 0$, car g_1 est un idempotent abélien, il en résulte la relation $h A e_1 = 0$. Avec des notations évidentes, on en déduit une nouvelle décomposition de A :

$$A = (\bigoplus_{i=1}^n e_i A) \oplus (\bigoplus_{i=1}^n s_i A) \oplus h_1 A \oplus h_2 A,$$

où les idempotents intervenant dans cette décomposition sont tous orthogonaux. Les $(n+1)$ idéaux $s_1 A, \ldots, s_n A, h_1 A$, qui sont isomorphes, sont contenus dans M, donc l'idéal à droite $S = \bigoplus_{i=1}^n e_i A$ n'appartient pas à M. D'après ce qui précède, il est clair que S annule l'idéal $(\bigoplus_{i=1}^n s_i A) \oplus h A$; c'est donc un idéal bilatère engendré par l'idempotent central $h = e_1 + \ldots + e_n$, ce qui achève la démonstration.

Les propositions 3.9 et 3.10 impliquent les théorèmes suivants :

Théorème 3.12. — *Soit A un anneau auto-injectif de type* II. *Alors pour tout idéal maximal M, l'anneau quotient A/M est un facteur auto-injectif de type* II.

Théorème 3.13. — *Soient A un anneau de type* $\mathrm{I}_{\mathrm{fin}}$, *$M$ un idéal maximal de A. Pour que l'anneau quotient A/M soit de type* $\mathrm{I}_{\mathrm{fin}}$, *il faut et il suffit qu'il existe un composant homogène de type* I_n *qui ne soit pas inclus dans M. A/M est alors isomorphe à $M_n(K)$, où K est un corps.*

Si l'idéal maximal M contient tous les composants homogènes de A, alors A/M est de type II. Nous allons préciser ce dernier point. Avec les notations du théorème 3.7 on a la proposition suivante.

Proposition 3.14. — *Soit $A = \prod_{j \in \mathbf{N}} M_{n_j}(D_j)$ un anneau de type* $\mathrm{I}_{\mathrm{fin}}$, *tel que les entiers n_j forment une suite strictement croissante infinie. Pour un idéal bilatère maximal M de A, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *L'anneau quotient A/M est de type* II.

(*b*) *M contient l'idéal $\bigoplus_{j \in \mathbf{N}} M_{n_j}(D_j)$.*

Il suffit de montrer que si A/M est de type I, alors il existe un entier n_j tel que le composant homogène $M_{n_j}(D_j)$ ne soit pas inclus dans M; l'assertion résulte alors de la proposition 3.10 et du théorème 3.7.

COROLLAIRE 3.15. — *Pour un anneau A de type* I_{fin}, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *Les composants homogènes de A sont d'ordre borné.*

(*b*) *Quel que soit l'idéal maximal M, l'anneau quotient A/M est de type* I.

PROPOSITION 3.16. — *Soit M un idéal bilatère maximal d'un anneau de type* I_{fin} *tel que A/M soit de type* II; *on pose $\mathfrak{M} = M \cap Z(A)$. On a les propriétés suivantes :*

(*a*) *L'anneau quotient $B = A/A\,\mathfrak{M}$ est un anneau primitif fini dont le socle est de dimension infinie.*

(*b*) *L'enveloppe injective $\hat{B}$ de B est un anneau de type* I *qui n'est pas fini.*

Compte tenu de la proposition 2.9, il suffit de prouver que le socle est de dimension infinie. Sinon, B serait un anneau simple, et A/M serait de type I, ce qui est contraire à l'hypothèse.

La démonstration de la propriété (*b*) est immédiate. On a ainsi un anneau régulier fini qui est extension essentielle d'une somme directe d'idéaux à droite simples, tous isomorphes.

4. Anneaux proprement infinis

Dans ce paragraphe, A désigne un anneau régulier auto-injectif à droite. On dit que A est *proprement infini*, s'il n'admet pas de facteurs directs bilatères finis.

LEMME 4.1. — *Soit $S = \bigoplus_{i \in I} e_i A$, $e_i = e_i^2$, une somme directe infinie maximale d'idéaux à droite non nuls et tous isomorphes. Il existe alors un idempotent central $u \neq 0$ tel que $u A$ soit l'enveloppe injective d'une somme directe $T = \bigoplus_{i \in I} h_i A$, $h_i = h_i^2$, d'idéaux à droite isomorphes à $e_i u A$;*

Soient $e A$ l'enveloppe injective de S, e_1 un idempotent de la famille $(e_i)_{i \in I}$. D'après le théorème de comparabilité, il existe un idempotent central u tel que l'on ait :

$$(1 - e)\,u A \lesssim e_1 A,$$
$$e_1 (1 - u) A \lesssim (1 - e)(1 - u) A.$$

Comme la somme directe est maximale, on a $u \neq 0$. On pose alors

$$e_i u A = f_i A \oplus g_i A, \qquad \text{pour} \quad i \in I,$$

où $f_i A$ est isomorphe à $(1 - e)\,u A$, les idéaux $g_i A$ étant tous isomorphes.

On a alors la somme directe

$$S' = (1 - e)\, u\, A \oplus (\oplus_{i \in I} f_i\, A) \oplus (\oplus_{i \in I} g_i\, A).$$

La relation Card $(I \cup \{ 1 \}) = \text{Card}\, I$ implique que cet idéal est isomorphe à $\oplus_{i \in I} e_i\, u\, A$. L'assertion résulte alors du fait que

$$u\, A\, (1 - e)\, u\, A \oplus eu\, A$$

est l'enveloppe injective de S'.

Nous allons prouver que $u\, A$ est l'enveloppe injective d'une somme directe dénombrable $\oplus_n g_n\, A$, $g_n = g_n^2$, d'idéaux à droite isomorphes à $u\, A$. Il existe, en effet, une partition dénombrable $(J_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de I, tel que Card $J_n = \text{Card}\, I$.

Il suffit de prendre comme idéal à droite $g_n\, A$, l'enveloppe injective du module $\oplus_i h_i\, A$, $i \in J_n$. Si nous supposons que A est proprement infini, alors en utilisant une méthode analogue à celle employée pour démontrer la proposition 3.3, on montre que A est isomorphe à l'anneau produit $\prod_{j \in J} u_j\, A$, où $u_j\, A$ est l'enveloppe injective d'une somme directe

$$S_j = \oplus_{n \in \mathbf{N}} g_n^j\, u_j\, A$$

d'idéaux à droite tous isomorphes à $u_j\, A$. A est alors l'enveloppe injective de la somme directe

$$S = \oplus_{n \in \mathbf{N}} e_n\, A, \qquad e_n = (g_n^j)_{j \in J},$$

où $e_n\, A$ est isomorphe à A. D'autre part, comme $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ est un ensemble dénombrable, il existe un idempotent e tel que $e\, A$ et $(1 - e)\, A$ soient isomorphes à A. On a donc le résultat suivant :

PROPOSITION 4.2. — *Soit A un anneau proprement infini :*

(*a*) *A est l'enveloppe injective d'une somme directe dénombrable d'idéaux à droite isomorphes à A.*

(*b*) *Il existe un idempotent e tel que $e\, A$ et $(1 - e)\, A$ soient isomorphes à A.*

Soit A un anneau proprement infini de type II; en appliquant le lemme 4.1 aux sommes directes infinies maximales d'idéaux à droite isomorphes engendrés par des idempotents finis, et en utilisant une méthode analogue à celle employée pour démontrer le corollaire 3.4, on obtient le résultat suivant :

PROPOSITION 4.3. — *Soit A un anneau proprement infini de type* II. *Alors A est isomorphe à un produit d'anneaux A_j, $j \in J$, où A_j est l'anneau des endomorphismes de l'enveloppe injective d'un module libre $D_j^{(J)}$, sur un anneau D_j de* type II_{fin}.

Remarque. — Le corollaire 2.7 ne se généralise pas aux anneaux proprement infinis. En effet, d'après la proposition 3.10, l'intersection des idéaux bilatères maximaux d'un anneau proprement infini de type I contient l'idéal engendré par les idempotents abéliens.

5. Anneaux de matrices

Dans ce paragraphe, A (*resp.* B) *désigne un anneau régulier auto-injectif à droite.*

PROPOSITION 5.1. — *Soient e et $1-e$ deux idempotents finis d'un anneau A; alors A est un anneau fini.*

Soit g un idempotent d'un anneau proprement infini B, tel que gB et $(1-g)B$ soient isomorphes à B (proposition 4.2), et soit e un idempotent de B. D'après la proposition 1.3, il existe un idempotent central u de B tel que l'on ait :

$$gu\,B \lesssim eu\,B,$$
$$(1-g)(1-u)\,B \lesssim (1-e)(1-u)\,B.$$

Les idéaux $g(1-u)B$ et $(1-g)(1-u)B$ étant isomorphes, l'un des deux idempotents e et $1-e$ n'est pas fini. Il suffit d'appliquer le résultat précédent à la composante proprement infinie de A pour démontrer l'assertion.

COROLLAIRE 5.2. — *Soit $n \geqq 1$ un entier; les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *A est fini.*

(*b*) *$M_n(A)$ est fini.*

Le résultat qui suit a été prouvé par E. R. GENTILE [5] pour les anneaux auto-injectifs.

LEMME 5.3. — *Soit A un anneau tel que $1 = e_1 + \ldots + e_n = f_1 + \ldots + f_n$, où les e_i (resp. les f_i) sont des idempotents finis orthogonaux qui engendrent des idéaux à droite isomorphes. Alors les idéaux $e_i A$ et $f_i A$ sont isomorphes.*

En appliquant le théorème de comparabilité aux idempotents e_1 et f_1, on se ramène au cas où $e_1 A \lesssim f_1 A$. Comme A est un anneau fini (corollaire 5.2), cela implique que $e_1 A$ est isomorphe à $f_1 A$.

THÉORÈME 5.4. — *Pour les anneaux A et B, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1° *A et B sont isomorphes.*

2° *Il existe un entier $n \geqq 1$ tel que $M_n(A)$ soit isomorphe à $M_n(B)$.*

Si A est un anneau fini, l'assertion résulte du corollaire 5.2 et du lemme 5.3 (*cf.* également [5]). Si A est proprement infini, alors $M_p(A)$

est isomorphe à A quel que soit $p \geqq 1$ (proposition 4.2), et A est isomorphe à B. Le cas général résulte de ce qui précède.

On peut conjecturer que le résultat reste valable pour des anneaux auto-injectifs à droite qui ne sont pas nécessairement réguliers. On peut le démontrer lorsque les anneaux sont finis.

6. Enveloppes injectives de type I_{fin}

Dans ce paragraphe, A désigne un *anneau de Zorn semi-primitif :* c'est un anneau tel que tout idéal à droite I, $I \neq 0$, contient un idempotent e, $e \neq 0$. A est alors un anneau à idéal singulier à gauche et à droite nul [3].

Nous allons supposer que l'enveloppe injective $\hat{A}$ de A, qui est un anneau régulier auto-injectif à droite, est un anneau de type I_{fin}. On sait alors [1] que tout idéal à droite non nul de A contient un idempotent abélien différent de 0.

LEMME 6.1. — *Il existe un idempotent central u de A, $u \neq 0$, tel que $uA = \bigoplus_{i=1}^{n} f_i A$, où les f_i sont des idempotents abéliens orthogonaux qui engendrent des idéaux à droite isomorphes.*

D'après le théorème 3.2, il existe un idempotent central u_1 de $\hat{A}$, $u_1 \neq 0$, vérifiant $u_1 \hat{A} = \bigoplus_{i=1}^{n} e_i \hat{A}$, où les e_i sont des idempotents abéliens orthogonaux de $\hat{A}$ qui engendrent des idéaux à droite isomorphes. Soit $uA = \bigoplus_{i=1}^{k} f_i A$ une somme directe maximale d'idéaux à droite isomorphes contenus dans $u_1 \hat{A} \cap A$, où les f_i sont des idempotents abéliens orthogonaux. D'après la proposition 3.6, on a $k \leqq n$; on choisit la somme directe de telle sorte que k soit le plus grand possible. On pose

$$K = u_1 \hat{A} \cap A = uA \oplus K', \qquad \text{avec} \quad K' = (1 - u) A \cap u_1 \hat{A}.$$

On en déduit la décomposition

$$\hat{A} = u\hat{A} \oplus g\hat{A} \oplus (1 - u_1)\hat{A},$$

où $g\hat{A}$, $g = g^2$, désigne l'enveloppe injective de K'. Nous allons prouver que u est un idempotent central en établissant la relation $g\hat{A} f_1 = 0$.

Supposons donc $g\hat{A} f_1 \neq 0$; il existe un plongement d'un sous-module $h\hat{A}$, $h = h^2$, $h \neq 0$ de $g\hat{A}$ dans $f_1 \hat{A}$. On peut donc trouver un idempotent abélien e de $h\hat{A} \cap A$, $e \neq 0$ [1], tel que eA soit isomorphe à un sous-module X de $f_1 A$. Soit s, $s \neq 0$, un idempotent de X; il existe un idempotent abélien e' de eA tel que $e'A$ soit isomorphe à sA, et l'on peut construire une somme directe du type considéré de longueur $> k$, d'où la contradiction. La relation $g \hat{A} f_1 = 0$ implique $u \hat{A} g = 0$, et u est un idempotent central.

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'idempotents centraux orthogonaux de A vérifiant les propriétés du lemme 6.1; en utilisant les démonstrations du lemme 6.1, de la proposition 3.3, et du corollaire 3.4, on prouve facilement que $\hat{A}$ est isomorphe à l'anneau produit $\prod_{i \in I} u_i \hat{A}$. Il est clair que $\hat{A}$ est extension essentielle du $\hat{A}$-module à gauche $\bigoplus_{i \in I} \hat{A} u_i$, et si l'on prouve que $\hat{A} u_i$ est extension essentielle du A-module à gauche $A u_i$ pour $i \in I$, on aura alors montré que $\hat{A}$ est l'enveloppe injective du A-module à gauche A. Nous allons pour cela reprendre les notations du lemme 6.1. On pose $B = f_1 A f_1$, $\hat{B} = f_1 \hat{A} f_1$. D'après le lemme 1.4 de [1], f_1 est un idempotent abélien de $\hat{A}$, et l'anneau réduit $\hat{B}$ est l'enveloppe injective de B ([1], proposition 0.2). Comme B est un anneau de Zorn réduit, il est facile de prouver qu'il vérifie les conditions du théorème 3.3 de [10], donc $\hat{B}$ est également l'enveloppe injective du B-module à gauche B. Les anneaux $u A$ et $u \hat{A}$ étant respectivement isomorphes à $M_n(B)$ et $M_n(\hat{B})$, $u \hat{A}$ est l'enveloppe injective du A-module à gauche $u A$. En résumé, on a la proposition ci-après.

Proposition 6.2. — *Soit A un anneau de Zorn semi-primitif, dont l'enveloppe injective A est de type I_{fin}. Alors il existe une famille d'idempotents centraux orthogonaux $(u_i)_{i \in I}$ de A tels que :*

(a) $u_i A$ soit isomorphe à un anneau de matrices $M_n(B_i)$ où B_i est un anneau de Zorn réduit.

(b) $\hat{A}$ est isomorphe à l'anneau produit $\prod_{i \in I} u_i \hat{A}$. $\hat{A}$ est également l'enveloppe injective du A-module à gauche A.

Corollaire 6.3. — *Soit A un anneau régulier de Baer de type* I. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) $\hat{A}$ est de type I_{fin}.

(b) $A = A_1 \times A_2$, où A_2 est un anneau réduit, et où A_1 est un anneau auto-injectif de type I_{fin}.

(b) $\Rightarrow$ (a) c'est évident.

(a) $\Rightarrow$ (b). D'après la proposition 6.2 et le théorème 3.3 de [10], A est un anneau continu et l'assertion résulte du théorème 4.3 de [11].

Remarque. — D'après la proposition 3.16, il existe un anneau régulier, primitif et fini, dont l'enveloppe injective est un anneau de type I proprement infini.

7. Sur les V-anneaux

On dit qu'un anneau A est un V-anneau [3], si tout A-module à gauche ou à droite simple est injectif. Les V-anneaux commutatifs sont les anneaux réguliers (théorème de Kaplansky), l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension infinie n'est pas un V-anneau [3]. Compte tenu de la proposition 3.14, la proposition qui suit, fournit des exemples de V-anneaux de type $\mathrm{I}_{\mathrm{fin}}$ et $\mathrm{II}_{\mathrm{fin}}$.

PROPOSITION 7.1. — *Soient $(K_i)_{i\in I}$ une famille de corps, $(x_i)_{i\in I}$ des entiers $\geqq 1$, et A l'anneau produit $\prod_{i\in I} M_{n_i}(K_i)$. On a les propriétés suivantes :*

(*a*) *Tout idéal à droite* (*resp. à gauche*) *irréductible de A est maximal.*

(*b*) *A est un V-anneau.*

(*a*) $\Rightarrow$ (*b*). Cela résulte d'un théorème de Villamayor [3]. Nous allons prouver la propriété (*a*). On a $A = \prod_{i\in I} S_i$, où S_i est un A-module à droite simple. Soit $x = (x_i)_{i\in I}$ un élément de A, $x_i \in S_i$ pour $i \in I$. On pose

$$p(x) = \{\, i \in I \mid x_i = 0 \,\}.$$

Il est facile de prouver que $p(x) = \emptyset \Leftrightarrow xA = A$. Pour tout idéal à droite J, $J \neq A$, $p(J)$ désignera l'ensemble des $p(x)$ pour $x \in J$. $p(J)$ est un filtre défini sur I, ou encore un idéal de l'anneau de Boole $\mathfrak{P}(I)$. On vérifie que l'application $J \to p(J)$ est un isomorphisme de l'ensemble ordonné des idéaux J de A, $J \neq A$, sur l'ensemble ordonné des idéaux propres de $\mathfrak{P}(I)$. L'assertion résulte alors des propriétés bien connues des idéaux de $\mathfrak{P}(I)$.

COROLLAIRE 7.2. — *Il existe un V-anneau régulier A, dont l'enveloppe injective $\hat{A}$ n'est pas un V-anneau.*

Cela résulte des propositions 3.16 et 7.1, et du fait que l'anneau des endormorphismes d'un espace vectoriel de dimension infinie n'est pas un V-anneau.

Parmi les nombreux problèmes qui ne sont pas encore résolus, citons les suivants :

PROBLÈME 1. — *Un anneau régulier auto-injectif à droite de type* $\mathrm{II}_{\mathrm{fin}}$, *est-il auto-injectif à gauche ?*

PROBLÈME 2. — *Soit A un anneau de Zorn semi-primitif. Si A est un anneau de Baer de type* $\mathrm{I}_{\mathrm{fin}}$, *son enveloppe injective $\hat{A}$ est-elle un anneau de type* $\mathrm{I}_{\mathrm{fin}}$ *?* (*cf.* proposition 6.2).

PROBLÈME 3. — *Les anneaux de type* $\mathrm{I}_{\mathrm{fin}}$, *sont-ils les anneaux de type* I *tels que tout module simple* (*à gauche et à droite*) *soit injectif ?* (*cf.* proposition 7.1).

La réponse affirmative aux problèmes 1 et 2, qui se trouvent dans [8], est une conjecture (communication orale de J. E. Roos, mai 1972).

BIBLIOGRAPHIE

[1] CAILLEAU (A.) et RENAULT (G.). — Sur l'enveloppe injective des anneaux semi-premiers à idéal singulier nul, *J. of Algebra*, t. 15, 1970, p. 133-141.

[2] CAILLEAU (A.) et RENAULT (G.). — Anneau associé à une somme directe infinie de modules quasi-injectifs, *Archiv. der. Math.*, t. 21, 1970, p. 561-565.

[3] FAITH (C.). — *Lectures on injective modules and quotient rings*. — Berlin, Springer-Verlag, 1967 (*Lecture Notes in Mathematics*, n° 49).

[4] GEMINTERN (V. I.). — Semi-simple self-injective endomorphism rings, *Sibirsk. mat. Z.*, t. 12, 1971, p. 315-331.

[5] GENTILE (E. E.). — A uniqueness theorem on rings of matrices, *J. of Algebra*, t. 6, 1967, p. 131-134.

[6] KAPLANSKY (I.). — *Rings of operators*. — New York, W. A. Benjamin, 1968 (*Mathematics Lecture Note Series*).

[7] MAEDA (F.). — *Kontinuierliche Geometrien*. — Berlin, Springer-Verlag, 1958 (*Grundlehren der mathematischen Vissenschaften*, t. 95).

[8] ROOS (J. E.). — Sur l'anneau maximal de fractions des $A\ w^*$-algèbres et des anneaux de Baer, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 266, série A, 1968, p. 120-123,

[9] UTUMI (Y.). — On continuous regular rings and semi-simple self-injective rings. *Canad. J. Math.*, t. 12, 1960, p. 597-605.

[10] UTUMI (Y.). — On rings of which any one-sided quotient rings are two-sided, *Proc. Amer. math. Soc.*, t. 14, 1963, p. 141-147.

[11] UTUMI (Y.). — On continuous rings and self-injective rings, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 118, 1965, p. 158-173.

(Texte reçu le 27 novembre 1972.)

Guy RENAULT,
Université de Poitiers,
Mathématiques,
40, avenue du Recteur-Pineau,
86022 Poitiers.