BULLETIN DE LA S. M. F.

YVES GUIVARC'H

Croissance polynomiale et périodes des fonctions harmoniques

Bulletin de la S. M. F., tome 101 (1973), p. 333-379
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1973__101__333_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
101, 1973, p. 333 à 379.

CROISSANCE POLYNOMIALE ET PÉRIODES DES FONCTIONS HARMONIQUES

PAR

YVES GUIVARC'H (*)
[Rennes]

RÉSUMÉ. — On définit la croissance d'un groupe localement compact à génération compacte et l'on étudie la structure de certains groupes à croissance non exponentielle. En utilisant ces notions, on obtient des conditions suffisantes pour qu'une marche aléatoire sur un groupe localement compact n'admette pas d'autres fonctions harmoniques bornées que les constantes.

0. Introduction

On étudie dans ce travail la notion de croissance pour les groupes localement compacts G, déjà introduite par J. MILNOR et J. A. WOLF dans le cas d'un groupe discret ([16], [26]), et l'on en donne une application à la théorie des fonctions harmoniques pour une probabilité donnée sur G.

Les résultats de J. MILNOR et J. A. WOLF montrent que la croissance d'un groupe résoluble G de type fini est exponentielle ou polynomiale, ce dernier cas ayant lieu, si et seulement si, G est extension finie d'un groupe nilpotent. J. A. WOLF a conjecturé que cette conclusion reste vraie sans l'hypothèse G résoluble. Ayant étendu la notion de croissance aux groupes localement compacts, on peut se demander si la dichotomie de la conjecture de J. A. WOLF persiste dans la catégorie des groupes localement compacts, ou au moins dans des sous-catégories convenables, et chercher de plus à préciser la structure des groupes à croissance polynomiale de ces catégories.

On résout ce problème dans les trois cas suivants :

— Catégorie des groupes de Lie connexes;

— Catégorie des groupes résolubles localement compacts;

— Catégorie des sous-groupes fermés des groupes de Lie connexes.

(*) *Thèse Sc. math.*, Rennes, 1972.

La réponse est positive dans ces trois cas, et les groupes à croissance polynomiale ainsi obtenus forment une généralisation naturelle des groupes de Lie connexes de type R. On constate aussi que ces groupes, à croissance polynomiale, possèdent un degré de croissance, qui est entier, aisément calculable. L'existence d'un tel degré avait été conjecturée par J. A. WOLF pour les groupes nilpotents de type fini.

On peut remarquer que ces résultats contiennent ceux de J. MILNOR et J. A. WOLF sur les groupes résolubles discrets, mais ne donnent aucune information pour des groupes discrets non résolubles.

Dans cette direction, le résultat suivant a été obtenu récemment par J. TITS : Si G est de type fini, et possède une représentation linéaire complexe fidèle, il admet comme sous-groupe le groupe libre à deux générateurs, ou bien est extension finie d'un groupe résoluble. Le problème de J. A. WOLF reste donc ouvert pour les groupes sans représentation linéaire fidèle; les exemples produits par NOVIKOV de groupes infinis vérifiant identiquement une relation $x^n = e$ sont de ce type.

L'étude précédente a aussi été motivée par un problème d'équirépartition sur un espace homogène E d'un groupe de Lie connexe G, qui a été posé par V. I. ARNOLD et A. L. KRYLOV [1].

Ce problème est lié à l'unicité de la mesure invariante sur E pour un opérateur de convolution par une probabilité convenable p sur G, et donc à la trivialité des fonctions harmoniques pour la marche aléatoire sur G définie par p. Ces derniers problèmes ont été étudiés notamment par H. FURSTENBERG [7] et R. AZENCOTT [4] dans le cas des lois étalées sur les groupes de Lie connexes. En particulier, R. AZENCOTT a montré que, pour une loi p étalée sur un groupe de Lie connexe de type R, les fonctions harmoniques bornées sont constantes, et H. FURSTENBERG a demandé si, pour les groupes nilpotents, on pouvait se passer de l'hypothèse p étalée : on sait que, d'après un théorème de CHOQUET-DENY [5], il en est bien ainsi pour les groupes abéliens.

On montre que le résultat de R. AZENCOTT reste valable sans l'hypothèse de connexité, en particulier pour les extensions compactes de groupes résolubles localement compacts à croissance polynomiale. On donne aussi une réponse « presque » affirmative à la question de H. FURSTENBERG, réponse valable aussi pour certains groupes résolubles à croissance polynomiale.

Les restrictions portent, soit sur la classe du groupe qui est supposée être 2 au plus, soit sur le comportement à l'infini de la loi p qui est supposée admettre un moment d'ordre strictement positif.

Ces résultats contiennent de plus une généralisation des théorèmes limites sur les groupes compacts [8] et d'un résultat de A. J. STAM [22] sur le groupe des réels. On peut en déduire un théorème d'équirépartition pour certains espaces homogènes compacts de groupes de Lie résolubles connexes de type R.

On ignore si les résultats précédents sont valables pour tous les groupes de Lie résolubles connexes de type R.

Ce travail fait partie d'une thèse de doctorat d'état préparée sous la direction d'André AVEZ à qui nous tenons à exprimer ici notre reconnaissance.

Une partie de nos résultats a été résumée dans trois notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris intitulées : *Groupes de Lie à croissance polynomiale*, t. 271, 1970, p. 237-239 et t. 272, 1971, p. 1695-1696, *Croissance des groupes localement compacts*, t. 276, 1973, p. 1099-1100.

I. Notion de croissance

Soient G un groupe localement compact à génération compacte, et V un voisinage compact de l'élément neutre qui engendre G.

On étudie dans ce chapitre quelques propriétés asymptotiques de la mesure de Haar de V^n. Lorsqu'un G-espace X possède une mesure invariante par G, on désigne la mesure d'un compact A de X par $| A |$.

C'est le cas en particulier pour G opérant sur lui-même par translations à gauche.

On considère sur l'ensemble des suites positives la relation de préordre ainsi définie et notée

$$\varphi \leqslant \psi \iff \exists\, k \in \mathbf{N}^*,\quad C \in \mathbf{R},\quad \varphi(n) \leqq C\,\psi(kn),\qquad \forall\, n \in N.$$

On note $\asymp$ la relation d'équivalence associée.

DÉFINITION I.1. — *On appelle croissance (à gauche) du groupe G, la classe d'équivalence pour $\asymp$ de l'une quelconque des suites $| V^n |$.*

Remarques :

— Cette définition est justifiée, car si W est un autre voisinage compact de e qui engendre G, il existe k et k' tels que

$$V \subset W^k \qquad \text{et} \qquad W \subset V^{k'},$$

donc

$$V^n \subset W^{kn} \qquad \text{et} \qquad W^n \subset V^{k'n},$$

et $| W^n | \asymp | V^n |$.

— La constante C tient compte de l'arbitraire de la mesure de Haar à gauche.

— La relation de préordre précédente fournit une relation d'ordre sur les croissances : on pourra parler d'un groupe ayant une « croissance au moins aussi rapide » qu'un autre.

EXEMPLES :

— Si $G = R^d$, si V est un convexe compact symétrique d'intérieur non vide,

$$V^n = nV \qquad \text{et} \qquad |V^n| = n^d |V|.$$

— Si $G = L_2$ est le groupe libre à deux générateurs a, b, V l'ensemble formé de e, a, b, a^{-1}, b^{-1}, on montre que $|V^n| = 2(3^n - 1) + 1$.

Ces deux exemples suggèrent les définitions.

DÉFINITION I.2 :

— G sera dit *à croissance strictement polynomiale de degré d* s'il a même croissance que R^d.

— G sera dit *à croissance exponentielle* s'il a même croissance que le groupe libre L_2.

— G sera dit *à croissance polynomiale de degré d au plus*, si la croissance de G est majorée par celle de R^d.

Relativement à la suite $|V^n|$, ces notions signifient :

— pour la *croissance strictement polynomiale de degré d*, que les valeurs d'adhérence de la suite $|V^n|/n^d$ sont finies et non nulles.

— pour la *croissance polynomiale de degré d au plus*, que la suite $|V^n|/n^d$ est bornée supérieurement.

— pour la *croissance exponentielle*, que les valeurs d'adhérence de la suite $|V^n|^{1/n}$ sont finies et strictement supérieures à 1.

THÉORÈME I.1. — *La suite $|V^n|^{1/n}$ a une limite finie supérieure ou égale à 1. G est à croissance exponentielle si, et seulement si, cette limite est supérieure à 1.*

COROLLAIRE I.1. — *La croissance à gauche de G est égale à sa croissance à droite.*

Le théorème résultera de deux lemmes.

LEMME I.1. — *Soient X un G-espace localement compact muni d'une mesure μ invariante, A et B des compacts de G, Y un compact de X. Alors*

$$|A| . |BY| \leq |BA| . |A^{-1} Y|.$$

Preuve. — Considérons la convolution des deux fonctions caractéristiques

$$1_{BA} \quad \text{et} \quad 1_{A^{-1} Y}.$$

L'invariance de la mesure μ et le théorème de Fubini entraînent

$$\int_X 1_{BA} \star 1_{A^{-1}Y}(x)\,dx = |\,BA\,|.|\,A^{-1}\,Y\,|.$$

La définition de $1_{BA} \star 1_{A^{-1}Y}$ donne

$$1_{BA} \star 1_{A^{-1}Y}(x) = |\,g\in BA;\ x\in g\,A^{-1}\,Y\,|.$$

Pour tout x de BY, $x = by$, où $b\in B$ et $y\in Y$ et, si $g = ba$, où $a\in A$, on a bien $g\in BA$ et $x\in g\,A^{-1}\,Y$.

Par suite, $|\,g\in \mathrm{BA};\ x\in g^{-1}\,AY\,| \geqq |\,g\in b\,A\,| = |\,A\,|$, ce qui entraîne que, sur BY, $1_{BA} \star 1_{A^{-1}Y}$ est supérieure à $|\,A\,|$, donc

$$\int_X 1_{BA} \star 1_{A^{-1}Y}(x)\,dx \geqq \int_{BY} 1_{BA} \star 1_{A^{-1}Y}(x)\,dx \geqq |\,A\,|.|\,BY\,|,$$

et l'inégalité du lemme.

LEMME I.2. — *Soit γ une suite réelle satisfaisant à*

$$\forall\ (m, n)\in N\times N,\qquad \gamma(m+n) \leqq \alpha + \gamma(m) + \gamma(n),$$

où α est une constante.

Alors la suite $\gamma(n)/n$ converge.

Preuve. — Soit b fixé, $a = bq + r$, $0 \leqq r \leqq b-1$, $q\in N$.

L'inégalité entraîne

$$\gamma(a) \leqq q\,\alpha + q\,\gamma(b) + \gamma(r),$$

$$\frac{\gamma(a)}{a} \leqq \frac{\alpha\,q}{bq+r} + \frac{bq}{bq+r}\,\frac{\gamma(b)}{b} + \frac{\gamma(r)}{bq+r}$$

et

$$\overline{\lim}_{a=\infty} \frac{\gamma(a)}{a} \leqq \frac{\gamma(b)}{b} + \frac{\alpha}{b},$$

ce qui établit le lemme.

Démonstration du théorème. — Prenons p assez grand pour que $V^{-1}\subset V^p$. Alors, de

$$|\,V\,|.|\,V^{m+n}\,| \leqq |\,V^{m+1}\,|.|\,V^{-1}\,V^n\,|,$$

on tire

$$|\,V\,|.|\,V^{m+n}\,| \leqq |\,V^{m+1}\,|.|\,V^{n+p}\,|;$$

en particulier,

$$|\,V^{m+1}\,| \leqq \frac{1}{|\,V\,|}\,|\,V^m\,|.|\,V^{p+2}\,| \qquad \text{et} \qquad |\,V^{n+p}\,| \leqq \frac{1}{|\,V\,|}\,|\,V^n\,|.|\,V^{2p+1}\,|,$$

d'où

$$|\,V^{m+n}\,| \leqq \frac{|\,V^{p+2}\,|.|\,V^{2p+1}\,|}{|\,V\,|^3}\,|\,V^m\,|.|\,V^n\,|.$$

La fonction $\gamma(n) = \log |V^n|$ satisfait bien une relation du type

$$\gamma(m+n) \leqq \alpha + \gamma(m) + \gamma(n),$$

avec

$$\alpha = \log \frac{|V^{p+2}| . |V^{2p+1}|}{|V|^3}.$$

La suite $|V^n|^{1/n}$ a donc une limite qui est supérieure ou égale à 1 car, à partir d'un certain rang, $|V^n| \geqq 1$.

Dire que $\lim_n |V^n|^{1/n} > 1$, c'est dire que, à partir d'un certain rang,

$$a^n \leqq |V^n| \leqq b^n,$$

avec $1 < a \leqq b$, ou encore, que pour tout n,

$$\alpha\, a^n \leqq |V^n| \leqq \beta\, b^n \qquad (0 < \alpha \leqq \beta),$$

ce qui signifie que G est à croissance exponentielle.

La remarque suivante, due à André Avez, montre très directement que, si G est à croissance non exponentielle, il est moyennable : Si G est à croissance non exponentielle, on a

$$\lim_k \frac{|V^k|}{|V^{k-1}|} = 1$$

lorsque k décrit un ensemble de densité 1. G est donc moyennable.

Preuve. — Notons que

$$\frac{1}{m} \Sigma_{k=2}^{k=m} \log \frac{|V^k|}{|V^{k-1}|} = \log \left(\frac{|V^m|}{|V|} \right)^{1/m}.$$

La suite $\log |V^k| / |V^{k-1}|$ est bornée et formée de nombres positifs car

$$|V^k| \leqq |V^{k+1}| \leqq \frac{|V^3|}{|V|} |V^k|.$$

Comme elle converge vers zéro au sens de Césaro, elle converge vers zéro, lorsque k décrit un sous-ensemble des entiers de densité 1, et $|V^{k+1}| / |V^k|$ a pour limite 1 dans les mêmes conditions.

Vérifions alors la condition de Fölner : Soit K un compact de G. Prenons $V \supset K$. Si $x \in K$, alors $x V^n \subset V^{n+1}$ et

$$\frac{|x V^n \,\Delta\, V^n|}{|V^n|} \leqq \frac{|V^{n+1}| - |V^n|}{|V^n|}$$

qui tend vers zéro si n tend vers l'infini pour presque tout n. Ainsi, si $\varepsilon > 0$, pour n assez grand et tout $x \in K$, $|x V^n \,\Delta\, V^n| / |V^n| \leqq \varepsilon$.

Démonstration du corollaire. — Il n'y a rien à démontrer si G est unimodulaire. Sinon, le lemme suivant fournit le résultat.

LEMME I.3. — *Si G n'est pas unimodulaire, il est à croissance exponentielle (gauche ou droite).*

Preuve. — Soit $\delta(g)$ le module de l'automorphisme intérieur défini par g. Il existe g dans V tel que

$$g^{-1} \in V, \qquad \delta(g) > 1$$

et

$$V^{2n+1} \supset g^n V g^{-n},$$

d'où

$$|V^{2n+1}| \geqq \delta(g)^n |V|.$$

La même démonstration vaut pour la croissance à droite.

THÉORÈME I.2. — *Soit H un sous-groupe fermé de G à génération compacte. Alors G est à croissance au moins aussi rapide que H.*

Ce théorème résulte du lemme suivant, avec $W \subset V$.

LEMME I.4. — *Soient W, V des voisinages compacts de e dans H, G supposés munis de mesures de Haar à gauche. Alors,*

$$\forall\, n \in N, \quad |W^n|.|V| \leqq |VV^{-1} \cap H|.|W^n V|.$$

Preuve. — Soit μ_n la restriction à W^n d'une mesure de Haar à gauche de H.

On a alors

$$(\mu_n \star 1_V)(x) = \int_{W^n} 1_V(g^{-1} x)\, dg = |W^n \cap x V^{-1}|.$$

Or $W^n \cap x V^{-1} \subset H \cap x V^{-1}$ qui est vide, sauf si $x \in HV$. En ce cas,

$$|H \cap x V^{-1}| \leqq |H \cap VV^{-1}|.$$

Comme d'autre part

$$\int \mu_n \star 1_V(x)\, dx = |W^n|.|V| = \int_{W^n V} (\mu_n \star 1_V)(x)\, dx,$$

on a bien la formule annoncée.

THÉORÈME I.3. — *Soit H un sous-groupe distingué fermé de G. Alors G est à croissance au moins aussi rapide que G/H.*

Ce théorème résulte du lemme suivant en prenant $X = G/H$, $n = 1$.

LEMME I.5. — *Soient X un espace homogène de G qui possède une mesure invariante, H le stabilisateur d'un point o de E. On a alors, avec un choix convenable des mesures invariantes,*

$$\forall\, (m, n) \in N \times N, \quad |V^{m+n}| \geqq |V^m o|.|W^n|,$$

avec $W = V \cap H$, où V est un voisinage compact de e.

Preuve. — En effet,

$$V^{m+n} \supset V^m W^n$$

et

$$| V^m W^n | = \int_{G/H} d\bar{v} \int_H 1_{V^m W^n}(vw)\, dw$$

$$\geq \int_{G/H} d\bar{v} \int_H 1_{V^m}(v)\, 1_{W^n}(w)\, dw = | V^m o | . | W^n |.$$

THÉORÈME I.4. — *Soit H un sous-groupe fermé de G. Si G/H est compact, H et G ont même croissance. Si H est distingué et compact, G/H et G ont même croissance.*

En vertu des théorèmes I.2 et I.3, chacune des parties de ce théorème résulte des lemmes suivants.

LEMME I.6. — *Soient V un voisinage compact de G engendrant G, H un sous-groupe fermé de G tel que $G = HV$. Alors il existe une constante α et un voisinage compact W de e dans H engendrant H tel que*

$$\forall\, n \in N, \quad | V^n | \leq \alpha\, | W^n |.$$

Preuve. — Soit C un voisinage compact de e dans H engendrant H [14]. Alors $G = HV = \bigcup_{n>0} C^n V$, et il existe un entier p tel que $C^p V \supset V^2$, car V est d'intérieur non vide, et V^2 est compact.

Posant $W = C^p$, on a $WV \supset V^2$ et, par récurrence, $W^n V \supset V^{n+1}$. En appliquant le lemme I.1, on obtient

$$| W^n V | \leq \frac{1}{| W |} | W^{n+1} | . | W^{-1} V |,$$

d'où

$$| V^{n+1} | \leq \alpha\, | W^{n+1} | \qquad \text{avec} \quad \alpha = \frac{| W^{-1} V |}{| W |}.$$

LEMME I.7. — *Soient H un sous-groupe compact de G, o l'image de H dans G/H. Si V contient H, on a $| V^n | \leq | V^n o |$ avec un choix convenable des mesures invariantes.*

Preuve. — En effet, $V^n \subset V^n H$, et si $| H | = 1$, on a

$$| V^n H | = | V^n o | . | H | = | V^n o |.$$

THÉORÈME I.5. — *Soit G une limite projective de groupes de Lie, et soit H un sous-groupe fermé à génération compacte. Si G/H a une mesure invariante finie, G et H ont même croissance.*

Ce théorème résultera de la proposition suivante.

PROPOSITION I.1. — *Si G est moyennable et limite projective de groupes de Lie, si H est un sous-groupe fermé tel que G/H ait une mesure invariante finie, G/H est compact.*

On dira qu'un groupe localement compact G a la *propriété* (u), si tout sous-groupe fermé H, tel que G/H ait une mesure invariante finie, est uniforme. Les groupes discrets possèdent cette propriété trivialement.

LEMME I.9. — *Soit G_1 un sous-groupe distingué ouvert de G possédant la propriété (u). Alors G possède la propriété (u).*

Preuve. — En effet, les deux G_1-espaces $G_1/(H \cap G_1)$ et HG_1/H sont isomorphes. Le second a une mesure invariante finie obtenue par restriction, d'où, d'après l'hypothèse du lemme, $G_1/(H \cap G_1)$ et HG_1/H compacts. Comme G/HG_1 est fini, G/H est compact.

LEMME I.10. — *Soit G un groupe de Lie connexe moyennable. Alors G a la propriété (u).*

Preuve. — Soit R le radical de G. On sait [7] que G/R est compact et que si S désigne le plus grand sous-groupe fermé distingué résoluble de H, il en est de même de H/S. Il en résulte que G/S a une mesure invariante finie comme G/H. Il en est donc de même de $\overline{RS}/S$, mais $\overline{RS}$ est résoluble car R est distingué, et comme la propriété (u) vaut pour la composante connexe de $\overline{RS}$ [18], elle vaut pour $\overline{RS}$ d'après le lemme précédent. On en conclut que $\overline{RS}/S$ est compact, et comme $G/\overline{RS}$ est compact, il en est de même de G/S et G/H.

La proposition résulte des deux lemmes précédents si G est de Lie.

Dans le cas général, il existe un sous-groupe compact distingué K de G tel que G/K soit de Lie moyennable; G/KH, étant de mesure invariante finie, est compact, et comme KH/H l'est aussi, G/H est bien compact.

Démonstration du théorème. — Si G est moyennable, le théorème résulte du théorème I.4 et de la proposition I.1. Si G n'est pas moyennable, H ne l'est pas non plus [4], et ils sont donc tous deux à croissance exponentielle d'après la remarque suivant le théorème I.1.

II. **Croissance des groupes de Lie connexes. Application aux groupes nilpotents ou discrets**

On calcule dans ce chapitre la croissance des groupes de Lie connexes : ils sont toujours à croissance exponentielle ou strictement polynomiale, et ce dernier cas a lieu si, et seulement si, le groupe considéré est moyennable et unimodulaire ainsi que ses quotients. Ceci permet de retrouver et d'améliorer un résultat de J. A. WOLF [26].

On dira qu'un groupe de Lie connexe est de type R, si tous les poids de la représentation adjointe sont imaginaires purs.

PROPOSITION II.1. — *Un groupe de Lie connexe est de type R si, et seulement si, il est moyennable et unimodulaire ainsi que ses quotients.*

Preuve. — Si G est de type R, sa partie semi-simple l'est aussi et est donc compacte, ce qui entraîne G moyennable. De plus l'automorphisme Adexp X est de module un car ad X est de trace nulle d'après la condition de type R.

Réciproquement, supposons que le radical S de G ne soit pas de type R; il possède alors un quotient S/T, formé de similitudes planes qui n'est pas de type R; ce quotient ne peut être unimodulaire car il ne possède qu'un ou deux poids non nuls, ce poids étant réel dans le premier cas et les deux poids étant imaginaires conjugués à partie réelle non nulle dans le second cas. Si T_1 désigne l'intersection des conjugués de T par les éléments de G, le groupe S/T_1 a les mêmes poids que S/T et n'est donc pas unimodulaire. Il en est de même de G/T_1, extension compacte de S/T_1, et ceci contredit l'hypothèse faite sur les quotients de G.

Soient G un groupe nilpotent, V un voisinage compact de e qui engendre G,

$$G = G^1 \supset G^2 \supset \ldots \supset G^r \supset G^{r+1} = \{ e \}$$

sa suite centrale descendante fermée. Montrons que G^r est à génération compacte. Puisque G^r, qui est central, possède un sous-groupe ouvert H à génération compacte, on peut supposer, en considérant G/H, que G^r est discret; en ce cas, G^r est engendré, car il est central, par les commutateurs de degré r en les éléments de V; l'ensemble de ces commutateurs est compact comme V, donc fini, et G^r est bien de type fini.

On déduit de ceci que G^k/G^{k+1} est aussi à génération compacte, donc s'écrit

$$G^k/G^{k+1} = \mathbf{R}^{m_k} \times \mathbf{Z}^{n_k} \times K_k,$$

où K_k est compact. Posons alors

$$p(G) = \Sigma_{k=1}^{k=r} k(m_k + n_k).$$

THÉORÈME II.1. — *Soit G un groupe de Lie nilpotent simplement connexe. Alors G est à croissance strictement polynomiale de degré $p(G)$.*

Preuve. — On identifiera G à son algèbre de Lie par l'application exponentielle, et l'espace vectoriel de cette algèbre à $\bigoplus_{1 \leq k \leq r} G^k/G^{k+1}$. En supposant les G^k/G^{k+1} normés par $\| \ \|$, on définit une fonction φ sur G par

$$\varphi(x) = \sup_k \| x_k \|^{1/k}, \qquad \text{où} \quad x = \Sigma_k x_k, \, x_k \in G^k/G^{k+1}.$$

On a alors le lemme suivant :

LEMME II.1. — *Quitte à remplacer les normes données par des normes homothétiques, il existe une constante α telle que*

$$\forall\ (x, y) \in G \times G, \quad \varphi(xy) \leqq \varphi(x) + \varphi(y) + \alpha.$$

Preuve. — On raisonnera par récurrence sur l'entier r, et l'on notera $\bar{x}$ la classe de x dans $\bar{G} = G/G^r$. Posant $z = xy$, on a

$$z_r = x_r + y_r + Q(\bar{x}, \bar{y}),$$

où Q est une fonction polynôme sur $\bar{G} \times \bar{G}$ qui est, d'après CAMPBELL-HAUSDORFF, une somme de monômes de Lie en $\bar{x}$, $\bar{y}$ de degré total r. On va d'abord montrer l'existence d'une constante k telle que $\| Q(\bar{x}, \bar{y}) \| \leqq k \sum_{p+q=r,\, pq \neq 0} \varphi(\bar{x})^p \varphi(\bar{y})^q$ pourvu que $\varphi(\bar{x}) + \varphi(\bar{y}) \geqq 2$. D'après la formule de Campbell-Hausdorff, $Q(\bar{x}, \bar{y})$ est une somme de monômes de Lie en $\bar{x}_i$, $\bar{y}_j$ $(i, j \leqq r-1)$ de degré total $\leqq r$, et un tel monôme admet une majoration du type

$$k \prod_i \| \bar{x}_i \|^{u_i} \prod_j \| \bar{y}_j \|^{v_j},$$

où u_i (resp. v_j) est le degré respectif de ce monôme en $\bar{x}_i$ (resp. $\bar{y}_j$); soit une majoration du type $k \varphi(\bar{x})^m \varphi(\bar{y})^n$, où $m = \sum_i i\, u_i$, $u = \sum_j j\, u_j$ et $m + n \leqq r$, $mn \neq 0$.

L'hypothèse $\varphi(\bar{x}) + \varphi(\bar{y}) \geqq 2$ implique $\varphi(\bar{x}) \geqq 1$ ou $\varphi(\bar{y}) \geqq 1$ et la majoration voulue.

Supposant le choix des normes sur les G^k/G^{k+1} $(k < r)$ fait de façon à avoir

$$\varphi(\bar{x}\bar{y}) \leqq \varphi(\bar{x}) + \varphi(\bar{y}) + \bar{\alpha};$$

choisissons la norme sur G^r de façon à avoir

$$\| Q(\bar{x}, \bar{y}) \| < \sum_{p+q=r,\, pq \neq 0} \varphi(\bar{x})^p \varphi(\bar{y})^q, \qquad \varphi(\bar{x}) + \varphi(\bar{y}) \geqq 2,$$

donc en particulier, puisque $\varphi(\bar{x}) \leqq \varphi(x)$, $\varphi(\bar{y}) \leqq \varphi(y)$,

$$\| Q(\bar{x}, \bar{y}) \| \leqq [\varphi(x) + \varphi(y)]^r - [\varphi(x)^r + \varphi(y)^r]$$

et donc

$$\varphi(z_r)^r = \| z_r \| \leqq \varphi(x_r)^r + \varphi(y_r)^r + [\varphi(x) + \varphi(y)]^r - \varphi(x)^r - \varphi(y)^r,$$

$$\varphi(z_r) \leqq \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{pourvu que } \varphi(\bar{x}) + \varphi(\bar{y}) \geqq 2$$

et

$$\varphi(z) = \sup[\varphi(z_r), \varphi(\bar{z})] \leqq \varphi(x) + \varphi(y) + \bar{\alpha}.$$

Si maintenant $\varphi(\bar{x}) + \varphi(\bar{y}) \leqq 2$, $\varphi(\bar{z})$ et $Q(\bar{x}, \bar{y})$ sont majorés par $\beta > 1$ et alors

$$\varphi(z_r)^r \leqq \varphi(x)^r + \varphi(y)^r + \beta \leqq [\varphi(x) + \varphi(y) + \beta]^r,$$

$$\varphi(z) = \sup[\varphi(z_r), \varphi(\bar{z})] \leqq \varphi(x) + \varphi(y) + \beta.$$

Le lemme en résulte avec $\alpha = \sup(\bar{\alpha}, \beta)$.

Démonstration du théorème. — Posons $B_\rho = \{ x \in G, \varphi(x) \leq \rho \}$, et désignons par u_λ l'application linéaire de G, identifié à l'espace vectoriel de son algèbre de Lie, dans G, dont la restriction à G^k/G^{k+1} est la multiplication par λ^k. Alors

$$\forall\, x \in G, \quad \varphi[u_\lambda(x)] = |\lambda|\, \varphi(x) \qquad \text{et} \qquad u_\lambda(B_\rho) = B_{\lambda\rho}.$$

Le lemme fournit l'inclusion $B_1^n \subset B_{n(1+\alpha)}$ et, comme

$$|B_{n(1+\alpha)}| = \det u_{n(1+\alpha)}, \qquad |B_1| = (1+\alpha)^{p(G)}\, n^{p(G)}\, |B_1|,$$

on a bien $|B_1^n| \leq b\, n^{p(G)}$, où b est une constante.

Afin de minorer $|B_1^n|$, montrons, par récurrence sur r, que $B_n \subset (B_\rho)^n$ pour un certain $\rho > 0$. Soit x un élément de B_n. L'hypothèse de récurrence fournit des $\bar{b}_i \in \bar{B}_{\bar{\rho}}$ tels que $\bar{x} = \bar{b}_1 \ldots \bar{b}_n$, donc $x = b_1 \ldots b_n\, c$, avec $b_i \in B_{\bar{\rho}}$, $c \in G_r$. Étudions c;

$$\varphi(c) = \varphi(b_1^{-1} \ldots b_n^{-1}\, x) \leq n\,\alpha + n\,\bar{\rho} + n = n(1 + \bar{\rho} + \alpha),$$

d'où $c = n^r c_1$ avec $\varphi(c_1) \leq 1 + \bar{\rho} + \alpha$. L'élément c_1 est un crochet de r éléments g_i de G avec $\varphi(g_i) \leq \rho_1$, et c est donc un crochet des r éléments $n g_i$, c'est-à-dire un commutateur des r éléments g_i^n. Si s désigne la longueur, dépendant de r seul, d'un tel commutateur, on a

$$c \in B_{\rho_1}^{s\,n} \qquad \text{et} \qquad x \in B_{\bar{\rho}}^n\, B_{\rho_1}^{s\,n} \subset (B_{\bar{\rho}}\, B_{\rho_1}^s)^n.$$

Soit donc $B_n \subset (B_\rho\, B_{\rho_1}^s)^n$, et on a donc montré l'existence de deux constantes a, b telles que

$$\forall\, n \in N, \quad a\, n^{p(G)} \leq |B_1^n| \leq b\, n^{p(G)}.$$

THÉORÈME II.2. — *Soit G un groupe de Lie connexe de type R. Alors G est à croissance strictement polynomiale.*

Ce théorème résultera du suivant.

THÉORÈME II.2'. — *Soit G un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe de type R. Alors G a même croissance que son nil-shadow. Il est donc à croissance strictement polynomiale.*

Preuve. — Notons A l'image canonique de G dans la partie semi-simple de l'adhérence algébrique de ad G. On sait [2] qu'il existe un groupe nilpotent simplement connexe G' appelé nil-shadow de G tel que

$$A \circ G = A \circ G'.$$

Comme G est de type R et A semi-simple, il existe dans G, G' des voisinages compacts de e, W et W', invariants par A. Désignant par U un voisinage compact de e dans A, il en résulte que

$$(UW)^n = U^n W^n, \qquad (UW')^n = U^n W'^n$$

et, comme

$$|(UW)^n| = |U^n|.|W^n|, \qquad |(UW')^n| = |U^n|.|W'^n|,$$

les suites $|W^n|$ et $|W'^n|$ sont bien équivalentes pour la relation $\asymp$ du chapitre I, d'après la remarque qui suit la définition I.1.

Démontrons le théorème II.2. — Soient S le radical, et N le radical nilpotent de G; si C est le sous-groupe compact maximal de N, G/C a même croissance que G (théorème I.4), et on peut donc supposer N simplement connexe. Soit T/N un sous-groupe maximal connexe et simplement connexe de S/N, T est alors un groupe résoluble connexe et simplement connexe de type R, et de plus G/T est compact comme G/S et S/T. Les groupes G et T ont donc même croissance, et le théorème II.2 résulte des théorèmes II.2′ et II.1.

THÉORÈME II.3. — *Soit G un groupe de Lie connexe. Alors G est à croissance exponentielle ou strictement polynomiale. Le deuxième cas a lieu, si, et seulement si, G est de type R.*

Preuve. — D'après le théorème II.2, il suffit de montrer que si G n'est pas à croissance exponentielle, il est de type R. Or cette hypothèse entraîne, d'après le chapitre I, que G est moyennable et unimodulaire ainsi que ses quotients, donc de type R d'après la proposition II.1.

Applications

THÉORÈME II.4. — *Soit G un groupe nilpotent à génération compacte. Alors G est à croissance strictement polynomiale de degré $p(G)$.*

Preuve. — G possède un sous-groupe compact maximal K unique et distingué. La composante connexe L_0 de $L = G/K$ est un groupe de Lie simplement connexe, et L/L_0 est de type fini sans torsion. Il existe alors [15] un groupe de Lie $\hat{L}$ connexe et simplement connexe unique à un isomorphisme près tel que L soit un sous-groupe uniforme de $\hat{L}$.

Les théorèmes du chapitre 1 entraînent que $G, L, \hat{L}$ ont même croissance, et il suffit donc de montrer $p(G) = p(L) = p(\hat{L})$. La première égalité résulte de ce que, K étant compact, $G^k/(K \cap G^k)$ s'identifie à L^k. La seconde résulte des relations connues entre les suites descendantes de L et $\hat{L}$, ce qui achève la démonstration.

On peut, grâce aux considérations précédentes, améliorer un résultat de J. A. WOLF [26], et en simplifier la démonstration. Rappelons qu'un groupe G qui possède une suite de sous-groupes

$$\{ e \} = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_n \subset G_{n+1} = G,$$

telle que G_i soit distingué dans G_{i+1} et que G_{i+1}/G_i soit cyclique, est dit polycyclique.

THÉORÈME II.5. — *Soit G un groupe polycyclique. Alors G est à croissance exponentielle ou strictement polynomiale. Le deuxième cas a lieu si, et seulement si, G possède un sous-groupe nilpotent d'indice fini.*

Preuve. — D'après le théorème II.4, il suffit de montrer que si G est à croissance non exponentielle, il possède un sous-groupe nilpotent d'indice fini.

Puisque G est polycyclique, il possède un sous-groupe d'indice fini G_1 isomorphe à un sous-groupe discret uniforme d'un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe G_2 [23]. Comme G, G_1, G_2 ont même croissance, G_2 est de type R d'après le théorème II.2.

Soit N le nilradical de G_2; $N \cap G_1$ est un sous-groupe discret uniforme de N [17] stable par les automorphismes induits sur N par les éléments de G_1. Les valeurs caractéristiques de ad $g - I$ ($g \in G_1$) sont donc nulles ou minorées par un nombre α positif. Soit alors f l'homomorphisme qui associe à g la partie semi-simple de ad g; $f(G_1)$ est donc un sous-groupe discret de $(\mathbf{C}^*)^n$ et, comme $f(G_2)$ est contenu dans T^n, $f(G_1)$ est fini. Si P désigne le noyau de f, ad P est un groupe de matrices triangulaires unipotentes, donc un groupe nilpotent, et il en est de même de P. Le groupe abélien connexe G_2/P possède $G_1/(P \cap G_1)$ comme sous-groupe fini uniforme : c'est un tore, et G_2 est donc extension d'un groupe nilpotent par un tore. Enfin $P \cap G_1$ est un sous-groupe normal nilpotent de G_1 d'indice fini.

III. Croissance des groupes résolubles localement compacts

On caractérise dans ce chapitre les groupes résolubles localement compacts à croissance non exponentielle. Cette caractérisation repose sur la notion de groupe de type R généralisé et contient la caractérisation du cas connexe obtenue au chapitre II, ainsi que celle du cas discret obtenue par J. A. WOLF [26] et J. MILNOR [16]. Les deux outils essentiels sont une extension du lemme principal de [16] et une construction de groupes à croissance polynomiale par extensions de groupes abéliens ou compacts.

G étant un groupe localement compact, il sera dit noethérien si tout sous-groupe fermé est à génération compacte. Si G est abélien à génération compacte, il s'écrit

$$G = K \times \mathbf{R}^m \times Z^n,$$

où K est un groupe compact; l'entier $m + n$ s'appellera le rang de G. Si G est résoluble et si $\{ D^k G \}$ désigne sa suite dérivée ($D^0 G = G$, $D^{r+1} G = \{ e \}$), on dira que G est de rang fini si tous les groupes abéliens $\overline{D^k G}/\overline{D^{k+1} G}$ $(0 \leq k \leq r)$ sont à génération compacte. On appellera rang de G la somme des rangs des groupes $\overline{D^k G}/\overline{D^{k+1} G}$. Dans le cas G de Lie résoluble, les groupes de rang fini ne sont autres, par définition, que les groupes élémentaires de [19].

THÉORÈME III.1. — *Pour un groupe résoluble localement compact G, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *G est noethérien;*

(2) *G est de rang fini;*

(3) *G possède un sous-groupe compact caractéristique K tel que G/K soit un groupe de Lie élémentaire.*

Preuve. — On montrera que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (2) et (3) $\Rightarrow$ (1) résultent immédiatement des propriétés d'hérédité des sous-groupes, quotients, extensions.

(2) $\Rightarrow$ (3) : On raisonne par récurrence sur la longueur de la suite dérivée, le cas abélien étant bien connu.

Soient K_1 un sous-groupe compact caractéristique de $\overline{D^1 G} = G_1$ tel que G/K_1 soit de Lie élémentaire, N le sous-groupe caractéristique de G formé des g de G tels que

$$\forall\, x \in G_1, \quad [g, x] \in K_1;$$

il est clair que N/K_1 est nilpotent de classe 2 au plus. Montrons que N/K_1, donc N, est à génération compacte. Comme $N/(N \cap G_1)$ est abélien, on peut trouver un sous-groupe fermé P de N contenant $N \cap G_1$ tel que $P/(N \cap G_1)$ soit compact et que N/P soit de Lie. Il est immédiat que P est distingué dans N, donc dans G. Comme G_1/K_1 est élémentaire, $(N \cap G_1)/K_1$ est à génération compacte, donc P/K_1 aussi. De plus, G/N, qui s'identifie à un groupe d'automorphismes du groupe élémentaire G/K_1, est un groupe de Lie; comme N/P est de Lie, G/P est aussi un groupe de Lie qui est élémentaire, car G est de rang fini. Il en résulte que N/P est à génération compacte, donc N/K_1 aussi. Soit alors K/K_1 le sous-groupe compact maximum de N/K_1 : K/K_1 est caractéristique dans G, et N/K est de Lie. Il en résulte que G/K, extension de N/K par G/N qui sont de Lie, est de Lie.

COROLLAIRE III.1. — *Tout groupe résoluble G de rang fini possède un sous-groupe compact maximum C. Le quotient de G par C est de Lie.*

Preuve. — La deuxième assertion résulte immédiatement de la première et du théorème. Ce théorème ramène au cas G de Lie. Si G est connexe, C est le sous-groupe compact maximal du centre de G. Si G est discret,

C est le sous-groupe engendré par tous les sous-groupes finis distingués de G : C est fini, car G étant noethérien, il est de type fini et donc égal au produit d'un nombre fini de sous-groupes finis distingués. Si G est de Lie, on peut supposer que sa composante neutre G_0 est sans sous-groupe compact distingué. Si C_1 est un sous-groupe fini de G, $|C_1|$ est majoré par le cardinal du sous-groupe fini distingué maximal de G/G_0. Si C est alors un sous-groupe fini distingué de G de cardinal maximal, CC_1 est aussi fini distingué, et $CC_1 \supset C$, $|CC_1| \leqq |C|$, ce qui entraîne $CC_1 = C$, $C \supset C_1$.

THÉORÈME III.2. — *Soit G un groupe résoluble à croissance non exponentielle, alors G est de rang fini.*

Ce théorème découlera de deux lemmes.

LEMME III.1. — *Soient G un groupe localement compact à croissance non exponentielle, H un sous-groupe fermé distingué de G, V un sous-groupe ouvert distingué de H à génération compacte, g un élément donné de G. Alors le plus petit sous-groupe de H contenant V, invariant par g, est distingué dans H et à génération compacte.*

Preuve. — Lorsqu'un groupe G opère par automorphismes sur un groupe H, on notera $g(h)$ l'image de $h \in H$ par l'automorphisme associé à $g \in G$.

Le lemme découlera de la propriété suivante : $h \in H$ étant donné, il existe un entier $n \geqq 0$ tel que $g^{n+1}(h)$ appartienne au sous-groupe engendré par V. h, ..., $g^n(h)$. Pour montrer cette propriété, prenons un voisinage compact K de e dans G contenant g, g^{-1}, h, et notons $\overline{K}$ son image dans G/H. Posant

$$\varphi(n) = \left| \frac{(K^n \cap H)\, V}{V} \right|,$$

on obtient les inégalités

$$|\overline{K}^{2n}| . |K^{2n} \cap H| \leqq |K^{4n}|, \qquad \varphi(n)\, |K^n \cap V| \leqq |K^{2n} \cap H|,$$

d'où, pour n assez grand, $\varphi(n) \leqq |K^{4n}|$ et, d'après l'hypothèse sur la croissance de G,

$$\overline{\lim}_n (\varphi(n))^{1/n} = 1.$$

Considérons alors, comme en [16], les éléments du type

$$g^{k_1} h g^{k_2} h \ldots g^{k_n} h g^{-(k_1+\ldots+k_n)} = g^{k_1}(h)\, g^{k_1+k_2}(h) \ldots g^{k_1+\ldots+k_2}(h),$$

où les k_i valent 0 ou 1 : ces éléments appartiennent à $K^{3n} \cap H$, et leurs images dans H/V ne peuvent être distinctes pour tout n, car elles seraient en nombre 2^n, ce qui contredirait $\overline{\lim}_n (\varphi(n))^{1/n} = 1$.

On peut donc trouver deux suites distinctes (k_i) et (k'_i) $(1 \leqq i \leqq n)$ telles que, modulo V,

$$g^{k_1}(h)\, g^{k_1+k_2}(h) \ldots g^{k_1+\ldots+k_n}(h) \equiv g^{k'_1}(h)\, g^{k'_1+k'_2}(h) \ldots g^{k'_1+\ldots+k'_n}(h),$$

ce qui donne la propriété voulue.

Notons V_p^q le sous-groupe engendré par les $g^i(V)$ $(p \leqq i \leqq q)$. Comme V et $g(V)$ sont distingués à génération compacte $V g(V)$ l'est aussi et $V g(V)/V$, qui est discret, est de type fini. En faisant décrire à h un système fini de représentants dans H des générateurs de $V g(V)/(V)$, on obtient que, pour un certain entier $r \geqq 0$, $g^{r+1}(V)$ est contenu dans V_0^r. En remplaçant g par g^{-1}, on obtient que, pour un certain entier $s \geqq 0$,

$$g^{-(s+1)}(V) \subset V_0^{-s},$$

donc

$$g(V_{-s}^r) \subset V_{-s}^r, \qquad g^{-1}(V_{-s}^r) \subset V_s^r,$$

V_{-s}^r est donc le plus petit sous-groupe contenant V et invariant par g : il est à génération compacte et distingué dans H, car il est égal au produit des $g^i(V)$ $(-s \leqq i \leqq r)$.

LEMME III.2. — *Soient G, H, V comme dans le lemme* 1, *et supposons G/H résoluble de rang fini. Alors V est contenu dans un sous-groupe de H distingué dans G et à génération compacte.*

Preuve. — Pour un groupe résoluble R de suite dérivée $D^k R$ $(D^0 R$, $D^{r+1} R = \{e\})$ et de rang fini, posons

$$l(R) = r + 1 + \Sigma_{k=0}^{k=r} \delta_k,$$

où δ_k est le nombre minimal de générateurs topologiques de la partie sans torsion de $\overline{D^k R}/\overline{D^{k+1} R}$.

Pour montrer le lemme, on raisonne par récurrence sur $l(G/H)$ et, posant $G_1 = \overline{HD^1 G}$, on observe que deux cas se présentent : ou bien G_1 est uniforme dans G, ou bien G_1 est contenu dans un sous-groupe fermé distingué G_2 tel que $l(G_2) = l(G) - 1$.

Dans le premier cas, on a $l(G_1) < l(G)$, et, d'après l'hypothèse de récurrence, on peut supposer V engendré par un compact S et invariant par G_1. Soit K un compact de G se projetant sur G/G_1 : le compact

$$S^K = \{ksk^{-1};\ k \in K,\ s \in S\}$$

engendre un sous-groupe invariant par G. En effet, soit $g \in G$, $ksk^{-1} \in S^K$, et posons $gk = k' g_1$ avec $g_1 \in G_1$, $k' \in K$, donc $g(k(s)) = k'(g_1(s))$. Comme $g_1(s)$ est un produit d'éléments de S, $k'(g_1(s))$ est un produit d'éléments de S^K.

Dans le deuxième cas, soit g un élément de G dont l'image dans G/G_2 engendre G/G_2. V étant supposé invariant par G_2, soit x un élément arbitraire de G_2; on a alors, pour tout i entier,

$$(xg^i)(V) = g^i[(g^{-i}(x))(V)] = g^i(V).$$

Le sous-groupe V', engendré par les $g^i(V)$, est invariant par G_2, g et à génération compacte d'après le lemme 1. Comme $G_2 \cup \{g\}$ engendre G, V' est aussi invariant par G.

Pour démontrer le théorème, observons que $\overline{D^r G}$, étant abélien, possède un sous-groupe ouvert à génération compacte, que l'on peut supposer distingué d'après le lemme 2; on peut donc supposer $\overline{D^r G} = D^r G$ discret. Comme G est à génération compacte, $D^r G$ est engendré par les conjugués de certains commutateurs appartenant à un compact de $D^r G$. Une nouvelle application du lemme 2 fournit alors le résultat.

Soient G, H deux groupes localement compacts. Si G opère sur H par automorphismes, on dira que l'action de G est bornée, si tout compact de H est contenu dans un compact G-invariant. On dira aussi que l'action de G sur H est étagée-bornée de hauteur h au plus, s'il existe une suite de sous-groupes fermés distingués de H :

$$\{e\} = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{h-1} \subset H_h = H,$$

telle que G laisse invariant les H_i et opère de façon bornée sur les H_{i+1}/H_i $(0 \leqq i \leqq h-1)$. Une telle suite H_i sera dite G-stable.

Dans le cas où H est un groupe de Lie nilpotent connexe, on voit que si G opère de façon étagée bornée sur H, H possède une suite G-stable H_i telle que H_1 soit le sous-groupe compact maximal de H, tandis que les H_i sont connexes.

Le théorème suivant permet de construire, par extensions, des groupes à croissance polynomiale.

THÉORÈME III.3. — *Soient G un groupe localement compact à génération compacte, H un sous-groupe fermé distingué de G tel que G/H soit abélien de rang r et que l'action de G sur H soit étagée-bornée de hauteur h au plus. Si H est à croissance polynomiale de degré d au plus, G est à croissance polynomiale de degré $r + d(h+1)$ au plus.*

Ce théorème résultera de deux lemmes.

LEMME III.1. — *Soient G, H deux groupes localement compacts tels que G opère sur H de manière étagée bornée de hauteur $h+1$ au plus. Soient K et V des voisinages compacts de l'identité dans G et H. Alors il existe un voisinage compact W dans H tel que,*

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad \forall\, g \in K^n, \qquad g(V) \subset W^{n^h}.$$

Preuve. — Le lemme se démontre par récurrence sur h. Dans le cas $h = 0$, il suffit de prendre pour W l'orbite fermée de V sous G. Soit $H_h \subset H$ tel que G opère de façon étagée bornée de hauteur h sur H_h et de manière bornée sur H/H_h. On peut alors supposer la projection de V sur H/H_h G-invariante, et il est donc possible de trouver un compact V' de H_h tel que, $\forall\ g \in K$, $g(V) \subset VV'$.

Soit alors W' un compact de H_h tel que, $\forall\ g \in K^n$, $g(V') \subset W'^{n^{h-1}}$, et vérifions, par récurrence sur n, que $W = VW'$ satisfait l'assertion du lemme.

Pour $n = 1$, cette assertion résulte de $W \supset VV'$. Pour $g = g_n g_1$, avec $g_1 \in K$, $g_n \in K^n$, on a

$$g_n g_1 (V) \subset g_n (VV') = g_n (V)\, g_n (V').$$

Or,

$$g_n (V') \subset W'^{n^{h-1}} \qquad \text{et} \qquad g_n (V) \subset W^{n^h},$$

d'où

$$g (V) \subset W'^{n^{h-1}}\, W^{n^h} \subset W^{n^h + n^{h-1}} \subset W^{(n+1)^h}.$$

LEMME III.2. — *Soient F un système de générateurs et de leurs inverses d'un groupe D de type fini, D_{2n} l'ensemble des commutateurs de longueur $2n$ en les éléments de F, et C_n l'ensemble des conjugués des commutateurs élémentaires de F [c'est-à-dire $ab\,a^{-1}\,b^{-1}$; $a, b \in F$] par des éléments de F^n. On a alors*

$$[F, F^n] \subset (C_{n-1})^n,$$
$$D_{2n} \subset C_{2n-2}^{n^2}.$$

On montre ces formules, par récurrence sur n : soient $a \in F$, $\xi = \eta\, b \in F^{n+1}$, avec $\eta \in F^n$, $b \in F$. Comme $[a, \eta\, b] = [a, \eta]\,[a, b]^{\eta}$, on a

$$[a, \eta\, b] \in C_{n-1}^n\, C_n \subset C_n^{n+1}.$$

De même, soit $x = a\, \eta\, a^{-1}\, \xi \in D_{2n+2}$, avec $\eta\xi \in D_{2n}$. Comme $x = [a, \eta]\, \eta\xi$, on a

$$x \in C_{2n-2}^{2n}\, C_{2n-2}^{n^2} \subset C_{2n}^{(n+1)^2}.$$

Ces formules sont d'autre part triviales pour $n = 1$.

Pour démontrer le théorème, on peut, d'après le chapitre I, supposer $G/H = Z^r$. Soient F un sous-ensemble fini symétrique de G qui, en projection sur G/H, est un système de générateurs, et V un voisinage compact de e dans H, engendrant H et contenant les commutateurs élémentaires de F. On a alors, en notant V_n l'ensemble des conjugués d'éléments de V par F^n, F_n un système de représentants dans G des projections de F^n sur G/H :

$$(V \cup F)^n \subset V_n^n\, F^n \subset V_n^n\, D_{2n}\, F_n,$$

et d'après le lemme 2 :

$$(V \cup F)^n \subset V_n^n \, V_{2n-2}^{n^2} \, F_n \subset V_{2n}^{(n+1)^2} \, F_n.$$

Or, d'après le lemme 1,

$$V_{2n} \subset W^{(2n)^{h-1}},$$

donc

$$V_{2n}^{(n+1)^2} \subset W^{(2n)^{h-1}(n+1)^2}.$$

Comme H est à croissance polynomiale de degré d au plus, on a, avec une certaine constante a,

$$| V_{2n}^{(n+1)^2} | \leq a \, n^{d(h+1)}.$$

Comme d'autre part, $F_n \leq b \, n^r$, on en déduit

$$| (V \cup F)^n | \leq ab \, n^{r+d(h+1)},$$

d'où le théorème.

Le corollaire suivant fournit une classe assez générale de groupes à croissance polynomiale.

COROLLAIRE III.2. — *Soit G un groupe localement compact tel que l'action de G sur lui-même, par automorphismes intérieurs, soit étagée-bornée. Supposons que G possède une suite G-stable dont les quotients sont à génération compacte. Alors G est à croissance polynomiale.*

Preuve. — On démontre le corollaire par récurrence sur la hauteur de la suite G-stable de G. Dans le cas de hauteur 0, $G = \{ e \}$, et l'assertion est triviale.

Dans le cas général, soit $\{ e \} = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_h = G$ une suite G-stable : comme G/H_{h-1} est du type $F - C$ [20], on peut trouver H'_h et H'_{h+1} sous-groupes distingués de G tels que

$$H_{h-1} \subset H'_h \subset H'_{h+1} \subset G,$$

et H'_h/H_{h-1} est compact, tandis que H'_{h+1}/H'_h est abélien de rang r, et G/H'_{h+1} est fini. D'après l'hypothèse de récurrence, H_{h-1} est à croissance polynomiale de degré d au plus, donc H'_h aussi.

Le théorème dit alors que H'_{h+1} est à croissance polynomiale de degré $r + d\,(h + 2)$ au plus. Il en est de même de G, d'où le résultat voulu.

Les théorèmes 1 et 2 ramènent l'étude de la croissance au cas de Lie. Le théorème 4 est relatif à ce cas.

THÉORÈME III.4. — *Pour un groupe de Lie résoluble G de composante neutre G_0, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *G est élémentaire ;*

(2) *G possède un sous-groupe compact distingué K, un sous-groupe uniforme F contenant K et tel que F/K soit isomorphe à un sous-groupe fermé uniforme d'un groupe de Lie connexe et simplement connexe ;*

(3) *G/G_0 est polycyclique.*

Preuve :

(1) $\Rightarrow$ (2) : G étant élémentaire, on peut trouver G' distingué et d'indice fini dans G tel que $\overline{D^1 G'} = G'_1$ soit nilpotent [19]. Soit K le sous-groupe compact maximal de G'_1 : il est distingué, et G'_1/K est nilpotent sans torsion. Soit F_1/K une extension de G'_1/K par un sous-groupe uniforme de type fini de G'/G'_1 : d'après [23], F_1/K s'identifie à un sous-groupe fermé uniforme d'un groupe de Lie L résoluble simplement connexe et à un nombre fini de composantes connexes : on peut prendre pour F/K l'intersection de F_1/K avec la composante neutre de L.

(2) $\Rightarrow$ (3) : En passant au quotient par G_0, on obtient $\overline{K} \subset \overline{F} \subset \overline{G}$, où $\overline{K}$ est fini, $\overline{G}/\overline{F}$ aussi, et $\overline{F}/\overline{K}$ est élémentaire comme F. Ainsi $\overline{G}$ est donc polycyclique.

(3) $\Rightarrow$ (1) résulte de ce qu'une extension d'un groupe noethérien par un groupe noethérien discret est noethérienne.

Soit G un groupe de Lie résoluble, de composante connexe de l'identité G_0, et posons $G_1 = \overline{D^1 G_0}$. Soient K_1, K_0/G_1 les sous-groupes compacts maximaux des groupes nilpotents G_1 et G_0/G_1. On dira que G est de type R généralisé si les deux conditions suivantes sont réalisées :

— G/G_0 possède un sous-groupe nilpotent d'indice fini.

— Pour tout g de G, les valeurs caractéristiques des automorphismes définis par g sur les algèbres de Lie de G_1/K_1 et G_0/K_0, sont de module 1.

THÉORÈME III.5. — *Soit G un groupe de Lie résoluble de composante neutre G_0. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *G est à croissance non exponentielle;*

(2) *G est de type R généralisé;*

(3) *G possède un sous-groupe d'indice fini G' qui opère sur G_1 et G_0/G_1 de manière étagée bornée et qui est tel que G'/G_0 soit nilpotent;*

(4) *G est à croissance strictement polynomiale.*

Preuve. — On montrera (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) [car (4) $\Rightarrow$ (1) est trivial].

(1) $\Rightarrow$ (2) résultera du lemme suivant.

LEMME III.3. — *Soient G un groupe localement compact à croissance non exponentielle, H un sous-groupe fermé distingué. Alors, pour tout g de G, l'automorphisme de H associé à g est unimodulaire.*

Preuve. — Si $\delta_{G/H}$, $\delta_H(g)$, $\delta_G(g)$ désignent les modules des automorphismes de G/H, H, G associés à g, on a

$$\delta_G(g) = \delta_{G/H}(g) . \delta_H(g).$$

Or, comme G et G/H sont à croissance non exponentielle, on a, d'après le chapitre I, $\delta_G(g) = \delta_{G/H}(g) = 1$, ce qui entraîne $\delta_H(g) = 1$.

Soient d'abord V un sous-groupe fermé distingué de G isomorphe au groupe additif d'un espace vectoriel réel et $g \in G$; considérons le sous-groupe $\check{G}$ fermé engendré par g et V : il est aussi à croissance non exponentielle. On peut trouver une suite de sous-espaces de V :

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n \subset V_{n+1} = V_1,$$

telle que g laisse stable les V_i et opère de manière irréductible sur V_{i+1}/V_i $(0 \leq i \leq n)$ qui est donc de dimension 1 ou 2. Comme V_i est distingué dans G, et $\check{G}/V_i$ à croissance non exponentielle, le lemme précédent montre que l'automorphisme de V_{i+1}/V_i associé à g est unimodulaire. Puisque V_{i+1}/V_i est irréductible, cet automorphisme est une rotation.

Soit maintenant V un sous-groupe fermé distingué de G qui est un groupe de Lie nilpotent simplement connexe : on déduit de la propriété précédente, par récurrence sur la longueur de la suite descendante de V, que les valeurs caractéristiques de l'automorphisme de l'algèbre de Lie de V, associé à $g \in G$, sont de module 1.

Enfin, en appliquant cette propriété à $(G/K_1, G_1/K_1)$, $(G/K_0, G_0/K_0)$, on obtient la deuxième condition de la définition des groupes de type R généralisé.

La première condition s'obtient en remarquant que, d'après le théorème 2, G/G_0 est polycyclique, donc possède un sous-groupe nilpotent d'indice fini d'après le chapitre II.

(2) $\Rightarrow$ (3) résultera du lemme suivant, qui n'est autre que le lemme I.5 de [7] formulé pour un corps localement compact au lieu de $\mathbf{R}$ et dont, pour être complet, nous donnerons la démonstration plus loin.

LEMME III.4. — *Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps localement compact commutatif, G un sous-groupe fermé moyennable du groupe des automorphismes unimodulaires de E. Si G est non compact, il possède un sous-groupe G' d'indice fini laissant invariant un sous-espace vectoriel propre de E.*

Comme G/G_0 possède un sous-groupe nilpotent d'indice fini, il reste à vérifier la première partie de la condition (3). Comme dans la démonstration précédente, on commence par montrer que si G possède un sous-groupe V fermé distingué nilpotent connexe, il possède un sous-groupe d'indice fini opérant de manière étagée bornée sur V; il suffit aussi de se restreindre au cas où V est un espace vectoriel réel. On procède alors par récurrence sur dim V, le cas dim $V = 0$ étant trivial.

Comme les automorphismes associés aux éléments de G sont unimodulaires, on peut trouver, d'après le lemme précédent, un sous-espace propre W de V stable par $G' \subset G$, à moins que G opère de façon bornée sur V, auquel cas il n'y a rien à démontrer. Comme $\dim W < \dim V$ et $\dim V/W < \dim V$, on applique l'hypothèse de récurrence à (G', W) et $(G'/W, V/W)$, ce qui fournit la propriété voulue. Il suffit ensuite d'appliquer cette propriété à (G, G_1) et $(G/G_1, G_0/G_1)$.

(3) $\Rightarrow$ (4) : G opère sur lui-même par automorphismes intérieurs de manière étagée bornée, et le corollaire du théorème 3 s'applique : G est à croissance polynomiale. Comme il est aussi élémentaire, il aura, d'après le théorème 4, même croissance qu'un groupe de Lie résoluble connexe.

D'après le chapitre II, cette croissance est donc strictement polynomiale. On en déduit le résultat essentiel du chapitre.

Corollaire III.3. — *Soit G un groupe résoluble localement compact à génération compacte. Ou bien il est à croissance exponentielle, ou bien il est à croissance strictement polynomiale. Dans le dernier cas, il est de rang fini, et le quotient de G par son sous-groupe compact maximal, est un groupe de Lie de type R généralisé.*

Ceci résulte immédiatement des théorèmes 2 et 5.

IV. Croissance des sous-groupes fermés des groupes de Lie connexes

On montre dans ce chapitre que les sous-groupes fermés des groupes de Lie connexes, qui sont à croissance non exponentielle, sont des extensions compactes de groupe résolubles de type R généralisé. Ils sont donc à croissance strictement polynomiale.

L'outil essentiel est un lemme dû à H. Furstenberg [7]; ce lemme permet aussi de préciser la structure des sous-groupes moyennables maximaux du groupe linéaire d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

Théorème IV.1. — *Soient H et G deux groupes localement compacts, f un isomorphisme continu de H dans G. Alors si H est moyennable, l'adhérence de $f(H)$ l'est aussi et est contenue dans un sous-groupe moyennable maximal fermé de G.*

Preuve. — Montrons que si $(H_i)_{i \in I}$ est une famille totalement ordonnée par inclusion de sous-groupes fermés moyennables de G, $\overline{\bigcup_{i \in I} H_i}$ est moyennable. Soit C un convexe compact d'un espace vectoriel localement convexe tel que $\overline{\bigcup_{i \in I} H_i}$ opère continûment et de manière affine sur C, C_i le sous-ensemble de C fixe sous H_i; comme H_i est moyennable, C_i est non vide et fermé; l'intersection des C_i est alors non vide et C contient donc un point fixe sous $\bigcup_{i \in I} H_i$, donc par continuité sous $\overline{\bigcup H_i}$.

Un raisonnement analogue montre la première partie de l'assertion du théorème. Comme l'ensemble des sous-groupes fermés moyennables de G est inductif, la deuxième partie en découle immédiatement.

Le théorème 2 qui suit, va permettre de préciser la structure des sous-groupes moyennables maximaux pour un groupe de Lie connexe, mais nous avons besoin d'introduire auparavant quelques notations.

Soient K un corps commutatif normé et localement compact, V un espace vectoriel de dimension finie n sur K, Pour tout automorphisme u de V, on notera $\tilde{u}$ l'automorphisme défini par

$$\tilde{u} = \frac{1}{\| \det u \|^{1/n}} u;$$

on a évidemment $\| \det \tilde{u} \| = 1$.

On dira qu'un sous-groupe G du groupe linéaire de V est presque-triangulaire, s'il existe une suite de sous-espaces de V :

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_r \subset V_{r+1} = V$$

telle que G laisse stable chacun des V_i et que l'ensemble des $\tilde{g}_{V_{i+1}/V_i}$ $(g \in G)$ soit relativement compact dans $Gl(V_{i+1}/V_i)$ $(0 \leq i \leq r)$, où g_{V_{i+1}/V_i} est la partie dans V_{i+1}/V_i de l'automorphisme g de V.

Enfin, on dira qu'un groupe G localement compact est presque résoluble, s'il possède un sous-groupe résoluble fermé distingué R tel que G/R soit compact.

THÉORÈME IV.2. — *Soit M un sous-groupe fermé moyennable de $Gl(V)$. Alors M possède un sous-groupe distingué M_1 d'indice fini presque triangulaire. De plus, si $K = R$ et si M est maximal, on peut supposer M_1 algébrique, donc presque résoluble.*

Ce théorème résulte du lemme suivant, dû à Harry FURSTENBERG [7].

LEMME IV.1. — *Soit G un sous-groupe fermé moyennable de $Gl(V)$ tel que, pour tout g de G, on ait $\| \det g \| = 1$. Alors, ou bien G est compact, ou bien il possède un sous-groupe d'indice fini, laissant invariant un sous-espace propre de V.*

Preuve. — Considérons l'espace projectif $\hat{V}$ associé à V, et notons $\hat{u}$ l'application projective correspondant à un endomorphisme u de V. Puisque G est moyennable et que $\hat{V}$ est compact, il existe une probabilité p sur $\hat{V}$ invariante par G; on va montrer que, si G n'est pas compact, p est portée par une réunion finie de sous-espaces projectifs.

Soit g_k une suite non bornée de G, et posons

$$u_k = \frac{1}{\| g_k \|} g_k;$$

on a alors

$$\lim_k \| \det u_k \| = \lim_k \frac{1}{\| g_k \|^{n_k}} = 0, \qquad \| u \|_k = 1.$$

On peut donc supposer $\lim_k u_k = u$ avec $\| u \| = 1$, $\det u = 0$.

Si N est le noyau de u et $\hat{N}$ le sous-espace projectif correspondant, on peut donc dire qu'en dehors de $\hat{N}$, $\hat{}_n = \hat{u}_n$ converge simplement vers $\hat{u}$.

On peut aussi supposer que $\hat{g}_n (\hat{N})$ converge vers un sous-espace projectif propre $\hat{L}$. Si l'on désigne par $\hat{L}'$ le sous-espace projectif propre image de $\hat{u}$, on obtient alors, en considérant les restrictions de p à $\hat{N}$ et à son complémentaire, que p, invariante par les g_k, est portée par $\hat{L} \cup \hat{L}'$. La plus petite réunion finie de sous-espaces projectifs portant p est alors invariante par G, et le sous-groupe H laissant fixe chacun des éléments de cette réunion est bien d'indice fini, car si n est le nombre de sous-espaces distincts de cette réunion, G/H s'identifie à un sous-groupe du groupe des permutations de n objets.

Démonstration du théorème 2. — On démontre la première partie du théorème par récurrence sur dim V, le cas dim $V = 1$ étant trivial. On peut supposer, en remplaçant M par $\tilde{M} = \{ \tilde{g};\ g \in M \}$, que, $\forall\ g \in M$, $\| \det g \| = 1$, car d'après le théorème 1, $\tilde{M}$ est moyennable. Si alors M est compact, l'assertion du théorème est triviale; sinon le lemme 1 fournit un sous-groupe $M' \subset M$ d'indice fini et un sous-espace propre $V' \subset V$ invariant par M'. On applique alors l'hypothèse de récurrence aux images canoniques de G' dans $Gl(V')$ et $Gl(V/V')$, ce qui fournit un sous-groupe $M'' \subset M$ d'indice fini et presque triangulaire.

Supposons maintenant $K = R$ et M maximal, extension finie de M_1 distingué et presque triangulaire. Soit alors

$$\{ 0 \} = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_r \subset V_{r+1} = V$$

une suite de sous-espaces stables par M_1 et telle que l'image canonique de M_1 dans chaque $Gl(V_{i+1}/V_i)$ soit formée de similitudes pour un produit scalaire q. Soit M_2 le sous-groupe de $G(V)$, formé des automorphismes g laissant stable chaque V_i et induisant une q_i-similitude g_i sur V_{i+1}/V_i; M_2 est un groupe algébrique, et d'autre part, il est presque résoluble : le sous-groupe R des éléments g tels que les g_i soient des homothéties positives est résoluble et distingué, et M_2/R qui s'identifie au produit des groupes d'isométries de V_{i+1}/V_i muni de q_i, est compact.

Comme M_1 est distingué dans M, son adhérence algébrique M' est invariante par les automorphismes intérieurs associés aux éléments de M; M' est aussi moyennable comme sous-groupe de M_2. MM' est alors un groupe contenant M' comme sous-groupe distingué; de plus MM'/M', isomorphe à $M/M \cap M'$ est fini.

Il en résulte que MM' est fermé et moyennable et, comme M est maximal, on a $M' \subset M$. Si alors M_0 est la composante connexe de l'élément neutre dans M ou M', M'/M_0 est fini, M_0 est presque résoluble [7], et M l'est aussi.

Théorème IV.3. — *Tout sous-groupe fermé moyennable d'un groupe de Lie connexe est presque résoluble.*

Ce théorème découle des théorèmes 1 et 2, et des deux propositions suivantes.

Proposotion IV.1. — *Tout sous-groupe fermé d'un groupe de Lie presque résoluble est presque résoluble.*

Cette proposition résultera des trois lemmes suivants.

Lemme IV.1. — *Tout groupe de Lie G, presque résoluble, possède un sous-groupe résoluble distingué maximal.*

Preuve. — On peut supposer G compact et tel que sa composante connexe de l'identité G_0 ne possède pas de sous-groupe résoluble distingué autre que $\{ e \}$.

Alors, si R est un sous-groupe résoluble distingué fermé, il est discret, donc fini, et $| R | \leq | G/G_0 |$. Il est alors immédiat qu'un tel sous-groupe R, vérifiant de plus $| R |$ maximal, est maximal.

Lemme IV.2. — *Soient G un groupe de Lie, et H un sous-groupe fermé distingué. Si H et G/H sont presque résolubles, il en est de même de G.*

Preuve. — On peut supposer H sans sous-groupe distingué résoluble et G/H résoluble. Le groupe A des automorphismes de H est alors compact pour la topologie naturelle, et la composante connexe A_0 de l'identité dans A s'identifie à celle de H. L'homomorphisme canonique de G dans A envoie donc G sur un sous-groupe compact contenant A_0. Si N est le noyau de cet homomorphisme, on a alors $N \cap H = \{ e \}$, et G/N compact. La première condition montre que N est résoluble comme G/H.

Lemme IV.3. — *Soit G un groupe de Lie dont la composante connexe de l'identité est G_0. Alors G est presque résoluble si, et seulement si, G_0 et G/G_0 le sont.*

Preuve. — D'après le lemme 2, il suffit de vérifier que si G est presque résoluble, G_0 et G/G_0 le sont aussi. La propriété est immédiate pour G/G_0 qui est discret. Si R est le sous-groupe résoluble distingué maximal de G, $G_0/(G \cap R)$ est sans sous-groupe résoluble distingué, et admet un homomorphisme f injectif dans le groupe compact G/R : il est compact.

On commence par montrer la proposition dans le cas G connexe, et l'on peut supposer G simplement connexe. Soient alors H un sous-groupe fermé de G, dont la composante connexe de l'identité est H_0, et S_0 le sous-groupe distingué résoluble maximal de H_0 : H_0/S_0 est compact semi-simple de centre nul, et on vérifie, comme dans le lemme 2, que H possède un sous-groupe N fermé distingué tel que H/N soit compact et $N \cap H_0 = S_0$.

Comme S_0, composante connexe de l'identité dans N, est résoluble et que le radical R de G est simplement connexe, la composante connexe de l'identité N_0, dans $\overline{NR}$, est résoluble [24]; on en déduit que N est presque résoluble car $N/(N \cap N_0)$ est fini, d'où finalement H presque résoluble.

Si G admet G_0 comme composante connexe de l'identité, $H \cap G_0$ est presque résoluble, d'après ce qui précède, et H/H_0, isomorphe à un sous-groupe du groupe discret presque résoluble G/G_0, est aussi presque résoluble. Il en est donc de même de H, d'après le lemme 2.

Proposition IV.2. — *Soient G un groupe de Lie connexe, R son plus grand sous-groupe résoluble distingué. Alors les sous-groupes moyennables maximaux de G contiennent R et sont presque résolubles.*

Preuve. — Si $R = \{ e \}$, G est isomorphe à Ad G qui est un sous-groupe semi-simple fermé du groupe linéaire de l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ de G. Tout sous-groupe moyennable maximal de Ad G est contenu dans un sous-groupe moyennable maximal de $Gl(\mathfrak{G})$, et est donc l'intersection de celui-ci avec Ad G. L'assertion découle donc en ce cas de la proposition 1.

Si $R \neq \{ e \}$, l'image canonique dans G/R d'un sous-groupe moyennable maximal M de G est fermée, d'après le théorème 1, et égale à un sous-groupe moyennable maximal $\tilde{M}$ de G/R. L'image réciproque de $\tilde{M}$ est aussi moyennable et donc égale à M. Comme $\tilde{M}$ et son image réciproque sont presque résolubles, M l'est aussi.

Théorème IV.5. — *Soit G un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie connexe. Alors G est à croissance exponentielle ou strictement polynomiale, et le deuxième cas a lieu si, et seulement si, G est extension compacte d'un groupe résoluble de type R généralisé.*

Preuve. — La deuxième partie de l'assertion du théorème découle de ce qu'un groupe résoluble de type R généralisé est à croissance strictement polynomiale, d'après le chapitre III, et a même croissance que l'une de ses extensions compactes, d'après le chapitre I.

Si G est à croissance non exponentielle, il est moyennable, d'après le chapitre I, et extension compacte d'un groupe résoluble S, d'après le théorème précédent. Comme S a même croissance que G, il est de type R généralisé, d'après le chapitre III.

V. Extension d'un théorème de Choquet-Deny à certains groupes non abéliens

Soit p une probabilité sur le groupe localement compact, séparable et unimodulaire G. On suppose p apériodique, c'est-à-dire que G est engendré topologiquement par le support de p, et l'on étudie l'invariance asymptotique de la suite p^n.

On utilise deux méthodes distinctes, l'une basée sur une décomposition intégrale de p et l'analyse harmonique sur un groupe abélien ou compact, l'autre basée sur l'étude de certaines représentations induites. Les résultats obtenus par ces deux méthodes se recouvrent partiellement.

Soit X un groupe localement compact séparable et unimodulaire. Si μ est une mesure bornée sur X, sa variation sera notée $|\mu|$, et sa variation totale $\|\mu\|_1$. On désignera par $L_0^1(X)$ l'espace des mesures bornées de masse nulle sur X, absolument continues par rapport à une mesure de Haar de X; une telle mesure étant fixée, cet espace s'identifie au sous-espace de $L^1(X)$ des fonctions d'intégrale nulle. On définit la convolution de deux mesures bornées μ et ν sur X par la formule

$$(\mu \star \nu)(f) = \int_X f(xy)\, d\mu(x)\, d\nu(y),$$

où f est une fonction continue bornée sur X. De plus, la symétrique μ' de μ sera définie par

$$\mu'(f) = \int_X f(x^{-1})\, d\mu(x).$$

On posera aussi, pour tout élément x de X et toute mesure bornée μ,

$$\mu^x = \delta_{x^{-1}} \star \mu \star \delta_x,$$

δ_x étant la mesure de Dirac concentrée en x. De même, si A est une partie de X :

$$A^x = x^{-1} A\, x, \qquad A^X = \bigcup_{x \in X} A^x.$$

Soit H un sous-groupe fermé distingué, abélien ou compact, du groupe G, localement compact séparable et unimodulaire. Rappelons que, d'après le chapitre III, on dit que G opère sur H de manière bornée, si tout compact de H est contenu dans un compact B de H, G-invariant i. e. $B^G = B$].

On dira aussi que G opère de façon compacte sur H, si G opère de façon bornée et si, de plus, l'identité de H possède une base de voisinages dans H, G-invariants.

Soit $\hat{H}$ l'espace des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de H muni de la topologie usuelle. G opère sur $\hat{H}$ d'après la formule

$$\lambda^g(h) = \lambda(g^{-1}hg),$$

et il résulte des définitions de cette action et de la topologie de $\hat{H}$ que, si G opère de façon bornée sur H, l'élément identité de $\hat{H}$, noté Id, possède une base de voisinages G-invariants. De même, si G opère de façon compacte sur H, tout compact de $\hat{H} - \{\mathrm{Id}\}$ est contenu dans un compact G-invariant de $\hat{H} - \{\mathrm{Id}\}$.

Enfin, μ étant une mesure bornée sur H, sa transformée de Fourier $\hat{\mu}$ sera définie par

$$\hat{\mu}(\lambda) = \int_H \lambda(h)\, d\mu(h) \qquad (\lambda \in \hat{H}).$$

Soit alors p une probabilité sur G que l'on écrit sous la forme

$$p = \int_{G/H} u_{\bar{x}}\, d\bar{p}(\bar{x}),$$

où $u_{\bar{x}}$ est une probabilité sur G, portée par la classe à gauche $\bar{x}$ modulo H, et $\bar{p}$ la projection canonique de p sur l'espace G/H des classes à gauche modulo H. On définit la probabilité p_H sur H par

$$p_H = \int_{G/H} u'_{\bar{x}} \star u_{\bar{x}}\, d\bar{p}(\bar{x}),$$

et l'on désigne par $H(p)$ [resp. $H^\infty(p)$] le plus petit sous-groupe fermé de H portant p_H [resp. les $(p^n)_H$]. On dira alors que p est H-strictement apériodique si l'on a $H^\infty(p) = H$. Si H est abélien et $H = G$, on retrouve la notion classique de stricte apériodicité [21].

Si G est compact et $H = G$, $G^\infty(p) = G$ n'est autre que la condition nécessaire et suffisante de convergence de p^n vers la mesure de Haar de G [8].

THÉORÈME V.1. — *Soient H un sous-groupe fermé distingué de G, et p une probabilité H-strictement apériodique sur G. Si H est abélien ou compact, et si G opère de façon bornée (resp. compacte) sur H, on a pour p étalée (resp. quelconque) :*

$$\forall\, \nu \in L^1_0(H), \quad \lim_n \| p^n \star \nu \|_1 = 0.$$

Preuve. — Ce théorème résulte des trois lemmes suivants.

LEMME V.1. — *Soient γ_n une suite de probabilités sur le groupe abélien H portées par un compact K, ν un élément de $L^1 \cap L^2(H)$, $\hat{K}$ le support de $\hat{\nu}$.*

Si toutes les γ_n sont majorées sur $\hat{K}$ par une constante $s < 1$, on a

$$\lim_n \| \gamma_1 \star \ldots \star \gamma_n \star \nu \|_1 = 0.$$

Ce lemme est lui-même une conséquence de la proposition ci-après.

PROPOSITION V.1. — *Soient π_n une suite de probabilités sur le groupe localement compact H, ν un élément de $L^1 \cap L^2 (H)$, A_n une suite croissante de compacts telle que*

$$\overline{\lim}_n \| \pi_n \star \nu \|_2^{1/n} < 1, \qquad \overline{\lim}_n | A_n |_{1/n} = 1, \qquad \lim_n \pi_n (A_n) = 1.$$

On a alors

$$\overline{\lim}_n \| \pi_n \star \nu \|_1 = 0.$$

Preuve. — Notons que, si α et β sont deux mesures bornées sur G, A et B deux compacts de G, on a

$$| \alpha \star \beta | (G) \leqq | \alpha \star \beta | (AB) \\ + | \alpha | (G) | \beta | (G - B) + | \alpha | (G - A) | \beta | (B)$$

On prend ici $\alpha = \pi_n$, $A = A_n$, $\beta = \nu\, dx$ et B tel que $\int_{G-B} | \nu | dx < \varepsilon$, et on a alors

$$\| \pi_n \star \nu \|_1 \leqq \| (\pi_n \star \nu)_{AB} \|_1 + \varepsilon + \| \nu \|_1 [1 - \pi_n (A_n)].$$

Mais l'inégalité de Schwarz donne ici

$$\| (\pi_n \star \nu)_{A_n B} \|_1 \leqq | A_n B |^{1/2} \| \pi_n \star \nu \|_2,$$

le symbole $| A_n B |$ désignant la mesure de Haar de $A_n B$. On sait aussi que

$$\overline{\lim}_n | A_n B |^{1/n} \leqq \overline{\lim}_n | A_n |^{1/n} = 1,$$

ce qui donne

$$\overline{\lim}_n \| (\pi_n \star \nu)_{A_n B} \|_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \overline{\lim}_n \| \pi_n \star \nu \|_1 \leqq \varepsilon.$$

Preuve du lemme V.1. — Le lemme V.1 s'obtient en posant

$$\gamma_1 \star \ldots \star \gamma_n = \pi_n, \qquad K^n = A_n,$$

et en remarquant que, H étant abélien, $| K^n |$ est majoré par une puissance de n, ce qui donne

$$\overline{\lim}_n | K^n |^{1/n} = 1.$$

On a, de plus, d'après la formule de Plancherel :

$$\| \pi_n \star \nu \|_2^2 = \int_{\hat{H}} | \hat{\pi}_n (\xi) \nu (\xi) |^2 d\xi = \int_{\hat{H}} | \hat{\pi}_n (\xi) \hat{\nu} (\xi) |^2 d\xi$$

donc

$$\| \pi_n \star \nu \|_2 \leq s^n \| \nu \|_2, \qquad \text{car} \quad \hat{\pi}_n (\xi) = \hat{\gamma}_1 (\xi) \ldots \hat{\gamma}_n (\xi).$$

LEMME V.2. — *Soient H comme dans le théorème, et G opérant de façon bornée sur H, λ un élément de $\hat{H} - \{ \mathrm{Id} \}$ tel que $\| \hat{p}_H (\lambda^g) \| \leq \sigma < 1$ pour tout g dans G. Alors il existe un voisinage V_λ de λ tel que, pour tout ν de $L_0^1 (H)$, dont le support de la transformée de Fourier $\hat{\nu}$ est contenu dans V_λ, on ait*

$$\lim_n \| p^n \star \nu \|_1 = 0.$$

Preuve du lemme V.2. — Soit σ une section borélienne fixée de G au-dessus de G/H, et posons

$$u_{\bar{x}} = \delta_{\sigma(\bar{x})} \star \theta_{\bar{x}},$$

où $\theta_{\bar{x}}$ est une probabilité portée par H. On notera aussi la restriction normalisée de $\theta_{\bar{x}}$ à un borélien K par $\theta_{\bar{x}}^K$.

On distinguera les deux cas : H compact et H abélien.

1° *H compact.* — On pose

$$p = \int_{G/H} u_{\bar{x}} \, d\bar{p} (\bar{x}),$$

et on note que si $u_{\bar{x}} = \delta_{\sigma(\bar{x})} \star \theta_{\bar{x}}$, on a aussi

$$u_{\bar{x}_n} \star \ldots \star u_{\bar{x}_1} = \delta_{\sigma(\bar{x}_n) \ldots \sigma(\bar{x}_1)} \star \theta_{\bar{x}_n}^{X_{n-1}(\omega)} \star \ldots \star \theta_{\bar{x}_1},$$

où l'on a posé $X_k (\omega) = \bar{x}_k \ldots \bar{x}_1$, et ω est donc une trajectoire sur G/H. On posera pour abréger

$$F_n (\omega) = \theta_{\bar{x}_n}^{X_{n-1}(\omega)} \star \ldots \star \theta_{\bar{x}_1},$$

et l'on notera $d\bar{p}^\infty (\omega)$ la probabilité canonique sur l'espace Ω des trajectoires sur G/H. On a alors

$$p^n \star \nu = \int_{(G/H)^n} u_{\bar{x}_n} \star \ldots \star u_{\bar{x}_1} \star \nu \, d\bar{p} (\bar{x}_1) \, d\bar{p} (\bar{x}_n),$$

$$\| p^n \star \nu \|_1 \leq \int_\Omega \| F_n (\omega) \star \nu \|_1 \, d\bar{p}^\infty (\omega).$$

Puisque $\hat{H}$ est discret, on prendra $V_\lambda = \{ \lambda \}$. L'hypothèse sur p_H s'écrit :

$$\left\| \int_{G/H} \widehat{u'_{\bar{x}} \star u_{\bar{x}}} (\lambda^g) \, d\bar{p} (\bar{x}) \right\| \leq \sigma < 1, \quad \forall \, g \in G.$$

Or $\widehat{u'_{\bar{x}} \star u_{\bar{x}}}(\lambda^g) = \left(\widehat{\theta'_{\bar{x}} \star \theta_{\bar{x}}}\right)^g(\lambda)$, et si a est un vecteur quelconque de l'espace de λ :

$$\left\langle \left(\widehat{\theta'_{\bar{x}} \star \theta_{\bar{x}}}\right)^g(\lambda)\, a,\, a \right\rangle = \left\| \hat{\theta}^g_{\bar{x}}(\lambda)\, a \right\|^2,$$

et l'hypothèse s'écrit donc

$$\int_{G/H} \left\| \hat{\theta}^g_{\bar{x}}(\lambda)\, a \right\|^2 \leq \sigma \| a \|^2, \quad \forall\, g \in G.$$

Si l'on pose

$$E(g, a) = \left\{ \bar{x};\, \left\| \hat{\theta}^g_{\bar{x}}(\lambda)\, a \right\|^2 \geq \frac{1+\sigma}{2} \| a \|^2 \right\},$$

cette égalité donne $\bar{p}(E(g, a)) \leq 2\sigma/(1+\sigma) < 1$. On en déduit que, $\bar{p}^\infty$-presque partout, il existe une suite n_k d'entiers telle que

$$\| F_{n_k}(\omega) \star \nu \|_2^2 \leq \left(\frac{1+\sigma}{2}\right)^k \| \nu \|_2^2,$$

dès que le support de $\hat{\nu}$ est réduit à λ.

Il en résulte que, $\bar{p}^\infty$-presque partout,

$$\lim_n \| F_n(\omega) \star \nu \|_2 = 0,$$

et donc, car H est compact,

$$\lim_n \| F_n(\omega) \star \nu \|_1 = 0$$

et finalement

$$\lim_n \| p^n \star \nu \|_1 = 0,$$

par convergence dominée.

2° *Cas H abélien.* — Soit K un compact de H. Posons

$$\alpha(\bar{x}) = \theta_{\bar{x}}(K), \qquad \beta(\bar{x}) = \frac{\alpha(\bar{x})}{\int_{G/H} \alpha(\bar{x})\, d\bar{p}(\bar{x})},$$

$$q = \int_{G/H} \delta_{\sigma(\bar{x})} \star \theta^K_{\bar{x}} \beta(\bar{x})\, d\bar{p}(\bar{x}),$$

et évaluons $\| p_H - q_H \|_1$.

Comme $\| \theta_{\bar{x}} - \theta^K_{\bar{x}} \|_1 = 2 \,|\, 1 - \alpha(\bar{x}) \,|$, on a

$$\| \theta'_{\bar{x}} \star \theta_{\bar{x}} - \theta'^K_{\bar{x}} \star \theta^K_{\bar{x}} \|_1 \leq 4\,[1 - \alpha(\bar{x})],$$

et comme

$$q_H = \int_{G/H} \theta'^K_{\bar{x}} \star \theta^K_{\bar{x}} \beta(\bar{x})\, d\bar{p}(\bar{x}),$$

on a

$$\| p_H - q_H \|_1 \leq \int_{G/H} \| \theta'_{\bar{x}} \star \theta_{\bar{x}} - \theta'^{K}_{\bar{x}} \star \theta^{K}_{\bar{x}} \beta(\bar{x}) \|_1 \, d\bar{p}(\bar{x}),$$

$$\| p_H - q_H \|_1 \leq \int_{G/H} 4(1 - \alpha(\bar{x}) \, d\bar{p}(\bar{x}) + \int_{G/H} | 1 - \beta(\bar{x}) | \, d\bar{p}(\bar{x}),$$

et en posant $\alpha = \int_{G/H} \alpha(\bar{x}) \, d\bar{p}(\bar{x})$,

$$\| p_H - q_H \|_1 \leq 6(1 - \alpha).$$

On peut donc choisir un compact G-invariant K assez grand pour que $\| p_H - q_H \|_1 < (1 - \sigma)/2$.

Considérons la relation

$$p = \int_{G/H} \delta_{\sigma(\bar{x})} \star \theta^{K}_{\bar{x}} \alpha(\bar{x}) \, d\bar{p}(\bar{x}) + \int_{G/H} \delta_{\sigma(\bar{x})} \star \theta^{K^c}_{\bar{x}} (1 - \alpha(\bar{x})) \, d\bar{p}(\bar{x}).$$

Soit I la réunion disjointe de deux copies de G/H notées J et J^c. Si i correspond à $\bar{x}$, on notera $\gamma_i = \theta^{K}_{\bar{x}}$ lorsque $i \in J$, et $\gamma_i = \theta^{K^c}_{\bar{x}}$ lorsque $i \in J^c$. Soit π la probabilité sur I, dont la restriction à J (resp. J^c) est identifiée à $\alpha(\bar{x}) \, d\bar{p}(\bar{x})$ [resp. $(1 - \alpha(\bar{x})) \, d\bar{p}(\bar{x})$]. On peut alors écrire la relation précédente sous la forme

$$p = \int_I \delta_{x_i} \star \gamma_i \, d\pi(i)$$

avec $\pi(J) > 0$, $\gamma_i(K) = 1$, $\forall\, i \in J$.

La relation

$$| \hat{p}_H(\lambda^g) | \leq \sigma < 1, \quad \forall\, g \in G$$

entraîne

$$| \hat{q}_H(\lambda^g) | \leq \frac{1 + \sigma}{2} < 1,$$

et, avec les notations précédentes :

$$\frac{1}{\pi(J)} \int_J | \hat{\gamma}_j(\lambda^g) |^2 \, d\pi(j) \leq \frac{1 + \sigma}{2}, \quad \forall\, g \in G.$$

Il y a donc, comme dans le premier cas, une constante $s < 1$ telle que, pour tout g, il y ait un sous-ensemble $J(g) \subset J$ de mesure positive indépendante de g sur lequel $| \hat{\gamma}^g_j(\lambda) |^2 \leq s < 1$. Les γ^g_j sont portées par K, donc équicontinues, et il existe un voisinage V_λ de λ tel que

$$\forall\, \eta \in V_\lambda, \quad \forall\, j \in J(g), \qquad | \hat{\gamma}^g_j(\eta) |^2 \leq \frac{1 + s}{2} < 1.$$

Soit alors $\nu \in L_0^1(H)$ avec $\hat{\nu}$ portée par V_λ. Avec les mêmes notations que dans le premier cas :

$$\| p^n \star \nu \|_1 \leq \int_\Omega \| \gamma_{i_n}^{X_{n-1}(\omega)} \star \ldots \star \gamma_{i_1} \star \nu \|_1 \, d\pi^\infty(\omega).$$

Comme pour presque tout ω, il existe un ensemble infini Δ d'entiers tel que,

$$\forall\, m \in \Delta, \quad \gamma_{i_m}(K) = 1 \qquad \text{et} \qquad |\hat{\gamma}_{i_m}^{X_m(\omega)}| \leq \left(\frac{1+s}{2}\right)^{1/2} \qquad \text{sur} \quad V_\lambda.$$

Le lemme 1 entraîne

$$\lim_n \| F_n(\omega) \star \nu \|_1 = 0.$$

D'où le résultat.

Lemme V.3. — *Avec les notations du théorème, supposons que G opère de façon bornée (resp. compacte) sur H, et soit $\lambda \in \hat{H} - \{ \mathrm{Id} \}$.*

Si p est étalée (resp. quelconque) et H strictement apériodique, il existe un entier n, une constante $s < 1$ telle que, pour tout ξ dans l'orbite λ^G de λ sous G, $\| \widehat{(p^n)_H}(\xi) \| \leq s$.

Preuve. — Posons $\hat{H}_n = \{ \xi \in \hat{H}, \| \widehat{(p^n)_H}(\xi) \| = 1 \}$. Du fait que $(p^n)_H$ est symétrique résulte que

$$\hat{H}_n = \{ \xi \in \hat{H} ; \xi(h) = 1, \forall\, h \in H(p^n) \}.$$

Que p soit H-strictement apériodique se traduit donc par $\bigcap_n \hat{H}_n = \{ \mathrm{Id} \}$. D'après la proposition V.2 qui suit, $\hat{H}_{n+1} \subset \hat{H}_n$ (et donc $\bar{\lambda}^G \cap H_n$) est une suite décroissante de fermés de $\bar{\lambda}^G$ d'intersection vide dans les deux cas puisque $\mathrm{Id} \notin \bar{\lambda}^G$. Dans le deuxième cas, $\bar{\lambda}^G$ est compact et donc, pour n assez grand, $\bar{\lambda}^G \cap \hat{H}_n = \varnothing$; le lemme résulte donc de la continuité de $\| \widehat{(p^n)_H}(\xi) \|$. Dans le premier cas, pour n assez grand, $(p^n)_H$ a une partie absolument continue non nulle et $H(p^n)$ est ouvert, ce qui implique $\hat{H}_n$ compact [25], d'où encore, pour n assez grand, $\lambda^G \cap \hat{H}_n = \varnothing$. Par ailleurs, la propriété de Riemann-Lebesgue montre qu'en dehors d'un compact de $\hat{H}$, $\| \widehat{(p^n)_H}(\xi) \| \leq \sigma < 1$. Le lemme résulte de la continuité de $\| \widehat{(p^n)_H}(\xi) \|$.

Démonstration du théorème. — Posons

$$P = \{ \nu \in L^1(H), \lim_n \| p^n \star \nu \|_1 = 0 \},$$

et observons que P est un idéal à droite fermé de $L^1(H)$. Dans les deux cas du théorème, P contient, d'après les lemmes 2-3, les ν tels que le support de $\hat{\nu}$ soit contenu dans un voisinage V_λ assez petit de $\lambda \in H - \{ \mathrm{Id} \}$. Les propriétés de synthèse spectrale des groupes abéliens [10] ou compacts [25] entraînent alors $P = L_0^1(H)$.

PROPOSITION V.2. — *Soient p et q deux probabilités sur G. Alors $H(q \star p) \supset H(p)$, et l'on a, q-presque partout, $x^{-1} H(p)\, x \subset H(p \star q)$.*

Preuve. — Observons que si p est une probabilité et L un sous-groupe fermé de H contenant $H(p)$, il existe une section borélienne σ de G au-dessus de G/H telle que p soit portée par $\bigcup_{\bar{x} \in G/H} \sigma(\bar{x}) L$, et réciproquement. Posant

$$p = \int_{G/H} u_{\bar{x}}\, d\bar{p}(x), \qquad q = \int_G \delta_y\, dq(y),$$

on a

$$q \star p = \int_{G/H \times G} \delta_y \star u_{\bar{x}}\, d\bar{p}(\bar{x})\, dq(y).$$

Prenant $L = H(q \star p)$, on a donc

$$\delta_y \star u_{\bar{x}}[\sigma(\bar{y}\,\bar{x})\, L] = 1,$$

donc $(q \times \bar{p})$-presque partout, et aussi $\bar{p}$-presque partout

$$u'_{\bar{x}} \star u_{\bar{x}}[L] = 1,$$

donc $H(p) \subset L$.

De même,

$$p \star q = \int_{G/H \times G} u_{\bar{x}} \star \delta_y\, d\bar{p}(\bar{x})\, dq(y),$$

donc $u_{\bar{x}} \star \delta_y(\sigma(\bar{x}\,\bar{y})\, L) = 1$, en prenant $L = H(p \star q)$, $(\bar{p} \times q)$-presque partout. On en déduit

$$\delta_{y^{-1}} \star u'_{\bar{x}} \star u_{\bar{x}} \star \delta_y(L) = 1,$$

$(\bar{p} \times q)$-presque partout, donc q-presque partout $(\delta_{y^{-1}} \star p_H \star \delta_y)(L) = 1$, d'où le résultat.

Le résultat suivant sera utile pour montrer la H-stricte apériodicité de certaines probabilités.

PROPOSITION V.3. — *Soient H un sous-groupe fermé distingué de G, L un sous-groupe fermé de H, et g un élément de G vérifiant $g\, L\, g^{-1} \subset L$.*

On a $g\, L\, g^{-1} = L$ dans les deux cas suivants :

— H est abélien ou compact et G opère de façon compacte sur H;

— H est abélien ou compact, L est ouvert, et G opère de façon bornée sur H.

Preuve. — Dans le premier cas, l'adhérence du groupe des automorphismes de H définis par les éléments de G est un groupe compact pour la topologie naturelle [9]. Il en résulte que le semi-groupe fermé d'automorphismes, engendré par g, est un groupe qui contient donc l'automorphisme associé à g^{-1}. Comme ce semi-groupe applique L dans L, on a aussi

$$g^{-1}\, Lg = L.$$

Dans le deuxième cas, si H est compact, le résultat est immédiat : l'automorphisme de H, associé à g, conserve la mesure de Haar, et L est ici non négligeable. L'hypothèse $g\, L\, g^{-1} \subset L$ entraîne donc $g\, L\, g^{-1} = L$.

Dans le deuxième cas, soit H abélien et soit L à génération compacte. Comme G opère de façon bornée sur H et que L est ouvert, L est contenu dans L_1, sous-groupe ouvert de H à génération compacte et G-invariant.

La suite croissante $g^{-n}\, L\, g^n\, (n \in N)$ de sous-groupes ouverts de L_1 est donc stationnaire : $g^{-k}\, L\, g^k = g^{-(k+1)}\, L\, g^{k+1}$ pour un certain entier k positif ou nul. Mais, d'autre part, les quotients successifs de cette suite sont tous isomorphes à $g^{-1}\, L\, g/L$: on a donc $g^{-1}\, L\, g = L$.

Si maintenant L est quelconque, il est réunion de sous-groupes ouverts à génération compacte L_i avec $g\, L_i\, g^{-1} \subset L_i$: l'action de G sur H étant bornée, tout compact K d'intérieur non vide de L est contenu dans un compact K_1 de L d'intérieur non vide tel que $g\, K_1\, g^{-1} \subset K_1$.

Le résultat précédent reste donc vrai pour L quelconque.

Corollaire V.1. — *Soient p une probabilité apériodique sur G, H un sous-groupe fermé distingué abélien ou compact de G. Le sous-groupe $H^\infty(p)$ est distingué dans les deux cas suivants :*

— *p est étalée et G opère de façon bornée sur H;*

— *p est quelconque et G opère de façon compacte sur H.*

Preuve. — La proposition V.2 entraîne

$$\forall\, n, \quad H(p^n) \subset H(p^{n+1}),$$

et p-presque partout $x^{-1}\, H(p^n)\, x \subset H(p^{n+1})$.

On en déduit que, pour tout x dans le support de p :

$$x^{-1}\,(H^\infty(p))\, x \subset H^\infty(p).$$

La proposition V.3 et le fait que p soit apériodique permettent de conclure.

On dira qu'un groupe G possède la propriété de Liouville, si pour toute loi p étalée et apériodique, les éléments f de $L^\infty(G)$ vérifiant $f \star p = f$ sont les constantes.

Le théorème suivant résulte du théorème V.1.

Théorème V.2. — *Soit H un sous-groupe distingué fermé de G qui est abélien ou compact. Si G/H possède la propriété de Liouville et si G opère de façon bornée sur H, G possède la propriété de Liouville.*

Preuve. — Observons que, d'après [4], si L possède la propriété de Liouville, et si S est un semi-groupe ouvert engendrant L, on a $S^{-1}S = L$.

Soit alors S le semi-groupe ouvert de G formé des éléments au voisinage desquels l'une des p^n domine une mesure de Haar. On sait [4] que S engendre G, et son image T dans G/H est donc aussi un semi-groupe ouvert engendrant G/H. L'hypothèse faite sur G/H donne $T^{-1}T = G/H$. En remplaçant p par

$$\Sigma_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} p^n,$$

on peut supposer que la partie absolument continue de p a une densité strictement positive sur S, et ceci implique $S^{-1}S \cap H \subset H^\infty(p)$.

D'après le corollaire de la proposition V.3, $H^\infty(p)$ est distingué; comme, d'autre part, $T^{-1}T$ est un groupe, on vérifie aisément que $S^{-1}SH^\infty(p)$ est un groupe.

Comme $S^{-1}SH^\infty(p)$ est un sous-groupe ouvert portant p, qui est apériodique, $S^{-1}SH^\infty(p) = G$, et on a donc

$$H = S^{-1}SH^\infty(p) \cap H \subset H^\infty(p).$$

p est donc H-strictement apériodique et, d'après le théorème V.1 :

$$\forall\, \nu \in L_0^1(H), \quad \lim_n \| p^n \star \nu \|_1 = 0.$$

Soit alors $f \in L^\infty(G)$ avec $f \star p = f$. On a aussi

$$f \star p^n \star \nu = f \star \nu \quad \text{pour tout } n \text{ et à la limite } f \star \nu = 0.$$

Ceci signifie f constante sur chaque classe mod H.

Désignant par $\bar{p}$ l'image de p sur G/H, et $\bar{f}$ l'élément de $L^\infty(G/H)$ correspondant à f, on a $\bar{f} \star \bar{p} = \bar{f}$, et l'hypothèse faite sur G/H entraîne $\bar{f} = \text{Cte}$.

Ce théorème permet de construire, par extensions, de nouveaux groupes possédant la propriété de Liouville à partir de groupes abéliens, compacts et permet donc d'améliorer les résultats de [4].

En particulier, la propriété de Liouville se conserve par passage à la limite projective.

Si G est réunion d'une suite croissante de sous-groupes compacts ouverts distingués, G possède la propriété de Liouville. Certains groupes de matrices sur le corps des nombres p-adiques sont de ce type.

Si G possède une suite croissante finie de sous-groupes fermés distingués,

$$\{ e \} = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{n+1} = G,$$

telle que G opère de façon bornée sur H_{i+1}/H_i $(0 \leq i \leq n)$ supposé abélien ou compact, G possède la propriété de Liouville. Les groupes de Lie connexes de type R et leurs extensions compactes sont de ce type [4].

Le théorème V.3 est aussi une conséquence du théorème V.1, la probabilité p étant quelconque. Soit G' l'adhérence du groupe des commutateurs de G.

THÉORÈME V.3. — *Soit p une probabilité apériodique sur G. Si G' est abélien ou compact, et si G opère de façon compacte sur lui, on a*

$$\forall \nu \in L_0^1(G'), \quad \lim_n \| p^n \star \nu \|_1 = 0.$$

En particulier, les seuls éléments f de $L^\infty(G)$ vérifiant $f \star p = f$ sont les constantes.

Preuve. — D'après la démonstration du théorème 2, la deuxième assertion est conséquence immédiate de la première. Pour montrer $G'^\infty(p) = G'$, on peut se ramener, puisque $G'^\infty(p)$ est distingué, au cas $G'^\infty(p) = \{ e \}$, et il faut alors montrer $G' = \{ e \}$. Ceci découle du lemme [12].

LEMME V.4. — *Si p est apériodique sur G, si $G'(p^2) = \{ e \}$, G est abélien.*

Preuve. — Posant

$$p = \int u_{\bar{x}} \, d\bar{p}(\bar{x}),$$

où $u_{\bar{x}}$ est portée par la classe $\bar{x}$ mod G', on a

$$p^2 = \int u_{\bar{x}} \star u_{\bar{y}} \, d\bar{p}(\bar{x}) \, d\bar{p}(\bar{y}).$$

D'après l'hypothèse $G'(p^2) = \{ e \}$, p^2 est portée par une section borélienne de G au-dessus de G/G', et, en désignant par σ cette section, on a donc

$$u_{\bar{x}} \star u_{\bar{y}} = \sigma(\bar{x}\,\bar{y}) \qquad (\bar{p} \times \bar{p})\text{-presque partout.}$$

Ceci entraîne, puisque $\bar{x}\,\bar{y} = \bar{y}\,\bar{x}$, $x\,y = y\,x$ $(p \times p)$-presque partout. Or, x étant fixé, l'ensemble des y qui commutent avec x est un sous-groupe fermé de G. Pour presque tout x, ce sous-groupe porte p, donc est égal à G. Mais alors p est portée par le centre de G qui est donc égal à G.

Le théorème V.3 s'applique en particulier lorsque G est nilpotent de classe 2 ou bien lorsque G est extension d'un groupe abélien par un groupe abélien compact. Il généralise un résultat de A. J. STAM [22] sur le groupe des réels, résultat qui a été étendu aux groupes abéliens localement compacts par G. LETAC et M. MÉTIVIER [27].

Le raisonnement du lemme V.4 ne s'applique pas aux groupes nilpotents de classe 3 au moins. On peut cependant énoncer en ce cas un théorème voisin du théorème V.3 si l'on suppose que p admet un « moment d'ordre non nul ».

La technique utilisée repose sur la notion de croissance polynomiale étudiée dans les chapitres précédents.

Supposons que G soit à génération compacte, et soit K un voisinage compact de e engendrant G. Disons que p admet un moment d'ordre $\alpha > 0$ si la série de terme général $n^\alpha\, p\,(K^{n+1} - K^n)$ est convergente. On vérifie aisément que cette condition ne dépend pas du compact K choisi.

Si p admet un moment d'ordre $\alpha > 0$, on a en particulier

$$\lim_n n^\alpha\,[1 - p\,(K^n)] = 0.$$

Soit H un sous-groupe fermé distingué. On dira que p est H-fortement apériodique, si, pour tout sous-groupe D, dont une classe bilatère $\Gamma = g\,D = Dg$ $(g \in G)$ porte p [i. e. $p\,(\Gamma^c) = 0$], on a $\overline{D \cap H} = H$.

Cette notion est aussi, comme la notion de H-stricte apériodicité, une généralisation de la notion connue dans le cas G abélien ou compact, et $H = G$. De plus, si p est H-strictement apériodique, elle est H-fortement apériodique : si p est portée par la classe bilatère $\Gamma = gD = Dg$, on a $p^n\,(g^n D) = 1$, ce qui entraîne que $(p^n)_H$ est portée par $D \cap H$ pour tout n, et donc $\overline{D \cap H} = H$.

On rappelle [6] qu'une représentation unitaire ρ de G d'espace $\mathcal{H}$ contient faiblement l'identité si, et seulement s'il existe une suite x_n de vecteurs unitaires de $\mathcal{H}$ telle que

$$\forall\, g \in G, \quad \lim_n \|\, g\, x_n - x_n \,\| = 0.$$

Le symbole $g\,x_n$ désigne ici l'image de x_n par $\rho\,(g)$. On rappelle aussi que, d'après le chapitre I, G est dit à croissance polynomiale si $|\,K^n\,|$ est majoré par une puissance de n.

Enfin, on note $L^1_0\,(G, H)$ le noyau de l'homomorphisme canonique de $L^1\,(G)$ sur $L^1\,(G/H)$.

THÉORÈME V.4. — *Soient H un sous-groupe fermé distingué de G, p une probabilité H-fortement apériodique sur G. Si G est à croissance polynomiale, opère de façon compacte sur H, supposé abélien ou compact, et si p admet un moment d'ordre non nul, on a*

$$\forall\, f \in L^1_0\,(G, H), \quad \lim_n \|\, p^n \star f \,\|_1 = 0.$$

Le théorème V.4 résulte de trois propositions :

PROPOSITION V.4. — *Soient p une probabilité H-fortement apériodique, ρ une représentation unitaire de G telle que* $\mathrm{Res}_H\,\rho$ *soit continue en norme* *et ne contienne pas faiblement l'identité. Alors la norme spectrale de* ρ (p) *est inférieure à* 1.

Cette proposition résultera du lemme suivant.

LEMME V.5. — *Soient* $\mathcal{H}$ *l'espace de* ρ, $\alpha \in \mathbf{C}$, $x_n \in \mathcal{H}$, *D l'ensemble des* ξ *de G tels que* $\lim_n \| \xi x_n - x_n \| = 0$, *C l'ensemble des g de G tels que* $\lim_n \| g x_n - \alpha x_n \| = 0$. *Alors, si* $C \neq \emptyset$, *C est une classe bilatère du sous-groupe D.*

Preuve. — Observons que si g et g' sont deux éléments de G, λ et λ' deux complexes vérifiant

$$\lim_n \| g x_n - \lambda x_n \| = \lim_n \| g' x_n - \lambda' x_n \| = 0,$$

on a

$$\| gg' x_n - \lambda\lambda' x_n \| \leq \| g (g' x_n - \lambda' x_n) \| + | \lambda' | \| g x_n - \lambda x_n \|,$$

donc

$$\lim_n \| gg' x_n - \lambda\lambda' x_n \| = 0.$$

On a de même

$$\| g^{-1} x_n - \lambda^{-1} x_n \| = \| \lambda^{-1} g^{-1} (g x_n - \lambda x_n) \|$$

et

$$\lim_n \| g^{-1} x_n - \lambda^{-1} x_n \| = 0.$$

D'où le lemme.

Démonstration de la proposition V.4. — Supposons la norme spectrale de $\rho (p) = P$ égale à 1, et soit $\alpha \in \mathbf{C}$, $| \alpha | = 1$ tel que $P - \alpha$ ne soit pas inversible.

Montrons l'existence d'une suite de vecteurs unitaires x_n telle que

$$\lim_n \| P x_n - \alpha x_n \| = 0,$$

s'il n'existe pas de telle suite, Im $(P - \alpha)$ est fermée et distincte de $\mathcal{H}$ [13], ce qui entraîne Ker $(P^* - \bar{\alpha}) \neq \{ 0 \}$ et l'existence de $x \neq 0$ tel que

$$P^* x = \bar{\alpha} x, \qquad g^{-1} x = \bar{\alpha} x$$

p-presque partout, soit $g x = \alpha x$ et $P x = \alpha x$, ce qui contredit l'hypothèse. La relation

$$\lim_n \| P x_n - \alpha x_n \| = 0$$

entraîne, puisque $\| x_n \| = 1$,

$$\lim_n \langle P x_n, x_n \rangle = \alpha$$

soit

$$\lim_n \int_G \langle g x_n, x_n \rangle \, dp (g) = \alpha.$$

Puisque $|\alpha| = 1$ et $|\langle g\, x_n, x_n \rangle| \leq 1$, on en déduit l'existence d'une sous-suite x_{n_k} telle que

$$0 = \lim_k \langle g\, x_{n_k}, x_{n_k} \rangle - \alpha = \lim_k \| g\, x_{n_k} - \alpha\, x_{n_k} \|$$

p-presque partout.

D'après le lemme, p est portée par une classe bilatère C du sous-groupe D des ξ de G tels que

$$\lim_k \| \xi\, x_{n_k} - x_{n_k} \| = 0.$$

Puisque $\mathrm{Res}_H\, \rho$ est continue en norme, $D \cap H$ est fermé, et l'hypothèse sur p entraîne $D \supset H$. Ceci contredit l'hypothèse que $\mathrm{Res}_H\, \rho$ ne contient pas faiblement l'identité.

Appelons H-spectre d'une représentation unitaire ρ de G, l'ensemble des représentations unitaires irréductibles de H faiblement contenues dans $\mathrm{Res}_H\, \rho$. Appelons aussi H-spectre d'un élément f de $L^2(G)$, le H-spectre de la représentation de G dans le sous-espace $\mathcal{F}$ de $L^2(G)$, engendré par les translatées à gauche de f, par des éléments de G. On notera $\mathfrak{L}(\hat{H})$ l'ensemble des orbites fermées sous G des compacts de $\hat{H} - \{\mathrm{Id}\}$.

Proposition V.5. — *Supposons H compact ou abélien et G moyennable. Alors l'ensemble des f de $(L^1 \cap L^2)(G)$, dont le H-spectre est contenu dans un élément de $\mathfrak{L}(\hat{H})$, est dense dans $L^1_0(G, H)$.*

Preuve. — Ce résultat classique, lorsque $G = H$, sera obtenu en s'appuyant sur ce cas et sur le lemme V.6.

Lemme V.6. — *Soient V un sous-espace de $L^2(H)$, stable par translations à gauche, r la représentation associée de H dans V, $\mathcal{V}$ le sous-espace de $L^2(G)$ engendré par les fonctions de la forme $\eta \star \varphi$, où φ est un élément de V et η est continue à support compact, ρ la représentation de G dans $\mathcal{V}$ par translations à gauche. Alors $\rho = \mathrm{Ind}_H^G r$.*

Preuve. — Notons, pour tout élément f de $L^2(G)$, $\tilde{f}(g) = (\delta_g \star f)_H$ la restriction de $\delta_g \star f$ à H, et remarquons que l'application $f \to \tilde{f}$ définit un isomorphisme de la représentation régulière gauche de G sur la représentation induite par la représentation régulière gauche de H. Par cet isomorphisme, la représentation $\mathrm{Ind}_H^G r$ s'identifie à la représentation de G par translations à gauche dans l'espace W des $f \in L^2(G)$ telles que $\tilde{f}(x) \in V$ presque partout.

On a alors

$$\widetilde{\eta \star \varphi}\,(x) = \tilde{\eta}(x) \star \varphi \in V,$$

et

$$\| \eta \star \varphi \|_2^2 = \int_{G/H} \| \tilde{\eta}(x) \star \varphi \|_2^2\, d\bar{x} \leq \| \varphi \|_2^2 \int_{G/H} \| \tilde{\eta}(x) \|_1^2\, d\bar{x} < +\infty.$$

De plus, $\mathcal{V}$ est égal à W, car si $f \in L^2(G)$ est orthogonale à $\mathcal{V}$, on a

$$0 = \langle f, \eta \star \varphi \rangle = \langle (\eta' \star f)_H, \varphi \rangle = \int_G \langle \tilde{f}(x), \varphi \rangle \eta(x^{-1})\, dx.$$

Ceci entraîne, d'après l'arbitraire de η. $\langle \tilde{f}(x), \varphi \rangle = 0$ presque partout, donc, puisque V est séparable, $\tilde{f}(x) \perp V$ presque partout et $\tilde{f} \perp W$, $f \perp W$.

Pour démontrer la proposition, désignons par $\hat{K}$ un compact de $\hat{H} - \{\mathrm{Id}\}$, par V le sous-espace des éléments φ de $L^2(H)$ tels que $\hat{\varphi}$ soit portée par $\hat{K}$. Alors, avec les notations du lemme, le spectre de r est $\hat{K}$, celui de

$$\mathrm{Res}_H(\mathrm{Ind}_H^G r) = \mathrm{Res}_H \rho$$

est, d'après [6], l'orbite fermée $\hat{L}$ de $\hat{K}$ sous G.

En particulier, si φ appartient à $(L^1 \cap L^2)(H)$, $\eta \star \varphi \in \mathcal{V}$, et son H-spectre est donc contenu dans $\hat{L}$. Comme de plus $\eta \star \varphi \in L_0^1(G, H)$, il reste à vérifier que les fonctions de ce type, où $\hat{K}$ varie, forment un système total dans $L_0^1(G, H)$. Soit donc $f \in L^\infty(G)$ qui leur est orthogonal :

$$0 = \langle f, \eta \star \varphi \rangle = \langle f \star \varphi', \eta \rangle.$$

Comme les η forment un système total dans $L^1(G)$, $f \star \varphi' = 0$.

D'après [10] et [25], les éléments φ de $(L^1 \cap L^2)(H)$ tels que $\hat{\varphi}$ soit portée par un compact de $\hat{H} - \{\mathrm{Id}\}$ forment un système total de $L_0^1(H)$. Donc

$$\forall\, \psi \in L_0^1(H), \quad f \star \psi = 0.$$

Ceci entraîne bien f orthogonale à $L_0^1(G, H)$.

Le théorème V.5 est une application du théorème précédent.

THÉORÈME V.5. — *Soient G un groupe résoluble localement compact tel que l'adhérence G' de son groupe de commutateurs soit nilpotente, p une probabilité apériodique sur G qui possède un moment d'ordre non nul. On a alors*

$$\forall\, f \in L_0^1(G, G'), \quad \lim_n \| p^n \star f \|_1 = 0$$

dans les deux cas suivants :

— *G est nilpotent;*

— *G opère de façon compacte sur les quotients successifs de la suite centrale descendante fermée de G'.*

On se bornera à démontrer le théorème dans le deuxième cas, et il résultera alors de deux lemmes.

LEMME V.7. — *Soient G, G' comme dans le théorème, p une probabilité apériodique sur G,*

$$G' \supset G'^2 \supset \ldots \supset G'^r \supset G'^{r+1} = \{ e \}$$

la suite centrale descendante fermée de G'. Alors p est G'^r-fortement apériodique.

Preuve. — Soit D un sous-groupe de G, dont une classe porte p, et montrons que $\overline{D \cap G'^r} = G'^r$. Soient Δ le sous-groupe engendré par cette classe, et D; D est distingué dans Δ, et Δ/D est cyclique. Soit Γ le groupe dérivé de Δ, et

$$\Gamma \supset \Gamma^2 \supset \ldots \supset \Gamma^s \supset \Gamma^{s+1} = \{ e \}$$

la suite centrale descendante de Γ. Puisque p est apériodique

$$\bar{\Delta} = G, \qquad \bar{\Gamma} = G', \qquad \bar{\Gamma}^k = G'_k, \qquad r = s$$

et comme $D \supset \Gamma$, $\overline{D \cap G'^r} = \Gamma^r = G'^r$.

LEMME V.8. — *Soient T une contraction d'un espace de Banach E laissant invariant un sous-espace F, T_E et $T_{E/F}$ les parties de T dans F, et E/F.*

Si, en convergence simple, $\lim_n T_F^n = 0$ *et* $\lim_n T_{E/F}^n = 0$, *on a aussi* $\lim_n T^n = 0$.

Preuve. — Soit x un élément de E, $\bar{x}$ sa classe dans E/F. Étant donné $\varepsilon > 0$, soient n tel que $\| T_{E/F}^n \bar{x} \| < \varepsilon/2$, et y dans F tel que $\| y - T^n x \| \leqq \varepsilon/2$.

Puisque, pour m assez grand, $\| T^m y \| \leqq \varepsilon/2$, on obtient, car T est une contraction

$$\| T^{m+n} x \| < \| T^m y \| + \| T^m (y - T^n x) \| \leqq \varepsilon.$$

Démonstration du théorème V.5. — Puisque G opère de façon compacte, donc bornée, sur les quotients successifs de la suite centrale descendante de G', G est bien, d'après le chapitre III, à croissance polynomiale.

Pour démontrer le théorème, on raisonne par récurrence sur la longueur r de la suite centrale descendante de G', le cas $r = 0$ étant trivial.

D'après le théorème V.4 et le lemme V.7, on a

$$\forall\, f \in L_0^1 (G, G'^r), \quad \lim_n \| p^n \star f \|_1 = 0.$$

D'autre part, le quotient de $L_0^1 (G, G')$ par $L_0^1 (G, G'^r)$ s'identifie à $L_0^1 (G/G'^r, G'/G'^r)$, et l'opérateur, associé à p dans cet espace, à la convolution par l'image $\bar{p}$ de p dans G/G'^r.

D'après l'hypothèse de récurrence, on a bien

$$\forall\, f \in L_0^1 (G/G'^r, G'/G'^r), \quad \lim_n \| \bar{p}^n \star \bar{f} \|_1 = 0.$$

Le résultat découle donc du lemme V.8.

Ce théorème s'applique à certains groupes de Lie résolubles de type R.

Les hypothèses du théorème ne sont pas vérifiées dans l'exemple suivant : soit G le produit semi-direct de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}^2$, l'automorphisme du groupe additif $\mathbf{C}^2$ associé à $t \in \mathbf{R}$ étant défini par la matrice

$$e^{2i\pi t\alpha}\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}, \qquad \text{où } \alpha \notin Z.$$

Ici $G' = \mathbf{C}^2$, $r = 1$, et G n'agit pas de façon compacte sur G'.

COROLLAIRE V.2. — *Soient G et p vérifiant les conditions du théorème. On suppose de plus p strictement apériodique, c'est-à-dire p non portée par une classe d'un sous-groupe fermé distingué propre de G. Alors*

$$\forall\, f \in L_0^1(G), \quad \lim_n \| p^n \star f \|_1 = 0.$$

Preuve. — D'après le théorème V.5, on sait déjà que

$$\forall\, f \in L_0^1(G, G'), \quad \lim_n \| p^n \star f \|_1 = 0.$$

L'hypothèse supplémentaire faite sur p entraîne, d'après le théorème V.4, que

$$\forall\, \bar{f} \in L_0^1(G, G'), \quad \lim_n \| \bar{p}^n \star \bar{f} \|_1 = 0,$$

où $\bar{p}$ est l'image de p dans G/G'.

On achève alors la démonstration comme précédemment, à l'aide du lemme V.8.

On va déduire de ce corollaire un thèorème d'équirépartition, ce qui fournit une réponse partielle à un problème de V. I. ARNOLD et A. L. KRYLOV [1].

Soient G un groupe de Lie résoluble connexe, a et b deux éléments de G qui engendrent G. Soit M_n l'ensemble des mots de longueur n du groupe libre à deux générateurs, et posons

$$p_n = \frac{1}{|M_n|} \Sigma_{\lambda \in M_n} \delta_{\lambda(a,b)} \qquad \text{et} \qquad p_0 = \delta_e.$$

On a $p_1 = (1/4)(\delta_a + \delta_b + \delta_{a^{-1}} + \delta_{b^{-1}})$ et la relation

$$p_{n+1} = \frac{4}{3} p_1\, p_n - \frac{1}{3} p_{n-1}.$$

Cette suite de probabilités sur G sera dite associée au système de générateurs $\{ a, b \}$.

Soit E un espace homogène compact de G. On sait que E possède une mesure invariante unique μ car G est moyennable [7]. On définit la convolution d'une mesure bornée q sur G, et d'une fonction continue $\varphi \in C(E)$

sur E, par la formule

$$(q \star \varphi)(x) = \int_G \varphi(g^{-1} x)\, dq(g).$$

En particulier

$$(p_n \star \varphi)(x) = \frac{1}{|M_n|} \Sigma_{\lambda \in M_n} \varphi(\lambda(a, b) x)$$

est l'analogue d'une moyenne ergodique de φ.

THÉORÈME V.6. — *Soient G un groupe résoluble connexe de Lie satisfaisant les hypothèses du théorème* V.5, $\{a, b\}$ *un système de générateurs topologiques de G, p_n la suite de probabilités sur G associée. Si E est un espace homogène compact de G admettant la mesure invariante μ, on a*

$$\forall\, \varphi \in C(E), \quad \lim_n (p_n \star \varphi)(x) = \int_E \varphi(x)\, d\mu(x).$$

Ce théorème résultera du lemme.

LEMME V.9. — *Le sous-espace fermé de $C(E)$, engendré par les fonctions de la forme $f \star \varphi$, où $f \in L_0^1(G)$ et $\varphi \in C(E)$, est égal à l'hyperplan de $C(E)$ défini par*

$$\int_E \psi(x)\, d\mu(x) = 0.$$

Soit ν une forme linéaire continue sur $C(E)$, c'est-à-dire une mesure bornée sur E. Prenant $f = \varepsilon - \delta_g \star \varepsilon$ ($g \in G$), on obtient si $\nu(f \star \varphi) = 0$

$$\nu(\varepsilon \star \varphi) = \nu(\delta_g \star \varepsilon \star \varphi).$$

Si ε décrit une unité approchée de $L^1(G)$, la limite uniforme de $\varepsilon \star \varphi$ est φ, donc $\nu(\varphi) = (\delta_g \star \nu)(\varphi)$, $\forall\, \varphi \in C(E)$.

La mesure ν est donc invariante par G : elle est proportionnelle à μ, ce qui montre le lemme.

Démonstration du théorème. — Une étude élémentaire de la relation de récurrence [11] :

$$p_{n+1} = \frac{4}{3} p_1 p_n - \frac{1}{3} p_{n-1}$$

montre que, si σ est une représentation de G, telle que la norme de l'opérateur hermitien $\rho(p)$ soit inférieure à 1, il existe une constante $s < 1$ telle que la norme de $\rho(p_n)$ soit majorée par s^n, pour tout n. Il en résulte que les raisonnements précédents, faits avec p^n, peuvent se faire aussi avec p_n, et la conclusion du corollaire V.2 devient :

Si G vérifie les conditions du théorème V.5, si p est strictement apériodique, on a

$$\forall\, f \in L_0^1(G), \quad \lim_n \| p_n \star f \|_1 = 0.$$

Du fait que G est connexe, et que p est symétrique, l'apériodicité entraîne ici la stricte apériodicité : si p est portée par une classe d'un sous-groupe fermé distingué L de G, G/L est engendré par la classe

$$a\,L = b\,L = a^{-1}\,L = b^{-1}\,L,$$

donc $|\,G/L\,| = 1$ ou 2 et par connexité $G = L$.

Il suffit de vérifier l'assertion du théorème pour φ appartenant à un système total de $C(E)$. D'après le lemme V.9, un tel système est constitué de la fonction 1 et des fonctions de la forme $f \star \psi$, où $f \in L^1_0(G)$ et $\psi \in C(E)$.

Pour $\varphi = 1$, le résultat est trivial.

Pour $\varphi = f \star \psi$, on a

$$\|\, p_n \star \varphi \,\|_\infty = \|\, (p_n \star f) \star \psi \,\|_\infty \leq \|\, p_n \star f \,\|_1 \,\|\, \psi \,\|_\infty,$$

d'où, d'après ce qui précède, la convergence uniforme de $p_n \star \varphi$ vers zéro.

Additif sur épreuve (16-4-1974). — Depuis que ce travail a été achevé, d'autres démonstrations ont été données de certains résultats : la caractérisation des groupes de Lie connexes à croissance non exponentielle a également été obtenue par J. W. Jenkins (Growth of locally compact groups, *Journal of Functional Analysis*, 12, 1973, p. 113-127) et le degré de croissance des groupes nilpotents de type fini a été calculé par H. Bass (The degree of polynomial growth of finitely generated nilpotent groups. *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 25, 1972, p. 314).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Arnold (V. I.) et Krylov (A. L.). — Uniform distribution of points on a sphere..., *Sov. Math. Dokl.*, t. 4, 1963, p. 1-5.

[2] Auslander (L.) et Green (L. W.). — G-induced flows, *Amer. J. Math.*, t. 88, 1966, p. 43-60.

[3] Auslander (L.) et Moore (C. C.). — *Unitary representations of solvable Lie groups.* — Providence, American mathematical Society, 1966 (*Memoirs of the American mathematical Society*, 62).

[4] Azencott (R.). — *Espaces de Poisson des groupes localement compacts.* — Berlin, Springer-Verlag, 1970 (*Lectures Notes in Mathematics*, 148).

[5] Choquet (G.) et Deny (J.). — Sur l'équation de convolution $\mu = \mu \star \sigma$, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 250, 1960, p. 799-801.

[6] Fell (J. M. G.). — Weak containment and induced representations of groups, *Canad. J. Math.*, t. 14, 1962, p. 237-268.

[7] Furstenberg (H.). — A Poisson formula for semi-simple Lie groups, *Annals of Math.*, séries 2, t. 77, 1963, p. 335-386.

[8] Grenander (U.). — *Probabilities on algebraic structures.* — New York, J. Wiley, 1963.

[9] Grosser (S.) et Moskowitz (M.). — Compactness conditions in topological groups, *J. für reine und angew. Math.*, t. 246, 1970, p. 1-40.

[10] GUICHARDET (A.). — *Analyse harmonique commutative.* — Paris, Dunod, 1968 (Monographies universitaires de Mathématiques, 26).
[11] GUIVARC'H (Y.). — Un théorème de von Neumann, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 268, série A, 1969, p. 1020-1023.
[12] GUIVARC'H (Y.) et KEANE (M.). — Marches aléatoires sur les groupes nilpotents, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 272, série A, 1971, p. 1462-1463.
[13] HALMOS (P. R.). — *Introduction to Hilbert space....* — New York, Chelsea Publishing Company, 1957.
[14] MACBEATH (A. M.) et SWIERCZKOWSKI (S.). — On the set of generators of a subgroup, *Indag. Math.*, t. 21, 1959, p. 280-281.
[15] MALCEV (A. I.). — On a class of homogeneous spaces, « *Lie groups* », p. 276-307. — Providence American mathematical Society, 1962 (*American mathematical Society Translations*, series 1, vol. 9).
[16] MILNOR (J.). — Growth of finitely generated solvable groups, *J. diff. Geom.*, t. 2, 1968, p. 447-449.
[17] MOSTOW (G. D.). — Factor spaces of solvable Lie groups, *Annals of Math.*, series 2, t. 60, 1954, p. 1-27.
[18] MOSTOW (G. D.). — Homogeneous spaces with finite invariant measure, *Annals of Math.*, Séries 2, t. 75, 1962, p. 17-37.
[19] MOSTOW (G. D.). — Some applications of representative functions to solvmanifolds, *Amer. J. Math.*, t. 93, 1971, p. 11-32.
[20] ROBERTSON (L. C.). — A note on the structure of Moore groups, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 75, 1969, p. 594-599.
[21] SPITZER (F.). — Principles of random walks. — New York, D. Van Nostrand, 1964 (*University Series in higher Mathematics*).
[22] STAM (A. J.). — On shifting iterated convolutions, I, *Compositio Mathematica*, t. 17, 1966, p. 268-280.
[23] WANG (H. C.). — Discrete subgroups of solvable Lie groups, *Annals of Math.*, séries 2, t. 64, 1956, p. 1-19.
[24] WANG (H. C.). — On the deformations of lattice in a Lie group, *Amer. J. Math.*, t. 85, 1963, p. 189-212.
[25] WEIL (A.). — *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications.* 2e éd. — Paris, Hermann, 1951 (*Act. scient. et ind.*, 869-1145; *Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg*, 4).
[26] WOLF (J. A.). — Growth of finitely generated solvable groups and curvature of riemannian manifolds, *J. diff. Geom.*, t. 2, 1968, p. 421-446.
[27] Communication orale, UER Mathématiques et Informatique, Rennes, 1970.

(Texte reçu le 3 avril 1973.)

Yves GUIVARC'H,
1 *bis*, rue du Bois Rondel,
35000 Rennes.