PHILIPPE MICHEL

Problème des inégalités. Applications à la programmation et au contrôle optimal

Bulletin de la S. M. F., tome 101 (1973), p. 413-439
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1973__101__413_0>

Bull. Soc. math. France,
101, 1973, p. 413 à 439.

PROBLÈME DES INÉGALITÉS. APPLICATIONS À LA PROGRAMMATION ET AU CONTRÔLE OPTIMAL

PAR

PHILIPPE MICHEL
[Nancy]

RÉSUMÉ. — La résolution d'un problème des inégalités implicites (condition suffisante d'existence d'une solution) permet d'établir une condition nécessaire d'optimalité pour un problème de programmation où les contraintes et le critère sont des fonctions qui sont sommes de fonctions convexes et de fonctions dérivables. Les résultats sont établis dans des espaces de dimension infinie, ce qui permet de les appliquer au cas du contrôle optimal en montrant que celui-ci peut se mettre sous la forme d'un problème de programmation statique : la démonstration est faite pour des commandes généralisées dans un cas simple et dans le cas de liaisons et contraintes entre l'état et la commande; et on présente les modifications à opérer pour d'autres types de commandes.

1. Données et définitions

1.1. *On considère les données suivantes :*

— une partie convexe fermée M d'un espace de Banach réel;

— un espace vectoriel topologique réel F muni d'une relation d'ordre définie par un cône convexe pointé saillant F_+ ([3], chapitre 2, § 2, proposition 13);

— une fonction f définie dans M et à valeurs dans F, et un point $\bar{x}$ de M.

1.2. FONCTIONS CONVEXES ([13], chapitre 2, § 1). — On dit que f est convexe dans une partie convexe A de M si, pour tout couple (x_1, x_2) de points de A et tout nombre t de $[0, 1]$, on a

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

1.3. SEMI-CONTINUITÉ INFÉRIEURE. — On dit que f est semi-continue inférieurement (en abrégé s. c. i.) dans une partie A de M si l'ensemble des points (x, y) de $A \times F$ qui vérifient $f(x) \leqq y$ est fermé dans $A \times F$.

Si F est la droite numérique $\mathbf{R}$, cette condition correspond à la notion usuelle de semi-continuité inférieure.

Si F est l'espace $\mathbf{R}^l$ muni de la topologie produit et de l'ordre produit, la semi-continuité inférieure de f résultera de celle de chacune de ses composantes numériques; mais cette dernière condition n'est pas nécessaire, même en dimension finie.

EXEMPLE. — On considère les deux fonctions numériques définies dans $\mathbf{R}$:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x = 0, \\ \dfrac{1}{|x|} & \text{pour } x \neq 0, \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0, \\ 1 & \text{pour } x \geqq 0, \end{cases}$$

la fonction f_2 n'est pas s. c. i., mais la fonction $f = (f_1, f_2)$ est s. c. i. dans $\mathbf{R}$ au sens où nous l'avons défini.

1.4. DÉRIVABILITÉ STRICTE. — On dit que f est strictement dérivable en $\bar{x}$ s'il existe une fonction linéaire continue $f'(\bar{x})$ sur le sous-espace vectoriel engendré par M telle que

$$\text{limite}_{(x_1, x_2) \to (\bar{x}, \bar{x})\,;\, x_1 \neq x_2,\, x_1 \in M,\, x_2 \in M} \frac{f(x_1) - f(x_2) - f'(\bar{x}).(x_1 - x_2)}{\| x_1 - x_2 \|} = 0.$$

Quand M est un voisinage de $\bar{x}$, on retrouve la notion de dérivabilité stricte de BOURBAKI ([6], 2.1.2).

1.5. FONCTIONS APPROXIMATIVEMENT CONVEXES S. C. I. — Nous dirons que f est approximativement convexe s. c. i. au voisinage de $\bar{x}$ s'il existe un voisinage convexe V de $\bar{x}$ dans M, une fonction g convexe s. c. i. dans V et une fonction d continue dans V et strictement dérivable en $\bar{x}$ tels que $f(x) = g(x) + d(x)$ en tout point x de V.

On peut supposer qu'au point $\bar{x}$, g est nulle et la dérivée de d est nulle : il suffit d'ajouter à g et de retrancher à d la fonction $d'(\bar{x}).(x - \bar{x}) - g(\bar{x})$, car la somme d'une fonction continue et d'une fonction s. c. i. est s. c. i.

2. Problème des inégalités

2.1. PROBLÈME. — On considère les données 1.1, et *pour un point donné y de F, on cherche un point x de M qui vérifie $f(x) \leqq y$* ([10], problème des inégalités).

Nous supposons que f est approximativement convexe s. c. i. au voisinage de $\bar{x}$.

2.2. NOTATIONS. — *On désigne par* g une fonction convexe s. c. i. nulle en $\bar{x}$, et par d une fonction continue strictement dérivable en $\bar{x}$ de dérivée nulle, telles que $g + d = f$ dans un voisinage de $\bar{x}$.

On désigne par r un nombre strictement positif tel que ces propriétés sont vérifiées dans l'intersection de M avec la boule de centre $\bar{x}$ et de rayon r.

On désigne par C l'ensemble convexe des éléments y de F tels qu'il existe un point x de M qui vérifie

$$\| x - \bar{x} \| \leqq r \qquad \text{et} \qquad g(x) \leqq y.$$

2.3. THÉORÈME. — *Si C contient $S + W$ pour un sous-ensemble S de F et un voisinage W de* 0 *dans F, alors il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout nombre positif $t \leqq \varepsilon$ et pour tout point y de S, on peut trouver un point x de M qui vérifie*

$$\| x - \bar{x} \| \leqq tr \qquad \textit{et} \qquad f(x) \leqq f(\bar{x}) + ty.$$

Démonstration. — Il existe un nombre $\varepsilon_1 > 0$ tel que, pour tout couple (x_1, x_2) de points de M qui vérifient $\| x_1 - \bar{x} \| \leqq \varepsilon_1$ et $\| x_2 - \bar{x} \| \leqq \varepsilon_1$, on a

$$\frac{d(x_1) - d(x_2)}{\| x_1 - x_2 \|} \in \frac{1}{2r} W.$$

Soit ε le plus petit des nombres ε_1/r et 1. Considérons un nombre positif $t \leqq \varepsilon$ et un point y de S.

Pour tout point z de $ty + tW$, il existe un point h de M qui vérifie

$$\| h - \bar{x} \| \leqq tr \qquad \text{et} \qquad g(h) \leqq z;$$

en effet, le point $t^{-1} z$ appartient à C, et il existe un point x de M qui vérifie

$$\| x - \bar{x} \| \leqq r \qquad \text{et} \qquad g(x) \leqq t^{-1} z;$$

le point $h = tx + (1 - t)\bar{x}$ vérifie alors

$$\| h - \bar{x} \| \leqq tr \qquad \text{et} \qquad g(h) \leqq tg(x) \leqq z.$$

On pose $x_0 = \bar{x}$, $h_0 = \bar{x}$, $z_0 = 0$ et $z_1 = 2^{-1} ty$; on a $2(z_1 - z_0) = ty$, et il existe un point h_1 de M qui vérifie

$$\| h_1 - \bar{x} \| \leqq tr \qquad \text{et} \qquad g(h_1) \leqq 2(z_1 - z_0);$$

on pose $x_1 = 2^{-1} h_1 + 2^{-1} \bar{x}$; on a donc $g(x_1) \leqq z_1$.

Supposons définis, pour $1 \leqq p \leqq n$, des points z_p de F, x_p et h_p de M qui vérifient

$$x_p = 2^{-p} \bar{x} + \Sigma_{q=1}^{p} 2^{-q} h_q, \qquad z_p = (\Sigma_{q=1}^{p} 2^{-q}) ty - d(x_{p-1}) + f(\bar{x}),$$
$$\| h_p - \bar{x} \| \leqq tr, \qquad g(h_p) \leqq 2^p (z_p - z_{p-1}) \qquad \text{et} \qquad g(x_p) \leqq z_p.$$

Posons

$$z_{n+1} = (\Sigma_{q=1}^{n+1} 2^{-q}) ty - d(x_n) + f(\bar{x});$$

alors on a

$$2^{n+1}(z_{n+1}-z_n) = ty + 2^{n+1}(d(x_{n-1}) - d(x_n));$$
$$\| x_{n-1} - x_n \| \leqq 2^{-n} \| \bar{x} - h_n \| \leqq 2^{-n} tr;$$
$$d(x_{n-1}) - d(x_n) \in 2^{-n} tr (2r)^{-1} W;$$
$$2^{n+1}(z_{n+1}-z_n) \in ty + tW.$$

Ainsi, il existe un point h_{n+1} de M qui vérifie

$$\| h_{n+1} - \bar{x} \| \leqq tr \qquad \text{et} \qquad g(h_{n+1}) \leqq 2^{n+1}(z_{n-1} - z_n).$$

On peut poser $x_{n+1} = 2^{-n-1}\bar{x} + \sum_{q=1}^{n+1} 2^{-q} h_q$; et il résulte de la convexité de g que l'on a

$$g(x_{n+1}) \leqq \sum_{q=1}^{n+1} 2^{-q} g(h_q) \leqq \sum_{q=1}^{n+1} (z_q - z_{q-1}).$$

La suite de Cauchy x_n converge vers un point x de M qui vérifie $\| x - \bar{x} \| \leqq tr$; d étant continue, la suite z_n converge vers la limite $z = ty - d(x) + f(\bar{x})$; enfin, il résulte de la semi-continuité inférieure de g que l'on a $g(x) \leqq z$; on obtient bien alors $f(x) \leqq f(\bar{x}) + ty$. Le théorème est démontré.

2.4. Remarque. — Dans le cas où M est un convexe fermé d'un espace de Banach réflexif et où F est un espace localement convexe séparé, le convexe C est fermé. En effet, C est l'image d'un compact faible par la multi-application Γ qui associe à tout x l'ensemble $g(x) + F_+$; g étant convexe s. c. i., le graphe de Γ est un convexe fermé pour les topologies initiales; et il en est de même pour la topologie affaiblie sur M ([4], chapitre 4, § 2, propositions 4 et 10). Par contre, dans le cas d'un espace non réflexif, C n'est en général pas fermé : c'est le cas de l'image de la boule unité dans le bidual muni de la topologie faible.

Toutefois, si F est un espace vectoriel topologique métrisable, on peut remplacer C par son adhérence dans l'énoncé du théorème 2.3, ainsi que le montre le théorème suivant.

2.5. Théorème. — *Si F est un espace vectoriel topologique métrisable, le convexe C a même intérieur que son adhérence $\overline{C}$.*

Démonstration. — Supposons qu'un point $\bar{y}$ est intérieur à $\overline{C}$; on considère une suite décroissante W_n, $n \geqq 0$, qui constitue un système fondamental de voisinages de 0 dans F et telle que $\bar{y} + 2W_0$ est contenu dans $\overline{C}$.

Nous allons montrer que C contient $\bar{y} + W_0$. Soit y un point de $\bar{y} + W_0$; on pose $y_0 = 2^{-1}\bar{y}$; alors $2(y - y_0)$ appartient à $\overline{C}$; il existe donc des points h_1 de M et z_1 de C qui vérifient

$$\| h_1 - \bar{x} \| \leqq r, \qquad g(h_1) \leqq z_1 \qquad \text{et} \qquad 2(y - y_0) \in z_1 + W_1;$$

On pose $y_1 = y_0 + 2^{-1} z_1 - 2^{-2} \bar{y}$; alors on a les relations suivantes :

$$4(y - y_1) - \bar{y} = 4(y - y_0) - 2 z_1,$$
$$4(y - y_1) \in \bar{y} + 2 W_1.$$

Supposons définis, pour $p \leqq n - 1$, des points h_p de M, z_p de C et y_p de F qui vérifient

$$y_p = y_{p-1} + 2^{-p} z_p - 2^{-p-1} \bar{y}, \qquad \| h_p - \bar{x} \| \leqq r, \qquad g(h_p) \leqq z_p$$

et

$$2^{p+1}(y - y_p) \in \bar{y} + 2 W_p;$$

alors le point $2^n (y - y_{n-1})$ appartient à $\overline{C}$, et il existe des points h_n de M et z_n de C qui vérifient

$$\| h_n - \bar{x} \| \leqq r, \qquad g(h_n) \leqq z_n \qquad \text{et} \qquad 2^n (y - y_{n-1}) \in z_n + W_n;$$

le point $y_n = y_{n-1} + 2^{-n} z_n - 2^{-n-1} \bar{y}$ vérifie

$$2^{n+1}(y - y_n) - \bar{y} = 2[2^n (y - y_{n-1}) - z_n],$$
$$2^{n+1}(y - y_n) \in \bar{y} + 2 W_n.$$

Il résulte de la dernière relation que la suite y_n converge vers y. D'autre part, la suite de Cauchy de M :

$$x_n = \textstyle\sum_{p=1}^{n} 2^{-p} h_p + 2^{-n-1} \bar{x}$$

converge vers un point x de M tel que $\| x - \bar{x} \| \leqq r$, et elle vérifie, pour tout $n \geqq 1$,

$$g(x_n) \leqq \textstyle\sum_{p=1}^{n} 2^{-p} g(h_p) \leqq \sum_{p=1}^{n} 2^{-p} z_p;$$

en outre, il résulte de la définition de la suite y_n, que l'on a, pour tout $n \geqq 1$,

$$y_n = \textstyle\sum_{p=1}^{n} 2^{-p} z_p + 2^{-n-1} \bar{y};$$
$$g(x_n) \leqq y_n - 2^{-n-1} \bar{y};$$

g étant s. c. i., on obtient à la limite $g(x) \leqq y$.

Le point y appartient à C; le théorème est démontré.

3. Application aux conditions nécessaires d'optimalité

3.1. Problème. — *Minimiser $\gamma(x)$ sur l'ensemble des points x de M qui vérifient $\varphi(x) = 0$ et $\psi(x) \leqq 0$.*

M est un convexe fermé d'un espace de Banach; les fonctions γ, φ et ψ sont définies dans M et respectivement à valeurs dans $\mathbf{R}$, dans un espace vectoriel topologique G et dans un espace vectoriel topologique ordonné H; *on suppose que* φ, γ *et* ψ sont approximativement convexes s. c. i. au voisinage d'un point $\bar{x}$ de M, l'espace G étant muni de la relation d'ordre définie par l'égalité.

3.2. NOTATIONS. — L'espace produit $G \times \mathbf{R} \times H$ est muni de l'ordre défini par le cône $\{0\} \times \mathbf{R}_+ \times H_+$; alors la fonction (φ, γ, ψ) est approximativement convexe s. c. i. au voisinage de $\bar{x}$ et, dans l'intersection de M avec une boule de centre $\bar{x}$ et de rayon $r > 0$, sont définies des fonctions l, m et n convexes s. c. i. qui s'annulent en $\bar{x}$ et telles que $\varphi - l$, $\gamma - m$ et $\psi - n$ sont continues et strictement dérivables de dérivées nulles en $\bar{x}$ (1.5).

On désigne par D, l'ensemble des points (y, λ, z) de $G \times \mathbf{R} \times H$ tels qu'il existe un point x de M qui vérifie

$$\| x - \bar{x} \| \leq r, \qquad l(x) = y, \qquad m(x) \leq \lambda \qquad \text{et} \qquad n(x) + \psi(\bar{x}) \leq z.$$

3.3. THÉORÈME. — *Si $\bar{x}$ est une solution optimale locale du problème* 3.1, *alors le point* (0, 0, 0) *n'est pas intérieur à D.*

Démonstration. — Supposons que (0, 0, 0) soit intérieur à D; alors le convexe $C = D + (0, 0, -\psi(\bar{x}))$ est un voisinage de $(0, 0, -\psi(\bar{x}))$, et il en est de même pour un point $(0, -p, -\psi(\bar{x}))$, avec $p > 0$; appliquons le théorème 2.3 en prenant pour S ce point : il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout t de $[0, \varepsilon]$, on peut trouver un point x de M qui vérifie

$$\| x - \bar{x} \| \leq tr, \qquad \varphi(x) = \varphi(\bar{x}) + t.0 = 0,$$
$$\gamma(x) \leq \gamma(\bar{x}) - tp \qquad \text{et} \qquad \psi(x) \leq (1 - t)\,\psi(\bar{x});$$

il en résulte que $\bar{x}$ n'est pas solution optimale locale du problème 3.1. Le théorème est démontré.

3.4. HYPOTHÈSE (régularité faible). — Pour obtenir une condition nécessaire d'optimalité sous une forme qui est classique en dimension finie, nous ferons l'hypothèse suivante :

Si l'intérieur de D est vide, alors D admet un hyperplan d'appui fermé en (0, 0, 0).

Si G et H sont localement convexes, il suffit pour cela que D ait un intérieur non vide relativement au sous-espace fermé qu'il engendre; en particulier, il suffit que D soit de dimension finie.

3.5. THÉORÈME. — *Si $\bar{x}$ est solution optimale locale du problème* 3.1, *et si D vérifie l'hypothèse* 3.4, *alors il existe des formes linéaires continues u sur G, a sur* $\mathbf{R}$ *et v sur H, non toutes nulles, telles que :*

1° *a et v sont des formes linéaires positives.*

2° *On a* $v\,\psi(\bar{x}) = 0$.

3° *Pour tout point* x *de* M *à distance au plus* r *de* $\bar{x}$, *on a*

$$ul(x) + am(x) + vn(x) \geqq 0.$$

Démonstration. — Le convexe D admet un hyperplan d'appui fermé en $(0, 0, 0)$: cela résulte de l'hypothèse 3.4 si l'intérieur de D est vide, et du théorème 3.3 si l'intérieur de D est non vide. Il existe donc une forme linéaire continue non nulle (u, a, v) sur $G\times\mathbf{R}\times H$ telle que, pour tout point (y, λ, z) de D, on a $uy + a\lambda + vz \geqq 0$.

Pour tout point x de M à distance au plus r de $\bar{x}$, tout nombre $\lambda \geqq 0$ et tout point z de H_+, le point de composantes

$$l(x), \qquad m(x) + \lambda, \qquad n(x) + \psi(\bar{x}) + z$$

appartient à D; on a donc

$$ul(x) + am(x) + vn(x) + v\,\psi(\bar{x}) + a\lambda + vz \geqq 0;$$

il en résulte que a et v sont des formes linéaires positives, et que l'on a

$$ul(x) + am(x) + vn(x) + v\,\psi(\bar{x}) \geqq 0.$$

On obtient en particulier, pour $x = \bar{x}$, $v\,\psi(\bar{x}) \geqq 0$; d'autre part, v étant positive et $-\psi(\bar{x})$ appartenant à H_+, on a $v\,\psi(\bar{x}) \leqq 0$. Par conséquent, $v\,\psi(\bar{x})$ est nul, et le théorème est démontré.

3.6. Étude de l'hypothèse de régularité 3.4.

3.6.1. *La condition nécessaire d'optimalité sous la forme du théorème* 3.5 *ne peut pas être obtenue sans hypothèse de régularité.*

Exemple. — Pour $H = \{0\}$, $M = G$ espace de Banach des suites sommables de nombres réels, et des fonctions γ et φ définies pour tout $x = (x_n)$ par

$$\gamma(x) = \textstyle\sum_n x_n \qquad \text{et} \qquad \varphi(x) = \left(\dfrac{x_n}{n^2+1}\right),$$

le point 0 est solution optimale du problème 3.1, mais les conclusions du théorème 3.5 ne sont pas satisfaites.

3.6.2. *Forme équivalente :* On suppose que l, m et n sont définies dans M; alors, dans le théorème 3.5, la conclusion 3° est vérifiée par tous les points de M, car la fonction $ul + am + vm$ est convexe dans M. On désigne par Δ l'ensemble des points (y, λ, z) de $G\times\mathbf{R}\times H$ tels qu'il existe un point x de M qui vérifie

$$l(x) = y, \qquad m(x) \leqq \lambda \qquad \text{et} \qquad n(x) + \psi(\bar{x}) \leqq z.$$

Si D vérifie l'hypothèse 3.4, il en est de même de Δ, car Δ contient D, et Δ est contenu dans le cône de sommet (0, 0, 0) engendré par D. Réciproquement, *si G et H sont métrisables complets, on peut remplacer D par Δ dans l'hypothèse* 3.4 : si l'intérieur de Δ est non vide, il en est de même du cône $\bigcup_{n \geq 1} nD$ qui contient Δ, et aussi d'un des ensembles $n\overline{D}$ car $G \times \mathbf{R} \times H$ est un espace de Baire; il résulte alors du théorème 2.5 que l'intérieur de D est non vide.

3.6.3. *Critères :* On peut trouver des conditions suffisantes simples pour que l'hypothèse 3.4 soit satisfaite. Si l'intérieur du cône positif H_+ est non vide, il suffit que G soit réduit à $\{0\}$ (problème sans liaison), ou que l (A) ait un intérieur non vide pour une partie bornée A de M telle que m et n soient majorées sur A, ou encore, M étant un voisinage de $\bar{x}$ et G étant métrisable complet, que l soit un morphisme strict et que m et n soient continues en $\bar{x}$. On obtient des critères similaires en décomposant ψ quand ψ est à valeurs dans le produit de deux espaces ordonnés dont l'un a un cône positif d'intérieur non vide.

3.6.4. *Cas particulier :* Si certaines composantes de φ sont linéaires continues et certaines composantes de γ sont convexes s. c. i., on peut faire entrer ces liaisons et contraintes dans la définition de M, ce qui réduit la dimension de $G \times \mathbf{R} \times H$ et allège l'hypothèse 3.4 : après l'application du théorème 3.5, on est ramené à la résolution d'un problème de programmation convexe.

3.7. Régularité forte. — On considère l'ensemble convexe B des éléments (y, z) de $G \times H$ tels qu'il existe un point x de M qui vérifie

$$\| x - \bar{x} \| \leq r, \qquad l(x) = y \qquad \text{et} \qquad n(x) + \psi(\bar{x}) \leq z.$$

3.7.1. Hypothèse : *On suppose que D vérifie l'hypothèse* 3.4 *et en plus que B n'admet pas d'hyperplan fermé d'appui en* (0, 0).

Alors, si $\bar{x}$ est solution optimale locale du problème 3.1, *les conclusions du théorème* 3.5 *sont satisfaites avec $a \neq 0$* : si a est nul, la forme linéaire (u, v) définit un hyperplan fermé d'appui en (0, 0) de B.

3.7.2. Critère : *Si M est un voisinage de $\bar{x}$, si G est métrisable complet, et si l'intérieur du cône positif de H est non vide, pour que l'hypothèse* 3.7.1 *soit satisfaite, il suffit que l soit surjective, que m et n soient continues, et qu'il existe un point x_0 de M qui vérifie*

$$l(x_0) = 0 \qquad \textit{et} \qquad n(x_0) + \psi(\bar{x}) \in -H_+^0.$$

Preuve. — Soit $r_0 \leq r$ le rayon d'une boule de centre $\bar{x}$ sur laquelle m est majoré.

On peut se ramener au cas où x_0 appartient à la boule de centre $\bar{x}$ et de rayon (1/2) r_0; d'après la continuité de n, il existe un voisinage $V \times W$

de $(x_0, 0)$ dont tout point (x, z) vérifie

$$n(x) + \psi(\bar{x}) - z \leqq 0 \qquad \text{et} \qquad \| x - \bar{x} \| \leqq r_0;$$

l'image de V par l est un voisinage de 0 dans G car l est surjective d'un espace de Banach sur un espace métrisable complet et l est un morphisme strict ([3], chapitre 1, § 3, théorème 1).

Ainsi B qui contient $l(V) \times W$, est un voisinage de (0, 0) et n'admet pas d'hyperplan d'appui en ce point; en outre, D vérifie l'hypothèse 3.4 car l'intérieur de D est non vide : m est majoré par un nombre b sur la boule de centre $\bar{x}$ et de rayon r_0, et D contient l'ensemble $l(V) \times [b, +\infty[\times W$. Le critère est démontré.

On reconnaît dans ce critère les conditions usuellement posées en dimension finie tant pour la programmation différentiable que pour la programmation convexe ([1], chapitre 3, proposition 2 et chapitre 4, théorème 1) : la surjectivité de l équivaut à l'indépendance linéaire de ses composantes, et l'appartenance de $n(x_0) + \psi(\bar{x})$ à $-H_+^0$ résulte des conditions $n^i(x_0) < 0$ pour les contraintes saturées $(\psi^i(\bar{x}) = 0)$, et $n^i(x_0) \leqq 0$ pour les contraintes non saturées $(\psi^i(\bar{x}) < 0)$.

3.8. Condition nécessaire d'optimalité sans hypothèse de régularité. — Dans le cas où l'adhérence de D est un convexe complet d'un espace normé, l'ensemble des points de la frontière de $\overline{D}$ qui appartiennent à un hyperplan d'appui fermé de $\overline{D}$ est dense dans la frontière de $\overline{D}$ (théorème de Bishop-Phels [2]); on peut alors donner une condition nécessaire d'optimalité, de type approché, sans hypothèse de régularité.

Théorème. — *Dans le cas où G et H sont des espaces de Banach, si $\bar{x}$ est solution optimale locale du problème* 3.1, *alors pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe des formes linéaires continues u sur G, a sur* $\mathbf{R}$ *et v sur H telles que $\| u \| + | a | + \| v \| = 1$ et que :*

1° *a et v sont des formes linéaires positives.*

2° *On $a \; -\varepsilon \leqq v\,\psi(\bar{x}) \leqq 0$.*

3° *Pour tout point x de M à distance au plus r de $\bar{x}$, on a*

$$ul(x) + am(x) + vn(x) \geqq -\varepsilon.$$

Démonstration. — L'adhérence de D est un convexe fermé de l'espace de Banach $G \times \mathbf{R} \times H$. Si l'intérieur de $\overline{D}$ est non vide, il en est de même de l'intérieur de D (théorème 2.5), alors l'hypothèse 3.4 est satisfaite, et le théorème est une conséquence du théorème 3.5.

Si l'intérieur de $\overline{D}$ est vide, le point (0, 0, 0) appartient à la frontière de $\overline{D}$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un point (y_0, λ_0, z_0) de $\overline{D}$, de norme inférieure à ε, tel que $\overline{D}$ admet un hyperplan d'appui fermé en ce point;

il existe donc une forme linéaire continue (u, a, v) sur $G \times \mathbf{R} \times H$, de norme 1, telle que tout point (y, λ, z) de $\overline{D}$ vérifie

$$uy + a\lambda + vz \geqq uy_0 + a\lambda_0 + vz_0.$$

Il en résulte, comme dans le théorème 3.5, que a et v sont des formes linéaires positives et que l'on a pour tout point x de M à distance au plus r de $\bar{x}$:

$$ul(x) + am(x) + vn(x) + v\psi(\bar{x}) \geqq uy_0 + a\lambda_0 + vz_0;$$

on a, d'autre part, en raison du choix de (y_0, λ_0, z_0) et de (u, a, v) :

$$uy_0 + a\lambda_0 + vz_0 \geqq -\varepsilon;$$

on obtient alors, pour $x = \bar{x}$, $v\psi(\bar{x}) \geqq -\varepsilon$; enfin, v étant positive, on a $v\psi(\bar{x}) \leqq 0$, ce qui implique en outre

$$ul(x) + am(x) + vn(x) \geqq -\varepsilon.$$

Le théorème est démontré.

4. Cas de la programmation dynamique en temps continu

Nous étudions ici une condition nécessaire d'optimalité pour des commandes généralisées [7], et nous montrerons ensuite comment procéder dans d'autres cas (§ 5).

Nous dirons qu'une fonction X à valeurs dans un espace de Banach est *absolument continue sur* $[0, T]$ s'il existe une fonction Y intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0, T]$ dont l'intégrale sur $[t_1, t_2]$ est égale à $X(t_2) - X(t_1)$ pour tout intervalle $[t_1, t_2]$ contenu dans $[0, T]$; une telle fonction X est presque partout dérivable de dérivée $Y(t)$ ([15], théorème de Bochner).

4.1. Problème. — *Minimiser* $\gamma(X(T))$ *sur l'ensemble des fonctions* X *absolument continues sur* $[0, T]$ *à valeurs dans un espace de Banach* E *qui vérifient*

$$\varphi_0(X(0)) = 0 \quad \textit{et} \quad \psi_0(X(0)) \leqq 0;$$
$$\varphi_1(X(T)) = 0 \quad \textit{et} \quad \psi_1(X(T)) \leqq 0;$$

et telles qu'il existe une famille $A = (a_u)_{u \in Q}$ *de fonctions numériques positives mesurables sur* $[0, T]$ *qui vérifie les trois relations suivantes :*

$$\Sigma_{u \in Q}\, a_u(t) = 1 \quad \textit{presque partout;}$$

$$\Sigma_{u \in Q} \int_0^T a_u(t)\, \| f(X(t), u, t) \|\, dt < +\infty;$$

$$\frac{dX(t)}{dt} = \Sigma_{u \in Q}\, a_u(t)\, f(X(t), u, t) \quad \textit{presque partout.}$$

Les fonctions γ, φ_0 et φ_1, ψ_0 et ψ_1 sont définies dans E et à valeurs respectivement dans $\mathbf{R}$, dans des espaces vectoriels topologiques G_0 et G_1, dans des espaces vectoriels topologiques ordonnés H_0 et H_1.

Q est un ensemble donné (ensemble des commandes originelles); pour tout élément u de Q, $f(., u, .)$ est une fonction définie dans $E \times [0, T]$ et à valeurs dans E, telle que, pour toute fonction absolument continue X, $f(X(t), u, t)$ est mesurable en t par rapport à la mesure de Lebesgue. Les conditions posées entraînent que, pour presque tout t, $dX(t)/dt$ appartient à l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble des $f(X(t), u, t)$ pour $u \in Q$.

4.2. Mise sous forme d'un problème de programmation statique. — On considère une fonction continue presque partout dérivable $\overline{X}$ qui vérifie toutes les conditions du problème 4.1 pour une famille $\overline{A} = (\overline{a}_u)_{u \in Q}$; et on se fixe un nombre $h > 0$.

4.2.1. *Définition des coefficients :* Pour toute commande u de Q, on choisit une fonction mesurable $k_u(t)$ à valeurs dans $[0, +\infty]$ telle que, pour tout t et tout couple (x, y) de points distincts appartenant à la boule B_t de centre $\overline{X}(t)$ et de rayon h, $k_u(t)$ majore les quantités

$$\| f(\overline{X}(t), u, t) \|, \qquad \frac{\| f(x, u, t) - f(y, u, t) \|}{\| x - y \|} \qquad \text{et} \qquad 1.$$

Si E est séparable et si $f(x, u, t)$ est continue par rapport à x pour presque tout t, on peut prendre pour $k_u(t)$ la borne supérieure de ces quantités.

Pour toute fonction u et tout point t tels que $f(x, u, t)$ est dérivable par rapport à x dans la boule B_t, il est équivalent de dire que $k_u(t)$ majore les quantités

$$\| f(\overline{X}(t), u, t) \|, \qquad \| f'_x(x, u, t) \| \qquad \text{et} \qquad 1$$

pour tout point x de B_t.

Il résulte de la définition de $k_u(t)$ que l'on a, pour tout u de Q, tout t de $[0, T]$, et toute fonction X telle que $X(t) \in B_t$:

$$\| f(X(t), u, t) \| \leq (1 + h)\, k_u(t).$$

4.2.2. *Espace des commandes et espace des solutions :* On désigne par $\mathcal{D}$ l'espace de Banach des fonctions absolument continues sur $[0, T]$ et à valeurs dans E, pour la norme

$$\| X \|_{\mathcal{D}} = \| X(0) \|_E + \left\| \frac{dX(t)}{dt} \right\|_{L^1_E} = \| X(0) \| + \int_0^T \left\| \frac{dX(t)}{dt} \right\| dt.$$

Pour toute famille $A = (a_u)_{u \in Q}$ de fonctions numériques mesurables, on pose

$$\| A \| = \Sigma_{u \in Q} \int_0^T k_u(t) \, | a_u(t) | \, dt.$$

Sur l'ensemble $\mathcal{M}$ des familles A qui vérifient $\| A \| < +\infty$, $\| A \|$ définit une norme pour laquelle $\mathcal{M}$ est un espace de Banach.

Alors, pour tout A de $\mathcal{M}$ et tout X de la boule de $\mathcal{O}$ de centre $\overline{X}$ et de rayon h, la fonction

$$F(X, A)(t) = \Sigma_{u \in Q} a_u(t) f(X(t), u, t)$$

est définie et à valeurs dans L_E^1, car on a

$$\| F(X, A)(t) \| \leq \Sigma_{u \in Q} | a_u(t) | (1 + h) k_u(t),$$
$$\| F(X, A) \|_{L_E^1} \leq (1 + h) \| A \|.$$

4.2.3. Théorème : *Si $\overline{A}$ appartient à $\mathcal{M}$ et si la fonction $F(X, \overline{A})$ est strictement dérivable par rapport à X au point $\overline{X}$, alors la fonction $F(X, A)$ est strictement dérivable au point $(\overline{X}, \overline{A})$ de dérivée*

$$F'(\overline{X}, \overline{A}).(X, A) = F'_X(\overline{X}, \overline{A}).X + F(\overline{X}, A).$$

Démonstration. — La fonction $F(X, A)$ étant linéaire par rapport à A, on a la relation suivante :

$$\begin{aligned} &F(X, A) - F(Y, B) - F'_X(\overline{X}, \overline{A}).(X - Y) - F(\overline{X}, A - B) \\ &\quad = F(X, \overline{A}) - F(Y, \overline{A}) - F'_X(\overline{X}, \overline{A}).(X - Y) \\ &\qquad + F(X, A - \overline{A}) - F(Y, A - \overline{A}) + F(Y, A - B) - F(\overline{X}, A - B); \end{aligned}$$

on a, par hypothèse,

$$\| F(X, \overline{A}) - F(Y, \overline{A}) - F'_X(\overline{X}, \overline{A}).(X - Y) \| = \| X - Y \| \, \varepsilon(X, Y),$$

où $\varepsilon(X, Y)$ tend vers zéro quand (X, Y) tend vers $(\overline{X}, \overline{X})$; on a d'autre part :

$$\begin{aligned} &\| F(X, A - \overline{A})(t) - F(Y, A - \overline{A})(t) \| \\ &\quad \leq \Sigma_{u \in Q} | a_u(t) - \bar{a}_u(t) | . \| f(X(t), u, t) - f(Y(t), u, t) \| \\ &\quad \leq \Sigma_{u \in Q} | a_u(t) - \bar{a}_u(t) | \, k_u(t) \, \| X(t) - Y(t) \|; \end{aligned}$$
$$\| F(X, A - \overline{A}) - F(Y, A - \overline{A}) \|_{L_E^1} \leq \| A - \overline{A} \| . \| X - Y \|.$$

On établit de même que l'on a

$$\| F(Y, A - B) - F(\overline{X}, A - B) \|_{L_E^1} \leq \| A - B \| . \| Y - \overline{X} \|.$$

On obtient alors

$$\| F(X, A) - F(Y, B) - F'_X(\overline{X}, \overline{A}).(X - Y) - F(\overline{X}, A - B) \|$$
$$\leqq (\| X - Y \| + \| A - B \|)(\varepsilon(X, Y) + \| A - \overline{A} \| + \| Y - \overline{X} \|),$$

et $(\varepsilon(X, Y) + \| A - \overline{A} \| + \| Y - \overline{X} \|)$ tend vers zéro quand (X, A, Y, B) tend vers $(\overline{X}, \overline{A}, \overline{X}, \overline{A})$. Le théorème est démontré.

4.2.4. *Forme statique du problème* 4.1 : On désigne par N l'ensemble convexe fermé de l'espace $\mathfrak{N}$ composé des points A qui vérifient :

$$\Sigma_{u \in Q}\, a_u(t) = 1 \quad \text{presque partout,}$$
$$\text{et, pour tout } u \text{ de } Q, \quad a_u(t) \geqq 0 \quad \text{presque partout.}$$

Si $\overline{X}$ est une solution optimale du problème 4.1 qui correspond à une commande $\overline{A}$ de N, alors $(\overline{X}, \overline{A})$ est une solution optimale locale du problème suivant :

Minimiser $\gamma(X(T))$ *sur l'ensemble des points* (X, A) *de* $\mathcal{O} \times N$ *qui vérifient*

$$\varphi_0(X(0)) = 0 \quad et \quad \psi_0(X(0)) \leqq 0;$$
$$\varphi_1(X(T)) = 0 \quad et \quad \psi_1(X(T)) \leqq 0;$$
$$F(X, A) - \frac{dX}{dt} = 0.$$

Pour appliquer le théorème 3.5, nous ferons les hypothèses suivantes.

4.3. Hypothèses. — On munit les espaces G_0 et G_1 chacun de l'ordre défini par l'égalité.

4.3.1. *On suppose que* φ_0 *et* ψ_0 (*respectivement* φ_1, ψ_1 *et* γ) *sont approximativement convexes s. c. i. au voisinage de* $\overline{X}(0)$ [*respectivement de* $\overline{X}(T)$].

On désigne par l_0 et n_0 (respectivement l_1, n_1 et m) des fonctions convexes s. c. i. nulles en $\overline{X}(0)$ [respectivement en $\overline{X}(T)$] dont les différences respectives avec ces fonctions sont strictement dérivables de dérivée nulle.

On a pu choisir $h > 0$ de manière à ce que ces fonctions soient définies dans la boule de centre $\overline{X}(0)$ [respectivement $\overline{X}(T)$] et de rayon h.

4.3.2. *On suppose que* $\overline{A}$ *appartient à* N *et que la fonction* $F(X, \overline{A})$ *de* X *est strictement dérivable en* $\overline{X}$ *de dérivée*

$$(F'_X(\overline{X}, \overline{A}).X)(t) = \Sigma_{u \in Q}\, \bar{a}_u(t) f'_x(\overline{X}(t), u, t).X(t).$$

Cette hypothèse porte exclusivement sur la commande optimale $\overline{A}$; elle est plus faible que les hypothèses usuellement faites, car elle est une conséquence des deux conditions suivantes, qui sont plus faibles par exemple que les hypothèses de Mc Shane dans [9] [hypothèse (4.2) du théorème 4.7].

1° Pour tout u de Q et tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un compact K contenu dans $[0, T]$ de mesure supérieure à $T - \varepsilon$ tel que $f'_x(x, u, t)$ est continue en $\overline{X}(t)$ uniformément quand t varie dans K.

2° Il existe une fonction g à valeurs dans $[0, +\infty]$ telle que $\sum_{u \in Q} \bar{a}_u(t)\, g(u, t)$ est intégrable sur $[0, T]$ et telle que l'on a

$$\| f'_x(x, u, t) \| \leq g(u, t)$$

pour tout u de Q, tout t de $[0, T]$ et tout x de la boule B_t de centre $\overline{X}(t)$ et de rayon h.

Preuve. — La fonction r, définie par

$$r(t, y, x) = \sum_{u \in Q} \bar{a}_u(t) \left[f(y, u, t) - f(x, u, t) - f'_x(\overline{X}(t), u, t).(y - x) \right],$$

vérifie, pour tout t et tout couple (x, y) de points de B_t,

$$\| r(t, y, x) \| \leq 2 \sum_{u \in Q} \bar{a}_u(t)\, g(u, t) \, \| y - x \|.$$

Soit un nombre $\varepsilon > 0$; il existe un sous-ensemble fini S de Q, tel que

$$\int_0^T 2 \sum_{u \in Q - S} \bar{a}_u(t)\, g(u, t)\, dt \leq \varepsilon;$$

il existe un compact K de $[0, T]$ tel que la condition 1° est satisfaite pour chacune des commandes u de S, et tel que

$$\int_{[0, T] - K} \sum_{u \in Q} \bar{a}_u(t)\, g(u, t)\, dt \leq \varepsilon.$$

Il existe donc un nombre $r > 0$, ne dépendant que du choix de ε, tel que, pour tout u de S et tout t de K, l'on a

$$\| x - \overline{X}(t) \| \leq 4r \quad \Rightarrow \quad \| f'_x(x, u, t) - f'_x(\overline{X}(t), u, t) \| \leq \varepsilon.$$

Pour tout u de S, tout t de K, et tout x qui vérifie $\| x - \overline{X}(t) \| < 2r$, la fonction de z :

$$e(z) = f(x + z, u, t) - f'_x(\overline{X}(t), u, t).z$$

est dérivable pour $\| z \| \leq 2r$, de dérivée

$$e'(z) = f'_x(x + z, u, t) - f'_x(\overline{X}(t), u, t).$$

On a donc les relations suivantes, pour $\| z \| \leqq 2r$,

$$\| e'(z) \| \leqq \varepsilon \quad \text{et} \quad \| e(z) - e(0) \| \leqq \varepsilon \| z \|.$$

Ainsi, pour tout couple (X, Y) de fonctions de la boule de $\mathcal{D}$, de centre $\overline{X}$ et de rayon r, on a, pour tout u de S et tout t de K,

$$\| f(Y(t), u, t) - f(X(t), u, t) - f'_x(\overline{X}(t), u, t).(Y(t) - X(t)) \| \leqq \varepsilon \| Y(t) - X(t) \|.$$

On obtient alors

$$\int_K \| r(t, Y(t), X(t)) \| dt \leqq \int_K \Sigma_{u \in S} \bar{a}_u(t) \varepsilon \| Y(t) - X(t) \| dt + \int_K 2 \Sigma_{u \in Q-S} \bar{a}_u(t) g(u, t) \| Y(t) - X(t) \| dt;$$

$$\int_{[0, T]-K} \| r(t, Y(t), X(t)) \| dt \leqq \int_{[0, T]-K} 2 \Sigma_{u \in Q} \bar{a}_u(t) g(u, t) \| Y(t) - X(t) \| dt;$$

$$\int_0^T \| r(t, Y(t), X(t)) \| dt \leqq \| Y - X \| (T + 3) \varepsilon.$$

4.3.3. *On suppose que l'hypothèse* 3.4 *est vérifiée par l'ensemble* $\mathbb{D}$ *des points*

$$(y_0, z_0, y_1, z_1, \lambda, Y) \in G_0 \times H_0 \times G_1 \times H_1 \times \mathbf{R} \times L^1_E,$$

tels qu'il existe un point (X, A) *de* $\mathcal{D} \times N$ *qui vérifie*

$$\| X - \overline{X} \| \leqq h \quad et \quad \| A - \overline{A} \| \leqq h; \quad m(X(T)) \leqq \lambda;$$
$$l_0(X(0)) = y_0 \quad et \quad n_0(X(0)) + \psi_0(\overline{X}(0)) \leqq z_0;$$
$$l_1(X(T)) = y_1 \quad et \quad n_1(X(T)) + \psi_1(\overline{X}(T)) \leqq z_1;$$
$$F'(\overline{X}, \overline{A}).(X - \overline{X}, A - \overline{A}) - \frac{dX}{dt} + \frac{d\overline{X}}{dt} = Y.$$

La dernière relation peut s'écrire :

$$\frac{d(X - \overline{X})(t)}{dt} = [\Sigma_{u \in Q} \bar{a}_u(t) f'_x(\overline{X}(t), u, t)].(X - \overline{X})(t) + F(\overline{X}, A - \overline{A})(t) - Y(t).$$

Cette équation linéaire admet, pour $(X - \overline{X})(T)$ donné, une solution unique $X - \overline{X}$ qui est une fonction linéaire continue de

$(X(T)-\overline{X}(T), A-\overline{A}, Y)$; on pose

$$X(0)=p(X(T), A)+q(Y),$$

p et q étant des fonctions linéaires affines continues telles que

$$p(\overline{X}(T), \overline{A})=q(0)=\frac{1}{2}\overline{X}(0).$$

On peut alors remplacer les conditions de définition des points de D par les suivantes :

Il existe un point (x, A) de $E\times N$ qui vérifie avec Y :

$$\|x-\overline{X}(T)\|\leqq r \quad \text{et} \quad \|A-\overline{A}\|\leqq r; \quad \|Y\|\leqq r;$$
$$m(x)\leqq\lambda; \quad l_1(x)=y_1 \quad \text{et} \quad n_1(x)+\psi_1(\overline{X}(T))\leqq z_1;$$
$$l_0(p(x, A)+q(Y))=y_0 \quad \text{et} \quad n_0(p(x, A)+q(Y))+\psi_0(\overline{X}(0))\leqq z_0.$$

CRITÈRE 1. — *Si n_0 est majoré dans un voisinage de $\overline{X}(0)$ et si l'intérieur du cône positif de H_0 est non vide, pour que l'hypothèse* 3.4 *soit vérifiée par D, il suffit qu'elle le soit par l'ensemble D_0+D_1 :*

D_0 est l'ensemble des $(y_0, z_0, y_1, z_1, \lambda, 0)\in G_0\times H_0\times G_1\times H_1\times\mathbf{R}\times L_E^1$ *tels qu'il existe $(x, A)\in E\times N$ qui vérifie*

$$\|x-\overline{X}(T)\|\leqq r \quad \textit{et} \quad \|A-\overline{A}\|\leqq r; \quad m(x)\leqq\lambda;$$
$$l_1(x)=y_1 \quad \textit{et} \quad n_1(x)+\psi_1(\overline{X}(T))\leqq z_1; \quad \frac{1}{2}l_0(2p(x, A))=y_0;$$

D_1 est l'ensemble des $(y_0, 0, 0, 0, 0, Y)\in G_0\times H_0\times G_1\times H_1\times\mathbf{R}\times L_E^1$ *qui vérifient*

$$\|Y\|\leqq r \quad \textit{et} \quad \frac{1}{2}l_0(2q(Y))=y_0.$$

Preuve. — Le critère résulte de ce que D est contenu dans D_0+D_1, et que, si l'intérieur de D_0+D_1 est non vide, il en est de même de D : si $P_1\times P_2\times P_3\times P_4\times P_5\times P_6$ est un ouvert élémentaire contenu dans D_0+D_1, et si α majore n_0 sur la boule de centre $\overline{X}(0)$ et de rayon h, alors D contient l'ouvert élémentaire obtenu en remplaçant P_2 par $\alpha+\psi_0(\overline{X}(0))+H_0^{0+}$.

CRITÈRE 2. — *Si en plus des hypothèses du critère* 1, *l_0 est continue, alors pour que l'hypothèse* 3.4 *soit vérifiée par D, il suffit qu'elle le soit par la projection de D_0 sur $G_0\times H_0\times G_1\times H_1\times\mathbf{R}$.*

Preuve. — Supposons que la projection de D_0 contient un ouvert élémentaire $P_1\times P_2\times P_3\times P_4\times P_5$; et soit $2\rho>0$ le rayon d'une boule de centre $\bar{y}_0$ contenue dans P_1; il existe un nombre $s > 0$ tel que

$$\| Y \| < s \quad \Rightarrow \quad \left\| \frac{1}{2} l_0 (2 q (Y)) \right\| < \rho ;$$

alors $D_0 + D_1$ contient $P'_1 \times P_2 \times P_3 \times P_4 \times P_5 \times P_6$, où P'_1 est la boule de centre $\bar{y}_0$ et de rayon ρ, et P_6 est la boule de centre 0 et de rayon s : l'intérieur de $D_0 + D_1$ est non vide.

Supposons que la projection de D_0 a un intérieur vide; alors, par hypothèse, cette projection admet un hyperplan fermé d'appui en 0 : pour tout point $(y_0, z_0, y_1, z_1, \lambda, 0)$ de D_0, on a

$$u_0 y_0 + v_0 z_0 + u_1 z_1 + v_1 z_1 + a \lambda \geqq 0;$$

d'autre part, tout point $(y_0, 0, 0, 0, 0, Y)$ de D_1 vérifie

$$u_0 y_0 - u_0 \left(\frac{1}{2} l_0 (2 q (Y)) \right) = 0;$$

on obtient donc, pour tout point de $D_0 + D_1$,

$$u_0 y_0 + v_0 z_0 + u_1 y_1 + v_1 z_1 + a \lambda - u_0 \left(\frac{1}{2} l_0 (2 q (Y)) \right) \geqq 0,$$

ce qui définit un hyperplan d'appui fermé de $D_0 + D_1$ en 0. Par conséquent, $D_0 + D_1$ vérifie l'hypothèse 3.4, et il en est de même pour D (critère 1).

Remarque. — L'hypothèse 4.3.3 est donc satisfaite si les espaces d'arrivée des liaisons et contraintes sont *de dimension finie.* Nous avons choisi d'exprimer D en fonction de l'état final, car les hypothèses des critères sont trivialement vérifiées si l'état initial est fixé; on peut aussi exprimer D en fonction de l'état initial : on obtient alors des critères analogues.

4.4. Théorème. — *Sous les hypothèses* 4.3.1, 4.3.2 *et* 4.3.3, *si* $\overline{X}$ *est une solution optimale du problème* 4.1, *alors il existe des formes linéaires continues, non toutes nulles,* u_0 *sur* G_0, u_1 *sur* G_1, v_0 *sur* H_0, v_1 *sur* H_1 *et* a *sur* $\mathbf{R}$, *et il existe une fonction continue* $P(t)$ *à valeurs dans le dual de E telles que :*

1° v_0, v_1 *et* a *sont des formes linéaires positives.*

2° *On a* $v_0 \psi_0 (\overline{X}(0)) = 0$ *et* $v_1 \psi_1 (\overline{X}(T)) = 0$.

3° $P(t)$ *est solution de l'équation*

$$P(t) = P(0) - \int_0^t P(s) . \textstyle\sum_{u \in Q} \bar{a}_u (s) f'_x (\overline{X}(s), u, s) \, ds$$

pour tout t *de* $[0, T]$.

4° — *$P(0)$ est un sous-gradient en $\overline{X}(0)$ de $u_0 l_0 + v_0 n_0$, et $P(T)$ est un sous-gradient en $\overline{X}(T)$ de $u_1 l_1 + v_1 n_1 + am$.*

5° *On a, pour toute commande u de Q, et pour tout presque tout t tel que $k_u(t)$ est fini,*

$$P(t).[\Sigma_{u \in Q} \bar{a}_u(t) f(\overline{X}(t), u, t)] \leqq P(t).f(\overline{X}(t), u, t).$$

Démonstration. — Il résulte du théorème 3.5 qu'il existe des formes u_0, u_1, v_0, v_1, a et P, non toutes nulles, P étant une forme linéaire continue sur L^1_E, qui vérifient les conclusions 1° et 2° du théorème ainsi que la propriété suivante :

Pour tout $(X, A) \in \mathcal{O} \times N$ tel que $\| X - \overline{X} \| \leqq h$ et $\| A - \overline{A} \| \leqq h$, on a

(i) $u_0 l_0(X(0)) + v_0 n_0(X(0)) + u_1 l_1(X(T)) + am(X(T))$

$$+ v_1 n_1(X(T)) + \left\langle P,\, F'(\overline{X}, \overline{A}).(X - \overline{X}, A - \overline{A}) - \frac{dX}{dt} + \frac{d\overline{X}}{dt} \right\rangle \geqq 0.$$

On peut identifier P à un élément de $L^\infty_{E'_s}$ ([5], § 2, proposition 10) sans supposer E séparable [8], et, pour toute fonction Y de L^1_E, on a

$$\langle P, Y \rangle = \int_0^T P(t).Y(t)\, dt.$$

On définit les fonctions $L(t)$ et $R(t)$ en posant, pour tout y de E,

$$L(t) = \Sigma_{u \in Q} \bar{a}_u(t) f'_x(\overline{X}(t), u, t) \qquad \text{et} \qquad R(t).y = \int_0^t P(s).L(s).y\, ds;$$

considérons une fonction Y de L^1_E de norme inférieure à h et qui vérifie $\int_0^T Y(t)\, dt = 0$; on pose

$$Z(t) = \int_0^t Y(s)\, ds \qquad \text{et} \qquad X(t) = \overline{X}(t) + Z(t);$$

cette fonction X de $\mathcal{O}$ vérifie

$$\| X - \overline{X} \| \leqq h, \qquad X(0) = \overline{X}(0) \qquad \text{et} \qquad X(T) = \overline{X}(T);$$

pour $A = \overline{A}$ et pour cette fonction X, l'inégalité (i) s'écrit :

$$\int_0^T P(t).[L(t).Z(t) - Y(t)]\, dt \geqq 0.$$

D'autre part, la fonction $R(t).Z(t)$ est une fonction numérique absolument continue qui est donc une primitive de sa dérivée

$$P(t).L(t).Z(t) + R(t).Y(t);$$

il en résulte que l'on a

$$\int_0^T P(t).L(t).Z(t)\,dt = [R(t).Z(t)]_0^T - \int_0^T R(t).Y(t)\,dt;$$

$$\int_0^T [-R(t) - P(t)].Y(t)\,dt \geqq 0.$$

Pour tout Y de L_E^1 qui vérifie $\int_0^T Y(t)\,dt = 0$, on a

$$\int_0^T (R(t) + P(t)).Y(t)\,dt = 0;$$

par conséquent $R(t) + P(t)$ est presque partout constant, et en modifiant $P(t)$ sur un ensemble négligeable, on obtient

$$P(t) = -\int_0^t P(s).L(s)\,ds + P(0).$$

En effectuant l'intégration par parties pour la fonction $X - \overline{X}$, on a de la même manière,

$$\int_0^T P(t).L(t).(X(t) - \overline{X}(t))\,dt$$
$$= (-P(T) + P(0)).(X(T) - \overline{X}(T))$$
$$-\int_0^T (-P(t) + P(0)).\left(\frac{dX(t)}{dt} - \frac{d\overline{X}(t)}{dt}\right)dt;$$

on obtient alors successivement avec la relation (i) :

pour $A = \overline{A}$, $X(T) = \overline{X}(T)$, $\| x - \overline{X}(0) \| < h$ et $X(0) = x$:

$$u_0\, l_0(x) + v_0\, n_0(x) + P(0).(x - \overline{X}(0)) \geqq 0;$$

pour $A = \overline{A}$, $X(0) = \overline{X}(0)$, $\| x - \overline{X}(T) \| < h$ et $X(T) = x$:

$$u_1\, l_1(x) + v_1\, n_1(x) + am(x) - P(T).(x - \overline{X}(T)) \geqq 0;$$

pour $X(0) = \overline{X}(0)$, $X(T) = \overline{X}(T)$, $A \in N$ et $\| A - \overline{A} \| < h$:

$$\int_0^T P(t).F(\overline{X}, A - \overline{A})(t)\,dt \geqq 0;$$

et comme on peut modifier A pour le faire coïncider avec $\overline{A}$ sur tout sous-ensemble mesurable de $[0, T]$, on a

$$P(t).F(\overline{X}, A - \overline{A})(t) \geqq 0 \quad \text{presque partout.}$$

Si la conclusion 5° du théorème n'était pas satisfaite, on aurait pour une commande u de Q et tout point t d'un ensemble non négligeable où $k_u(t)$ est fini :

$$P(t).F(\overline{X}, A)(t) > P(t).f(\overline{X}(t), u, t);$$

il en serait de même pour tout point t d'un compact K non négligeable, où $k_u(t)$ est continue; le point A qui coïncide avec $\overline{A}$ sur le complémentaire de K, et qui est défini par $a_u(t) = 1$ sur K, est un point de N qui ne vérifierait pas la relation obtenue. Le théorème est entièrement démontré.

4.5. Conditions de régularité. — Outre l'hypothèse 4.3.3 (qui est toujours satisfaite pour des liaisons et contraintes à valeurs dans des espaces de dimension finie), pour que la conclusion 5° du théorème 4.4 ne soit pas triviale, c'est-à-dire que P ne soit pas identiquement nul, il suffit que l'on ait les deux propriétés suivantes :

4.5.1. *Si* 0 *est un sous-gradient en* $\overline{X}(0)$ *de* $u_0 l_0 + v_0 n_0$ *pour des formes linéaires continues* u_0 *sur* G_0 *et* v_0 *sur* H_0 *telles que* v_0 *est positive, et on a* $v_0 \psi_0(\overline{X}(0)) = 0$, *alors nécessairement* u_0 *et* v_0 *sont nulles.*

4.5.2. *Si* 0 *est un sous-gradient en* $\overline{X}(T)$ *de* $u_1 l_1 + v_1 n_1 + am$ *pour des formes linéaires continues* u_1 *sur* G_1, v_1 *sur* H_1 *et* a *sur* $\mathbf{R}$ *telles que* a *et* v_1 *sont positives, et on a* $v_1 \psi_1(\overline{X}(T)) = 0$, *alors nécessairement* u_1, v_1 *et* a *sont nulles.*

Il résulte de ces hypothèses et de la conclusion 4° du théorème 4.4 que, si P était identiquement nul, toutes les formes linéaires u_0, v_0, u_1, v_1 et a seraient nulles, ce qui est exclu.

Critère. — *Si l'intérieur du cône positif de* H_0 (*respectivement* H_1) *est non vide, pour que l'hypothèse* 4.5.1 (4.5.2) *soit vérifiée il suffit que* $l_0(E)$ *soit partout dense dans* G_0 [*respectivement* $l_1(E)$ *dans* G_1] *et qu'il existe un point* x_0 *de* E *qui vérifie*

$$l_0(x_0) = 0 \qquad \text{et} \qquad n_0(x_0) + \psi_0(\overline{X}(0)) \in - H_0^{0+}.$$

$$\left[\text{Respectivement } l_1(x_0) = 0,\ m(x_0) < 0 \text{ et } n_1(x_0) + \psi_1(\overline{X}(T)) \in - H_1^{0+}.\right]$$

Preuve. — On suppose que 0 est un sous-gradient en $\overline{X}(0)$ de $u_0 l_0 + v_0 n_0$, que v_0 est positive, et que l'on a $v_0 \psi_0 (\overline{X}(0)) = 0$; le point

$$y_0 = n_0(x_0) + \psi_0(\overline{X}(0))$$

de $-H_0^{0+}$ vérifie $v_0 y_0 \leqq 0$ et $v_0 y_0 \geqq 0$, soit $v_0 y_0 = 0$; si v_0 était non nulle, le demi-espace $\{y; v_0 y > 0\}$ rencontrerait tout voisinage de y_0, ce qui contredirait l'appartenance de y_0 à $-H_0^{0+}$; donc v_0 est nulle et u_0 qui est à valeurs positives ou nulles pour tout point de $l_0(E)$ est nulle également.

On démontre de manière identique le critère pour l'hypothèse 4.5.2.

Remarque. — Dans le cas où G_0 et H_0 sont de dimension finie, le critère exprime des conditions du type de celles de la programmation statique : indépendance linéaire des dérivées des liaisons et existence d'un point x_0 tel que $l_0(x_0) = 0$ et $n_0^i(x_0) < 0$ pour chaque contrainte saturée.

4.6. Cas de liaisons et contraintes entre l'état et la commande.

4.6.1. *Considérons le problème obtenu en adjoignant aux conditions du problème* 4.1 *les deux relations suivantes :*

$$\Sigma_{u \in Q}\, a_u(t)\, g(X(t), u, t) = 0 \quad \textit{presque partout;}$$
$$\Sigma_{u \in Q}\, a_u(t)\, h(X(t), u, t) \leqq 0 \quad \textit{presque partout.}$$

Les fonctions g et h sont respectivement à valeurs dans un espace de Banach F_1 et dans un espace de Banach ordonné F_2; on définit les fonctions à valeurs respectivement dans $L^1_{F_1}$ et $L^1_{F_2}$:

$$G(X, A)(t) = \Sigma_{u \in Q}\, a_u(t)\, g(X(t), u, t),$$
$$H(X, A)(t) = \Sigma_{u \in Q}\, a_u(t)\, h(X(t), u, t),$$

en faisant porter la définition des coefficients k_u de 4.2.1 sur la fonction (f, g, h); alors si chacune des fonctions F, G et H vérifie l'hypothèse 4.3.2, la fonction (F, G, H) est strictement dérivable en $(\overline{X}, \overline{A})$ de dérivée

$$(F, G, H)(\overline{X}, A) + (F'_X, G'_X, H'_X)(\overline{X}, \overline{A}).X.$$

4.6.2. *L'étude de la condition nécessaire d'optimalité du problème ainsi posé* est rigoureusement la même que celle qui est faite dans le théorème 4.4 : on ajoute au premier terme de l'inégalité (i) la quantité

$$\langle Q, G'(\overline{X}, \overline{A}).(X - \overline{X}, A - \overline{A})\rangle + \langle R, H'(\overline{X}, \overline{A}).(X - \overline{X}, A - \overline{A})\rangle$$

pour des formes linéaires continues Q sur $L^1_{F_1}$ et R sur $L^1_{F_2}$ telles que R est positive et $\langle R, H(\overline{X}, \overline{A})\rangle = 0$; on effectue la même intégration par parties sur la fonction $S(t).Z(t)$, où on a posé

$$S(t).y = \Sigma_{u\in Q}\,\bar{a}_u(t)\big[P(t).f'_x(\overline{X}(t), u, t) + Q(t).g'_x(\overline{X}(t), u, t) + R(t).h'_x(\overline{X}(t), u, t)\big].y;$$

il en résulte que $P(t)$ est solution de l'équation $dP(t)/dt = -S(t)$; l'intégration par parties de $S(t).(X(t) - \overline{X}(t))$ donne les mêmes conditions sur $P(0)$ et $P(T)$, ainsi que la relation suivante :

$$P(t).F(\overline{X}, A - \overline{A})(t) + Q(t).G(\overline{X}, A - \overline{A})(t) + R(t).H(\overline{X}, A - \overline{A})(t) \geqq 0 \quad \text{presque partout.}$$

La dernière relation obtenue est une propriété plus précise que celle qu'on obtient généralement et qui est limitée aux paramètres A qui vérifient $G(\overline{X}, A) = 0$ et $H(\overline{X}, A) \leqq 0$ ([12] et [14]).

4.6.3. *Hypothèse de régularité :* La seule difficulté pour appliquer le théorème qu'on obtient ainsi est la vérification de l'hypothèse de régularité 4.3.3 qui prend alors la forme suivante : *On suppose que l'hypothèse* 3.4 *est vérifiée par l'ensemble D des points*

$$(y_0, z_0, y_1, z_1, \lambda, Y, Z_1, Z_2) \in G_0 \times H_0 \times G_1 \times H_1 \times \mathbf{R} \times L^1_E \times L^1_{F_1} \times L^1_{F_2}$$

tels qu'il existe un point (X, A) *de* $\mathcal{D} \times N$ *qui vérifie*

$$\| X - \overline{X} \| \leqq h \quad \text{et} \quad \| A - \overline{A} \| \leqq h; \quad m(X(T)) \leqq \lambda;$$

$$l_0(X(0)) = y_0 \quad \text{et} \quad n_0(X(0)) + \psi_0(\overline{X}(0)) \leqq z_0;$$

$$l_1(X(T)) = y_1 \quad \text{et} \quad n_1(X(T)) + \psi_1(\overline{X}(T)) \leqq z_1;$$

$$F'(\overline{X}, \overline{A}).(X - \overline{X}, A - \overline{A}) - \frac{dX}{dt} + \frac{d\overline{X}}{dt} = Y;$$

$$G'(\overline{X}, \overline{A}).(X - \overline{X}, A - \overline{A}) = Z_1$$

et

$$H'(\overline{X}, \overline{A}).(X - \overline{X}, A - \overline{A}) + H(\overline{X}, \overline{A}) \leqq Z_2.$$

On peut encore résoudre l'équation différentielle en X par rapport à $X(T)$, A et Y et on obtient :

$$X - \overline{X} = p(X(T), A) + q(Y)$$

pour des fonctions linéaires affines continues p et q telles que

$$p(\overline{X}(T), \overline{A}) = 0 = q(0).$$

Alors les critères 1 *et* 2 *de* 4.3.3 *sont valables pour les ensembles* D_0 *et* D_1 *définis comme suit :*

D_0 est l'ensemble des $(y_0, z_0, y_1, z_1, \lambda, 0, Z_1, Z_2)$ *tels qu'il existe un point* (x, A) *de* $E \times N$ *qui vérifie*

$$\| x - \overline{X}(T) \| \leqq r \quad \text{et} \quad \| A - \overline{A} \| \leqq r; \quad m(x) \leqq \lambda;$$
$$l_1(x) = y_1 \quad \text{et} \quad n_1(x) + \psi_1(\overline{X}(T)) \leqq z_1;$$
$$\frac{1}{2} l_0 (\overline{X}(0) + 2\, p(x, A)(0)) = y_0;$$
$$G'_X(\overline{X}, \overline{A}).p(x, A) + G(\overline{X}, A) = Z_1;$$
$$H'_X(\overline{X}, \overline{A}).p(x, A) + H(\overline{X}, A) \leqq Z_2;$$

D_1 est l'ensemble des $(y_0, 0, 0, 0, 0, Y, Z_1, Z_2)$ *qui vérifient*

$$\| Y \| \leqq r; \quad \frac{1}{2} l_0 (\overline{X}(0) + 2\, q(Y)(0)) = y_0;$$
$$G'_X(\overline{X}, \overline{A}).q(Y) = Z_1 \quad \text{et} \quad H'_X(\overline{X}, \overline{A}).q(Y) = Z_2.$$

On a le critère particulier suivant :

CRITÈRE. — *Si* G_0, H_0, G_1 *et* H_1 *sont de dimension finie et si les fonctions* m *et* n_1 (*respectivement* n_0) *sont majorées dans un voisinage de* $\overline{X}(T)$ [*respectivement de* $\overline{X}(0)$], *alors pour que* D *vérifie l'hypothèse* 3.4, *il suffit que la projection de* D_0 *sur* $L^1_{F_1} \times L^1_{F_2}$ *soit partout dense dans un voisinage de* (0, 0); *si de plus, les conditions* 4.5.1 *et* 4.5.2 *sont satisfaites, alors on a* $P \neq 0$.

Preuve. — Il résulte du critère 2 de 4.3.3 reformulé dans ce cas, qu'il suffit que la projection de D_0 sur $G_0 \times H_0 \times G_1 \times H_1 \times \mathbf{R} \times L^1_{F_1} \times L^1_{F_2}$ vérifie l'hypothèse 3.4; il suffit aussi qu'il en soit ainsi de sa projection D'_0 sur $G_0 \times G_1 \times L^1_{F_1} \times L^1_{F_2}$ car m, n_1 et n_0 sont majorés; il suffit encore qu'il en soit ainsi de $\overline{D}'_0$ (théorème 2.5).

Par hypothèse, l'adhérence de la projection de D_0 sur $L^1_{F_1} \times L^1_{F_2}$ est un voisinage de (0, 0), et il en est *a fortiori* de même pour l'adhérence de la projection de $\overline{D}'_0$. La dernière partie du critère est immédiate et la première partie résulte du lemme suivant.

LEMME. — *Si* C *est un convexe fermé de* $\mathbf{R}^m \times F$ *pour un espace de Banach* F, *si* C *contient* (0, 0), *si la projection de* C *sur* $\mathbf{R}^m$ *est bornée, et si sa projection sur* F *est partout dense dans un voisinage de* 0, *alors* C *vérifie l'hypothèse* 3.4.

Preuve. — Si C n'est pas un voisinage de (0, 0), alors (0, 0) appartient à la frontière de C et tout voisinage de (0, 0) contient un point où C admet un hyperplan d'appui fermé [2] : il existe une suite de formes linéaires continues (u_n, v_n) sur $\mathbf{R}^m \times F$, de norme 1, qui vérifient

$$(x, y) \in C \quad \Rightarrow \quad u_n x + v_n y \geqq -\frac{1}{n}.$$

Par hypothèse, l'adhérence de la projection de C sur F contient une boule de centre 0 et de rayon $2r$, et la borne inférieure de $v_n y$ pour $(x, y) \in C$ est inférieure à $-2r \| v_n \|$; par conséquent, il existe, pour tout n, un point (x_n, y_n) de C qui vérifie

$$v_n y_n \leqq -r \| v_n \|,$$

soit encore

$$u_n x_n \geqq -\frac{1}{n} + r(1 - \| u_n \|).$$

Soient alors x_0 un point adhérent à la suite x_n, et (u, v) un point faiblement adhérent à la suite (u_n, v_n) dans la boule unité du dual de $\mathbf{R}^m \times F$; ceux-ci vérifient les relations

$$(x, y) \in C \quad \Rightarrow \quad ux + vy \geqq 0 \qquad \text{et} \qquad ux_0 \geqq r(1 - \| u \|).$$

On a donc $u \neq 0$, et (u, v) définit un hyperplan d'appui fermé de C en $(0, 0)$.

Remarque. — On peut aussi, pour alléger l'hypothèse de régularité, écrire la condition nécessaire d'optimalité parmi le sous-ensemble des commandes A telles que $G(\overline{X}, A - \overline{A})$ et $H(\overline{X}, A - \overline{A})$ appartiennent respectivement à $L^{\infty}_{F_1}$ et $L^{\infty}_{F_2}$: alors le cône positif de $L^{\infty}_{F_2}$ a un intérieur non vide, mais les espaces duaux sont plus complexes; on peut encore envisager des contraintes sur l'état et la commande telles que $H(X, A)$ soit approximativement convexe s. c. i.; nous nous proposons d'aborder ces possibilités dans une étude ultérieure.

Dans le cas où G_0, H_0, G_1 et H_1 sont des espaces de Banach, le théorème 3.8 nous donne une condition nécessaire de type approché sans hypothèse préliminaire; les conditions de régularité sont alors choisies *a posteriori* comme dans (4.5) pour s'assurer que l'on a $P \neq 0$.

5. Étude des autres cas de la programmation dynamique

On peut, dans le cas des commandes originelles, trouver des paramètres de commande tels que l'équation du mouvement soit une fonction strictement dérivable de ces paramètres, mais ceux-ci varient non plus dans un convexe fermé, mais dans un ensemble qui est réunion d'une famille filtrante croissante de convexes fermés : par exemple dans [11] (partie B, § *a*), on peut prendre la famille des cônes composés des fonctions positives à support fini.

On est donc amené à reformuler les hypothèses et conclusion du paragraphe 3.

5.1. PROBLÈME. — *Minimiser* $\gamma(x)$ *sur l'ensemble des points* x *de* M *qui vérifient*

$$\varphi(x) = 0 \qquad et \qquad \psi(x) \leqq 0.$$

M est un sous-ensemble d'un espace de Banach qui est réunion d'une famille filtrante croissante de convexes fermés M_i; on suppose que $\bar{x}$ appartient à chacun des M_i; les fonctions γ, φ et ψ sont définies dans M et à valeurs respectivement dans $\mathbf{R}$, dans un espace vectoriel topologique G (que l'on munit de l'ordre défini par l'égalité) et dans un espace vectoriel topologique ordonné H; *on suppose que, dans l'intersection de* M *avec une boule de centre* $\bar{x}$ *et de rayon* $r > 0$, γ, φ et ψ *sont respectivement égales à* $m + d_1$, $l + d_2$ *et* $n + d_3$, *pour des fonctions telles que, pour tout* i, *dans l'intersection de* M_i *avec la boule de centre* $\bar{x}$ *et de rayon* r, m, l *et* n *sont convexes s. c. i. et nulles en* $\bar{x}$, d_1, d_2 *et* d_3 *sont continues et strictement dérivables en* $\bar{x}$ *de dérivée nulle.*

5.2. NOTATIONS. — Pour tout i, on désigne par D_i l'ensemble des points (y, λ, z) de $G \times \mathbf{R} \times H$ tels qu'il existe un point x de M_i qui vérifie

$$\| x - \bar{x} \| \leqq r, \qquad l(x) = y, \qquad m(x) \leqq y \qquad \text{et} \qquad n(x) + \psi(\bar{x}) \leqq z.$$

Les ensembles D_i constituent une famille filtrante croissante dont la réunion est notée D.

5.3. THÉORÈME. — *Si* $\bar{x}$ *est une solution optimale locale du problème* 5.1, *alors le point* (0, 0, 0) *n'est intérieur à aucun des* D_i.

Ce théorème résulte du théorème 3.3, car $\bar{x}$ est optimal parmi les points de M_i.

5.4. HYPOTHÈSE. — *On suppose que si, pour tout* i, *l'intérieur de* D_i *est vide, alors leur réunion* D *admet un hyperplan fermé d'appui en* (0, 0, 0).

5.4.1. CRITÈRE : *Si* G *et* H *sont métrisables complets, et si la famille des ensembles* D_i *admet une suite dénombrable cofinale, alors, pour que l'hypothèse* 5.4 *soit satisfaite, il faut et il suffit que leur réunion* D *vérifie l'hypothèse* 3.4.

Preuve. — Si l'intérieur de D est non vide, il en est de même de l'intérieur de l'adhérence de l'un des D_i de la suite cofinale, car $G \times \mathbf{R} \times H$ est un espace de Baire, et l'intérieur de cet ensemble D_i est non vide d'après le théorème 2.5.

Quand G et H sont métrisables complets, si l, m et n sont définis dans M, on peut remplacer dans l'hypothèse 5.4 les ensembles D_i par les ensembles Δ_i définis de la même manière sans la condition $\| x - \bar{x} \| \leqq r$

(*cf.* 3.6.2); dans ce cas, on peut également alléger les hypothèses faites sur γ, φ et ψ en supposant que celles-ci sont vérifiées, pour tout i, dans l'intersection de M_i avec une boule de centre $\bar{x}$ dont le rayon r_i dépend de M_i.

5.4.2. CRITÈRE : *Si G et H sont localement convexes, si chacun des convexes D_i a un intérieur non vide relativement au sous-espace fermé qu'il engendre, et s'il existe un convexe D_i de codimension finie, alors l'hypothèse* 5.4 *est vérifiée.*

Preuve. — La famille des sous-espaces fermés F_i engendré par D_i admet un plus grand élément F_{i_0}; si F_{i_0} est distinct de $G \times \mathbf{R} \times H$, il est contenu dans un hyperplan homogène fermé, et si F_{i_0} coïncide avec $G \times \mathbf{R} \times H$, l'intérieur de D_{i_0} est non vide.

De ce critère, il résulte que si G et H sont de *dimension finie*, l'hypothèse 5.4 est vérifiée; notons que, dans le cas de la programmation dynamique, les convexes D_i, définis comme dans 4.3.3, sont de codimension finie si les liaisons et contraintes sur l'état initial et l'état final sont à valeurs dans des espaces de dimension finie.

5.5. THÉORÈME. — *Si x est solution optimale locale du problème* 5.1, *et si l'hypothèse* 5.4 *est satisfaite, alors les conclusions du théorème* 3.5 *sont vérifiées.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que D admet un hyperplan d'appui fermé en (0, 0, 0); cela résulte de l'hypothèse 5.4 si tous les D_i ont un intérieur vide; sinon, le point (0, 0, 0) n'appartient pas au convexe ouvert non vide $\bigcup_i D_i^0$ (théorème 5.3), il existe un hyperplan fermé de séparation, et cet hyperplan est un hyperplan d'appui de D en (0, 0, 0).

Nous nous proposons, à l'aide de ce théorème, d'établir, dans une étude ultérieure, des résultats similaires à ceux du paragraphe 4 dans le cas des commandes originelles.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ABADIE (J.). — *Problèmes d'optimisation*, vol. 1 et 2. — Paris Institut Blaise Pascal, 1965 (*Mathématiques à l'Usage du Calculateur, Techniques numériques*, 10).

[2] BISHOP (E.) et PHELPS (R. R.). — The support functionals of a convex set, « *Convexity* », p. 27-51. — Providence, American mathematical Society, 1963 (*Proceedings of Symposia in pure Mathematics*, 7).

[3] BOURBAKI (N.). — *Espaces vectoriels topologiques*. Chapitres 1 et 2, Nouv. éd. — Paris, Hermann, 1966 (*Act. scient. et ind.*, 1189 *a*; *Bourbaki*, 15).

[4] BOURBAKI (N.). — *Espaces vectoriels topologiques*. Chapitres 3 à 5, Nouv. éd. — Paris, Hermann, 1964 (*Act. scient. et ind.*, 1229 *a*; *Bourbaki*, 18).

[5] BOURBAKI (N.). — *Intégration*. Chapitre 6. — Paris, Hermann, 1959 (*Act. scient. et ind.*, 1281; *Bourbaki*, 25).

[6] Bourbaki (N.). — *Variétés différentielles et analytiques*, Fascicule de résultats. — Paris, Hermann, 1967 (*Act. scient. et ind.*, 1333; *Bourbaki*, 33).
[7] Gamkrelidze (R. V.). — Régimes optimaux glissants [en russe], *Doklady Akad. Nauk SSSR*, t. 143, 1962, p. 1243-1245; [en anglais], *Soviet Math., Doklady*, t. 3, 1962, p. 559-562.
[8] Ionescu Tulcea (Alexandra et Cassius). — On the lifting property, II : Representation of linear operators on space L_E^r, $1 \leq r < \infty$, *J. of Math. and Mech.*, t. 11, 1962, p. 773-795.
[9] Mc Shane (E. J.). — Relaxed controls and variational problems, *SIAM J. on Control*, t. 5, 1967, p. 438-485.
[10] Michel (P.). — Problème des inégalités. Application à la programmation différentielle dans les espaces de Banach, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 275, série A, 1972, p. 345-348.
[11] Michel (P.). — Pour une extension du principe du maximum de Pontrjagin, *Rev. franç. Aut. Inform. et Rech. Opér.*, R 2, 1972, p. 65-76.
[12] Pallu de la Barrière (R.). — Sur les méthodes d'extension du principe de Pontrjagin; « *Identification, optimalisation et stabilité des systèmes automatiques, Actes du Congrès d'automatique théorique* » [1965, Paris]. — Dunod, Paris, 1967.
[13] Valadier (M.). — *Contribution à l'analyse convexe*, Thèse Sc. math. Paris, 1970.
[14] Vîrsan (C.). — Necessary conditions for optimization problems with operational constraints, *SIAM J. on Control*, t. 8, 1970, p. 527-558.
[15] Yosida (K.). — *Functional analysis*, 2nd ed. — Berlin, Springer-Verlag, 1968 (*Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 123).

(Texte reçu le 23 mai 1973.)

Philippe Michel,
U. E. R. Mathématiques et Informatique,
Université de Nancy II,
42, avenue de la Libération,
54000 Nancy.