

BULLETIN DE LA S. M. F.

VINCENT COSSART

Sur le polyèdre caractéristique d'une singularité

Bulletin de la S. M. F., tome 103 (1975), p. 13-19

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1975__103__13_0

© Bulletin de la S. M. F., 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LE POLYÈDRE CARACTÉRISTIQUE D'UNE SINGULARITÉ

par

VINCENT COSSART

RÉSUMÉ. — Une condition géométrique suffisante pour que des variables définissent le polyèdre caractéristique d'une singularité d'un sous-espace analytique complexe lisse et une démonstration *a priori* de l'existence de telles variables.

Soit $F : Z \rightarrow \mathbf{C}^d$ un morphisme lisse d'espaces analytiques complexes lisses, et soit X un sous-espace analytique fermé de Z , plat sur S en un point x , soit $s = F(x)$. A chaque système de fonctions $y = (y_1, \dots, y_r)$ définissant un \mathbf{C}^d -isomorphisme $\alpha : Z \rightarrow \mathbf{C}^{d+r}$ tel que $\alpha(x) = 0$, HIRONAKA attache un polyèdre $\Delta_x(X, y)$ de \mathbf{R}^r , et trouve que l'intersection $\Delta_x(X)$ de ceux-ci s'obtient pour un choix convenable de y [3]. Nous montrons directement que si la section W de F d'équations $y_1 = \dots = y_r = 0$ contient la strate de Samuel relative $S_x(X/S)$ de X au point x (comme sous-espace et pas seulement ensemblistement) [2], alors $\Delta_x(X, y) = \Delta_x(X)$, ce qui assure en particulier que, aux points x' de $S_x(X/S)$ voisins de x , on a encore $\Delta_{x'}(X, y) = \Delta_{x'}(X)$. Ce résultat ne s'obtient pas par la méthode d'HIRONAKA, qui a le défaut d'être purement ponctuelle, mais qui, en revanche, donne un procédé de construction de $\Delta_x(X)$ et des y_i .

Rappelons les notations introduites par HIRONAKA [3].

NOTATIONS. — On note $R = \mathbf{C} \{ u_1, \dots, u_d, y_1, \dots, y_r \} = \mathbf{C} \{ u, y \}$ l'anneau des séries à coefficients complexes à $n = d+r$ variables qui convergent dans un voisinage à l'origine, et on considère un idéal J de R .

DÉFINITION 1. — Une forme linéaire sur \mathbf{R}^d à coefficients tous positifs $L(a_1, \dots, a_d) = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_d a_d$, avec $c_1 > 0, c_2 > 0, \dots, c_d > 0$, définit une valuation V_L sur $\mathbf{C} \{ u, y \}$.

Si $f = \sum f_{A,B} u^A y^B$, $A \in \mathbf{N}^d$, $B \in \mathbf{N}^d$, on pose

$$V_L(f) = \inf \{ L(A) + |B|; f_{A,B} \neq 0 \}.$$

On vérifie que

$$V_L(fg) = V_L(f) + V_L(g)$$

et

$$V_L(f+g) \geq \inf(V_L(f), V_L(g)).$$

DÉFINITION 2. — On définit

$$\text{gr}_L(\mathbf{C}\{u, y\}) = \bigoplus_{b \in \mathbf{R}^+} I(L, u, y, b)/I^+(L, u, y, b),$$

où

$$I(L, u, y, b) = \{f \in \mathbf{C}\{u, y\}; V_L(f) \geq b\}$$

et

$$I^+(L, u, y, b) = \{f \in \mathbf{C}\{u, y\}; V_L(f) > b\}.$$

La composante homogène $I(L, u, y, b)/I^+(L, u, y, b)$ n'est différente de 0 que pour un ensemble discret de réels b . Si $f \in \mathbf{R}$ avec $V_L(f) = b$, on appelle forme initiale de f , et on note $\text{in}(f, L, u, y)$, la classe de f dans $I(L, u, y, b)/I^+(L, u, y, b)$.

PROPOSITION [3]. — On a un isomorphisme de \mathbf{C} -algèbres graduées : $\theta : \mathbf{C}[U, Y] \rightarrow \text{gr}_L(\mathbf{C}\{u, y\})$, où $\mathbf{C}[U, Y] = \bigoplus_{b \in \mathbf{R}} A_b$, où A_b a pour base les monômes $U^A Y^B$ avec $L(A) + |B| = b$, et où $\theta(U_i) = \text{in}(f, L, u, y)(u_i)$ avec $\theta(Y_i) = \text{in}(f, L, u, y)(y_i)$.

DÉFINITION 3. — Soit J un idéal de $\mathbf{C}\{u, y\}$, on pose

$$\text{in}(J, L, u, y) = \{\text{in}(f, L, u, y); f \in J\},$$

c'est un idéal homogène de $\text{gr}_L \mathbf{C}\{u, y\} = \mathbf{C}[U, Y]$.

DÉFINITION 4. — On pose $R' = R/(u)R$ et $J' = JR'$. On désigne par $\text{in}(J')$ le gradué de J' pour la filtration induite par la filtration (y) -adique de R' , c'est un idéal de $\mathbf{C}[Y]$. On dit que L a la propriété (\star) pour (J, u, y) si

$$(\star) \quad \text{in}(J, L, u, y) = \text{in}(J')\mathbf{C}[U, Y] \quad (\text{cf. [3], 1.11.1}).$$

DÉFINITION 5. — On note $\Delta(J; u; y)$ le convexe de \mathbf{R}_+^d formé des $A \in \mathbf{R}_+^d$ tels que, pour toute forme linéaire à coefficients strictement positifs L satisfaisant à (\star) pour (J, u, y) , on ait $L(A) \geq 1$.

DÉFINITION 6 [3]. — Étant donnée une partie $u = (u_1, u_2, \dots, u_d)$ d'un système de coordonnées locales de R , on note $\Delta(J; u)$ l'intersection des $\Delta(J; u; y')$, où (u, y') est un système de coordonnées locales complétant u . $\Delta(J; u)$ est appelé le premier polyèdre caractéristique de J respectivement à u .

DÉFINITION 7. — On met sur \mathbf{R}^r l'ordre suivant : $B \leq B'$ si $|B| < |B'|$ ou $|B| = |B'|$ et $B \leq B'$ pour l'ordre lexicographique.

On appelle exposant d'une série $g = \sum g_B Y^B$ de $\mathbf{C}\{y\}$ le plus petit multi-indice B pour l'ordre défini ci-dessus tel que $g_B \neq 0$.

On appelle exposant d'un idéal H de $\mathbf{C}[Y_1, Y_2, \dots, Y_r]$ ou de $\mathbf{C}\{y_1, y_2, \dots, y_r\}$ l'ensemble des exposants de ses éléments non nuls. On le note $\exp(H)$.

THÉORÈME. — Soit $F : Z \rightarrow S$ un morphisme lisse d'espaces analytiques complexes lisses. Soit X un sous-espace fermé de Z , soit x un point de X . Supposons que X est plat sur S au point x .

Soit $(u'_1, u'_2, \dots, u'_d)$ un système de coordonnées locales de S centrées en $s = F(x)$, et soient $(u_1, \dots, u_d, y_1, \dots, y_r)$ et $(u_1, u_2, \dots, u_d, y'_1, \dots, y'_r)$ des systèmes de coordonnées locales de Z centrées en x tels que $u_i = u'_i \circ F$.

Supposons que la strate de Samuel relative $S_x(X/S)$ ([2], 2.1) soit contenue dans le sous-espace W d'équations $y'_1 = \dots = y'_r = 0$. Alors si J est l'idéal de $R = O_{Z,x}$ définissant X , on a

$$\Delta(J; u; y') \subset \Delta(J; u; y).$$

Remarque. — Si, de plus, le faite $F_x(X_s)$ du cône tangent à la fibre X_s est nul, les $(u'_1, u'_2, \dots, u'_r)$ étant fixés, il existe toujours des coordonnées locales $(u_1, u_2, \dots, u_r, y'_1, \dots, y'_d)$ de $O_{Z,x}$ telles que $W \supset S_x(X/S)$, où W a pour idéal (y') . En effet, il suffit de montrer que l'espace tangent de Zariski en x à la fibre $S_x(X/S)_s$ est nul. Or, par définition, on a $S_x(X/S)_s = S_x(X_s)$ et, d'après [2] (2.5), $T_x(S_x(X_s)) = F_x(X_s) = 0$.

LEMME 1. — Sous les hypothèses du théorème, soit L une forme linéaire ayant la propriété (\star) pour (J, u, y) . Alors il existe des éléments (f_1, \dots, f_m) de J tels que, si on pose $\Phi_i = \text{in}(f_i, L, u, y)$, on a :

(i) $\Phi_i \in \mathbf{C}[Y]$;

(ii) $\text{in}(J') = (\Phi_1, \dots, \Phi_m) \mathbf{C}[Y]$, $\deg \Phi_i \leq \deg \Phi_{i+1}$;

(iii) $\text{in}(J, L, u, y) = (\Phi_1, \dots, \Phi_m) \mathbf{C}[U, Y]$;

(iv) $f_i = \sum f_{i,B}(u) y^B$ avec $f_{i,B}(u) = 0$

si $B \in \exp[\Phi_1, \dots, \Phi_{i-1}] \mathbf{C}[Y]$.

Preuve. — C'est un théorème bien connu [1].

On dit alors que (f_1, f_2, \dots, f_m) est une base standard normalisée de J relativement à (u, y, L) . Remarquons que les f_i engendrent J , en effet, on a (iii) et la filtration définie par L est séparée.

LEMME 2 (*Idéal de la strate de Samuel $S_x(X/S)$ au point x*). — Soit (f_1, f_2, \dots, f_m) une base standard normalisée de J relativement à (u, y, L) , alors l'idéal $I(S_x(X/S))$ de la strate de Samuel relative au point x est

$$I(S_x(X/S)) = (D_B^{(y)} f_i, 1 \leq i \leq m, |B| < v_i) \quad \text{où } v_i = \deg \Phi_i,$$

où $D_B^{(y)} = (1/B!) (\partial^{|B|} / \partial y^B)$.

Preuve. — Vérifions que l'on peut appliquer la proposition 2.2 de [2]. Tout d'abord X est plat sur S par hypothèse, ensuite la forme initiale $\text{in}_x(f_i | Z_s)$ de la restriction de f_i à la fibre $Z_s = F^{-1}(s)$, $s = F(x)$, est Φ_i puisque $\Phi_i(U, Y) = \text{in}(f, L, u, y)$ ne dépend que de Y par (i). Enfin, d'après (ii), les Φ_i engendrent $\text{in}(J')$ qui est l'idéal initial de la fibre X_s dans la fibre Z_s . Il reste à montrer que les f_i sont normalisés au sens de [3] (2, 1, 2), c'est-à-dire que si $B \in \exp(\Phi_1, \dots, \Phi_m)$, si $|B| < v_i$, alors on a $D_B^{(y)} f_i = 0$. Or, si $f_i = \sum f_{i,A}(u) y^A$, on a

$$D_B^{(y)} f_i = \sum_A \binom{B+A}{B} f_{i,A+B}(u) y^A,$$

or si $|B| < v_i$ et $B \in \exp(\Phi_1, \dots, \Phi_m)$, alors $B \in \exp(\Phi_1, \dots, \Phi_{i-1})$ puisque $\deg \Phi_{j-1} \leq \deg \Phi_j$ pour tout $1 \leq j \leq m$, donc

$$A+B \in \exp(\Phi_1, \dots, \Phi_{i-1})$$

pour tout A , donc $f_{i,A+B}(u) = 0$, donc $D_B^{(y)} f_i = 0$.

LEMME 3. — Sous les hypothèses du théorème, on a :

$$(1) y'_i = M_i(y) + q_i(u, y); \quad 1 \leq i \leq r,$$

où les M_i sont des formes linéaires linéairement indépendantes, et si on pose $q_i(u, y) = \sum_A q_{i,A}(u) y^A$, alors :

$$(2) q_{i,A}(0) = 0 \text{ pour } |A| \leq 1;$$

$$(3) V_L(q_i(u, y)) > 1.$$

Preuve. — Les relations (1) et (2) définissent M_i et q_i , et les M_i sont linéairement indépendantes parce que l'on a un changement de variables. Il reste à prouver (3).

Par hypothèse $y'_i \in I(S_x(X/S))$ donc, d'après le lemme 2, on a $y'_i \in (D_B^{(y)} f_j, |B| < v_j)$, donc

$$M_i(y) + q_i(u, y) = y'_i = \sum' a_{j,B}(u, y) \left(\sum_{A,C} \binom{C}{B} f_{j,A,C} u^A y^{C-B} \right),$$

donc

$$q_i(u, 0) = \sum' a_{j,B}(u, 0) (\sum_A f_{j,A,B} u^A),$$

où \sum' désigne la sommation sur l'ensemble d'indices

$$\{1 \leq j \leq m, |B| < v_j\} \quad \text{où} \quad f_j = \sum_{A,B} f_{j,A,B} u^A y^B \quad \text{avec} \quad f_{j,A,B} \in \mathbb{C}.$$

Puisque $\text{in}_L f_j \in (Y)^{v_j} \mathbb{C}[Y]$, si $B < v_j$ et $f_{j,A,B} \neq 0$, on a $L(A) + |B| > v_j$, donc $L(A) > v_j - |B| \geq 1$, donc $L(A) > 1$, donc

$$V_L(q_i(u, 0)) \geq \inf V_L(a_{j,B}(u, 0) u^A) \geq L(A) > 1,$$

donc $V_L(q_i(u, 0)) > 1$, donc $V_L(q_i(u, y)) > 1$ en vertu de (2).

LEMME 4. — Avec les notations du lemme 3, soit L une forme linéaire ayant la propriété (\star) pour (J, u, y) , et soit $h \in R$, on pose $h = g(u, y) = k(u, y')$, et on a

$$\text{in}(g, L, u, y)[U, Y] = \text{in}(k, L, u, y')[U, M(Y)].$$

Preuve. — On désigne par V_L la valuation définie par (L, u, y) , et par V'_L celle définie par (L, u, y') , soit $v = V_L(g, u, y)$. D'après la formule de Taylor, on a

$$(4) \quad h = g(u, y) = k(u, M+q) = k(u, M) + \sum_{|B|>1} D_B^{(y')} k(u, M) q^B;$$

on a évidemment

$$V'_L(k(u, y')) = V_L(k(u, M));$$

de plus,

$$V_L(D_B^{(y')} k(u, M)) = V'_L(D_B^{(y')} k(u, y')) \geq V'_L(k) - |B|.$$

On a aussi $V_L(q^B) > |B|$, d'après le lemme 3, donc

$$v = V'_L(k(u, y')) \quad \text{et} \quad h = k(u, M) \text{ mod } I^+(L, u, y, v),$$

d'où

$$h = \text{in}(k, L, u, y')[U, M(Y)] \text{ mod } I^+(L, u, y, v),$$

d'où la conclusion.

LEMME 5. — Avec les hypothèses du lemme 3,

$$\Delta(J; u; y) \supset \Delta(J; u; y').$$

Preuve. — D'après le lemme 4, si L vérifie (\star) pour (J, u, y) , pour tout $g \in J$, on a

$$\text{in}(g, L, u, y)(U, Y) = \text{in}(g, L, u, y')(U, M(Y)).$$

Donc l'isomorphisme

$$\theta : \mathbf{C}[U, Y'] \rightarrow \mathbf{C}[U, Y], \quad \theta(U_i) = U_i, \quad \theta(Y'_i) = M_i(Y)$$

induit un isomorphisme

$$\text{in}(J, L, u, y') \xrightarrow{\sim} \text{in}(J, L, u, y),$$

et bien sûr, l'isomorphisme $\mathbf{C}[Y'] \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}[Y]$, $Y'_i \rightarrow M_i(Y)$ induit un isomorphisme $\text{in}_{(y')} (J') \rightarrow \text{in}_{(y)} (J')$, et donc la condition (\star) pour (J, u, y, L) qui s'écrit $\text{in}(J, L, u, y) = \text{in}_{(y)} (J') \mathbf{C}[U, Y]$, équivaut à la condition (\star) pour (J, L, u, y') qui s'écrit :

$$\text{in}(J, L, u, y') = \text{in}_{(y')} (J') \mathbf{C}[U, Y'].$$

Donc $\Delta(J, u, y) \supset \Delta(J, u, y')$ par définition de Δ .

Le lemme 5 met fin à la démonstration du théorème.

COROLLAIRE. — Soit x un point d'un sous-espace analytique fermé X d'un espace analytique complexe lisse Z . Soit $F : Z \rightarrow \mathbf{C}^d$ un morphisme lisse tel que X est plat sur \mathbf{C}^d en x . Soit J l'idéal de $O_{Z,x}$ définissant X dans Z . Pour tout système de coordonnées (u, y) de Z , centré en x , tel que $F(u, y) = F(u, 0)$, et tel que y_1, y_2, \dots, y_r sont nuls sur la strate de Samuel relative $S_x(X/S)$, on a

$$\Delta(J; u; y) = \Delta(J; u).$$

Preuve. — Ceci résulte immédiatement du théorème et de la définition 6.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BRIANÇON (J.). — Weierstrass préparé à la Hironaka, « Singularités à Cargèse », *Astérisque*, vol. 7-8, 1973, p. 67-73.
- [2] GIRAUD (J.). — Sur la théorie du contact maximal, *Math. Z.*, t. 137, 1974, p. 285-310.
- [3] HIRONAKA (H.). — Characteristic polyhedra of singularities, *J. Math. Kyoto Univ.*, t. 7, 1967, p. 251-293.
- [4] HIRONAKA (H.). — *Bimeromorphic smoothing of a complex analytic space*, University of Warwick, 1971 (multigr.).
- [5] HIRONAKA (H.). — Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, I and II, *Annals of Math.*, t. 79, 1964, p. 109-326.
- [6] LEJEUNE (M.) et TEISSIER (B.). — *Contribution à l'étude des singularités du point de vue du polygone de Newton*. — Paris, École Polytechnique, Centre de Mathématiques, 1972.

(Texte reçu le 25 avril 1974.)

Vincent COSSART,
2, square Chardin,
78150 Le Chesnay.