BULLETIN DE LA S. M. F.

G. FOURET

Sur les faisceaux ponctuels plans de caractéristique ν ayant un point principal multiple d'ordre ν

Bulletin de la S. M. F., tome 7 (1879), p. 177-204
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1879__7__177_1>

Sur les faisceaux ponctuels plans de caractéristique ν, *ayant un point principal multiple d'ordre* ν; par M. G. Fouret.

(Séance du 27 juin 1879.)

I. — Généralités.

1. Avant d'aborder la question qui fait l'objet spécial de cette Note, je crois devoir rappeler quelques notions que j'ai déjà exposées antérieurement. Dans un précédent Mémoire [1], j'ai donné la forme générale de l'équation différentielle du premier ordre à deux variables, qui définit un *système* de courbes planes satisfaisant à cette double condition, qu'il y ait un nombre déterminé μ de branches du système passant par un point quelconque du plan, et un nombre également déterminé ν de ces branches tangentes à une droite prise arbitrairement.

L'équation différentielle la plus générale d'un pareil système peut s'écrire

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&R\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)^{\mu}+\left(S_0\frac{dy}{dx}+S_1\right)\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)^{\mu-1}+\ldots\\
&\quad+\left[V_0\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\mu-1}+V_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\mu-2}+\ldots+V_{\mu-1}\right]\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)\\
&\qquad\qquad+P_0\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\mu}+P_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\mu-1}+\ldots+P_{\mu}=0,
\end{aligned}
\right.
$$

en désignant par les lettres R, S, ..., V des polynômes *homogènes*

---

[1] *Mémoire sur les systèmes généraux de courbes planes*, etc. (*Bulletin*, t. II, année 1874, p. 72).

de degré ν en x et y, et par les lettres P des polynômes *complets* également de degré ν en x et y.

Les deux nombres μ et ν caractérisent l'équation différentielle, de la même manière qu'une équation algébrique ordinaire est caractérisée par son degré. Ils peuvent servir de base à une classification rationnelle des équations différentielles du premier ordre à deux variables.

2. Les cas où l'une des deux caractéristiques est égale à l'unité présentent des particularités intéressantes. Si l'on suppose, par exemple, $\mu = 1$, l'équation (1) devient

$$L\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) - M\frac{dy}{dx} + N = 0, \tag{2}$$

dans laquelle L, M et N désignent des polynômes de degré ν en x et y, dont le premier est réduit à ses termes du plus haut degré, les deux autres étant complets.

On voit immédiatement sur l'équation (2) qu'il existe dans le plan un certain nombre de points pour lesquels la valeur de $\frac{dy}{dx}$ est indéterminée. Ils sont fournis par l'intersection des deux courbes

$$Lx - M = 0, \quad Ly - N = 0. \tag{3}$$

Ces courbes, toutes les deux de degré $\nu + 1$, ont $(\nu + 1)^2$ points communs, dont ν sont à l'infini sur les ν directions données par l'équation

$$L = 0;$$

mais il est facile de voir que, pour ces ν points à l'infini, l'indétermination de $\frac{dy}{dx}$ n'est qu'apparente : en effet, pour avoir d'une manière générale la valeur de $\frac{dy}{dx}$ correspondant à un système de valeurs infinies de x et de y, on a le droit de négliger dans l'équation (2) les termes de degré supérieur à $\nu + 1$ par rapport à x et y, c'est-à-dire tous les termes des polynômes M et N, et l'on obtient alors

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Le nombre des points pour lesquels $\frac{dy}{dx}$ est indéterminé se réduit donc à $(\nu+1)^2-\nu=\nu^2+\nu+1$. De là le théorème suivant :

Dans un système général $(1, \nu)$ *de courbes planes, il existe* $\nu^2+\nu+1$ *points, en chacun desquels la direction tangentielle est indéterminée* (¹).

3. Ces points pourront être, dans certains cas, des points de croisement de toutes les courbes du système. Ils comprendront également les points multiples et singuliers de ces courbes, si elles en possèdent; car, pour ces points, $\frac{dy}{dx}$ a évidemment plus d'une valeur, et, par suite, son expression doit se présenter sous la forme $\frac{0}{0}$. Mais il est facile de démontrer qu'en général un point, pour lequel $\frac{dy}{dx}$ est indéterminé, est un *point asymptotique*

En effet, prenons l'un de ces points O pour origine des coordonnées; en résolvant l'équation (1) par rapport à $\frac{dy}{dx}$, on en tire une expression telle que

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+cx^2+\ldots}{a'x+b'y+c'x^2+\ldots}.$$

Si x et y sont les coordonnées d'un point m infiniment voisin de l'origine, les termes de degré supérieur en x et y deviennent des infiniment petits négligeables, et l'expression de $\frac{dy}{dx}$ se réduit à

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{a'x+b'y};$$

(¹) J'ai déjà énoncé antérieurement ce théorème dans une Note *Sur les points fondamentaux du faisceau de courbes planes défini par une équation différentielle du premier ordre algébrique* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVI, p. 586). *Voir* également le Mémoire déjà cité de M. Darboux (*loc. cit.*, p. 82). Ce théorème n'est d'ailleurs, sous une forme un peu différente, que le corrélatif d'un théorème sur les connexes [Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie von Alfred Clebsch* (Ersten Bandes. zweiter Theil, p. 1001)].

on en déduit

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{a + (b - a')\frac{y}{x} - b'\left(\frac{y}{x}\right)^2}{a'x + b'y},$$

ou bien, en désignant par α l'inclinaison sur Ox de la tangente à la branche de courbe qui passe en m,

$$(4) \qquad \operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\widehat{mOx} = \frac{a + (b - a')\frac{y}{x} - b'\left(\frac{y}{x}\right)^2}{a'x + b'y}.$$

Or, dans le cas où la branche considérée passerait effectivement par le point O, les angles α et $\widehat{mOx}$ différeraient d'un infiniment petit, et il en serait de même de leurs tangentes. C'est précisément, comme le montre la relation (4), ce qui n'a pas lieu en général, c'est-à-dire lorsque les coefficients a, b, a', b' sont quelconques et indépendants les uns des autres. Le point O et les points analogues sont donc bien généralement des *points asymptotiques*.

On peut remarquer toutefois qu'il existe pour chacun de ces points deux branches réelles ou imaginaires qui y passent effectivement : on obtient les directions tangentielles de ces branches, en égalant à zéro le numérateur du second membre de la relation (4). Cette dernière remarque a déjà été faite par M. Darboux, dans son *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré* (1). L'étude des singularités de ces points ayant été traitée par ce savant géomètre, nous n'y insisterons pas davantage : notre seul but était d'établir que ces points sont, en général, des points asymptotiques, fait que nous avions déjà signalé précédemment, mais sans le démontrer (2).

4. Parmi les systèmes définis par une équation telle que (2), se trouvent évidemment compris les faisceaux de courbes algébriques planes, puisque, comme on le sait, par un point quelconque du plan il passe une courbe d'un pareil faisceau, et une seule. Considérons un faisceau de courbes du $m^{\text{ième}}$ ordre, assujetties à la

---

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, 2e série, t. II, p. 124.

(2) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVI, p. 585.

condition de passer par $\frac{m(m+3)}{2} - 1$ points donnés, et ayant par suite m^2 points communs appelés *points fondamentaux* du faisceau. On sait, d'après un théorème bien connu, qu'il existe $2(m-1)$ courbes de ce faisceau tangentes à une droite quelconque du plan; on a, par suite,

$$\nu = 2(m-1).$$

Le nombre des points, pour lesquels le $\frac{dy}{dx}$ de l'équation différentielle du faisceau est indéterminé, est par suite égal à

$$4(m-1)^2 + 2(m-1) + 1 = 4m^2 - 6m + 3.$$

Si de ce nombre nous déduisons les m^2 points fondamentaux qui s'y trouvent compris, le nombre restant $3m^2 - 6m + 3 = 3(m-1)^2$ sera manifestement celui des points doubles des courbes du faisceau. On retrouve ainsi un résultat connu.

5. Par une extension qui paraîtra toute naturelle, nous dirons que les courbes, en général transcendantes, définies par l'équation (2), forment un *faisceau ponctuel,* ou, plus simplement, un *faisceau,* de *caractéristique* ν. Nous donnerons aussi un nom aux $\nu^2 + \nu + 1$ points, pour lesquels le $\frac{dy}{dx}$ de l'équation (2) est indéterminé : nous les appellerons les *points principaux* du faisceau. Cette dénomination nous semble préférable à celle de *points fondamentaux* que nous avons employée dans une Note précédente [1], parce que, dans le cas des faisceaux de courbes algébriques, comme on l'a vu plus haut, les points en question comprennent, outre les points qu'on a l'habitude d'appeler *fondamentaux,* les points doubles et en général tous les points singuliers des courbes du faisceau. C'est pour une raison analogue que nous éviterons de nous servir de l'expression de *points singuliers,* par laquelle M. Darboux désigne ces points. Il nous paraît plus rationnel de réserver la qualification de *singuliers,* pour les points principaux résultant de la coïncidence de deux ou plusieurs points princi-

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVI, p. 585.

paux ordinaires. En adoptant ces dénominations, on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Dans le plan d'un faisceau ponctuel de courbes planes, de caractéristique* ν, *il existe* $\nu^2 + \nu + 1$ *points, en chacun desquels la direction tangentielle est indéterminée. Ces points sont, en général, des points asymptotiques communs à toutes les courbes du faisceau, et, dans certains cas, des points de croisement de ces courbes. Ils comprennent les points singuliers de ces mêmes courbes, quand il en existe.*

II. — Faisceaux à point principal multiple.

6. *Points principaux multiples et singuliers.* — Il peut arriver, dans certains cas, que deux ou plusieurs points principaux se superposent. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit évidemment que les courbes (3) aient en commun un point qui soit multiple au moins pour l'une d'elles. Si les deux courbes (3) ont un point d'intersection multiple d'ordre h pour l'une, d'ordre k pour l'autre, ce point sera, comme on le voit immédiatement, un point principal multiple d'ordre hk du faisceau.

Considérons maintenant la courbe lieu des points de contact des tangentes menées par un point fixe I à toutes les courbes du faisceau. On forme immédiatement l'équation de ce lieu, que nous avons déjà eu l'occasion de considérer dans une Note précédente [1], sous le nom d'*indicatrice-point* du système ou du faisceau. Il suffit de remplacer dans l'équation différentielle (2) $\frac{dy}{dx}$ par $\frac{y-\beta}{x-\alpha}$, α et β désignant respectivement l'x et l'y du point I. On obtient ainsi l'équation

$$(5) \qquad L(\beta x - \alpha y) + My - Nx - M\beta + N\alpha = 0.$$

Cette équation est de degré $\nu + 1$; elle est vérifiée pour $x = \alpha, y = \beta$, et pour les coordonnées de chacun des points fondamentaux. Si, en outre, on suppose que les deux courbes (3) aient en commun un point multiple, d'ordre k pour chacune d'elles, et que ce point ait été pris pour origine des coordonnées, les termes de degré inférieur

---

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, t. V, p. 130.

à k manqueront à la fois dans M et dans N, et, par suite, dans l'équation (5) : d'où l'on conclut que l'indicatrice-point a pour point multiple d'ordre k le point principal multiple d'ordre k^2, qui coïncide avec l'origine des coordonnées. On peut, par suite, énoncer le théorème suivant :

Le lieu des points de contact des tangentes, menées par un point fixe I, *à toutes les courbes d'un faisceau de caractéristique* ν, *est une courbe d'ordre* $\nu+1$, *qui passe par le point* I, *et par les points principaux du faisceau. Un point principal multiple d'ordre* k^2 *est un point multiple d'ordre* k *du lieu* (¹).

On peut remarquer que les diverses singularités que pourra présenter un point principal multiple seront dans une corrélation intime avec les singularités de ce même point considéré comme appartenant à une indicatrice-point quelconque. Parmi ces indicatrices, il suffira même de considérer celles qui correspondent à des points I situés à l'infini.

7. Soit maintenant une droite D quelconque. En chacun des points de cette droite passe une courbe du faisceau et une seule. Menons la tangente en ce point à la courbe qui y passe : l'enveloppe de ces tangentes est une courbe de classe $\nu+1$, ayant pour tangente multiple d'ordre ν la droite D. Cela résulte immédiatement de ce que par chaque point de D ne passe qu'une de ces tangentes, et qu'il existe ν branches tangentes à D. On peut aussi faire voir que par un point quelconque I du plan on ne peut mener que $\nu+1$ tangentes à l'enveloppe considérée. En effet, l'indicatrice-point relative au point I, qui est de degré $\nu+1$, coupe la droite D en $\nu+1$ points qui sont tels, que les tangentes en ces points, aux courbes du faisceau qui y passent, concourent en I. Nous avons déjà appelé précédemment l'enveloppe considérée l'*indicatrice-droite* relative à D.

Supposons maintenant que la droite D, au lieu d'être quelconque, passe par un point principal O du faisceau, multiple d'ordre k^2. Alors l'indicatrice-point relative au point I a un point

---

(¹) On démontre encore facilement que le degré du même lieu se réduit à $\nu-k+1$, lorsque le point I coïncide avec un point principal multiple d'ordre k^2.

multiple d'ordre k en O; elle ne rencontre plus la droite D qu'en $\nu - k + 1$ points en dehors de O. L'indicatrice-droite relative à D n'est plus, par suite, que d'une classe égale à $\nu - k + 1$, et la droite D n'est plus tangente multiple que de l'ordre $\nu - k$. On a donc le résultat suivant :

L'enveloppe des tangentes, aux divers points d'une droite D, *aux branches d'un faisceau de caractéristique* ν *qui passent par ces points, est une courbe de classe* $\nu + 1$, *qui admet pour tangente multiple d'ordre* ν *la droite* D.

Dans le cas où D *passe par un point principal multiple d'ordre* k^2, *la classe de l'enveloppe se réduit à* $\nu - k + 1$, *et la droite* D *n'est plus qu'une tangente multiple d'ordre* $\nu - k$.

Si l'on suppose, en particulier, que k soit égal à ν, la classe de l'indicatrice-droite, relative à une droite passant par un point principal multiple d'ordre ν^2, est égale à l'unité, c'est-à-dire que cette indicatrice se réduit à un point. De là ce théorème :

Théorème. — *Lorsqu'un faisceau de caractéristique* ν *possède un point principal multiple d'ordre* ν^2, *toute droite passant par ce point est telle, que les tangentes aux courbes du faisceau, aux points où elles rencontrent la droite, concourent en un même point.*

8. Nous allons démontrer cette dernière propriété directement par le calcul.

A cet effet, prenons pour origine des coordonnées le point multiple d'ordre ν; d'après une remarque faite précédemment (6), les polynômes M et N ne contiendront que des termes de degré ν, de même que L.

En posant

$$y = tx, \tag{6}$$

on peut, par suite, écrire

$$L = Ax^\nu, \quad M = Bx^\nu, \quad N = Cx^\nu, \tag{7}$$

A, B, C désignant des fonctions entières, de degré ν, de t.

L'équation (2), après ces substitutions, devient

$$Ax\left(\frac{dy}{dx} - t\right) - B\frac{dy}{dx} + C = 0. \tag{8}$$

D'autre part, l'équation de la tangente, en un point quelconque (x, y), à la courbe du faisceau qui y passe, est

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x).$$

Si nous supposons que le point (x, y) soit pris sur la droite (6), nous pouvons remplacer dans l'équation précédente y et $\frac{dy}{dx}$ par leurs valeurs tirées de (6) et (8). L'équation de la tangente se met alors sous la forme

$$(9) \qquad (Atx - C)X - (Ax - B)Y - x(Bt - C) = 0.$$

Cette équation contient un paramètre variable x, au premier degré : d'où l'on conclut que la droite qu'elle représente passe par un point fixe, ce qui est le résultat déjà trouvé géométriquement.

On voit de plus que ce point est à l'intersection des deux droites

$$Y = \frac{C}{B}X,$$

$$Y = tX + \frac{C - Bt}{A},$$

qui s'obtiennent, en faisant successivement dans (8) $x = 0$ et $x = \infty$. L'une d'elles passe par le point principal multiple; l'autre est parallèle à la droite (6).

9. La réciproque est vraie; c'est-à-dire que, *si un point O du plan d'un faisceau de caractéristique ν est tel, que pour toute droite passant par O les tangentes aux courbes du faisceau, en leurs points d'intersection avec cette droite, concourent en un même point, le point O est un point principal multiple d'ordre ν^2 pour le faisceau.*

En effet, recommençons le calcul fait plus haut (8), mais sans remplacer cette fois dans (2) L, M et N par les expressions (7) : l'équation (9) de la tangente en un point quelconque de la droite (6) devient alors

$$(10) \qquad (Ltx - N)X - (Lx - M)Y - x(Mt - N) = 0.$$

Il est clair que, si M et N contiennent des termes de degré supérieur à ν, x^ν ne se trouvera pas en facteur quand on substituera $y = tx$; par conséquent, x n'entrera plus linéairement dans l'équation (10) de la tangente, et il ne sera plus vrai de dire que les tangentes aux divers points de la droite (6) concourent en un même point. Pour que ce fait ait lieu, il faudra que M et N se réduisent aux termes de degré ν en x et y, ce qui est la condition nécessaire et suffisante pour que l'origine des coordonnées soit un point principal multiple d'ordre ν^2 (6).

10. Des deux théorèmes, réciproques l'un de l'autre, que nous venons de démontrer (8 et 9), on déduit une conséquence intéressante qui est la suivante.

Imaginons que l'on définisse une courbe par une propriété de sa tangente, et que cette propriété soit de telle nature que : 1° *par un point* M *quelconque du plan on ne puisse faire passer qu'une droite satisfaisant aux conditions imposées à la tangente;* 2° *lorsque le point* M *se déplace sur une droite passant par un certain point fixe* O, *la tangente en* M *converge en un point* I *dont la position dépende uniquement de* OM.

D'après la première condition, on voit que *la courbe cherchée fait partie d'un faisceau, c'est-à-dire qu'elle a une équation différentielle du premier degré par rapport à* $\frac{dy}{dx}$. La seconde condition indique en outre que, *si l'on prend le point* O *pour origine des coordonnées, les polynômes* M *et* N, *ainsi que* L, *de l'équation différentielle mise sous la forme* (2), *seront homogènes en* x *et* y.

Il y a plus : non-seulement on peut ainsi prévoir d'avance la forme de l'équation différentielle résolvant le problème, mais on peut encore affirmer que l'intégration de cette équation se ramène aux quadratures. Cette intégration se conclut, en effet, par une généralisation immédiate, de la méthode donnée par M. Darboux, pour le cas particulier de $\nu = 2$, dans le beau Mémoire (1) que nous avons déjà eu l'occasion de citer. Il n'y a qu'à suivre la même marche; pour cela, rendons l'équation (2) homogène, en rempla-

(1) *Loc. cit.*, p. 124.

çant x et y respectivement par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$; l'équation (2) devient

$$L(xdy - ydx) + M(ydz - zdy) + N(zdx - xdz) = 0,$$

L, M et N restant des polynômes homogènes en x et y seulement. Faisons maintenant $y = 1$, et par suite $dy = 0$; l'équation précédente peut alors s'écrire

$$(M - Nx)\frac{dz}{dx} + Nz - L = 0.$$

C'est, comme on le voit, une équation différentielle linéaire par rapport à z, dont on sait ramener immédiatement l'intégration aux quadratures.

III. — Applications.

11. Nous allons donner quelques exemples de courbes définies par une propriété de leur tangente, de telle nature que la tangente en un point M d'une pareille courbe passe par un point I dépendant uniquement de la direction du rayon vecteur OM, qui joint un point O fixe au point M.

Problème I. — *On donne dans un plan une conique et un point fixe* O, *et l'on demande de trouver une courbe, telle que la tangente en un point quelconque* M *de cette courbe passe par le pôle* I *de* OM *par rapport à la conique.*

Il est tout d'abord facile de voir que la solution comporte une infinité de courbes formant un faisceau; cela résulte de ce que par chaque point M il ne passe qu'une seule transversale OM, laquelle n'a qu'un pôle I par rapport à la conique fixe donnée; d'où il suit que la droite MI est unique pour chaque point M. D'autre part, la position du point I ne variant pas lorsque le point M se déplace sur la transversale, on en conclut que le système admet en O un point principal multiple d'un ordre égal à sa caractéristique ν.

Cherchons quelle sera la valeur de cette caractéristique ν, c'est-à-dire du degré des polynômes L, M, N, dans l'équation différentielle. A cet effet, remarquons d'abord que, quand on fait tourner la transversale OM, le point I décrit la polaire Ω du point O par rapport à la conique donnée. Cela posé, considérons une droite Δ quelconque, et cherchons combien il y aura de branches de courbes, satisfaisant à la question, tangentes à cette droite. Les points de contact cherchés sont évidemment sur la transversale, ou les transversales, partant du point O, qui correspondent au point I d'intersection de Δ et de Ω; or, d'après la définition donnée plus haut, il n'y a qu'une transversale répondant à la question : c'est la polaire du point I par rapport à la conique. Les courbes cherchées ne toucheront par suite Δ qu'en un point, intersection de cette droite avec la transversale ainsi déterminée. De là nous concluons que les polynômes L, M et N seront du premier degré, c'est-à-dire que l'équation différentielle sera un cas particulier de l'équation de Jacobi.

12. On sait que, dans le cas actuellement considéré, le système de courbes défini par l'équation différentielle admet trois points principaux : l'un de ces points est le point O; les deux autres sont les points de contact A et B des tangentes menées du point O à la conique donnée. Cela résulte de ce que, le pôle I de la transversale OA par rapport à la conique coïncidant avec le point A, la tangente en A de la courbe du système qui y passe est indéterminée; de même pour B.

En intégrant l'équation différentielle, on trouverait comme résultat le faisceau des coniques bitangentes à la conique proposée aux points A et B. On peut d'ailleurs le prévoir géométriquement, en vertu d'une propriété bien connue : en effet, considérons une transversale quelconque OM et le point I correspondant : on sait que OI est conjuguée harmonique de OM par rapport à OA et OB, c'est-à-dire que la droite OM a le même pôle I par rapport aux diverses coniques bitangentes, en A et B, à OA et OB. Donc, etc.

13. Problème II. — *Étant données dans un plan quatre droites fixes* A, B, C, D *et un point fixe* O, *on joint ce point à un point* M *pris arbitrairement, et l'on décrit une conique tangente aux cinq droites* A, B, C, D *et* OM : *on demande de trouver un système de courbes tel, que la tangente en* M *à la courbe qui y passe aboutisse au centre* I *de la conique.*

Nous pouvons tout d'abord remarquer qu'à un point M choisi à volonté il ne correspond qu'une conique, à savoir la conique tangente aux cinq droites A, B, C, D et OM, et, par suite, qu'un seul point I, qui est le centre de cette conique. On ne peut donc tracer en M qu'une tangente : d'où nous concluons que le système est un faisceau. De plus, le point I restant invariable, quand le point M se déplace sur la droite OM, le point O est un point principal multiple d'un ordre égal à la caractéristique ν du faisceau.

On peut déterminer cette caractéristique géométriquement. Pour cela, cherchons en combien de points les courbes du système touchent une droite quelconque Δ : remarquons qu'en vertu d'un théorème bien connu le lieu des points I correspondant aux différentes droites partant du point O est une droite Λ, puisque c'est le lieu des centres des coniques tangentes aux quatre droites A, B, C, D. Soit I le point d'intersection de Δ et de Λ : décrivons la conique tangente à A, B, C, D et ayant pour centre le point I, laquelle est unique, comme on le sait; puis, du point O menons les deux tangentes à cette conique. Les points cherchés doivent se trouver à l'intersection de Δ avec ces deux tangentes : d'où nous concluons que l'on a $\nu = 2$.

14. Le point O étant un point principal multiple d'un ordre de multiplicité égal à $\nu^2 = 4$, il doit exister $\nu + 1 = 3$ autres points principaux. Ce sont les positions du point I, situées respectivement sur les transversales OM auxquelles elles correspondent; mais chacun des points I est le centre d'une conique tangente à A, B, C, D et à OM; par suite, pour que la circonstance indiquée soit réalisée, il faut que OM soit une asymptote de la conique. Or, considérons le lieu des points de contact des tangentes menées du point O à toutes les coniques tangentes aux droites A, B, C, D : ce lieu est une courbe du troisième ordre ayant un point double en O, car il existe une de ces coniques et une seule tangente à une droite quelconque issue du point O, et il y a deux de ces coniques qui passent en ce point. Cela posé, on aura évidemment les trois droites cherchées, en prenant les parallèles menées par O aux trois directions asymptotiques de la courbe du troisième ordre considérée.

On voit, d'après ce qui précède, que la détermination des trois points principaux dépendrait d'une équation du troisième degré.

Dans l'exemple qui va suivre, et pour lequel on a encore $\nu = 2$, il existe trois points principaux simples qui se construisent avec la règle et le compas.

15. Problème III. — *On donne deux droites* A *et* B *se coupant en un point* d, *et trois points fixes* O, g *et* h; *par le point* O *on mène une transversale aboutissant à un point* M *pris arbitrairement; cette transversale rencontre respectivement en* a *et* b *les deux droites* A *et* B; *on joint* a *et* g, *ainsi que* b *et* h : *les deux droites obtenues se coupent en un point* I. *On demande d'étudier le système de courbes défini par la condition que la tangente en* M *à la courbe qui y passe converge au point* I.

On voit d'abord immédiatement, en répétant le raisonnement déjà fait pour les deux exemples précédents, que le système en question est un faisceau, ayant en O un point principal multiple d'un ordre égal à ν^2, ν étant la caractéristique de ce faisceau.

Pour trouver cette caractéristique, remarquons que le lieu du point I, pour les diverses positions de OM, est une conique qui passe par les trois points d, g, h. En effet, la transversale OM détermine sur A et B deux divisions homographiques : par suite, ga et hb sont les rayons homologues de deux faisceaux homographiques, et leur intersection I, d'après une propriété bien connue, décrit une conique (C) contenant les points g et h. Cette conique passe en outre par le point d; en effet, lorsque la transversale coïncide avec Od, les deux points a et b se confondent en d, et il en est par suite de même du point I.

16. Cela posé, cherchons en combien de points une droite quelconque Δ est tangente à des courbes du faisceau. Cette droite Δ coupe la conique (C) en deux points I : chacun de ces points I détermine une transversale OM et une seule, que l'on obtient en joignant les points a et b, où les droites Ig et Ih rencontrent respectivement A et B. Les points d'intersection de Δ avec les deux transversales ainsi construites sont les seuls points en lesquels Δ soit tangente à des courbes du faisceau. Donc on a $\nu = 2$.

Le faisceau admettant sept points principaux, et le point O, d'après ce que nous avons vu plus haut, comptant pour quatre, il doit exister trois autres points principaux. L'un de ces points est évidemment le point d, ce point coïncidant avec le point I, lorsque la transversale OM se confond avec Od. Les deux autres points principaux sont les points e et f, où Og et Oh rencontrent respectivement les droites B et A. En effet, considérons par exemple la transversale Og qui coupe A et B respectivement aux points α et e : le point I correspondant est donné par l'intersection de $g\alpha$ et de he; mais, $g\alpha$ se confondant avec la transversale, son point d'intersection avec he n'est autre que le point e: le point e est donc une position du point I pour laquelle ce point se trouve sur la transversale correspondante : c'est donc un point principal. Le même raisonnement s'applique au point f.

17. Problème IV. — *Étant donnés un point* O *fixe et une courbe* (C) *d'ordre* p, *ayant un point multiple* K *d'ordre* $p-1$, *on joint le point* O *à un point quelconque* M, *puis du point* K *on abaisse une perpendiculaire sur* OM *qui rencontre la courbe* (C) *en un nouveau point* I. *On demande d'étudier le système de courbes tel, que la tangente en* M, *à la courbe qui y passe, aboutisse au point* I.

On voit tout de suite que le système qui vient d'être défini est un faisceau, ayant un point principal multiple, d'un ordre égal à ν^2, ν désignant la caractéristique du faisceau.

Pour avoir cette caractéristique ν, c'est-à-dire le nombre des points de contact des courbes du faisceau avec une droite quelconque Δ, considérons les p points I d'intersection de cette droite avec la courbe (C); joignons ces points au point K, et abaissons de O des perpendiculaires sur les droites ainsi obtenues : on a de la sorte p transversales OM, à chacune desquelles correspond un des p points I d'intersection de Δ et de (C) : les points de rencontre de ces transversales avec Δ sont les points en lesquels Δ est tangente à des courbes du faisceau : d'où l'on conclut $\nu = p$.

18. Le point O étant, d'après ce que l'on a vu, un point principal multiple d'ordre p^2, et le nombre total des points principaux étant égal à $p^2 + p + 1$ (5), il reste $p+1$ points principaux à dé-

terminer. Ces points, comme dans les exemples précédents, sont les positions du point I situées respectivement sur les transversales OM qui leur correspondent : ils doivent, par suite, coïncider avec les pieds des perpendiculaires abaissées de K sur lesdites transversales. Or, les pieds de ces perpendiculaires sont situés sur le cercle décrit sur OK comme diamètre. Les points principaux cherchés devant se trouver à la fois sur ce cercle et sur la courbe (C) sont situés à l'intersection de ces deux lignes. Le nombre total de ces points d'intersection est $2p$; mais il y en a $p-1$ qui sont confondus avec K, et qui ne satisfont pas à la condition voulue pour être des points principaux ; les points restants, au nombre de $p+1$, sont les points principaux cherchés.

19. Appliquons les résultats précédents au cas où la courbe (C) se réduit à une droite D. L'énoncé du problème devient alors le suivant :

Étant donnés deux points fixes O *et* K, *et une droite fixe* D, *on joint le point* O *à un point quelconque* M, *puis du point* K *on abaisse une perpendiculaire sur* OM *qui rencontre la droite* D *en un point* I. *On demande quel est le système de courbes tel, que la tangente en* M, *à la courbe qui y passe, aboutisse au point*. I.

Nous savons immédiatement que les courbes ainsi définies forment un faisceau dont la caractéristique ν est égale à l'unité, et que les trois points principaux simples de ce faisceau sont le point O et les deux points d'intersection de D avec le cercle décrit sur OK comme diamètre. Il résulte de là que l'équation différentielle du système est un cas particulier de l'équation de Jacobi; nous allons l'intégrer par la méthode géométrique, que nous avons donnée il y a quelques années, pour ce genre d'équations ([1]).

20. Formons l'équation différentielle du problème en prenant pour origine des coordonnées le point O, et pour axes deux droites rectangulaires dont l'une, l'axe des y, soit parallèle à la droite D. Soient

$$X = h \tag{11}$$

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVIII, p. 1693 et 1837.

l'équation de la droite D, α et β les coordonnées du point K. Désignons par x, y les coordonnées du point M, et par X, Y les coordonnées courantes. L'équation de la perpendiculaire à OM menée par le point K est

$$(12) \qquad Y - \beta = -\frac{x}{y}(X - \alpha).$$

Les équations (11) et (12) fournissent immédiatement les coordonnées du point I, qui sont

$$X = h,$$
$$Y = \beta - \frac{x}{y}(h - \alpha).$$

Écrivons que le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$ de la courbe du faisceau qui passe par le point M est égal au coefficient angulaire de MI; on obtient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - \beta + \frac{x}{y}(h - \alpha)}{x - h},$$

ou bien

$$(13) \qquad y(x\,dy - y\,dx) + [(\alpha - h)x + \beta y]dx - hy\,dy = 0.$$

Telle est l'équation différentielle des courbes cherchées. Nous pouvons, au moyen de cette équation, retrouver les points principaux du faisceau. Ces points sont fournis par les systèmes de valeurs de x et y qui vérifient les équations

$$(14) \qquad \begin{cases} xy - hy = 0, \\ y^2 - (\alpha - h)x - \beta y = 0. \end{cases}$$

La première équation se dédouble en $y = 0$ et $x = h$. En faisant $y = 0$ dans la seconde, on obtient $x = 0$; on retrouve ainsi comme point principal le point O. Pour $x = h$, la seconde équation devient une équation du deuxième degré en y, et détermine deux autres points principaux situés sur D. On voit, d'ailleurs, immédiatement que ces points sont situés sur la courbe

$$x^2 + y^2 - \alpha x - \beta y = 0,$$

qui n'est autre que le cercle décrit sur OK comme diamètre. C'est le résultat déjà trouvé géométriquement.

21. Cela posé, si nous appelons

$$u = o, \quad v = o, \quad w = o$$

les équations des droites EF, OF, OE, qui joignent deux à deux les trois points principaux, et si nous désignons par ρ le rapport anharmonique constant $\frac{\sin \mathrm{IME}}{\sin \mathrm{IMF}} : \frac{\sin \mathrm{OME}}{\sin \mathrm{OMF}}$, l'intégrale générale de l'équation (13) peut s'écrire

$$(15) \qquad u^{1-\rho} v^{\rho} w^{-1} = C,$$

C désignant une constante arbitraire [1].

La droite $u = o$ n'est autre que $x - h = o$. Pour avoir les équations des deux autres, retranchons membre à membre les équations (14), après les avoir multipliées respectivement par x et par y : on obtient

$$(\alpha - h)x^2 + \beta xy - hy^2 = o,$$

équation du système des deux droites OE et OF. Les coefficients angulaires de ces deux droites sont, en conséquence, donnés par l'équation

$$hm^2 - \beta m - (\alpha - h) = o,$$

d'où

$$m = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\alpha h + 4h^2}}{2h}.$$

En désignant par m' et m'' ces deux coefficients angulaires, nous pouvons écrire les équations des deux droites OE et OF

$$y - m'x = o, \quad y - m''x = o.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer ρ. Or, soient N et Q les points d'intersection de D avec OM et Ox; on a

$$\rho = \frac{\sin \mathrm{IME}}{\sin \mathrm{IMF}} : \frac{\sin \mathrm{OME}}{\sin \mathrm{OMF}} = \frac{\mathrm{IE}}{\mathrm{IF}} : \frac{\mathrm{NE}}{\mathrm{NF}}.$$

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVIII, p. 1837.

Ce rapport anharmonique étant constant ([1]), quelle que soit la droite OM, évaluons-le dans le cas particulier où OM coïncide avec Ox. Alors le point I est rejeté à l'infini, et l'on obtient

$$\rho = \frac{\mathrm{QF}}{\mathrm{QE}} = \frac{\operatorname{tang}\mathrm{QOF}}{\operatorname{tang}\mathrm{QOE}} = \frac{m''}{m'}.$$

En remplaçant dans (15) u, v, w et ρ par leurs expressions, et simplifiant, on trouve l'intégrale cherchée

$$(x-h)^{m'-m''}(y-m'x)^{m''}(y-m''x)^{-m'} = \mathrm{C}.$$

Remarque. — Les courbes définies par cette équation seront algébriques, si l'on a $\alpha = \beta$, et si α est commensurable avec h.

22. *Étude d'une équation différentielle.* — Nous allons maintenant examiner quelques cas particuliers intéressants de l'équation différentielle

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} &(x^2+y^2)(x\,dy - y\,dx) - (ax^2+bxy+cy^2)\,dy \\ &\qquad\qquad + (\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2)\,dx = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation définit un faisceau de caractéristique $\nu = 2$, ayant à l'origine un point principal quadruple. Il ne se distingue des autres faisceaux satisfaisant aux mêmes conditions qu'en ce que les points où la droite de l'infini est tangente à des courbes de ce faisceau sont les deux ombilics, c'est-à-dire les deux points imaginaires communs à tous les cercles du plan. Cette particularité, qui disparaît au moyen d'une transformation homographique, facilite, comme on va le voir, l'étude des courbes définies par l'équation (16); et d'abord elle va nous permettre de ramener cette équation à une équation différentielle linéaire, par une mé-

---

([1]) On sait d'avance que ce rapport anharmonique est constant pour tout système (1, 1) (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVIII, p. 1693); mais on peut le vérifier dans le cas actuel, en remarquant que, S étant le pied de la perpendiculaire abaissée de P sur OM, on a

$$\frac{\mathrm{IE}}{\mathrm{IF}} : \frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{OF}} = \frac{\sin\mathrm{PSE}}{\sin\mathrm{PSF}} : \frac{\sin\mathrm{OSE}}{\sin\mathrm{OSF}}.$$

Le second de ces rapports anharmoniques est constant, car les quatre angles dont il dépend le sont, les cinq points E, F, O, P, S étant sur le cercle décrit sur OP comme diamètr .

thode différente de la méthode générale indiquée plus haut (10), et qui présente, dans certains cas, des avantages sur cette dernière.

A cet effet, effectuons un changement de variables, en posant

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

d'où

$$\theta = \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}.$$

On tire de là, en différentiant,

$$dx = dr\cos\theta - r\sin\theta\, d\theta, \quad dy = dr\sin\theta + r\cos\theta\, d\theta,$$

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = d\theta.$$

En substituant dans l'équation (16), il vient

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} & r^2 d\theta - (a\cos^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\sin^2\theta)(dr\sin\theta + r\cos\theta\, d\theta) \\ & \quad + (\alpha\cos^2\theta + \beta\sin\theta\cos\theta + \gamma\sin^2\theta)(dr\cos\theta - r\sin\theta\, d\theta) = 0. \end{aligned} \right.$$

Après avoir développé et ordonné, posons

$$u = \frac{1}{r}, \quad \text{d'où} \quad du = -\frac{dr}{r^2},$$

$$\alpha\cos^3\theta + (\beta - a)\cos^2\theta\sin\theta + (\gamma - b)\cos\theta\sin^2\theta - c\sin^3\theta = \frac{-1}{\psi(\theta)},$$

$$a\cos^3\theta + (b + \alpha)\cos^2\theta\sin\theta + (c + \beta)\cos\theta\sin^2\theta + \gamma\sin^3\theta = \frac{\varphi(\theta)}{\psi(\theta)}.$$

En faisant cette substitution dans (17), on obtient l'équation différentielle linéaire

$$\frac{du}{d\theta} + u\,\varphi(\theta) + \psi(\theta) = 0.$$

23. D'après ce que l'on a vu plus haut (8), si l'on considère une droite quelconque OM issue de l'origine, les tangentes menées, aux divers points de cette droite, aux courbes du faisceau qui y passent, concourent en un même point I; et ce point est donné par l'intersection des deux droites

$$(18)\quad \left\{ \begin{aligned} & y = \frac{\alpha + \beta t + \gamma t^2}{a + bt + ct^2}\, x, \\ & y = tx + \frac{\alpha + (\beta - a)t + (\gamma - b)t^2 - ct^3}{1 + t^2}. \end{aligned} \right.$$

La construction du point I peut se faire d'une manière simple dans certains cas particuliers. Supposons, par exemple, que l'on ait

$$\beta = a, \quad b = -\alpha, \quad c = 0, \quad \gamma = 0.$$

Les équations (18) se réduisent à

$$y = \frac{\alpha + at}{a - \alpha t},$$

$$y = tx + \alpha.$$

La seconde de ces équations représente une droite parallèle à OM, et passant constamment par un point fixe A ($x = 0, y = \alpha$), quelle que soit cette droite. Quant à la première, en posant

$$\frac{\alpha}{a} = \operatorname{tang}\omega, \quad t = \operatorname{tang}\theta,$$

son équation peut s'écrire

$$y = x \operatorname{tang}(\theta + \omega),$$

ce qui indique qu'elle fait avec OM un angle constant et égal à ω. De là on conclut la construction du point I pour chaque position de la droite OM : ce point se trouve à l'intersection de la parallèle à OM menée par le point A ($x = 0, y = \alpha$) et de la droite passant par O et inclinée sur OM de l'angle ω. Le lieu des points I est par suite le segment capable de l'angle ω décrit sur OA.

24. L'équation différentielle (16) se réduit, dans le cas considéré, à

$$(19) \quad (x^2 + y^2)(x\,dy - y\,dx) - x(ax - \alpha y)\,dy + x(\alpha x + ay)\,dx = 0;$$

elle est la traduction analytique de l'énoncé suivant :

Étant donnés deux points fixes O *et* A, *trouver un système de courbes telles que la tangente en un point quelconque* M *à la courbe qui y passe aboutisse au point* I *d'intersection de la parallèle à* OM *menée par le point* A, *avec la droite inclinée d'un angle constant* ω *sur* OM *et menée par le point* O.

Cherchons à intégrer l'équation (19). Pour cela, écrivons-la de la manière suivante :

$$(x^2+y^2-ax)(xdy-ydx)+\alpha x(xdx+ydy)=0,$$

ou bien, en effectuant les changements de variables indiqués précédemment (22),

$$r(r-a\cos\theta)\,d\theta+\alpha\,dr\cos\theta=0,$$

ou encore

$$\frac{du}{d\theta}+\frac{a}{\alpha}u-\frac{1}{\alpha\cos\theta}=0.$$

C'est une équation différentielle linéaire, dont l'intégrale générale est

$$u=e^{-\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{a\,d\theta}{\alpha}}\left(C-\int_{\theta_0}^{\theta}e^{\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{a\,d\theta}{\alpha}}\frac{d\theta}{\alpha\cos\theta}\right),$$

ou bien

(20) $$\frac{1}{r}=\frac{1}{\alpha}e^{-\frac{a}{\alpha}(\theta-\theta_0)}\left[C-\int_{\theta_0}^{\theta}e^{\frac{a}{\alpha}(\theta-\theta_0)}\frac{d\theta}{\cos\theta}\right].$$

25. Considérons le cas particulier où $a=0$, c'est-à-dire $\omega=\frac{\pi}{2}$. L'intégrale précédente se simplifie et se réduit

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\alpha}\left(C-\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\cos\theta}\right),$$

d'où l'on conclut, en effectuant l'intégration,

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\alpha}\left[C-\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right],$$

ou encore

(21) $$\frac{1}{r}=\frac{1}{\alpha}\log\frac{K}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\quad(^1).$$

Dans ces équations, C et K désignent des constantes arbitraires.

---

(1) En faisant tourner l'axe polaire d'un angle égal à $2\pi-\theta$, cette équation devient

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\alpha}\log\frac{K}{\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}.$$

Nous avons ainsi, en termes finis, l'équation générale des courbes qui répondent à la question suivante :

Étant donnés deux points fixes O *et* A, *trouver un système de courbes tel, que la tangente en* M *à la courbe qui y passe aboutisse au point* I *d'intersection de la parallèle à* OM *menée par le point* A *avec la perpendiculaire à cette droite menée par le point* O.

IV. — Courbe d'ombre de la surface de vis à filet carré, éclairée par des rayons convergents.

26. Examinons maintenant le cas où l'on a

$$b=0,\quad c=-a,\quad \alpha=0,\quad \beta=2a,\quad \gamma=0.$$

L'équation (16) devient

$$(22)\qquad (x^2+y^2)(x\,dy-y\,dx)-a(x^2-y^2)\,dy+2axy\,dx=0.$$

Pour intégrer cette équation, servons-nous de la transformation indiquée plus haut (**22**) : elle devient alors, toutes réductions faites,

$$a\sin\theta\frac{dr}{d\theta}-ar\cos\theta+r^2=0,$$

ou encore

$$a\sin\theta\frac{du}{d\theta}+au\cos\theta=1.$$

En remarquant que le premier membre de la dernière équation est la dérivée exacte de $au\sin\theta$, et désignant par ω un angle constant, on obtient l'intégrale cherchée, qui est

$$au\sin\theta=\theta-\omega,$$

d'où l'on tire, à cause de $\frac{1}{u}=r$,

$$(23)\qquad r=\frac{a\sin\theta}{\theta-\omega}.$$

27. Les courbes définies par une équation de cette forme jouissent d'une propriété remarquable : ce sont les *projections, sur un plan horizontal, des lignes d'ombre propre d'une surface de vis à filet carré à axe vertical, éclairée par des rayons lumineux convergents.*

Nous avons déjà rencontré ce résultat dans une étude *Sur les surfaces de vis,* insérée au *Compte rendu du Congrès de Paris de l'Association française pour l'avancement des Sciences* (p. 177). Nous allons en donner ici une nouvelle démonstration directe, à l'aide de quelques considérations géométriques fort simples.

Prenons pour plan horizontal de projection le plan perpendiculaire à l'axe de la surface de vis qui contient le point lumineux A, et, dans ce plan, rapportons la projection de la courbe d'ombre propre à un système de coordonnées polaires ayant pour pôle le pied O de l'axe de la surface de vis, et pour axe polaire Ox la droite joignant le point O au point lumineux A. Posons $OA = a$, et désignons par ω l'angle que fait avec Ox la génératrice de la surface située dans le plan horizontal. En appelant h le pas de la surface de vis, et p le paramètre de distribution commun à toutes les génératrices, on a, comme on sait, $p = \dfrac{h}{2\pi}\cdot$

28. Cela posé, considérons une génératrice quelconque G dont la projection horizontale Og fait avec Ox un certain angle que nous désignerons par θ, et évaluons la distance $Om = r$ du point O au point m, projection horizontale du point M de la courbe d'ombre situé sur G. Ce point M n'est autre chose que le point de la génératrice G en lequel le plan passant par cette droite et le point lumineux A est tangent à la surface; en désignant par φ l'angle de ce plan avec le plan projetant horizontalement la génératrice G, et se rappelant que ce dernier plan est le plan central de la génératrice et que le point central est situé sur l'axe, on a

$$(24) \qquad r = p \operatorname{tang}\varphi.$$

Évaluons $\operatorname{tang}\varphi$; pour cela, soient l la distance du point A à Og et d la hauteur de G au-dessus du plan horizontal de projection. On a évidemment

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{l}{d};$$

mais on a aussi d'autre part

$$l = a \sin\theta, \quad d = \frac{h}{2\pi}(\theta - \omega).$$

En tenant compte de ces expressions, et substituant à p et à $\operatorname{tang}\varphi$

leur valeur dans la relation (24), on obtient

$$r = \frac{a \sin \theta}{\theta - \omega},$$

équation polaire de la projection horizontale de la courbe d'ombre. C'est identiquement, comme on le voit, l'équation (23) ([1]).

29. *Remarques.* — 1° L'équation trouvée est indépendante du pas h de la surface de vis; on en conclut que *la projection horizontale de la courbe d'ombre est la même, pour toutes les surfaces de vis à filet carré de même axe, éclairées par le même point lumineux, et ayant en commun une génératrice située dans le plan horizontal qui contient le point lumineux.*

2° Pour une même surface de vis à filet carré, si l'on déplace le point lumineux sur une verticale, on obtient une succession de courbes d'ombre, et, pour avoir les équations polaires des projections horizontales de ces courbes, il n'y a qu'à faire varier ω dans l'équation (23). L'angle ω n'étant autre chose que la constante arbitraire introduite par l'intégration de l'équation (22), on en conclut que, *sur un même plan horizontal, les projections des courbes d'ombre d'une surface de vis à filet carré, éclairée par une série de points lumineux situés sur une parallèle à l'axe de la surface, forment un faisceau de caractéristique égale à* 2, *ayant pour point principal quadruple le pied de l'axe sur le plan de projection.*

30. Les points principaux du faisceau des courbes d'ombre sont donnés par le système des deux équations

$$(25) \qquad \begin{cases} (x^2+y^2)x - a(x^2-y^2) = 0, \\ (x^2+y^2)y - 2axy = 0. \end{cases}$$

La seconde équation se dédouble en $y = 0$, et

$$(26) \qquad x^2+y^2-2ax = 0.$$

([1]) Dans le cas où ω est nul, c'est-à-dire où le point lumineux est sur la surface, l'équation se réduit à $r = \frac{a \sin \theta}{\theta}$. Elle est vérifiée, quel que soit r, pour $\theta = 0$, ce qui signifie que l'axe polaire, ou bien la génératrice qui contient le point lumineux, fait partie de la ligne d'ombre; c'est évident géométriquement.

En faisant $y = 0$ dans la première des équations (25), elle se réduit à

$$x^2(x-a) = 0,$$

ce qui donne comme point principal, en dehors du point O déjà connu, le point A ($x = a$, $y = 0$), c'est-à-dire la projection horizontale du point lumineux.

En vertu de l'équation (26), remplaçons dans la première des équations (25) $x^2 + y^2$ par $2ax$; nous obtenons

$$x^2 + y^2 = 0,$$

équation qui, combinée avec (26), fournit les deux autres points principaux; ce sont, comme on le voit, les deux ombilics du plan.

En résumé, *les points principaux du faisceau composé des projections des courbes d'ombre de la surface de vis à filet carré comprennent le pied de l'axe de la surface de vis qui compte pour quatre points, la projection du point lumineux et les deux ombilics du plan.*

31. Les deux équations (25) se prêtent à une interprétation géométrique très-simple : elles définissent respectivement les lieux des points de contact des tangentes aux courbes du faisceau parallèles à l'axe des y et à l'axe des x.

La seconde des équations (25), nous l'avons déjà vu, se dédouble en

$$y = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 - 2ax = 0.$$

Le lieu qu'elle définit comprend, par suite, la droite OA, ce qui s'explique par cette raison que la droite OA fait partie du faisceau (28); il comprend, en outre, le cercle décrit du point A comme centre avec AO pour rayon.

Quant à la première des équations (25) ([1]), on reconnaît qu'elle n'est autre que l'équation de la *strophoïde droite* ayant pour point double le point O et pour sommet le point A. On conclut de là le résultat suivant :

Les points de contact des tangentes menées à la projection

([1]) Ou, en coordonnées polaires, $r = \dfrac{a\cos 2\theta}{\cos\theta}$.

horizontale de la courbe d'ombre de la surface de vis à filet carré, parallèlement à la droite qui joint le pied de l'axe à la projection du point lumineux, sont situés sur le cercle décrit de ce dernier point comme centre et passant par le pied de l'axe.

Les points de contact des tangentes à la même courbe perpendiculaires à la direction précédente, sont situés sur une strophoïde droite, ayant pour point double le pied de l'axe de la surface de vis, et pour sommet la projection du point lumineux.

On peut ajouter, à cause de la forme même de l'équation (22), que *les points de contact des tangentes menées à la même courbe parallèlement à une direction fixe, mais d'ailleurs quelconque, sont sur une anallagmatique du troisième ordre, ayant pour point double le pied de l'axe de la surface de vis. L'asymptote réelle est parallèle à la direction choisie, et les tangentes au point double sont rectangulaires.*

32. *Construction de la tangente à la projection horizontale de la courbe d'ombre.* — Pour avoir la tangente en un point quelconque M de la projection de la courbe d'ombre, il suffit de déterminer le point I auquel aboutissent les tangentes aux courbes du faisceau (22) menées aux divers points de rencontre de ces courbes avec OM.

Ce point I est déterminé par l'intersection des deux droites (18) dont les équations deviennent, dans le cas actuel,

$$y = \frac{2t}{1-t^2}x, \tag{27}$$

$$y = t(x+a). \tag{28}$$

A cause de $t = \tang\theta$, l'équation (27) peut s'écrire

$$y = x \tang 2\theta.$$

Par suite, la droite qu'elle définit fait avec Ox un angle double de l'angle formé par OM avec la même droite; autrement dit, elle est symétrique de Ox par rapport à OM.

La droite (28) est la parallèle à OM menée par le point fixe B, symétrique de A par rapport à O. De la construction de ces deux droites on conclut immédiatement que le point I s'obtient en prenant le symétrique du point A par rapport à OM.

En conséquence, *la tangente, en un point quelconque* M *de la projection horizontale de la courbe d'ombre de la surface de vis à filet carré, s'obtient en joignant le point* M *au point symétrique de la projection du point lumineux, par rapport à la droite qui joint* M *au pied de l'axe de la surface de vis.*

Cette construction donne, comme cas particulier, celle de l'asymptote. L'équation (23) indique, et on le voit d'ailleurs géométriquement, que la courbe a une asymptote parallèle à la génératrice de la surface de vis située dans le plan horizontal qui contient le point lumineux. L'asymptote elle-même est la parallèle à cette génératrice menée par le point B.

33. La construction à laquelle nous venons d'arriver, pour la tangente à la projection horizontale de la courbe d'ombre de la surface de vis à filet carré, se trouve mentionnée dans la Note sur les surfaces de vis que nous avons communiquée au Congrès de Paris de l'Association française : à ce moment-là cette construction nous avait paru nouvelle; mais depuis nous l'avons retrouvée dans le *Traité de Géométrie descriptive* de M. de la Gournerie (III^e Partie, p. 148), où elle est obtenue d'une manière simple et élégante par la considération d'un paraboloïde osculateur. Nous saisissons l'occasion qui se présente de restituer au savant géomètre la priorité qui lui appartient dans cette question, en appelant seulement l'attention sur la méthode toute différente qui nous a conduit à la résoudre, et notamment sur l'équation très-simple en coordonnées polaires de la projection horizontale de la courbe d'ombre, qui nous semble n'avoir pas été signalée jusqu'ici dans les traités de Géométrie descriptive. Cette équation, non-seulement se prête à la détermination facile de la tangente, comme nous l'avons vu, mais elle permet aussi de se rendre compte très-aisément de l'allure générale et des particularités intéressantes que présente la courbe.