BULLETIN DE LA S. M. F.

FRANÇOIS COMBES

CLAIRE DELAROCHE

Groupe modulaire d'une espérance conditionnelle dans une algèbre de von Neumann

Bulletin de la S. M. F., tome 103 (1975), p. 385-426

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1975__103__385_0>

Bull. Soc. math. France,
103, 1975, p. 385-426.

GROUPE MODULAIRE D'UNE ESPÉRANCE CONDITIONNELLE DANS UNE ALGÈBRE DE VON NEUMANN

PAR

FRANÇOIS COMBES et CLAIRE DELAROCHE
[Orléans]

RÉSUMÉ. — Dans cet article, on montre que les notions de groupe modulaire et de dérivée de Radon-Nikodym, définies pour les poids normaux fidèles semi-finis sur une algèbre de von Neumann M, peuvent être introduites, avec des propriétés semblables, pour les espérances conditionnelles normales fidèles sur M. Plusieurs applications de cette étude sont données.

Introduction

La notion d'espérance conditionnelle, si utilisée en théorie des probabilités, fut introduite dans l'étude des traces sur les algèbres de von Neumann, vers 1950, par J. DIXMIER ([6], [7]), et étudiée systématiquement par d'autres auteurs ([15], [14],...). Elle n'a jamais cessé d'apparaître depuis comme un élément important de la théorie des algèbres de von Neumann, en liaison avec la notion de poids ([1], [2]) et la théorie de Tomita [13], la décomposition des algèbres de von Neumann comme produit croisé discret ([3], [5]), les propriétés de G-finitude pour un groupe d'automorphismes G [10],...

Au paragraphe 3, nous définissons le groupe σ^T des automorphismes modulaires d'une espérance conditionnelle T (*voir* 3.2). C'est un groupe à un paramètre continu d'automorphismes du commutant relatif N^c de l'image N de T, et nous montrons, dans la proposition 3.8, qu'il est caractérisé par les conditions K. M. S. énoncées en 3.6, analogues à celles qui caractérisent le groupe modulaire d'un état. Nous montrons dans la proposition 3.11 que le type de N^c est lié à σ^T : l'algèbre N^c est semi-finie si et seulement s'il existe un groupe à un paramètre continu d'unitaires de N^c induisant σ^T; l'algèbre N^c est finie si et seulement s'il existe au moins une espérance conditionnelle T de M sur N telle que $\sigma^T = 1$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Ceci permet de répondre à un problème posé depuis longtemps : si M et N sont semi-finies, le commutant relatif N^c de N dans M est-il semi-fini ? La réponse est affirmative dès que N est l'image d'une espérance conditionnelle (*voir* cor. 3.13).

Au paragraphe 4, nous définissons la dérivée de Radon-Nikodym $(D\,T_2 : D\,T_1)$ d'une espérance conditionnelle T_2 de M sur N, par rapport à une autre telle espérance conditionnelle T_1 (*voir* 4.2). C'est une application fortement continue de $\mathbf{R}$ dans le groupe unitaire de N^c, qui est un 1-cocycle pour l'action de σ^{T_1} sur les unitaires de N^c, et qui satisfait à une condition K. M. S. (*voir* prop. 4.4). Nous montrons dans le théorème 4.8 que $T_2 \mapsto (D\,T_2 : D\,T_1)$ est injective, et que son image est l'ensemble des 1-cocycles relatifs à l'action de σ^{T_1} dans le groupe unitaire de N^c qui possède la propriété de prolongement analytique définie en 4.5. Cette étude utilise et généralise les résultats donnés par A. CONNES pour les états normaux fidèles que l'on peut considérer comme des espérances conditionnelles de M sur $\mathbf{C}.1$.

Au paragraphe 5, nous donnons d'autres applications de toute l'étude précédente. Ainsi, le théorème 4.8 est utilisé pour montrer, en 5.3, que $T \mapsto T \,|\, N^c$ est une bijection de $E(M, N)$ sur $E(N^c, Z(N))$ (*voir* notations qui suivent). Comme corollaire, nous démontrons la réciproque de la propriété suivante établie par A. CONNES ([3], th. 1.5.5 (*a*)) : si $N^c \subset N$, alors $E(M, N)$ est réduit à un seul élément. Nous revenons ensuite sur le cas où il existe des espérances conditionnelles T de M sur N telles que $\sigma_t^T = 1$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Nous appelons applications bécarres de telles espérances conditionnelles. Elles généralisent parfaitement les applications bécarres de J. DIXMIER (*voir* prop. 5.9) que nous retrouvon, dans le cas où N est le centre de M. Si N est l'image d'une espérance condis tionnelle, nous montrons qu'elle est l'image d'une application bécarre si- et seulement si, M est G-finie pour le groupe G des automorphismes intérieurs de M définis par les unitaires de N^c, et lorsqu'il en est ainsi, il existe une seule application bécarre de M sur N si, et seulement si, $Z(N^c) = Z(N)$ (*voir* 5.10 et 5.11).

Les paragraphes 1 et 2, dont nous n'avons pas parlé, sont consacrés à des préliminaires utilisés dans la suite. Le premier paragraphe concerne la dérivée de Radon-Nikodym de deux poids au sens de A. CONNES. Le deuxième donne un procédé pour réduire l'étude des espérances conditionnelles au cas où M est de genre dénombrable.

Nous remercions particulièrement A. CONNES, auquel nous devons d'intéressantes remarques qui furent le point de départ de cette étude.

Notations. – Soient M une algèbre de von Neumann, et N une sous-algèbre de von Neumann de M. Nous noterons

$Z(M)$ le centre de M,

N^c le commutant relatif $N' \cap M$ de N, N^{cc} le commutant relatif de N^c, etc.

Une espérance conditionnelle de M sur N est une application linéaire positive T de M sur N telle que $T(x) = x$ pour tout $x \in N$. Une telle application est normiquement continue de norme 1 et, pour tout $x \in M$, y et $z \in N$, on a $T(yxz) = y\,T(x)\,z$ (*voir* [14], th. 3.1). L'ensemble des espérances conditionnelles normales fidèles de M sur N sera noté $E(M, N)$, et si $E(M, N)$ n'est pas vide, nous dirons que N est une sous-algèbre de von Neumann *espérée* de M. Si p est un projecteur de N et si $T \in E(M, N)$, nous noterons T^p la restriction de T à l'algèbre réduite M_p. C'est un élément de $E(M_p, N_p)$.

Un poids φ sur M est une fonction de M^+ dans $[0, +\infty]$ telle que

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y) \quad \text{pour } x \text{ et } y \text{ dans } M^+$$

et

$$\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) \qquad \text{pour } \lambda \geqslant 0 \text{ et } x \in M^+.$$

L'ensemble $\mathfrak{N}_\varphi$ des $x \in M$ tels que $\varphi(x^* x) < +\infty$ est un idéal à gauche de M et $\mathfrak{M}_\varphi = \mathfrak{N}_\varphi^* \mathfrak{N}_\varphi$ est une sous-algèbre involutive de M engendrée linéairement par l'ensemble des $x \in M^+$ tels que $\varphi(x) < +\infty$. On dit que φ est semi-fini si $\mathfrak{M}_\varphi$ est faiblement dense dans M. L'ensemble des poids normaux, fidèles, semi-finis sur M sera noté $P(M)$.

Pour tout $\varphi \in P(M)$, nous adopterons les notations usuelles de la théorie des poids et de la théorie de Tomita (*voir* [1] et [12]). En particulier, Λ_φ désignera l'injection canonique de l'espace préhilbertien $\mathfrak{N}_\varphi$ muni de la forme sesquilinéaire $(x, y) \mapsto \varphi(y^* x)$ dans l'espace hilbertien complété H_φ, et σ^φ désignera le groupe à un paramètre continu des automorphismes modulaires définis par φ sur M. Nous noterons M_φ le centralisateur de φ, c'est-à-dire la sous-algèbre de von Neumann des éléments de M invariants par σ_φ.

Si $\varphi \in P(N)$ et si T est une application linéaire positive de M dans N (espérance conditionnelle, homomorphisme...), par abus de notation, $\varphi \circ T$ désignera le poids $x \mapsto \varphi[T(x)]$ sur M^+.

Nous dirons qu'une sous-algèbre involutive faiblement fermée R de M *réduit* le poids $\varphi \in P(M)$ si $\varphi \mid R^+$ est semi-fini (donc appartient à $P(R)$) et si $\sigma_t^\varphi(R) = R$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Rappelons que, dans ce cas, le groupe $t \mapsto \sigma_t^\varphi \mid R$ vérifie les conditions K. M. S. pour le poids $\varphi \mid R^+$. c'est donc le groupe modulaire de ce poids.

Pour tout projecteur p de M_φ, on a $p\,\mathfrak{M}_\varphi\,p \subset \mathfrak{M}_\varphi$ ([11], th. 3.6), donc $\varphi \mid M_p^+$ est élément de $P(M_p)$, et M_p réduit φ. Ce poids sera appelé *poids réduit* de φ par p, et noté φ^p.

Soit p un projecteur de M. Il existe $\varphi \in P(M)$ strictement semi-fini tel que $p \in M_\varphi$. Si p est support d'une forme linéaire positive normale f, on peut en outre supposer que $\varphi^p = f \mid M_p^+$. En effet, soient $(f_i)_{i \in I_1}$ et $(f_i)_{i \in I_2}$ des formes linéaires positives normales dont les supports $(p_i)_{i \in I_1 \cup I_2}$ sont deux à deux orthogonaux et tels que $\sum_{i \in I_1} p_i = p$ et $\sum_{i \in I_2} p_i = 1 - p$. Alors $x \mapsto \sum_{i \in I_1 \cup I_2} f_i(x)$ convient, car $p_i \in M_\varphi$ pour tout $i \in I_1 \cup I_2$ ([1], prop. 3.4).

Soient M_1, M_2 deux algèbres de von Neumann, et φ_1, φ_2 des éléments de $P(M_1)$ et $P(M_2)$ respectivement. D'après [3] (1.1.2), il existe un poids normal fidèle semi-fini φ sur $M_1 \otimes M_2$, et un seul, tel que

(i) $\varphi(x_1 \otimes x_2) = \varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2)$ pour tout $x_1 \in \mathfrak{M}_{\varphi_1}$ et tout $x_2 \in \mathfrak{M}_{\varphi_2}$;
(ii) $\sigma_t^\varphi = \sigma_t^{\varphi_1} \otimes \sigma_t^{\varphi_2}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Ce poids noté $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ est appelé *produit tensoriel* de φ_1 par φ_2.

Soient M une algèbre de von Neumann, et $\varphi \in P(M)$. Suivant A. CONNES, nous appellerons cocycle pour φ ou φ-cocycle une application $t \mapsto u_t$ de $\mathbf{R}$ dans l'ensemble des unitaires de M, continue pour la topologie forte (ou faible) de M et telle que $u_{t_1+t_2} = u_{t_1}\,\sigma_{t_1}^\varphi(u_{t_2})$ pour tous t_1, $t_2 \in \mathbf{R}$. Dans [3] (th. 1.2.1), A. CONNES associe canoniquement à tout $\psi \in P(M)$ un φ-cocycle $t \mapsto u_t$ noté $(D\psi : D\varphi)$, appelé *dérivée de Radon-Nikodym* de ψ par rapport à φ, et vérifiant notamment $\sigma_t^\psi(x) = u_t\,\sigma_t^\varphi(x)\,u_t^*$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ et tout $x \in M$. Rappelons le principe de la construction de $(D\psi : D\varphi)$.

Nous noterons dans toute la suite F_2 le facteur de type I_2 équipé d'unités matricielles (e_{ij}), où $i = 1, 2$ et $j = 1, 2$. Tout élément x de $R = M \otimes F_2$ admet une décomposition matricielle unique vis-à-vis des deux projecteurs $1 \otimes e_{11}$ et $1 \otimes e_{22}$ qui sont équivalents, orthogonaux de somme 1 dans R. Autrement dit, il existe des éléments x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} uniques dans M tels que $x = \sum_{i,j} x_{ij} \otimes e_{ij}$. Pour tout $x \in \mathbf{R}^+$, on a x_{11}, $x_{22} \in M^+$ et $x \mapsto \varphi(x_{11}) + \psi(x_{22})$ est un élément θ de $P(R)$. Alors u_t est, pour tout $t \in R$, l'unique élément de M tel que $\sigma_t^\theta(1 \otimes e_{21}) = u_t \otimes e_{21}$. Dans la suite, nous dirons que θ est le poids sur $M \otimes F_2$ associé au couple φ, ψ.

Pour tout nombre réel s, nous noterons B_s l'ensemble des $z \in \mathbf{C}$ tels que Im z soit dans l'intervalle fermé de bornes 0 et s dans $\mathbf{R}$. Nous noterons A_s l'espace des fonctions à valeurs complexes continues et bornées sur B_s qui sont analytiques à l'intérieur de B_s.

1. Préliminaires sur la dérivée de Radon-Nikodym de deux poids

Nous utiliserons constamment le résultat suivant de M. TAKESAKI [13].

1.1. THÉORÈME. — *Soient M une algèbre de von Neumann, N une sous-algèbre de von Neumann de M, et $\varphi \in P(M)$. Pour que N réduise φ, il faut et il suffit qu'il existe $T \in E(M, N)$ tel que $\varphi \circ T = \varphi$. De plus, une telle espérance conditionnelle T est unique.*

Dans ces conditions, nous dirons que T est l'élément de $E(M, N)$ défini par φ. En raison de l'invariance de φ par les automorphismes σ_t^φ et l'unicité précédente, T est invariante par les automorphismes σ_t^φ.

Nous aurons besoin des résultats suivants de A. CONNES ([3], 1.2.4 et [4], th. 4).

1.2. THÉORÈME. — *Soient M une algèbre de von Neumann,* et $\varphi \in P(M)$. *Pour tout φ-cocycle $u : t \mapsto u_t$, il existe $\psi \in P(M)$ unique tel que $(D\psi : D\varphi) = \mathrm{u}$.*

Supposons de plus que φ soit un état. Pour que le poids ψ précédent soit une forme linéaire positive, il faut et il suffit que l'une ou l'autre des conditions équivalentes suivantes soit vérifiée :

(*a*) *pour tout $x \in M$ il existe $F_x \in A_{-1}$ telle que $F_x(t) = \varphi(x u_t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$;*

(*b*) *il existe un élément F_1 de A_{-1} tel que $F_1(t) = \varphi(u_t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.*

On a alors $\psi(u_t x) = F_x(t-i)$ pour tout $x \in M$ et *tout $t \in \mathbf{R}$, et en particulier $\|\psi\| = \psi(1) = F_1(-i)$.*

Signalons aussi qu'un φ-cocycle u est un groupe à un paramètre si, et seulement si, $u_t \in M_\varphi$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Dans ce cas, notons h l'opérateur auto-adjoint positif injectif affilié à M_φ tel que $u_t = h^{it}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, et soit ψ l'élément de $P(M)$ tel que $(D\psi : D\varphi) = u$. Alors, d'après CONNES ([3], lemme 1.2.3 (*b*)), ψ est le poids $\varphi(h.)$, défini par PEDERSEN et TAKESAKI dans [11] (§ 4).

Nous allons maintenant établir d'autres propriétés de $(D\psi : D\varphi)$ qui nous seront utiles dans la suite.

1.3. LEMME. — *Soient M une algèbre de von Neumann, φ et ψ deux éléments de $P(M)$, et α un automorphisme de M.*

Alors si $u = (D\psi : D\varphi)$, on a $(D\psi \circ \alpha : D\varphi \circ \alpha)_t = \alpha^{-1}(u_t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Soit θ le poids sur $M \otimes F_2$ associé au couple φ, ψ et notons $\bar{\alpha}$ l'automorphisme $\alpha \otimes 1$ de $M \otimes F_2$. Pour tout $x = \sum x_{ij} \otimes e_{ij}$ de $(M \otimes F_2)^+$, on a

$$\theta[\bar{\alpha}(x)] = \varphi[\alpha(x_{11})] + \psi[\alpha(x_{22})],$$

d'où $$(D\psi \circ \alpha : D\varphi \circ \alpha)_t \otimes e_{21} = \sigma_t^{\theta \circ \bar{\alpha}}(1 \otimes e_{21}) = \bar{\alpha}^{-1} \circ \sigma_t^{\theta} \circ \bar{\alpha}(1 \otimes e_{21})$$
$$= \bar{\alpha}^{-1}(u_t \otimes e_{21}) = \alpha^{-1}(u_t) \otimes e_{21}.$$

1.4. Lemme. — *Soient M une algèbre de von Neumann, φ et ψ deux éléments de $P(M)$, et p un projecteur de $M_\varphi \cap M_\psi$. Notons φ^p et ψ^p les poids réduits de φ et ψ par p. Alors $(D\psi : D\varphi)_t$ commute avec p pour tout $t \in \mathbf{R}$, et on a $(D\psi^p : D\varphi^p)_t = p\,(D\psi : D\varphi)_t$.*

Posons $u = (D\psi : D\varphi)$. Comme $p \in M_\varphi \cap M_\psi$, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$p = \sigma_t^\psi(p) = u_t \sigma_t^\varphi(p) u_t^* = u_t p u_t^*,$$

et donc p commute avec u_t.

Sur $R = M \otimes F_2$ et sur $M_p \otimes F_2$, considérons les poids θ et θ' respectivement associés aux couples φ, ψ et φ^p, ψ^p. Il est clair que $M_p \otimes F_2$ s'identifie à l'algèbre réduite de R par le projecteur $p \otimes 1$. Comme

$$\sigma_t^\theta(p \otimes 1) = \sigma_t^\varphi(p) \otimes e_{11} + \sigma_t^\psi(p) \otimes e_{22},$$

on voit que $p \otimes 1$ appartient à R_θ, et on vérifie immédiatement que θ' est le poids réduit de θ par ce projecteur. On a donc $\sigma_t^{\theta'} = \sigma_t^\theta \mid M_p \otimes F_2$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, d'où

$$(D\psi^p : D\varphi^p)_t \otimes e_{21} = \sigma_t^{\theta'}(p \otimes e_{21}) = \sigma_t^\theta[(p \otimes 1)(1 \otimes e_{21})]$$
$$= (p \otimes 1)\sigma_t^\theta(1 \otimes e_{21}) = (p \otimes 1)(u_t \otimes e_{21}) = p u_t \otimes e_{21};$$

d'où la conclusion.

1.5. Lemme. — *Soient M et N deux algèbres de von Neumann de genre dénombrable, φ_1 et φ_2 (resp. ψ_1 et ψ_2) deux formes linéaires positives normales fidèles sur M (resp. sur N). Alors pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a*

$$(D\varphi_2 \otimes \psi_2 : D\varphi_1 \otimes \psi_1)_t = (D\varphi_2 : D\varphi_1)_t \otimes (D\psi_2 : D\psi_1)_t.$$

Grâce à la relation

$$(D\varphi_2 \otimes \psi_2 : D\varphi_1 \otimes \psi_1)_t$$
$$= (D\varphi_2 \otimes \psi_2 : D\varphi_2 \otimes \psi_1)_t (D\varphi_2 \otimes \psi_1 : D\varphi_1 \otimes \psi_1)_t,$$

nous pouvons supposer que $\varphi_1 = \varphi_2$ ou que $\psi_1 = \psi_2$. Supposons par exemple que $\psi_1 = \psi_2$, et notons ψ cet élément.

Sur $M \otimes F_2$ et $(M \otimes N) \otimes F_2$, soient θ et $\bar{\theta}$ les formes positives associées respectivement aux couples φ_1, φ_2 et $\varphi_1 \otimes \psi$, $\varphi_2 \otimes \psi$. Notons Φ l'isomorphisme canonique de $(M \otimes F_2) \otimes N$ sur $(M \otimes N) \otimes F_2$ tel que

$$\Phi((x \otimes y) \otimes z) = (x \otimes z) \otimes y$$

pour tous $x \in M$, $y \in F_2$ et $z \in N$. Alors, pour tout tenseur décomposable de $(M \otimes F_2) \otimes N$ du type $x \otimes e_{11} \otimes z$, on a

$$\begin{aligned} \bar{\theta}[\Phi(x \otimes e_{11} \otimes z)] &= \bar{\theta}(x \otimes z \otimes e_{11}) = (\varphi_1 \otimes \psi)(x \otimes z) \\ &= \varphi_1(x)\psi(z) = \theta(x \otimes e_{11})\psi(z). \end{aligned}$$

De même, on vérifie que

$$\bar{\theta}[\Phi(x \otimes e_{ij} \otimes z)] = \theta(x \otimes e_{ij})\psi(z)$$

pour tous $x \in M$, $z \in N$ et $i, j = 1, 2$ (avec valeurs nulles pour $i \neq j$). Il en résulte que $\bar{\theta} \circ \Phi = \theta \otimes \psi$, d'où

$$\Phi^{-1} \circ \sigma_t^{\bar{\theta}} \circ \Phi = \sigma_t^{\theta} \otimes \sigma_t^{\psi} \quad \text{pour tout } t \in \mathbf{R}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} (D\varphi_2 \otimes \psi : D\varphi_1 \otimes \psi)_t \otimes e_{21} &= \sigma_t^{\bar{\theta}}(1 \otimes 1 \otimes e_{21}) \\ &= \Phi \circ (\sigma_t^{\theta} \otimes \sigma_t^{\psi}) \circ \Phi^{-1}(1 \otimes 1 \otimes e_{21}) \\ &= \Phi \circ (\sigma_t^{\theta} \otimes \sigma_t^{\psi})(1 \otimes e_{21} \otimes 1) \\ &= \Phi[(D\varphi_2 : D\varphi_1)_t \otimes e_{21} \otimes 1] \\ &= (D\varphi_2 : D\varphi_1)_t \otimes 1 \otimes e_{21}. \end{aligned}$$

d'où

$$(D\varphi_2 \otimes \psi : D\varphi_1 \otimes \psi)_t = (D\varphi_2 : D\varphi_1)_t \otimes 1 \quad \text{pour tout } t \in \mathbf{R}.$$

1.6. LEMME. — *Soient M une algèbre de von Neumann, N une sous-algèbre de von Neumann de M, et ψ_1, ψ_2 deux éléments de $P(M)$. On pose $\varphi_1 = \psi_1 \mid N^+$ et $\varphi_2 = \psi_2 \mid N^+$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *ψ_1 et ψ_2 sont réduits par N, et $(D\psi_2 : D\psi_1)_t \in N$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.*

(ii) *ψ_1 est réduit par N, et $(D\psi_2 : D\psi_1)_t \in N$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.*

(iii) *ψ_1 et ψ_2 sont réduits par N, et définissent le même élément de $E(M, N)$.*

De plus, si ces conditions sont vérifiées, on a

$$(D\psi_2 : D\psi_1) = (D\varphi_2, D\varphi_1).$$

D'après [3] (lemme 1.4.5), si ψ_1 et ψ_2 sont réduits par N et définissent le même élément de $E(M, N)$, on a $(D\psi_2 : D\psi_1) = (D\varphi_2 : D\varphi_1)$.

Donc (iii) entraîne (i)

(i) $\Rightarrow$ (ii). Évident.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Puisque N réduit ψ_1, on a $\sigma_t^{\varphi_1} = \sigma_t^{\psi_1} \mid N$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, et donc $u = (D\psi_2 : D\psi_1)$ est un φ_1-cocycle. Soit φ_3 l'élément de $P(N)$ tel que $(D\varphi_3 : D\varphi_1) = u$. D'autre part, notons T l'élément de $E(M, N)$ tel que $\psi_1 = \psi_1 \circ T$, et posons $\psi_3 = \varphi_3 \circ T$. D'après [3] (lemme 1.4.5), on a

$$(D\psi_3 : D\psi_1) = (D\varphi_3 : D\varphi_1) = u = (D\psi_2 : D\psi_1),$$

d'où $\psi_3 = \psi_2$, ce qui prouve que (ii) $\Rightarrow$ (iii).

1.7. Lemme. — *Reprenons les données M, N, ψ_1, ψ_2, φ_1, φ_2 du lemme précédent, et supposons que N réduise ψ_1 et ψ_2. Alors $(D\psi_2 : D\psi_1)$ prend ses valeurs dans N^c si et seulement s'il existe un opérateur auto-adjoint positif injectif h affilié à $Z(N)$ tel que $\varphi_2 = \varphi_1(h.)$.*

Notons T_1 et T_2 les éléments de $E(M, N)$ définis respectivement par ψ_1 et ψ_2. Posons $\psi_3 = \varphi_1 \circ T_2$, et $v_t = (D\psi_3 : D\psi_1)_t$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Le poids ψ_3 est réduit par N, d'où il résulte que

$$\sigma_t^{\psi_3} \mid N = \sigma_t^{\varphi_1} = \sigma_t^{\psi_1} \mid N.$$

Pour tout $x \in N$ et tout $t \in \mathbf{R}$, on a donc

$$\sigma_t^{\varphi_1}(x) = \sigma_t^{\psi_1}(x) = v_t^* \sigma_t^{\psi_3}(x) v_t = v_t^* \sigma_t^{\varphi_1}(x) v_t.$$

On en déduit que $v_t \in N^c$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. D'autre part, d'après le lemme 1.6, on a $(D\psi_2 : D\psi_3) = (D\varphi_2 : D\varphi_1)$, d'où, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$(D\psi_2 : D\psi_1)_t = (D\psi_2 : D\psi_3)_t (D\psi_3 : D\psi_1)_t = (D\varphi_2 : D\varphi_1)_t v_t.$$

Si $(D\psi_2 : D\psi_1)_t \in N^c$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a donc

$$(D\varphi_2 : D\varphi_1)_t = (D\psi_2 : D\psi_1)_t v_t^* \in N^c \cap N = Z(N) \subset N_{\varphi_1}.$$

Il en résulte que $t \mapsto (D\varphi_2 : D\varphi_1)_t$ est un groupe à un paramètre de la forme $t \mapsto h^{it}$ avec h affilié à $Z(N)$ et que $\varphi_2 = \varphi_1(h.)$.

Réciproquement, si $\varphi_2 = \varphi_1(h.)$, avec h auto-adjoint positif injectif affilié à $Z(N)$, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$(D\varphi_2 : D\varphi_1)_t = h^{it} \in Z(N),$$

d'où

$$(D\psi_2 : D\psi_1)_t = h^{it} v_t \in N^c.$$

1.8. Lemme. — *Soient M une algèbre de von Neumann, N une sous-algèbre de von Neumann de M, et ψ_1, ψ_2 deux états normaux fidèles sur M réduits par N et ayant même restriction à N. Notons ψ'_1 et ψ'_2 les restrictions de ψ_1 et ψ_2 respectivement à N^c. On a*

$$(D\psi_2 : D\psi_1) = (D\psi'_2 : D\psi'_1).$$

Soient θ et θ' les formes positives sur $M \otimes F_2$ et $N^c \otimes F_2$ respectivement associées aux couples ψ_1, ψ_2 et ψ'_1, ψ'_2. On a évidemment

$$\theta' = \theta \mid N^c \otimes F_2.$$

Par ailleurs, pour $i = 1, 2$ et tout $t \in \mathbf{R}$, on a $\sigma_t^{\psi_i}(N) = N$, car ψ_i est réduit par N, d'où $\sigma_t^{\psi_i}(N^c) = N^c$. Vérifions alors que $N^c \otimes F_2$ est invariant par les automorphismes σ_t^θ. Si $x \in N^c$, il est clair que

$$\sigma_t^\theta(x \otimes e_{11}) = \sigma_t^{\psi_1}(x) \otimes e_{11} \quad \text{et} \quad \sigma_t^\theta(x \otimes e_{22}) = \sigma_t^{\psi_2}(x) \otimes e_{22}$$

appartiennent à $N^c \otimes F_2$. D'autre part, d'après le lemme 1.7, on a

$$u_t = (D\psi_2 : D\psi_1)_t \in N^c \quad \text{pour tout } t \in \mathbf{R}.$$

Il en résulte que $\sigma_t^\theta(x \otimes e_{21}) \in N^c$, vu les égalités

$$\begin{aligned}\sigma_t^\theta(x \otimes e_{21}) &= \sigma_t^\theta(1 \otimes e_{21})\sigma_t^\theta(x \otimes e_{11}) = (u_t \otimes e_{21})(\sigma_t^{\psi_1}(x) \otimes e_{11}) \\ &= u_t \sigma_t^{\psi_1}(x) \otimes e_{21}.\end{aligned}$$

Ainsi $N^c \otimes F_2$ réduit θ, et on a donc $\sigma_t^{\theta'} = \sigma_t^\theta \mid N^c \otimes F_2$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. La conclusion en résulte, car on obtient alors

$$(D\psi'_2 : D\psi'_1) \otimes e_{21} = \sigma_t^{\theta'}(1 \otimes e_{21}) = \sigma_t^\theta(1 \otimes e_{21}) = (D\psi_2 : D\psi_1)_t \otimes e_{21}.$$

2. Sur la structure des espérances conditionnelles

2.1 Proposition. — *Soient M_1 et M_2 deux algèbres de von Neumann, et pour $i = 1, 2$, soient N_i une sous-algèbre de von Neumann de M_i, et T_i un élément de $E(M_i, N_i)$.*

(i) *Il existe un élément T de $E(M_1 \otimes M_2, N_1 \otimes N_2)$, et un seul, tel que*

$$T(x_1 \otimes x_2) = T_1(x_1) \otimes T_2(x_2) \quad \textit{pour tout } x_1 \in M_1 \textit{ et tout } x_2 \in M_2.$$

(ii) *Pour tout $\varphi_1 \in P(N_1)$ et tout $\varphi_2 \in P(N_2)$, on a*

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \circ T = (\varphi_1 \circ T_1) \otimes (\varphi_2 \circ T_2).$$

(i) Posons $M = M_1 \otimes M_2$ et $N = N_1 \otimes N_2$. Il est clair qu'il existe au plus un élément T de $E(M, N)$ tel que $T(x_1 \otimes x_2) = T_1(x_1) \otimes T_2(x_2)$ pour tout $x_1 \in M_1$ et tout $x_2 \in M_2$. Montrons l'existence d'une telle espérance conditionnelle. Choisissons $\varphi_1 \in P(N_1)$ et $\varphi_2 \in P(N_2)$, et posons $\psi_1 = \varphi_1 \circ T_1$ et $\psi_2 = \varphi_2 \circ T_2$. Notons φ le poids $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ sur N, et ψ le poids $\psi_1 \otimes \psi_2$ sur M. Étant donné que N_i est $\sigma_t^{\psi_i}$ invariante et que

$$\sigma_t^{\psi_i} \mid N_i = \sigma_t^{\varphi_i} \qquad \text{pour} \quad i = 1, 2,$$

on voit que N est invariante par les automorphismes $\sigma_t^{\psi} = \sigma_t^{\psi_1} \otimes \sigma_t^{\psi_2}$, et que $\sigma_t^{\psi} \mid N = \sigma_t^{\varphi_1} \otimes \sigma_t^{\varphi_2}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. D'autre part, pour tout $x_1 \in \mathfrak{M}_{\varphi_1} \subset \mathfrak{M}_{\psi_1}$ et tout $x_2 \in \mathfrak{M}_{\varphi_2} \subset \mathfrak{M}_{\psi_2}$, on a

$$\psi(x_1 \otimes x_2) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) < +\infty.$$

Ainsi le poids ψ est réduit par N, et d'après [3] (1.1.3), on a $\psi \mid N^+ = \varphi_1 \otimes \varphi_2$.

Comme ψ est réduit par N, il existe $T \in E(M, N)$ unique tel que $\psi \circ T = \psi$ (*voir* th. 1.1). Pour $i = 1, 2$, considérons alors des éléments x_i de M_i, y_i et z_i de $\mathfrak{N}_{\varphi_i}$. Les éléments $y_1 \otimes y_2$ et $z_1 \otimes z_2$ appartiennent à $\mathfrak{N}_\varphi = \mathfrak{N}_\psi \cap N$, et on a

$$\begin{aligned}\varphi[(y_1 \otimes y_2)^* T(x_1 \otimes x_2) z_1 \otimes z_2] &= \varphi[T(y_1^* x_1 z_1 \otimes y_2^* x_2 z_2)]\\ &= \psi(y_1^* x_1 z_1 \otimes y_2^* x_2 z_2) = \psi_1(y_1^* x_1 z_1)\psi_2(y_2^* x_2 z_2)\\ &= \varphi_1[T_1(y_1^* x_1 z_1)]\varphi_2[T_2(y_2^* x_2 z_2)] = \varphi[T_1(y_1^* x_1 z_1) \otimes T_2(y_2^* x_2 z_2)]\\ &= \varphi[y_1^* T_1(x_1) z_1 \otimes y_2^* T_2(x_2) z_2]\\ &= \varphi[(y_1 \otimes y_2)^* (T_1(x_1) \otimes T_2(x_2))(z_1 \otimes z_2)].\end{aligned}$$

Comme $\Lambda_{\varphi_i}(\mathfrak{N}_{\varphi_i})$ est dense dans H_{φ_i} pour $i = 1, 2$, les vecteurs

$$\Lambda_\varphi(y_1 \otimes y_2) = \Lambda_{\varphi_1}(y_1) \otimes \Lambda_{\varphi_2}(y_2)$$

forment une partie totale dans $H_\varphi = H_{\varphi_1} \otimes H_{\varphi_2}$ quand y_1 et y_2 décrivent $\mathfrak{N}_{\varphi_1}$ et $\mathfrak{N}_{\varphi_2}$ respectivement. Il en est de même pour les vecteurs $\Lambda_\varphi(z_1 \otimes z_2)$. De l'égalité des termes extrêmes de la relation précédente, on déduit donc que

$$T(x_1 \otimes x_2) = T_1(x_1) \otimes T_2(x_2) \quad \text{pour tout } x_1 \in M_1 \text{ et tout } x_2 \in M_2.$$

(ii) L'unicité de T et la construction de T qui précède prouvent que $(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \circ T = (\varphi_1 \circ T_1) \otimes (\varphi_2 \circ T_2)$ pour tout $\varphi_1 \in P(N_1)$ et tout $\varphi_2 \in P(N_2)$.

2.2. DÉFINITION. — L'élément T de $E(M_1 \otimes M_2, N_1 \otimes N_2)$, caractérisé par la proposition précédente. sera appelé le *produit tensoriel* de T_1 et de T_2, et sera noté $T_1 \otimes T_2$.

2.3. LEMME. — *Soient M_1 une algèbre de von Neumann, N_1 une sous-algèbre de von Neumann de M_1, et F un facteur. On pose $M = M_1 \otimes F$ et $N = N_1 \otimes F$. Alors, pour tout $T \in E(M, N)$, il existe $T_1 \in E(M_1, N_1)$ unique tel que $T = T_1 \otimes 1$.*

Soit $x \in M_1$. Pour tout $y \in F$, on a $1 \otimes y \in N_1 \otimes F = N$, d'où

$$\begin{aligned}[T(x \otimes 1)]\, 1 \otimes y &= T[(x \otimes 1)(1 \otimes y)] \\ &= T[(1 \otimes y)(x \otimes 1)] = 1 \otimes y\, [T(x \otimes 1)].\end{aligned}$$

Ainsi T envoie $M_1 \otimes 1$ dans

$$(1 \otimes F)' \cap (N_1 \otimes F) = N_1 \otimes (F \cap F') = N_1 \otimes 1.$$

Comme $N_1 \otimes 1$ est évidemment contenu dans $T(M_1 \otimes 1)$, on en déduit que $T(M_1 \otimes 1) = N_1 \otimes 1$. En considérant les isomorphismes d'ampliation, on voit qu'il existe $T_1 \in E(M_1, N_1)$ unique tel que

$$T(x \otimes 1) = T_1(x) \otimes 1$$

pour tout $x \in M_1$.

Si $x \in M_1$ et $y \in F$, on a alors

$$T(x \otimes y) = T[(x \otimes 1)(1 \otimes y)] = [T(x \otimes 1)](1 \otimes y) = T_1(x) \otimes y,$$

d'où $T = T_1 \otimes 1$ d'après la proposition 2.1 (i).

2.4. LEMME. — *Soient M une algèbre de von Neumann, et N une sous-algèbre de von Neumann de M. Soit $(p_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité dans $Z(N)$ et, pour tout $i \in I$, soit T_i un élément de $E(M_{p_i}, N_{p_i})$. Alors il existe $T \in E(M, N)$ unique tel que $T \mid M_{p_i} = T_i$ pour tout $i \in I$.*

Supposons qu'il existe $T \in E(M, N)$ tel que $T \mid M_{p_i} = T_i$ pour tout $i \in I$. Alors, pour tout $x \in M$ et tous $i, j \in I$ avec $i \neq j$, on a

$$T(p_i x p_i) = T_i(p_i x p_i) \qquad \text{et} \qquad T(p_i x p_j) = p_i T(x) p_j = 0,$$

d'où $T(x) = \sum_{i \in I} T_i(p_i x p_i)$. Cela prouve qu'il existe au plus un élément T de $E(M, N)$ tel que $T \mid M_{p_i} = T_i$ pour tout $i \in I$.

Considérons alors l'application $T : x \mapsto \sum_{i \in I} T_i(p_i x p_i)$ de M dans N. Elle est positive, fidèle, faiblement continue et, pour $x \in N$, on a

$$T(x) = \sum_{i \in I} T_i(p_i x p_i) = \sum_{i \in I} x p_i = x.$$

Ainsi T appartient à $E_{\cdot}(M, N)$, et on a évidemment $T \mid M_{p_i} = T_i$ pour tout $i \in I$.

2.5. PROPOSITION. — *Soient M une algèbre de von Neumann, et N une sous-algèbre de von Neumann de M.*

(i) *Il existe*

(*a*) *une partition de l'unité $(p_i)_{i \in I}$ dans $Z(N)$,*

(*b*) *pour tout $i \in I$, des espaces hilbertiens K_i, H_i, une algèbre de von Neumann M_i sur K_i, une sous-algèbre de von Neumann de genre dénombrable N_i de M_i,*

(*c*) *un isomorphisme spatial Φ de M sur une algèbre de von Neumann agissant sur $\oplus_{i \in I}(K_i \otimes H_i)$,*

tels que l'on ait, pour tout $i \in I$,

$$\Phi(M_{p_i}) = M_i \otimes \mathscr{L}(H_i) \qquad et \qquad \Phi(N_{p_i}) = N_i \otimes \mathscr{L}(H_i).$$

(ii) *Soient (p_i), (K_i), (H_i), (M_i), (N_i), Φ avec les propriétés de* (i). *Soit $T \in E(M, N)$. Il existe une famille $(S_i)_{i \in I}$ unique d'éléments $S_i \in E(M_i, N_i)$ telle que*

$$\Phi(T(x)) = \textstyle\sum_{i \in I} S_i \otimes 1 (\Phi(p_i\, x\, p_i)) \text{ pour tout } x \in M.$$

L'application $T \mapsto (S_i)_{i \in I}$ ainsi définie est une bijection de $E(M, N)$ sur $\prod_{i \in I} E(M_i, N_i)$.

Soit q un projecteur non nul de $Z(N)$. Comme q majore un projecteur non nul de N, de genre dénombrable dans N, on voit en utilisant [8] (cor. 2, p. 218), qu'il existe un projecteur non nul p de $Z(N)$ majoré par q et une famille $(f_l)_{l \in L}$ de projecteurs de N deux à deux orthogonaux, équivalents et de genre dénombrable dans N, majorés par p, telle que si $f_0 = p - \sum_{l \in L} f_l$, on ait $f_0 \prec f_l$ dans N. Si L est un ensemble fini, alors p est un projecteur de genre dénombrable dans N. Si L est un ensemble infini, toujours d'après [8] (cor. 2, p. 218), on peut choisir les f_l de façon que $f_0 = 0$. Ainsi on a montré que, pour tout projecteur non nul q de $Z(N)$, il existe un projecteur non nul p de $Z(N)$ majoré par q, et une famille $(f_j)_{j \in J}$ de projecteurs de N, deux à deux orthogonaux de somme p, équivalents et de genre dénombrable dans N.

Il en résulte qu'il existe une partition de l'unité $(p_i)_{i \in I}$ de $Z(N)$ telle que, pour tout $i \in I$, le projecteur p_i soit la somme d'une famille $(f_j)_{j \in J_i}$ de projecteurs de N deux à deux orthogonaux, équivalents et de genre dénombrable dans N. Pour tout $i \in I$, soit g_i l'un des éléments de la famille $(f_j)_{j \in J_i}$. Posons $M_i = M_{g_i}$ et $N_i = N_{g_i}$. Si K désigne l'espace hilbertien où opère M, notons K_i l'espace hilbertien $g_i(K)$. Posons enfin $H_i = l^2(J_i)$. Alors, d'après [8] (prop. 5, p. 25), il existe un isomorphisme U_i de $p_i(K)$ sur $K_i \otimes H_i$ tel que

$$U_i M_{p_i} U_i^* = M_i \otimes \mathscr{L}(H_i) \qquad \text{et} \qquad U_i N_{p_i} U_i^* = N_i \otimes \mathscr{L}(H_i).$$

Soit U l'isomorphisme de K sur $\oplus_{i \in I}(K_i \otimes H_i)$ tel que $U | p_i(K) = U_i$ pour tout $i \in I$. Alors U induit un isomorphisme spatial Φ de M sur une algèbre de von Neumann agissant dans $\oplus_{i \in I}(K_i \otimes H_i)$ tel que, pour tout $i \in I$, on ait

$$\Phi(M_{p_i}) = M_i \otimes \mathscr{L}(H_i) \qquad \text{et} \qquad \Phi(N_{p_i}) = N_i \otimes \mathscr{L}(H_i).$$

Par construction, les algèbres N_i sont de genre dénombrable.

La dernière assertion de la proposition résulte immédiatement des lemmes 2.3 et 2.4.

2.6. — *Remarque.* — Soient M une algèbre de von Neumann, N une sous-algèbre de von Neumann semi-finie de M, et τ une trace normale fidèle semi-finie sur N. Tout projecteur $q \neq 0$ dans $Z(N)$ majore un projecteur $f \neq 0$ appartenant à N, de genre dénombrable dans N et tel que $\tau(f) < +\infty$. Alors, en reprenant la démonstration de la proposition 2.5, on voit que, pour tout projecteur non nul $q \in Z(N)$, il existe un projecteur non nul $p \in Z(N)$ majoré par q et une famille $(f_j)_{j \in J}$ de projecteurs de N, deux à deux orthogonaux de somme p, équivalents et de genre dénombrable dans N, et tels que $\tau(f_j) < +\infty$ pour tout $j \in J$.

On en déduit l'existence des objets indiqués dans la proposition 2.5 (i), avec la propriété supplémentaire suivante : pour tout $i \in I$ et tout projecteur minimal $e \in \mathscr{L}(H_i)$, l'élément $1 \otimes e$ de $N_i \otimes \mathscr{L}(H_i)$ est tel que $\tau \circ \Phi^{-1}(1 \otimes e) < +\infty$.

2.7. PROPOSITION. — *Soient M une algèbre de von Neumann, et φ un élément de $P(M)$ strictement semi-fini. A isomorphisme spatial près, il existe une partition de l'unité $(p_i)_{i \in I}$ dans $Z(M_\varphi)$ possédant les propriétés suivantes*

1° *pour tout $x \in M^+$, on a $\varphi(x) = \sum_{i \in I} \varphi(p_i x p_i) = \sum_{i \in I} \varphi^{p_i}(p_i x p_i)$;*

2° *pour tout $i \in I$, l'algèbre M_{p_i} est de la forme $M^i \otimes \mathscr{L}(H_i)$ et φ^{p_i} est de la forme $\psi_i \otimes \tau_i$, où ψ_i est une forme linéaire positive normale fidèle sur M^i, et où τ_i est la trace canonique sur $\mathscr{L}(H_i)$.*

De plus, le centralisateur M_φ *de* φ *est isomorphe à* $\prod_{i \in I} M^i_{\psi_i} \otimes \mathscr{L}(H_i)$, *où le centralisateur* $M^i_{\psi_i}$ *de* ψ_i *est une algèbre de von Neumann finie de genre dénombrable.*

Posons $N = M_\varphi$. D'après la proposition 2.5, on peut supposer, à isomorphisme spatial près, qu'il existe une partition de l'unité $(p_i)_{i \in I}$ dans $Z(N)$ telle que $M_{p_i} = M^i \otimes \mathscr{L}(H_i)$ et $N_{p_i} = N^i \otimes \mathscr{L}(H_i)$, où N^i est de genre dénombrable. D'après la remarque 2.6, on peut supposer en outre que $\varphi^{p_i}(1 \otimes e) < +\infty$ pour tout projecteur minimal e de $\mathscr{L}(H_i)$. Comme $p_i \in M_\varphi$ pour tout $i \in I$, la condition 1° est vérifiée ([11], th. 3.6).

Considérant désormais seulement φ^{p_i} sur M_{p_i}, nous supposerons que $M = M^1 \otimes \mathscr{L}(H)$ et $N = M_\varphi = N^1 \otimes \mathscr{L}(H)$, le poids φ étant strictement semi-fini et tel que $\varphi(1 \otimes e) < +\infty$ pour tout projecteur minimal e de $\mathscr{L}(H)$. Pour tout $x \in (N^1)^+$ et tout projecteur minimal e de $\mathscr{L}(H)$, on a évidemment $\varphi(x \otimes e) < +\infty$. De plus, si f est un autre projecteur minimal de $\mathscr{L}(H)$, vérifions que $\varphi(x \otimes e) = \varphi(x \otimes f)$. Soit u une isométrie partielle de $\mathscr{L}(H)$ telle que $uu^* = e$ et $u^* u = f$. On a alors $1 \otimes u \in M_\varphi$, d'où

$$\begin{aligned}\varphi(x \otimes e) &= \varphi[(1 \otimes u)(x \otimes 1)(1 \otimes u^*)] = \varphi[(1 \otimes u^*)(1 \otimes u)(x \otimes 1)] \\ &= \varphi[(1 \otimes f)(x \otimes 1)] = \varphi(x \otimes f).\end{aligned}$$

On voit donc que $x \mapsto \varphi(x \otimes e)$ est une trace finie fidèle sur $(N^1)^+$ qui ne dépend pas du projecteur minimal de $\mathscr{L}(H)$ considéré. Notons φ_1 cette trace, et τ la trace canonique sur $\mathscr{L}(H)$, et désignons par J l'idéal bilatère des opérateurs de rang fini dans H. Comme les traces $\varphi \mid N^+$ et $\varphi_1 \otimes \tau$ coïncident sur l'idéal bilatère $N^1 \otimes J$ ultrafaiblement dense dans N, elles sont égales.

Par ailleurs, puisque φ est un poids strictement semi-fini, il existe une espérance conditionnelle unique T de M sur N telle que $\varphi = \varphi \circ T$. D'après le lemme 2.3, il existe $T_1 \in E(M^1, N^1)$ telle que $T = T_1 \otimes 1$. Notons ψ_1 la forme positive normale $\varphi_1 \circ T_1$ sur M^1. D'après la proposition 2.1 (ii), on a $\varphi = (\varphi_1 \otimes \tau) \circ (T_1 \otimes 1) = \psi_1 \otimes \tau$.

Vérifions enfin, pour achever la démonstration de la proposition, que $M_\varphi = M^1_{\psi_1} \otimes \mathscr{L}(H)$. On a $M^1_{\psi_1} \otimes \mathscr{L}(H) \subset M_\varphi$ car $\sigma^\varphi_t = \sigma^{\psi_1}_t \otimes 1$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. D'autre part, étant donné que $\psi_1 = \varphi_1 \circ T_1$, où φ_1 est une trace sur N^1, on a $N^1 \subset M^1_{\psi_1}$, d'où $M_\varphi = N^1 \otimes \mathscr{L}(H) = M^1_{\psi_1} \otimes \mathscr{L}(H)$.

2.8. Corollaire. — *Avec les données précédentes, supposons que* M_φ *soit un facteur. Alors il existe un facteur de genre dénombrable* M^1, *un* *espace hilbertien H, une forme linéaire positive normale fidèle ψ sur M^1, et un isomorphisme spatial de M sur $M^1 \otimes \mathscr{L}(H)$ transportant φ sur $\psi \otimes \tau$, où τ désigne la trace canonique sur $\mathscr{L}(H)$. De plus M^1 est un facteur, et on a $M_\varphi = M^1_\psi \otimes \mathscr{L}(H)$.*

Ce corollaire résulte immédiatement de la proposition 2.7. Rappelons seulement que le centre de M étant contenu dans celui de M_φ, ici M est un facteur.

Signalons que de tels poids strictement semi-finis dont le centralisateur est un facteur se rencontrent par exemple dans l'étude des facteurs de type III_λ avec $\lambda \in \,]0, 1[\,$ ([3], chap. V).

3. Groupe modulaire d'une espérance conditionnelle

3.1. Lemme. — *Soient M une algèbre de von Neumann, et N une sous-algèbre de von Neumann de M. Soient $\varphi \in P(N)$ et $T \in E(M, N)$, et posons $\psi = \varphi \circ T$. Alors pour tout $t \in \mathbf{R}$ on a $\sigma_t^\psi(N^c) = N^c$, et l'automorphisme $\sigma_t^\psi \mid N^c$ ne dépend pas de φ, mais seulement de T.*

Puisque ψ est réduit par N (*voir* 1.1), on a $\sigma_t^\psi(N) = N$, d'où $\sigma_t^\psi(N^c) = N^c$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Soit φ_1 un autre élément de $P(N)$. Posons

$$\psi_1 = \varphi_1 \circ T \qquad \text{et} \qquad u = (D\psi_1 : D\psi).$$

D'après le lemme 1.6, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $u_t = (D\varphi_1 : D\varphi)_t \in N$, d'où

$$\sigma_t^{\psi_1}(x) = u_t \sigma_t^\psi(x) u_t^* = \sigma_t^\psi(x) \quad \text{pour tout } x \in N^c.$$

3.2. Définitions. — Soient M une algèbre de von Neumann, N une sous-algèbre de von Neumann de M, et $T \in E(M, N)$.

(*a*) Soit $\varphi \in P(N)$. D'après le lemme 3.1, l'automorphisme $\sigma_t^{\varphi \circ T} | N^c$ ne dépend pas de φ. Il sera noté σ_t^T. Nous dirons que $\sigma^T : t \mapsto \sigma_t^T$ est *le groupe modulaire* de l'espérance conditionnelle T.

(*b*) Nous appellerons *centralisateur* de T, et nous noterons M_T, l'algèbre des points fixes du groupe σ^T dans N^c. Compte tenu de la définition de σ^T, pour tout $\psi \in P(M)$ tel que $\psi = \psi \circ T$ on a $M_T = N^c \cap M_\psi$.

3.3. Proposition. — *Soient M une algèbre de von Neumann, N une sous-algèbre de von Neumann de M, et $T \in E(M\ N)$.*

(i) *Soit α un automorphisme de M. Alors $S = \alpha \circ T \circ \alpha^{-1}$ est un élément de $E(M, \alpha(N))$ et, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $\sigma_t^S = \alpha \circ \sigma_t^T \circ \alpha^{-1}$.*

(ii) *Soit p un projecteur de $Z(N)$, et posons $T^p = T \mid M_p$. Alors le commutant relatif de N_p dans M_p est $(N^c)_p$; il est stable par σ_t^T pour tout $t \in \mathbf{R}$, et on a $\sigma_t^{T^p} = \sigma_t^T \mid N_p^c$.*

(iii) *Soit Q une autre sous-algèbre de von Neumann de M telle que $N \subset Q \subset M$, et soit $S \in E(M, Q)$. On suppose que $T = T \circ S$. Alors Q^c est stable par σ_t^T pour tout $t \in \mathbf{R}$, et l'on a $\sigma_t^S = \sigma_t^T \mid Q^c$.*

(iv) *Soient Q une autre algèbre de von Neumann, R une sous-algèbre de von Neumann de Q, et $S \in E(Q, R)$. Alors dans $M \otimes Q$, on a $(N \otimes R)^c = N^c \otimes R^c$ et $\sigma_t^{T \otimes S} = \sigma_t^T \otimes \sigma_t^S$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.*

(i) Soit $\varphi \in P(\alpha(N))$, et posons $\psi = \varphi \circ S$. On a $\varphi \circ \alpha \in P(N)$ et $\psi \circ \alpha = \varphi \circ S \circ \alpha = \varphi \circ \alpha \circ T$. Ainsi le poids $\psi \circ \alpha$ est réduit par N, et T est l'élément de $E(M, N)$ défini par ce poids. Pour tout $x \in N^c$ et tout $t \in \mathbf{R}$, on a donc

$$\sigma_t^T(x) = \sigma_t^{\psi \circ \alpha}(x) = \alpha^{-1} \circ \sigma_t^{\psi} \circ \alpha(x) = \alpha^{-1} \circ \sigma_t^S \circ \alpha(x).$$

(ii) On vérifie sans difficultés que $(N^c)_p$ est le commutant relatif de N_p dans M_p. Soit $\varphi \in P(N)$ tel que $p \in N_{\varphi}$, et posons $\psi = \varphi \circ T$. Le poids $\psi^p = \psi \mid M_p^+$ est évidemment réduit par N_p et l'élément de $E(M_p, N_p)$ qu'il définit est T^p. Alors, pour tout $t \in \mathbf{R}$ et tout $x \in N_p^c$, on a

$$\sigma_t^{T^p}(x) = \sigma_t^{\psi^p}(x) = \sigma_t^{\psi}(x) = \sigma_t^T(x).$$

(iii) Soit $\varphi \in P(N)$. Posons $\psi = \varphi \circ T$ et $\psi' = \psi \mid Q^+$. Alors ψ' est un poids normal fidèle semi-fini sur Q, et on a $\psi = \psi' \circ S$. Il en résulte que

$$\sigma_t^S(x) = \sigma_t^{\psi}(x) = \sigma_t^T(x) \quad \text{pour tout } x \in Q^c \text{ et tout } t \in \mathbf{R}.$$

(iv) Soient $\varphi_1 \in P(N)$ et $\varphi_2 \in P(R)$. Posons $\psi_1 = \varphi_1 \circ T$ et $\psi_2 = \varphi_2 \circ S$. D'après la proposition 2.1, on a $\psi_1 \otimes \psi_2 = (\varphi_1 \otimes \varphi_2) \circ (T \otimes S)$. Il en résulte que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\sigma_t^{T \otimes S} = \sigma_t^{\psi_1 \otimes \psi_2} \mid N^c \otimes R^c = \sigma_t^{\psi_1} \otimes \sigma_t^{\psi_2} \mid N^c \otimes R^c = \sigma_t^T \otimes \sigma_t^S.$$

3.4. PROPOSITION. — *Soient M une algèbre de von Neumann, N une sous-algèbre de von Neumann de M, et $T \in E(M, N)$. Il existe $S \in E(M, N^{cc})$ unique telle que $T \circ S = T$, et on a $\sigma^S = \sigma^T$.*

Soit $\varphi \in P(N)$, et posons $\psi = \varphi \circ T$. Comme N réduit ψ, on a $\sigma_t^{\psi}(N^{cc}) = N^{cc}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, et il est clair que $\psi \mid (N^{cc})^+$ est semi-fini. D'après le théorème 1.1, il existe $S \in E(M, N^{cc})$ unique telle que $\psi \circ S = \psi$.

Pour tout $x \in M^+$, on a

$$\psi[T(x)] = \psi(x) = \psi(S(x)) = \psi(T \circ S(x)),$$

d'où $T = T \circ S$ en vertu de l'assertion d'unicité dans le théorème 1.1. Cela démontre l'existence de S. Si S_1, $S_2 \in E(M, N^{cc})$ vérifient

$$T \circ S_1 = T \circ S_2 = T \quad \text{pour tout } x \in M^+,$$

on a

$$\psi[S_1(x)] = \psi[T(S_1(x))] = \psi[T(S_2(x))] = \psi(S_2(x)),$$

d'où $S_1 = S_2$. Donc S est unique. Enfin on a $\sigma^S = \sigma^T$ d'après la proposition 3.3 (iii).

3.5. PROPOSITION. — *Soient M une algèbre de von Neumann, N une sous-algèbre de von Neumann de M, et $T \in E(M, N)$. Pour tout $x \in N^c$ et tout $y \in M$, il existe une fonction unique $F_{x,y}$ définie sur la bande*

$$B_1 = \{ z \in \mathbf{C}, 0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 1 \},$$

à valeurs dans N, bornée par $\| x \| . \| y \|$ et ultrafaiblement continue sur B_1, analytique à l'intérieur de B_1, et telle que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on ait

$$F_{x,y}(t) = T(\sigma_t^T(x)\, y) \qquad \textit{et} \qquad F(t+i) = T(y\, \sigma_t^T(x)).$$

Soient φ une forme positive normale sur N, et p son support. Soit $\varphi' \in P(N)$ tel que $\varphi' \mid N_p^+ = \varphi \mid N_p^+$. Posons $\psi = \varphi' \circ T$, $T^p = T \mid M_p$, $\varphi^p = \varphi \mid N_p$ et $\psi^p = \varphi^p \circ T^p$. Comme ψ^p est une forme positive normale fidèle sur M_p, il existe une fonction $F_{\varphi,x,y} \in A_1$ unique telle que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on ait

$$\begin{aligned} F_{\varphi,x,y}(t) &= \langle \psi^p, \sigma_t^{\psi^p}(px)\, pyp \rangle = \langle \varphi^p, T^p(\sigma_t^{\psi}(px)\, pyp) \rangle \\ &= \langle \varphi^p, T^p(p\, \sigma_t^{\psi}(x)\, pyp) \rangle \\ &= \langle \varphi^p, p\, T(\sigma_t^T(x)\, y)\, p \rangle = \langle \varphi, T(\sigma_t^T(x)\, y) \rangle \end{aligned}$$

et

$$F_{\varphi,x,y}(t+i) = \langle \psi^p, pyp\, \sigma_t^{\psi^p}(px) \rangle = \langle \varphi, T(y\, \sigma_t^T(x)) \rangle.$$

Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$|F_{\varphi,x,y}(t)| \leqslant \| \varphi \| . \| x \| . \| y \|$$

et

$$|F_{\varphi,x,y}(t+i)| \leqslant \| \varphi \| . \| x \| . \| y \|.$$

En utilisant le théorème de Phragmen-Lindelöf, on en déduit que

$$|F_{\varphi,x,y}(z)| \leqq \| \varphi \| . \| x \| . \| y \| \quad \text{pour tout } z \in B_1.$$

Considérons maintenant un élément φ de N, et soit $w \mid \varphi \mid$ sa décomposition polaire. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a alors

$$\langle \varphi, T(\sigma_t^T(x)\, y) \rangle = \langle \mid \varphi \mid, T(w\, \sigma_t^T(x)\, y) \rangle = \langle \mid \varphi \mid, T(\sigma_t^T(x)\, wy) \rangle$$
$$= F_{\mid \varphi \mid, x, wy}(t),$$

et

$$\langle \varphi, T(y\, \sigma_t^T(x)) \rangle = \langle \mid \varphi \mid, T(wy\, \sigma_t^T(x)) \rangle = F_{\mid \varphi \mid, x, wy}(t+i).$$

En posant $F_{\varphi, x, y} = F_{|\varphi|, x, wy}$, on étend ainsi la définition de $F_{\varphi,x,y}$ aux éléments de N_*. L'application $\varphi \mapsto F_{\varphi,x,y}$ est linéaire, et pour tout $z \in B_1$, on a $\mid F_{\varphi,x,y}(z) \mid \leqslant \| \varphi \| . \| x \| . \| y \|$. Pour tout $z \in B_1$, il existe donc un élément $\mathrm{F}_{x,y}(z)$ unique dans N tel que $\langle \varphi, F_{x,y}(z) \rangle = F_{\varphi,x,y}(z)$ pour tout $\varphi \in N_*$, et on a $\| F_{x,y}(z) \| \leqslant \| x \| . \| y \|$ sur B_1.

Il est clair que $z \mapsto F_{x,y}(z)$ est ultrafaiblement continue sur B_1 et holomorphe à l'intérieur de B_1 pour la topologie faible du dual, ou ce qui revient au même, analytique pour la topologie normique ([9], sec. 3.10, 3.11).

3.6. Définition. — Soient M une algèbre de von Neumann, et N une sous-algèbre de von Neumann de M. Soient $T \in E(M, N)$, et $\alpha : t \mapsto \alpha_t$ un groupe à un paramètre continu d'automorphismes de N^c. Nous dirons que T *vérifie les conditions* K. M. S. *relativement à* α si, pour tous $x, y \in N^c$, il existe une fonction $F_{x,y}$ définie sur la bande B_1, à valeurs dans $Z(N)$, bornée et ultrafaiblement continue sur B_1, analytique à l'intérieur de B_1 et telle que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on ait

$$F_{x,y}(t) = T(\alpha_t(x)\, y) \qquad \text{et} \qquad F_{x,y}(t+i) = T(y\, \alpha_t(x)).$$

3.7. Remarques. — (*a*) Conservons les notations de la définition 3.6, et supposons que T vérifie les conditions K. M. S. relativement à α. Prenons $x \in N^c$ et $y \in Z(N^c)$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a alors

$$F_{x,y}(t) = T(\alpha_t(x)\, y) = T(y\, \alpha_t(x)) = F_{x,y}(t+i).$$

Par conséquent, $F_{x,y}$ se prolonge en une fonction holomorphe, périodique de période i, bornée sur $\mathbf{C}$. Elle est donc constante sur B_1, et on en déduit que

$$T(\alpha_t(x)\, y) = T(xy) \quad \text{pour tous } t \in \mathbf{R},\ x \in N^c \text{ et } y \in Z(N^c).$$

En prenant $y = 1$, on montre ainsi que $T(\alpha_t(x)) = T(x)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ et tout $x \in N^c$.

En prenant $x \in Z(N^c)$ et $y = (\alpha_t(x)-x)^*$, on voit que $\alpha_t(x) = x$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ et tout $x \in Z(N^c)$.

(*b*) Conservons toujours les notations de 3.6. Soient $x \in N^c$ et $y \in N$. On a

$$T(x)\,y = T(xy) = T(yx) = y\,T(x), \qquad \text{d'où} \quad T(N^c) \subset Z(N).$$

Soient maintenant x et y deux éléments de N^c. Comme les fonctions $t \mapsto T(\sigma_t^T(x)\,y)$ et $t \mapsto T(y\,\sigma_t^T(x))$ prennent leurs valeurs dans $Z(N)$, la fonction $\mathrm{F}_{x,y}$ associée au couple x, y dans la proposition 3.5 prend également ses valeurs dans $Z(N)$. Ainsi la proposition 3.5 montre que T vérifie les conditions K. M. S. relativement au groupe modulaire σ^T. En particulier, il résulte de (*a*) ci-dessus que $Z(N^c) \subset M_T$ et que $T(\sigma_t^T(x)) = T(x)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ et tout $x \in N^c$.

3.8. PROPOSITION. — *Soient M une algèbre de von Neumann, et N une sous-algèbre de von Neumann de M. Soient $T \in E(M, N)$, et $\alpha : t \mapsto \alpha_t$ un groupe à un paramètre continu d'automorphismes de N^c. On suppose que T vérifie les conditions* K. M. S. *relativement à α. Alors α est le groupe modulaire σ^T de T.*

En utilisant la proposition 2.5, on peut suppose qu'il existe une partition de l'unité $(p_i)_{i \in I}$ dans $Z(N)$ telle que

$$M_{p_i} = M_i \otimes \mathscr{L}(H_i) \qquad \text{et} \qquad N_{p_i} = N_i \otimes \mathscr{L}(H_i),$$

où N_i est une sous-algèbre de von Neumann de genre dénombrable de M_i. D'après 3.7, pour tout $t \in \mathbf{R}$ et tout $i \in I$, on a

$$\alpha_t(p_i) = p_i \qquad \text{et} \qquad \sigma_t^T(p_i) = p_i.$$

Posons

$$\alpha_t^i = \alpha_t \,|\, N_{p_i}^c \qquad \text{et} \qquad T_i = T \,|\, M_{p_i}.$$

Alors $\sigma_t^{T_i} = \sigma_t^T \,|\, N_{p_i}^c$ (prop. 3.3 (ii)). Pour démontrer que $\sigma_t^T = \alpha_t$, il suffit de démontrer que $\alpha_t^i = \sigma_t^{T_i}$ pour tout $i \in I$. D'autre part, T_i vérifie évidemment les conditions K. M. S. relativement à $t \mapsto \alpha_t^i$.

En raison de ce qui précède, nous pouvons donc supposer que $M = M_1 \otimes \mathscr{L}(H)$ et $N = N_1 \otimes \mathscr{L}(H)$, où N_1 est une sous-algèbre de von Neumann de genre dénombrable de M_1. D'après le lemme 2.3, il existe un élément T_1 de $E(M_1, N_1)$ tel que $T = T_1 \otimes 1$. Étant donné que $N^c = N_1^c \otimes 1$, pour tout $t \in \mathbf{R}$, il existe un automorphisme unique α_t^1 de N_1^c tel que $\alpha_t = \alpha_t^1 \otimes 1$. De plus, T_1 vérifie évidemment les conditions K. M. S. relativement au groupe $t \mapsto \alpha_t^1$. En utilisant le fait que $\sigma_t^T = \sigma_t^{T_1} \otimes 1$ (prop. 3.3 (iv)), on est donc ramené à démontrer la proposition en supposant que N est de genre dénombrable.

Soit alors φ un état normal fidèle sur N. Posons $\psi = \varphi \circ T$ et $\psi' = \psi \mid N^c$. Comme ψ est réduit par N (*voir* th. 1.1), il est également réduit par N^c et, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $\sigma_t^{\psi'} = \sigma_t^{\psi} \mid N^c = \sigma_t^T$.

Soient x et y deux éléments de N^c, et $F_{x,y}$ la fonction associée au couple x, y dans la définition 3.6. La fonction $\psi \circ F_{x,y}$ appartient à A_1; notons-la $G_{x,y}$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$G_{x,y}(t) = \langle \psi', F_{x,y}(t) \rangle = \langle \varphi, T(\alpha_t(x)y) \rangle = \psi'(\alpha_t(x)y)$$

et de même, $G_{x,y}(t+i) = \psi'(y\,\alpha_t(x))$. Ainsi l'état ψ' vérifie les conditions K. M. S. relativement à α. Alors, d'après ([12], th. 13.2), le groupe d'automorphismes α est le groupe modulaire de ψ', c'est-à-dire le groupe σ^T.

3.9. Proposition. — *Soient M une algèbre de von Neumann, N une sous-algèbre de von Neumann de M, et $T \in E(M, N)$. Soient $x \in N^c$*, et *λ un nombre réel strictement positif. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\sigma_t^T(x) = \lambda^{it} x$ pour tout $t \in \mathbf{R}$;*

(ii) *$T(xy) = \lambda\, T(yx)$ pour tout $y \in M$;*

(iii) *$T(xy) = \lambda\, T(yx)$ pour tout $y \in N^c$.*

(i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons que $\sigma_t^T(x) = \lambda^{it}(x)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, et soit $y \in M$. Considérons la fonction $F_{x,y}$ associée au couple x, y dans la proposition 3.5. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$F_{x,y}(t) = T(\sigma_t^T(x)y) = \lambda^{it}\, T(xy),$$

d'où il résulte que

$$F_{x,y}(z) = \lambda^{iz}\, T(xy) \quad \text{pour tout } z \in B_1.$$

En particulier, si $z = t+i$, on obtient $F_{x,y}(t+i) = \lambda^{it-1}\, T(xy)$. Comme d'autre part on a $F_{x,y}(t+i) = T(y\,\sigma_t^T(x)) = \lambda^{it}\, T(yx)$, on en déduit que $T(xy) = \lambda\, T(yx)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Évident.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Supposons que $T(xy) = \lambda\, T(yx)$ pour tout $y \in N^c$. Soit $y \in N^c$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} T(\sigma_t^T(x)\,y) &= T(\sigma_t^T(x\,\sigma_{-t}^T(y)) = T(x\,\sigma_{-t}^T(y)) \\ &= \lambda\, T(\sigma_{-t}^T(y)\,x) = \lambda\, T(y\,\sigma_t^T(x)). \end{aligned}$$

Ainsi la fonction $F_{x,y}$, associée au couple x, y, est telle que

$$F_{x,y}(t) = \lambda\, F_{x,y}(t+i)$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$. Posons

$$G_{x,y}(z) = \lambda^{-iz} F_{x,y}(z) \quad \text{pour tout } z \in B_1.$$

Si $t \in \mathbf{R}$, on a alors

$$G_{x,y}(t+i) = \lambda^{-it+1} F_{x,y}(t+i) = \lambda^{-it} F_{x,y}(t) = G_{x,y}(t).$$

Par conséquent, G est une fonction bornée et ultrafaiblement continue sur B_1, analytique à l'intérieur de B_1, périodique et de période i. C'est donc une fonction constante.

On a ainsi montré que $T(\sigma_t^T(x)\,y) = \lambda^{it}\, T(xy)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ et tout $y \in N^c$. En prenant $y = (\sigma_t^T(x) - \lambda^{it} x)^*$, on en déduit que $\sigma_t^T(x) = \lambda^{it} x$.

3.10. Corollaire. — *Soient M une algèbre de von Neumann, N une sous-algèbre de von Neumann de M, et $T \in E(M, N)$. Pour qu'un élément x de M soit dans M_T, il faut et il suffit que l'on ait $T(xy) = T(yx)$ pour tout $y \in M$. En particulier, le centralisateur M_T de T est une algèbre de von Neumann finie.*

Compte tenu de la proposition 3.9, pour démontrer la première assertion de 3.10, il suffit de montrer que, si x est tel que $T(xy) = T(yx)$ pour tout $y \in M$, alors $x \in N^c$. Pour tout $y \in N$, on a

$$y\,T(x) = T(yx) = T(xy) = T(x)\,y,$$

d'où $T(x) \in Z(N)$. Comme $x^* x$ possède la même propriété que x, on a aussi $T(xx^*) = T(x^* x) \in Z(N)$. Pour tout $y \in N$, on a alors

$$\begin{aligned} &T(y^* x^* x y) = y^*\, T(x^* x)\, y = y^* y\, T(x^* x), \\ &T(x^* y^* x y) = T(x^* y^* x)\, y = T(x x^* y^*)\, y = T(x x^*)\, y^* y = y^* y\, T(x^* x), \\ &T(y^* x^* y x) = y^*\, T(x^* y x) = y^*\, T(x x^*)\, y = y^* y\, T(x^* x), \\ &T(x^* y^* y x) = T(x x^* y^* y) = T(x x^*)\, y^* y = y^* y\, T(x^* x), \end{aligned}$$

d'où il résulte que $T[(xy-yx)^*(xy-yx)] = 0$. On en déduit que $xy = yx$ pour tout $y \in N$, d'où $x \in N^c$.

L'algèbre de von Neumann M_T est finie car, si $u \in M_T$ est tel que $u^* u = 1$, on aura $T(uu^*) = T(u^* u) = T(1)$, d'où $T(1-uu^*) = 0$ et $uu^* = 1$.

3.11 PROPOSITION. — *Soient M une algèbre de von Neumann, et N une sous-algèbre de von Neumann espérée de M.*

(i) *N^c est semi-finie si et seulement s'il existe $T \in E(M, N)$ et un groupe à un paramètre fortement continu v d'unitaires de N^c tel que $\sigma_t^T(x) = v_t x v_t^*$ pour tout $x \in N^c$ et tout $t \in \mathbf{R}$. De plus, si cette condition est vérifiée, tout élément de $E(M, N)$ possède une propriété analogue.*

(ii) *N^c est finie si et seulement s'il existe $T \in E(M, N)$ tel que $\sigma_t^T = 1$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.*

(iii) *N^c est abélienne si, et seulement si, pour tout $T \in E(M, N)$ et tout $t \in \mathbf{R}$, on a $\sigma_t^T = 1$*

D'après la proposition 2.5, nous pouvons supposer qu'il existe une partition de l'unité $(p_i)_{i \in I}$ dans $Z(N)$ telle que

$$M_{p_i} = M_i \otimes \mathscr{L}(H_i) \qquad \text{et} \qquad N_{p_i} = N_i \otimes \mathscr{L}(H_i),$$

où N_i est une sous-algèbre de von Neumann de genre dénombrable de M_i. Alors N^c est isomorphe au produit $\prod_{i \in I} N_i^c \otimes 1$, et sera donc semi-finie (resp. finie, abélienne) si, et seulement si, $N_{p_i}^c = N_i^c \otimes 1$ l'est pour tout $i \in I$. Par ailleurs, soit $T \in E(M, N)$. Pour tout $i \in I$, notons S_i l'unique élément de $E(M_i, N_i)$ tel que $T \mid M_{p_i} = S_i \otimes 1$. Compte tenu de la proposition 3.3 (ii) et (iv), σ^T sera induit par un groupe à un paramètre continu d'unitaires de N^c (resp. trivial) si, et seulement si, S_i possède, pour tout $i \in I$, une propriété semblable.

En raison de tout cela, nous supposerons désormais M de genre dénombrable. Soient $T \in E(M, N)$, et φ un état normal fidèle sur N. Posons $\psi = \varphi \circ T$. Alors ψ est réduit par N, donc par N^c, et en posant $\psi' = \psi \mid N^c$, on a $\sigma_t^{\psi'} = \sigma_t^{\psi} \mid N^c = \sigma_t^T$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

On voit donc que, si N^c est semi-finie, pour tout $T \in E(M, N)$, le groupe d'automorphismes σ^T est induit par un groupe à paramètre continu d'unitaires de N^c. Réciproquement, s'il existe $T \in E(M, N)$ ayant cette propriété, alors N^c est semi-finie (*voir* [12], cor. 14.12).

De même, si $T \in E(M, N)$ est tel que $\sigma_t^T = 1$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, alors ψ' sera une trace, et N^c sera finie. Réciproquement, supposons que N^c

est finie. Soit τ' une trace finie fidèle sur N^c. Fixons $T \in E(M, N)$ quelconque, puis φ et ψ comme ci-dessus. Comme N^c réduit ψ, il existe $S \in E(M, N^c)$ unique telle que $\psi = \psi' \circ S$. Posons alors $\tau = \tau' \circ S$. D'après le lemme 1.6, on a $(D\psi : D\tau)_t = (D\psi' : D\tau')_t \in N^c$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. On voit donc que σ_t^τ laisse N globalement invariant, car c'est le cas pour σ_t^ψ. Donc N réduit τ. Notons T_1 l'élément de $E(M, N)$, défini par τ. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $\sigma_t^{T_1} = \sigma_t^\tau \mid N^c = \sigma_t^{\tau'} = 1$.

L'assertion (iii) se démontre de la même manière puisque N^c est abélienne si, et seulement si, tout état normal fidèle sur N^c est une trace.

3.12. *Remarque.* — Conservons les notations de 3.11, et soit $T \in E(M, N)$. Alors il existe sur N^c un poids normal fidèle strictement semi-fini admettant σ^T comme groupe modulaire. Lorsque N est de genre dénombrable, il suffit de prendre la restriction à N^c d'un état de la forme $\varphi \circ T$, où φ est un état normal fidèle sur N. Dans le cas général, nous pouvons supposer l'existence d'une partition de l'unité $(p_i)_{i \in I}$ dans $Z(N)$ avec les propriétés énoncées dans la démonstration précédente dont nous gardons les notations. Pour tout $i \in I$, étant donné que N_i est de genre dénombrable, il existe un état normal fidèle ψ_i' sur N_i^c admettant σ^{S_i} comme groupe modulaire. Notons ψ_i'' l'état correspondant sur $N_i^c \otimes 1$. Pour tout $x \in (N^c)^+$, posons $\psi''(x) = \sum \psi_i''(p_i x)$. Alors ψ'' est un poids normal fidèle strictement semi-fini sur N^c tel que $\sigma^{\psi''} = \sigma^T$.

3.13. COROLLAIRE. — *Soient M une algèbre de von Neumann, et N une sous-algèbre de von Neumann espérée de M. On suppose que M et N sont semi-finies. Alors N^c est semi-finie.*

Soient $T \in E(M, N)$, et φ une trace normale fidèle semi-finie sur N. Posons $\psi = \varphi \circ T$. Comme M est semi-finie, il existe un groupe à un paramètre fortement continu v d'unitaires de M tel que $\sigma_t^\psi(x) = v_t x v_t^*$ pour tout $x \in M$ et tout $t \in \mathbf{R}$. D'autre part, comme φ est une trace, on a $N = N_\varphi \subset M_\psi$. Il en résulte que $v_t \in N^c$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, et, d'après la proposition 3.11, l'algèbre de von Neumann N^c est semi-finie.

3.14. COROLLAIRE. — *Soient M une algèbre de von Neumann, et N une sous-algèbre de von Neumann espérée de M. On suppose que N est semi-finie et que M est engendrée par N et N^c. Alors M est semi-finie si et seulement si, N^c est semi-finie.*

Si M est semi-finie, alors N^c l'est aussi d'après le corollaire 3.13. Réciproquement, supposons N^c semi-finie. D'après la proposition 3.11 (i), il existe $T \in E(M, N)$ et un groupe à un paramètre fortement continu v d'unitaires de N^c tels que $\sigma_t^T(x) = v_t x v_t^*$ pour tout $x \in N^c$ et tout $t \in \mathbf{R}$. Soit φ une trace normale fidèle semi-finie sur N, et posons $\psi = \varphi \circ T$.

Pour tout $x \in N$, on a

$$\sigma_t^\psi(x) = \sigma_t^\varphi(x) = x = v_t x v_t^*,$$

et pour tout $x \in N^c$, on a

$$\sigma_t^\psi(x) = \sigma_t^T(x) = v_t x v_t^*$$

Donc v induit le groupe modulaire σ^ψ, et M est semi-finie.

3.15. *Problème.* — Les énoncés 3.13 et 3.14 sont-ils encore valables sans supposer que N soit espérée dans M ?

4. Dérivées de Radon-Nikodym pour les espérances conditionnelles

4.1. PROPOSITION. — *Soient M une algèbre de von Neumann, et N une sous-algèbre de von Neumann de M. Soient $\varphi \in P(N)$, et T_1, T_2 deux éléments de $E(M, N)$. Posons $\psi_1 = \varphi \circ T_1$ et $\psi_2 = \varphi \circ T_2$. Alors $(D\psi_2 : D\psi_1)$ prend ses valeurs dans N^c et ne dépend pas de φ, mais seulement de T_1 et T_2. De plus, $(D\psi_2 : D\psi_1)$ est un cocycle pour tout poids de la forme $\varphi' \circ T_1$ avec $\varphi' \in P(N)$.*

D'après le lemme 1.7, le ψ_1-cocycle $(D\psi_2 : D\psi_1)$ prend ses valeurs dans N^c. D'autre part, pour tout $\varphi \in P(N)$ et tout $t \in \mathbf{R}$, on a $\sigma_t^{\varphi' \circ T_1} \mid N^c = \sigma_t^{\psi_1} \mid N^c$ (lemme 3.1). On en déduit que $(D\psi_2 : D\psi_1)$ est un cocycle pour tout poids $\varphi' \circ T_1$ avec $\varphi' \in P(N)$.

Montrons que $(D\psi_2 : D\psi_1)$ ne dépend pas de φ. Soit φ' un autre élément de $P(N)$, et posons $\psi_1' = \varphi' \circ T_1$ et $\psi_2' = \varphi' \circ T_2$. Il résulte du lemme 1.6 que

$$(D\psi_2' ; D\psi_2)_t = (D\psi_1' : D\psi_1)_t \in N \quad \text{pour tout } t \in \mathbf{R},$$

d'où

$$\begin{aligned}(D\psi_2' : D\psi_1')_t &= (D\psi_2' : D\psi_2)_t (D\psi_2 : D\psi_1)_t (D\psi_1 : D\psi_1')_t \\ &= (D\psi_2' : D\psi_2)_t (D\psi_1' : D\psi_1)_t^* (D\psi_2 : D\psi_1)_t \\ &= (D\psi_2 : D\psi_1)_t.\end{aligned}$$

4.2. DÉFINITION. — Soient M une algèbre de von Neumann, N une sous-algèbre de von Neumann de M, et $T \in E(M, N)$.

(*a*) Nous appellerons *T-cocycle* ou cocycle pour T une application $u : t \mapsto u_t$ fortement continue de $\mathbf{R}$ dans l'ensemble des unitaires de N^c qui soit un 1-cocycle pour l'action du groupe σ^T sur les unitaires de N^c, autrement dit telle que $u_{t_1+t_2} = u_{t_1} \sigma^T_{t_1}(u_{t_2})$ pour tous t_1, $t_2 \in \mathbf{R}$. Cela signifie encore que u est un $\varphi \circ T$ cocycle pour tout poids $\varphi \in P(N)$.

(*b*) Soit u un unitaire de N^c. Alors l'application constante égale à u est une cochaîne de degré zéro pour l'action de σ^T. Son cobord $t \mapsto u^* \sigma^T_t(u)$ est un T-cocycle que nous appellerons le *T-cobord dérivé de u*.

(*c*) Avec les données de la proposition 4.1, la fonction $t \mapsto (D\psi_2 : D\psi_1)_t$, qui ne dépend que de T_1 et T_2, sera appelée la *dérivée de Radon-Nikodym* de T_2 par rapport à T_1, et sera notée $t \mapsto (DT_2 : DT_1)_t$. D'après la proposition 4.1, cette fonction est un T_1-cocycle.

4.3. Proposition. — *Soient M une algèbre de von Neumann, N une sous-algèbre de von Neumann de M, et T_1, T_2 deux éléments de $E(M, N)$.*

(i) *Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a*

$$(DT_1 : DT_2)_t = (DT_2 : DT_1)_t^*.$$

(ii) *Si T_3 est un autre élément de $E(M, N)$, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a*

$$(DT_3 : DT_1)_t = (DT_3 : DT_2)_t (DT_2 : DT_1)_t.$$

(iii) *Si α est un automorphisme de M, alors $\alpha \circ T_1 \circ \alpha^{-1}$ et $\alpha \circ T_2 \circ \alpha^{-1}$ sont des éléments de $E(M, \alpha(N))$ et, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a*

$$(D\alpha \circ T_2 \circ \alpha^{-1} : D\alpha \circ T_1 \circ \alpha^{-1})_t = \alpha[DT_2 : DT_1)_t].$$

(iv) *Si p est un projecteur de N, posons $T_1^p = T_1 \mid M_p$ et $T_2^p = T_2 \mid M_p$. Alors T_1^p et T_2^p sont des éléments de $E(M_p, N_p)$ et, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a*

$$(DT_2^p : DT_1^p)_t = p(DT_2 : DT_1)_t.$$

(v) *Soit Q une autre sous-algèbre de von Neumann de M telle que $N \subset Q \subset M$, et soit $S \in E(M, Q)$. On suppose que $T_1 = T_1 \circ S$. Pour que $T_2 = T_2 \circ S$, il faut et il suffit que $(DT_2 : DT_1)_t \in Q$ poir tout $t \in \mathbf{R}$, et on a alors*

$$(DT_2 : DT_1)_t = (DT_2 \mid Q : DT_1 \mid Q)_t \quad \textit{pour tout } t \in \mathbf{R}.$$

(vi) *Soient Q une autre algèbre de von Neumann, R une sous-algèbre de von Neumann de Q, et S_1, S_2 deux éléments de $E(Q, R)$. Alors, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a*

$$(DT_2 \otimes S_2 : DT_1 \otimes S_1)_t = (DT_2 : DT_1)_t \otimes (DS_2\, DS_1)_t.$$

(i) et (ii) Soit $\varphi \in P(N)$, et posons $\varphi_i = \varphi \circ T_i$ pour $i = 1, 2, 3$. D'après [3] (lemme 1.2.3 (a)), pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$(DT_1 : DT_2)_t = (D\varphi_1 : D\varphi_2)_t = (D\varphi_2 : D\varphi_1)_t^* = (DT_2 : DT_1)_t^*$$

et

$$\begin{aligned}(DT_3 : DT_1)_t = (D\varphi_3 : D\varphi_1)_t &= (D\varphi_3 : D\varphi_2)_t (D\varphi_2 : D\varphi_1)_t \\ &= (DT_3 : DT_2)_t (DT_2 : DT_1)_t\end{aligned}$$

(iii) Soit $\varphi \in P(\alpha(N))$. Pour $i = 1, 2$, posons $S_i = \alpha \circ T_i \circ \alpha^{-1}$ et $\psi_i = \varphi \circ S_i$. On a $\varphi \circ \alpha \in P(N)$, donc le poids $\psi_i \circ \alpha = (\varphi \circ \alpha) \circ T_i$ est réduit par N, et T_i est l'élément de $E(M, N)$ qu'il définit. D'après le lemme 1.3, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned}(DT_2 : DT_1)_t = (D\psi_2 \circ \alpha : D\psi_1 \circ \alpha)_t &= \alpha^{-1}[(D\psi_2 : D\psi_1)_t] \\ &= \alpha^{-1}[(DS_2 : DS_1)_t].\end{aligned}$$

(iv) Soit $\varphi \in P(N)$ tel que $p \in N_\varphi$. Posons $\varphi_1 = \varphi \circ T_1$ et $\varphi_2 = \varphi \circ T_2$. On a alors $p \in N_\varphi \subset M_{\varphi_1} \cap M_{\varphi_2}$. D'autre part, les poids $\varphi_1^p = \varphi_1 \mid M_p^+$ et $\varphi_2^p = \varphi_2 \mid M_p^+$ sont évidemment réduits par N_p. Les éléments de $E(M_p, N_p)$ qu'ils définissent sont respectivement T_1^p et T_2^p, et on a

$$\varphi_2^p \mid N_p^+ = \varphi_1^p \mid N_p^+ = \varphi^p \mid N_p^+.$$

Alors, d'après le lemme 1.4, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$(DT_2^p : DT_1^p)_t = (D\varphi_2^p : D\varphi_1^p)_t = p(D\varphi_2 : D\varphi_1)_t = p(DT_2 : DT_1)_t.$$

(v) Soit $\varphi \in P(N)$ et, pour $i = 1, 2$, posons

$$\varphi_i = \varphi \circ T_i,\ T_i' = T_i \mid Q \qquad \text{et} \qquad \varphi_i' = \varphi \circ T_i' = \varphi_i \mid Q.$$

Par hypothèse, on a $T_1 = T_1 \circ S = T_1' \circ S$, d'où $\varphi_1 = \varphi_1' \circ S$.

Supposons que $T_2 = T_2 \circ S = T_2' \circ S$. Il en résulte que $\varphi_2 = \varphi_2' \circ S$, et, d'après le lemme 1.6, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$(DT_2 : DT_1)_t = (D\varphi_2 : D\varphi_1)_t = (D\varphi_2' : D\varphi_1')_t = (DT_2' : DT_1')_t \in Q.$$

Réciproquement, supposons que $(DT_2 : DT_1)_t \in Q$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Alors $(D\varphi_2 : D\varphi_1)_t$ appartient à Q pour tout $t \in \mathbf{R}$, et il résulte du lemme 1.6 que Q réduit φ_2 et que $\varphi_2 = \varphi_2' \circ S$. On en déduit que

$$\varphi \circ T_2 = \varphi_2 = \varphi_2' \circ S = \varphi \circ T_2 \circ S,$$

d'où $T_2 = T_2 \circ S$ d'après le théorème 1.1.

(vi) Soient $(p_i)_{i \in I}$ et $(q_j)_{j \in J}$ deux familles de projecteurs deux à deux orthogonaux, de genre dénombrable, de somme 1 dans N et R respectivement. Alors $(p_i \otimes q_j)$ avec $i \in I$ et $j \in J$ est une famille de projecteurs deux à deux orthogonaux, de genre dénombrable, de somme 1 dans $N \otimes R$. Il suffit de vérifier que

$$(p_i \otimes q_j)(DT_2 \otimes S_2 : DT_1 \otimes S_1)_t = [p_i(DT_2 : DT_1)_t] \otimes [q_j(DT_2 : DS_1)_t]$$

pour tout $i \in I$ et tout $j \in J$.

On a évidemment

$$T_k \otimes S_k \,|\, (M \otimes Q)_{p_i \otimes q_j} = (T_k \,|\, M_{p_i}) \otimes (S_k \,|\, Q_{q_j}) \qquad \text{pour} \quad k = 1, 2.$$

Aussi, compte tenu de l'assertion (iv) ci-dessus, on peut supposer que N et R sont des algèbres de von Neumann de genre dénombrable. Prenons alors un état normal fidèle φ sur N, et un état normal fidèle ψ sur R, et posons

$$\tau = \varphi \otimes \psi, \qquad \varphi_i = \varphi \circ T_i, \qquad \psi_i = \psi \circ S_i$$

et

$$\tau_i = \tau \circ (T_i \otimes S_i) \qquad \text{pour} \quad i = 1, 2.$$

La proposition 2.1 montre que $\tau_i = \varphi_i \otimes \psi_i$ et le lemme 1.5 nous donne

$$\begin{aligned}(DT_2 \otimes S_2 : DT_1 \otimes S_1)_t &= (D\tau_2 : D\tau_1)_t = (D\varphi_2 : D\varphi_1)_t \otimes (D\psi_2 : D\psi_1)_t \\ &= (DT_2 : DT_1)_t \otimes (DS_2 : DS_1)_t.\end{aligned}$$

4.4. PROPOSITION. — *Soient M une algèbre de von Neumann, N une sous-algèbre de von Neumann de M, et T_1, T_2 deux éléments de $E(M, N)$. Posons $u = (DT_2 : DT_1)$. Alors, pour tout $x \in M$, on peut prolonger $t \mapsto T_1(x u_t)$ en une fonction ultrafaiblement continue F_x sur la bande $B_{-1} = \{ z \in \mathbf{C};\ -1 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 0 \}$ à valeurs dans N, bornée par $\|x\|$ sur B_{-1}, analytique à l'intérieur de B_{-1} et telle que $F_x(t-i) = T_2(u_t x)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.*

On notera qu'en particulier $T_2(x) = F_x(-i)$ pour tout $x \in M$, ce qui donne une définition explicite de T_2 à partir de T_1 et de u.

Soit φ un forme positive normale sur N, de support $p \in N$. Pour $i = 1, 2$, posons $T_i^p = T_i \mid M_p$ et $\psi_i = \varphi^p \circ T_i^p$. D'après la proposition 4.3 (iv), pour tout $t \in \mathbf{R}$ on a

$$pu_t = (DT_2^p : DT_1^p)_t = (D\psi_2 : D\psi_1)_t.$$

Comme ψ_1 et ψ_2 sont des formes linéaires positives normales sur M_p, le théorème 1.2 montre que, pour tout $x \in M$, la fonction de t

$$\varphi[T_1(xu_t)] = \varphi[p\, T_1(xu_t)\, p] = \psi_1(pxp\, pu_t)$$

se prolonge en une fonction continue bornée $F_{\varphi, x}$ sur B_1, analytique à l'intérieur de B_{-1} et telle que

$$F_{\varphi, x}(t-i) = \psi_2(pu_t\, pxp) = \varphi[T_2(pu_t\, pxp)] = \varphi[T_2(u_t x)]$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$. On a donc $|F_{\varphi, x}(z)| \leqslant \|\varphi\| . \|x\|$ pour tout z sur le bord de B_1, et par suite, pour tout $z \in B_{-1}$, grâce au théorème de Phragmen-Lindelöf.

Considérons maintenant un élément quelconque φ du prédual N_* de N, et soit $w.|\varphi|$ sa décomposition polaire. Étant donné que

$$\varphi[T_1(xu_t)] = |\varphi|(w\, T_1(xu_t)) = |\varphi| \circ T_1(wxu_t) = F_{|\varphi|, wx}(t),$$

on voit que $t \mapsto \varphi[T_1(xu_t)]$ se prolonge en une fonction $F_{\varphi, x}$ continue sur B_{-1}, analytique à l'intérieur de B_{-1}, bornée par

$$\|wx\| . \||\varphi|\| \leqslant \|x\| . \|\varphi\|$$

et telle que

$$F_{\varphi, x}(t-i) = F_{|\varphi|, wx}(t-i) = |\varphi|(T_2(u_t wx)) = \varphi(T_2(u_t x))$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$. Pour tout $z \in B_{-1}$, l'application $\varphi \mapsto F_{\varphi, x}(z)$ est linéaire continue sur N_*; il existe donc un élément $F_x(z)$ de N unique tel que $\varphi[F_x(z)] = F_{\varphi, x}(z)$ pour tout $\varphi \in N_*$. On a $\|F_x(z)\| \leqslant \|x\|$, et

$$F_x(t) = T_1(xu_t), \qquad F_x(t-i) = T_2(u_t x)$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$. De plus, l'application $F_x : z \mapsto F_x(z)$ est continue pour la topologie ultrafaible de N sur B_{-1} et holomorphe à l'intérieur de B_{-1} pour cette topologie, ou ce qui revient au même, analytique pour la topologie normique.

4.5. DÉFINITION. — Soient M une algèbre de von Neumann N une sous-algèbre de von Neumann de M, et T un élément de $E(M, N)$. Nous dirons qu'un T-cocycle u possède la *propriété de prolongement analytique* si $t \mapsto T(u_t)$ se prolonge en une fonction u^T définie sur la bande $B_{-1} = \{ z \in \mathbf{C};\ -1 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 0 \}$, à valeurs dans N, bornée et ultrafaiblement continue sur B_{-1}, analytique dans cette bande, et prenant pour $z = -i$ la valeur 1. On dira que u^T est le prolongement analytique de $t \mapsto T(u_t)$ sur B_{-1}.

La proposition 4.4 montre que, pour tout $S \in E(M, N)$, le T-cocycle $(DS : DT)$ possède la propriété de prolongement analytique. Le théorème 4.8 montrera que réciproquement tout T-cocycle possédant la propriété de prolongement analytique est de ce type.

4.6. LEMME. — *Soient M une algèbre de von Neumann, N une sous-algèbre de von Neumann de M, et ψ_1, ψ_2 deux poids normaux fidèles semi-finis sur M réduits par N. Notons T_1 et T_2 les éléments de $E(M, N)$ définis par ψ_1 et ψ_2, et posons $u = (D\psi_2 : D\psi_1)$. On a $\psi_1 \mid N^+ = \psi_2 \mid N^+$ si, et seulement si, u est un T_1-cocycle qui possède la propriété de prolongement analytique.*

Pour $i = 1, 2$, posons $\varphi_i = \psi_i \mid N^+$. Si $\varphi_1 = \varphi_2$, on a

$$(D\psi_2 : D\psi_1) = (DT_2 : DT_1),$$

et la proposition 4.4 montre alors que u est un T_1-cocycle qui possède la propriété de prolongement analytique.

Réciproquement, supposons que u soit un T_1-cocycle qui possède la propriété de prolongement analytique. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, posons

$$v_t = (DT_2 : DT_1)_t.$$

On a

$$\begin{aligned} u_t &= (D\varphi_2 \circ T_2 : D\varphi_1 \circ T_1)_t \\ &= (D\varphi_2 \circ T_2 : D\varphi_2 \circ T_1)_t (D\varphi_2 \circ T_1 : D\varphi_1 \circ T_1)_t \\ &= (DT_2 : DT_1)_t (D\varphi_2 : D\varphi_1)_t = v_t (D\varphi_2 : D\varphi_1)_t. \end{aligned}$$

Il en résulte que $(D\varphi_2 : D\varphi_1)_t \in N^c \cap N = Z(N)$. Il existe alors un opérateur positif injectif h affilié à $Z(N)$ tel que $(D\varphi_2 : D\varphi_1)_t = h^{it}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ (*voir* 1.2). Pour tout entier $n > 0$, soit $e_n \in Z(N)$ le projecteur spectral de h correspondant à l'intervalle $[1/n, n]$. En prenant les valeurs pour $z = -i$ des prolongements analytiques des membres extrêmes de la relation

$$T_1(u_t)\,e_n = T_1(u_t\,e_n) = T_1(v_t\,h^{it}\,e_n) = T_1(v_t)(he_n)^{it},$$

il vient $e_n = h\,e_n$. On a donc $h = 1$ et $\varphi_1 = \varphi_2$.

4.7. LEMME. — *Soient M une algèbre de von Neumann, N une sous-algèbre de von Neumann de M, T un élément de $E(M, N)$, et u une application fortement continue de* $\mathbf{R}$ *dans le groupe unitaire de N^c.*

(i) *Soit p un projecteur de N, et posons $T^p = T \mid M_p \in E(M_p, N_p)$. On suppose que u est un T-cocycle. Alors $u^p : t \mapsto p\,u_t$ est un T^p-cocycle. Si u possède la propriété de prolongement analytique, alors u^p possède la même propriété.*

(ii) *Soit R une autre algèbre de von Neumann. On pose $M_1 = M \otimes R$, $N_1 = N \otimes R$, $T_1 = T \otimes 1$, et, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $v_t = u_t \otimes 1$. Pour que v soit un T_1-cocycle, il faut et il suffit que u soit un T-cocycle, et alors v possède la propriété de prolongement analytique si, et seulement si, u possède cette propriété.*

(i) Soit $\varphi \in P(N)$ tel que $p \in N_\varphi$, et posons $\psi = \varphi \circ T$. Alors on a $p \in N_\varphi \subset M_\psi$. Le poids $\psi^p \in P(M_p)$ est réduit par N_p, et T^p est l'élément de $E(M_p, N_p)$ défini par ψ^p.

Si u est un T-cocycle, pour s, $t \in \mathbf{R}$, on a

$$u_{t+s} = u_t\,\sigma_t^T(u_s) = u_t\,\sigma_t^\psi(u_s),$$

d'où

$$pu_{t+s} = pu_t\,\sigma_t^\psi(u_s) = pu_t\,\sigma_t^\psi(pu_s) = pu_t\,\sigma_t^{T^p}(pu_s).$$

Donc $t \mapsto p\,u_t$ est un T^p-cocycle.

De plus, si u possède la propriété de prolongement analytique, et si u^T est le prolongement analytique de $t \mapsto T(u_t)$ sur B_{-1}, il est clair que $p\,T(u_t)$ admet $z \mapsto p\,u^T(z)$ comme prolongement analytique sur B_{-1}.

(ii) Considérons un poids $\varphi \in P(N)$ et un poids $\tau \in P(R)$, et posons $\psi = \varphi \circ T$. D'après la proposition 2.1 (ii), on a

$$(\varphi \otimes \tau) \circ T_1 = (\varphi \circ T) \otimes \tau = \psi \otimes \tau.$$

Pour tous t, $s \in \mathbf{R}$, il en résulte que

$$\begin{aligned} v_t\,\sigma_t^{T_1}(v_s) &= v_t\,\sigma_t^{\psi\otimes\tau}(v_s) = (u_t \otimes 1)\,\sigma_t^\psi \otimes \sigma_t^\tau(u_s \otimes 1) \\ &= u_t\,\sigma_t^\psi(u_s) \otimes 1 = u_t\,\sigma_t^T(u_s) \otimes 1. \end{aligned}$$

On voit donc que u est un T-cocycle si, et seulement si, v est un T_1-cocycle. D'autre part, si l'un de ces cocycles possède la propriété de prolongement analytique, l'autre le possède aussi, car, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$T_1(v_t) = (T \otimes 1)(u_t \otimes 1) = T(u_t) \otimes 1.$$

4.8. THÉORÈME. — *Soient M une algèbre de von Neumann, N une sous-algèbre de von Neumann de M, et $T_1 \in E(M, N)$. Alors $T_2 \mapsto (DT_2 : DT_1)$ est une bijection de l'ensemble $E(M, N)$ sur l'ensemble des T_1-cocycles qui possèdent la propriété de prolongement analytique.*

D'après la proposition 4.4, pour tout $T_2 \in E(M, N)$, le T_1-cocycle $(DT_2 : DT_1)$ possède la propriété de prolongement analytique. Montrons que $T_2 \mapsto (DT_2 : DT_1)$ est injective. Soient T_2 et T_3 deux éléments de $E(M, N)$ tels que $(DT_3 : DT_1) = (DT_2 : DT_1)$. Soit $\varphi \in P(N)$, et posons $\psi_i = \varphi \circ T_i$ pour $i = 2, 3$. On a $(D\psi_3 : D\psi_2)_t = (DT_3 : DT_2)_t = 1$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, d'où $\psi_2 = \psi_3$, et l'égalité $T_2 = T_3$ résulte alors du théorème 1.1.

Montrons maintenant que $T_2 \mapsto (DT_2 : DT_1)$ est surjective. Soit u un T_1-cocycle qui possède la propriété de prolongement analytique. D'après la proposition 2.5, on peut supposer qu'il existe dans $Z(N)$ une partition de l'unité $(p_i)_{i \in I}$ telle que $M_{p_i} = M_i \otimes \mathscr{L}(H_i)$ et $N_{p_i} = N_i \otimes \mathscr{L}(H_i)$, où N_i est une sous-algèbre de von Neumann de genre dénombrable de M_i. Posons $T_1^i = T_1 \mid M_{p_i}$. C'est un élément de $E(M_{p_i}, N_{p_i})$ et, d'après le lemme 4.7 (i), $t \mapsto p_i u_t$ est un T_1^i-cocycle qui possède la propriété de prolongement analytique. Supposons que, pour tout $i \in I$, on ait construit $T_2^i \in E(M_{p_i}, N_{p_i})$ telle que $(DT_2^i : DT_1^i)_t = p_i u_t$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. D'après le lemme 2.4, il existera alors un élément T_2 de $E(M, N)$ unique tel que $T_2 \mid M_{p_i} = T_2^i$ pour tout $i \in I$, et d'après la proposition 4.3 (iv), on aura

$$p_i(DT_2 : DT_1)_t = (DT_2^i : DT_1^i)_t = p_i u_t$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$ et tout $i \in I$, d'où $(DT_2 : DT_1) = u$.

Nous pouvons donc supposer que

$$M = M_1 \otimes \mathscr{L}(H) \qquad \text{et} \qquad N = N_1 \otimes \mathscr{L}(H),$$

où N_1 est une sous-algèbre de von Neumann de genre dénombrable de M_1. D'après le lemme 2.3, il existe un unique élément S_1 de $E(M_1, N_1)$ tel que $T_1 = S_1 \otimes 1$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, soit v_t l'unique élément de N_1^c tel que $u_t = v_t \otimes 1$. Du lemme 4.7 (ii), on déduit que $v : t \mapsto v_t$ est un S_1-cocycle qui possède la propriété de prolongement analytique; notons v^{S_1} le prolongement analytique de $t \mapsto S_1(v_t)$ sur B_{-1}. Soit alors φ un état normal fidèle sur N_1, et posons $\psi_1 = \varphi \circ S_1$. Comme v est un ψ_1-cocycle, et comme $t \mapsto \psi_1(v_t) = \varphi[S_1(v_t)]$ se prolonge sur la bande B_{-1} en une fonction continue, analytique à l'intérieur de B_{-1}, prenant pour $z = -i$ la valeur $\varphi[v^{S_1}(-i)] = \varphi(1) = 1$, le théorème 1.2 montre qu'il existe un état normal fidèle ψ_2 sur M_1 tel que $(D\psi_2 : D\psi_1) = v$. Pour tout $x \in N_1$ et tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\sigma_t^{\psi_2}(x) = v_t \sigma_t^{\psi_1}(x) v_t^* = \sigma_t^{\psi_1}(x) \in N_1.$$

Donc N_1 réduit ψ_2, et d'après le lemme 4.6, on a $\psi_2 \mid N_1 = \psi_1 \mid N_1 = \varphi$. Notons S_2 l'élément de $E(M_1, N_1)$, défini par ψ_2. On a alors $(DS_2 : DS_1) = (D\psi_2 : D\psi_1) = v$. Si on pose $T_2 = S_2 \otimes 1$, la proposition 4.3 (vi) nous donne, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$(DT_2 : DT_1)_t = (DS_2 : DS_1)_t \otimes 1 = v_t \otimes 1 = u_t,$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

4.9. COROLLAIRE. — *Conservons les données du théorème* 4.8. *Pour que* $(DT_2 : DT_1)$ *soit un* T_1*-cobord dérivé de* $u \in N^c$, *il faut et il suffit que* $T_2(x) = T_1(uxu^*)$ *pour tout* $x \in M$.

Pour montrer que la condition énoncée est suffisante, considérons un élément φ de $P(N)$ et pour $i = 1, 2$, posons $\psi_i = \varphi \circ T_i$. Si $x \in M^+$, on a

$$\psi_2(x) = \varphi[T_2(x)] = \varphi[T_1(uxu^*)] = \psi_1(uxu^*)$$

d'où

$$(DT_2 : DT_1)_t = (D\psi_2 : D\psi_1)_t = u^* \sigma_t^{\psi_1}(u) = u^* \sigma_t^{T_1}(u)$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$ ([3], lemme 1.4.3).

Réciproquement, supposons que $(\mathrm{DT}_2 : DT_1)$ soit un T_1-cobord $t \mapsto u^* \sigma_t^{T_1}(u)$ dérivé d'un unitaire u de N^c. Pour tout $x \in M$, posons $T_2'(x) = T_1(uxu^*)$. Alors T_2' appartient à $E(M, N)$ et, d'après ce qui précède, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$(DT_2' : DT_1)_t = u^* \sigma_t^{T_1}(u) = (DT_2 : DT_1)_t,$$

d'où $T_2 = T_2'$ d'après le théorème 4.8.

4.10. *Remarque.* — Soient M une algèbre de von Neumann, N une sous-algèbre de von Neumann de M, et $T_1 \in E(M, N)$. Soit u un T_1-cocycle. On vérifie immédiatement que u est un groupe à un paramètre si, et seulement si, $u_t \in M_{T_1}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Dans ces conditions, u est de la forme $t \mapsto h^{it}$, où h est un opérateur auto-adjoint positif injectif affilié à M_{T_1}.

Dans la proposition suivante, nous caractérisons, parmi ces opérateurs, ceux qui sont tels que le T_1-cocycle $t \mapsto h^{it}$ possède la propriété de prolongement analytique. Si cette condition est réalisée, nous décrivons, en fonction de T_1 et h, l'élément T_2 de $E(M, N)$ tel que $(DT_2 : DT_1)_t = h^{it}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Nous donnerons en 5.2 une caractérisation des éléments T_2 de $E(M, N)$ tels que $(DT_2 : DT_1)$ soit un groupe à un paramètre.

Soit h un opérateur auto-adjoint positif injectif affilié à M_{T_1}. Comme dans [11] (§ 4), pour tout $\varepsilon > 0$, nous posons $h_\varepsilon = h(1+\varepsilon h)^{-1}$. Rappelons que si $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$, on a $h_{\varepsilon_1} \geqslant h_{\varepsilon_2}$. D'après le corollaire 3.10, pour tout $k \in M_{T_1}^+$ et tout $x \in M^+$, on a $T_1(k\,x) = T_1(k^{1/2}xk^{1/2}) \geqslant 0$. Il en résulte que si $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$ et si $x \in M^+$, on a

$$0 \leqslant T_1(h_{\varepsilon_2}x) \leqslant T_1(h_{\varepsilon_1}x).$$

4.11. PROPOSITION. — *Soient M une algèbre de von Neumann, N une sous-algèbre de von Neumann de M, et $T_1 \in E(M, N)$. Soit h un opérateur auto-adjoint positif injectif affilié à M_{T_1}. Le T_1-cocycle $t \mapsto h^{it}$ possède la propriété de prolongement analytique si, et seulement si, on a*

$$\sup_{\varepsilon>0} T_1(h_\varepsilon) = 1.$$

De plus, si cette condition est réalisée, notons T_2 l'élément de $E(M, N)$ tel que $(DT_2 : DT_1)_t = h^{it}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Alors T_2 est l'unique application linéaire de M dans N prenant en tout point $x \in M^+$ la valeur $\sup_{\varepsilon>0} T_1(h_\varepsilon x)$.

Supposons que le T_1-cocycle $t \mapsto h^{it}$ possède la propriété de prolongement analytique. Soit T_2 l'élément de $E(M, N)$ tel que $(DT_2 : DT_1)_t = h^{it}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Prenons un état normal φ sur N. Notons p son support, et considérons un élément ψ de $P(N)$ tel que $p \in N_\psi$ et $\psi \mid N_p^+ = \varphi \mid N_p^+$. Posons enfin $\psi_1 = \psi \circ T_1$ et $\psi_2 = \psi \circ T_2$. Comme

$$(D\psi_2 : D\psi_1)_t = (DT_2 : DT_1)_t = h^{it} \quad \text{pour tout } t \in \mathbf{R},$$

il résulte de [3] (lemme 1.2.3) que $\psi_2 = \psi_1(h.)$. Pour tout $x \in M^+$, on a donc

$$\psi(T_2(x)) = \psi_2(x) = \sup_{\varepsilon>0} \psi_1(h_\varepsilon x) = \sup_{\varepsilon>0} \psi(T_1(h_\varepsilon x)),$$

d'où

$$\begin{aligned}\varphi(T_2(x)) = \psi(p\,T_2(x)\,p) &= \psi(T_2(pxp)) = \sup_{\varepsilon>0} \psi(T_1(h_\varepsilon pxp)) \\ &= \sup_{\varepsilon>0} \psi(T_1(ph_\varepsilon\, xp)) = \sup_{\varepsilon>0} \psi(p\,T_1(h_\varepsilon\, x)p) \\ &= \sup_{\varepsilon>0} \varphi(T_1(h_\varepsilon x)).\end{aligned}$$

Ceci étant valable pour tout état normal φ, défini sur N, il en résulte que, pour tout $x \in M^+$, on a $T_2(x) = \sup_{\varepsilon>0} T_1(h_\varepsilon x)$. En particulier si $x = 1$, on obtient $1 = \sup_{\varepsilon>0} T_1(h_\varepsilon)$. On en déduit également la dernière assertion de la proposition.

Il reste à prouver que si $\sup_{\varepsilon>0} T_1(h_\varepsilon) = 1$, le T_1-cocycle $t \mapsto h^{it}$ possède la propriété de prolongement analytique. Soit $\varphi \in P(N)$, et posons $\psi_1 = \varphi \circ T_1$. Comme h est affilié à $M_{T_1} \subset M_{\psi_1}$, nous pouvons considérer le poids, $\psi_2 = \psi_1(h.)$. Si $x \in N^+$, on a

$$\psi_2(x) = \sup_{\varepsilon>0} \psi_1(h_\varepsilon x) = \sup_{\varepsilon>0} \varphi(T_1(h_\varepsilon) x).$$

Étant donné que $(T_1(h_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ est une famille filtrante croissante d'éléments de $Z(N)$, de borne supérieure 1, pour tout $x \in N^+$, on a $\sup_{\varepsilon>0} T_1(h_\varepsilon)\, x = x$, d'où $\psi_2(x) = \varphi(x)$. D'autre part, pour tout $x \in M$ et tout $t \in \mathbf{R}$, on a $\sigma_t^{\psi_2}(x) = h^{it}\, \sigma_t^{\psi_1}(x)\, h^{-it}$ d'après [11] (th. 4.6).

En particulier, si $x \in N$, on obtient $\sigma_t^{\psi_2}(x) = \sigma_t^{\psi_1}(x) = \sigma_t^{\varphi}(x) \in N$. Ainsi ψ_2 est réduit par N, et $\psi_2 \mid N^+ = \varphi = \psi_1 \mid N^+$. Il résulte alors du lemme 4.6 que $t \mapsto h^{it} = (D\psi_2 : D\psi_1)_t$ est un T_1-cocycle qui possède la propriété de prolongement analytique.

4.12. *Remarques :*

(*a*) Conservons les notations de 4.11. Supposons que h soit un élément inversible positif de M_{T_1}. Pour tout état normal φ de N, $\varphi \circ T_1$ est un état normal de M, donc $(\varphi \circ T_1)(h)$ est dans l'enveloppe convexe du spectre de h. On a donc $(\varphi \circ T_1)(h) > 0$ pour tout état normal φ de N, et $T_1(h)$ est donc inversible dans N. En fait, c'est un élément de $Z(N)$ (*voir* prop. 5.1). Alors $k = h\, T_1(h)^{-1}$ est tel que $T_1(k) = 1$, et par conséquent $u : t \mapsto k^{it} = h^{it}\, T_1(h)^{-it}$ est un T_1-cocycle qui possède la propriété de prolongement analytique. L'élément T_2 de $E(M, N)$ tel que

$$(DT_2 : DT_1) = u$$

est l'application

$$x \mapsto T_2(kx) = T_1(h)^{-1}\, T_1(hx).$$

(*b*) Soient M une algèbre de von Neumann, N une sous-algèbre de von Neumann de M, et T_1, $T_2 \in E(M, N)$. Pour que $\sigma^{T_1} = \sigma^{T_2}$ il faut et il suffit que $u = (DT_2 : DT_1)$ prenne ses valeurs dans $Z(N^c)$ car, pour tout $x \in N^c$ et tout $t \in \mathbf{R}$, on a $\sigma_t^{T_2}(x) = u_t\, \sigma_t^{T_1}(x)\, u_t^*$. Alors u est un groupe à un paramètre $t \mapsto h^{it}$, où h est auto-adjoint positif affilié à $Z(N^c)$. Si N^c

est un facteur, on a $h = 1$, ce qui prouve que $T \mapsto \sigma^T$ est alors injective. Ceci généralise le fait que, sur un facteur, il y a au plus un état normal K. M. S. pour un groupe à un paramètre d'automorphismes donné.

(*c*) Dans le même ordre d'idées, soit M une algèbre de von Neumann de genre dénombrable. Tout état normal fidèle ψ sur M est réduit par $Z(M)$ (car $Z(M) \subset M_\psi$), et il existe $T_\psi \in E(M, Z(M))$ unique telle que $\psi \circ T_\psi = \psi$. Soit φ un autre état normal fidèle. D'après le lemme 1.6, on a $T_\psi = T_\varphi$ si, et seulement si, $(D\psi : D\varphi)$ prend ses valeurs dans $Z(M)$, donc si, et seulement si, $\sigma^{T_\psi} = \sigma^{T_\varphi}$ d'après la remarque (*b*). Mais évidemment ici on a $\sigma^{T_\psi} = \sigma^\psi$ et $\sigma^{T_\varphi} = \sigma^\varphi$. Notons $K(M)$ le quotient de l'ensemble des états normaux fidèles définis sur M pour la relation d'équivalence « avoir le même groupe d'automorphismes modulaires ». Les remarques précédentes montrent que $\psi \mapsto T_\psi$ définit par passage au quotient une bijection de $K(M)$ sur $E(M, Z(M))$.

5. **Bijection canonique de $E(M, N)$ sur $E(N^c, Z(N))$**

5.1. PROPOSITION. — *Soient M une algèbre de von Neumann, et N une sous-algèbre de von Neumann espérée de M.*

(i) *Soit $T \in E(M, N)$, et posons $T' = T \mid N^c$. Alors T' est un élément de $E(N^c, Z(N))$, et pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $\sigma_t^{T'} = \sigma_t^T$.*

(ii) *Soient S et T deux éléments de $E(M, N)$. Posons $S' = S \mid N^c$ et $T' = T \mid N^c$.*

Alors, pour $t \in \mathbf{R}$, on a $(DS : DT)_t = (DS' : DT')_t$.

(i) On a d'une part $Z(N) \subset N^c$, d'où $Z(N) \subset T(N^c)$, et d'autre part on voit facilement que $T(N^c) \subset Z(N)$ (*voir* rem. 3.7 (*b*)). On en déduit que $T' = T \mid N^c$ est bien un élément de $E(N^c, Z(N))$.

Comme $Z(N)$ est contenue dans $Z(N^c)$, le commutant relatif de $Z(N)$ dans N^c est N^c. Alors T' vérifie évidemment la condition K. M. S. relativement à σ^T, et la conclusion résulte de la proposition 3.8.

(ii) D'après la proposition 2.5, on peut supposer qu'il existe une partition de l'unité $(p_i)_{i \in I}$ dans $Z(N)$ telle que

$$M_{p_i} = M_i \otimes \mathscr{L}(H_i) \qquad \text{et} \qquad N_{p_i} = N_i \otimes \mathscr{L}(H_i),$$

où N_i est une sous-algèbre de von Neumann de genre dénombrable de M_i. Posons

$$T_i = T \mid M_{p_i} \qquad \text{et} \qquad T_i' = T_i \mid N_{p_i}^c = T' \mid N_{p_i}^c,$$

et notons S_i, S'_i les espérances conditionnelles construites de façon analogue à partir de S. Pour démontrer que $(DS : DT) = (DS' : DT')$, il suffit de prouver que $(DS : DT)_t p_i = (DS' : DT')_t p_i$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ et tout $i \in I$, soit encore

$$(DS_i : DT_i)_t = (DS'_i : DT'_i)_t$$

d'après la proposition 4.3 (iv). Nous pouvons donc supposer que $M = M_1 \otimes \mathscr{L}(H)$ et $N = N_1 \otimes \mathscr{L}(H)$, où N_1 est une sous-algèbre de von Neumann de genre dénombrable de M_1. Soit alors T_1 l'unique élément de $\mathrm{E}(M_1, N_1)$ tel que $T = T_1 \otimes 1$ et posons $T'_1 = T_1 \mid N_1^c$. Comme $N^c = N_1^c \otimes 1$, on a $T' = T'_1 \otimes 1$. Notons S_1 et S'_1 les objets analogues relatifs à S. La proposition 4.3 (vi) montre qu'il suffit de vérifier que

$$(DS_1 : DT_1) = (DS'_1 : DT'_1).$$

On est ainsi ramené au cas où N est de genre dénombrable.

Dans ce cas, soit φ un état normal fidèle sur N, et posons

$$\psi_1 = \varphi \circ T, \quad \psi_2 = \varphi \circ S, \quad \psi'_1 = \psi_1 \mid N^c = \varphi \circ T', \quad \psi'_2 = \psi_2 \mid N^c = \varphi \circ S'.$$

D'après le lemme 1.8, on a

$$(DS : DT) = (D\psi_2 : D\psi_1) = (D\psi'_2 : D\psi'_1) = (DS' : DT').$$

5.2. Corollaire. — *Soient M une algèbre de von Neumann, N une sous-algèbre de von Neumann de M, et T_1, T_2 deux éléments de $E(M, N)$. Alors $(DT_2 : DT_1)$ est un groupe à un paramètre si, et seulement si, $T'_2 = T_2 \mid N^c$ est invariante par les automorphismes $\sigma_t^{T_1}$.*

L'invariance de T'_2 par $\sigma_t^{T_1}$ signifie ici que $T'_2 \circ \sigma_t^{T_1} = T'_2$, car $T'_2(N^c)$ est contenu dans M_{T_1}.

Fixons $t_0 \in \mathbf{R}$, et notons α l'automorphisme $\sigma_{t_0}^{T_1}$ de N^c. En utilisant l'invariance de T'_1 par α et les propositions 4.3 (iii) et 5.1 (ii), pour tout $t \in \mathbf{R}$, on obtient

$$\begin{aligned}(DT'_2 \circ \alpha : DT'_2)_t &= (DT'_2 \circ \alpha : DT'_1)_t (DT'_1 : DT'_2)_t \\ &= (DT'_2 \circ \alpha : DT'_1 \circ \alpha)_t (DT'_1 : DT'_2)_t \\ &= \alpha^{-1}[(DT'_2 : DT'_1)_t](DT'_1 : DT'_2)_t \\ &= \alpha^{-1}[(DT_2 : DT_1)_t](DT_1 : DT_2)_t.\end{aligned}$$

D'autre part, on a $T'_2 \circ \alpha = T'_2$ si, et seulement si, $(DT'_2 \circ \alpha : DT'_2)_t = 1$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. On en déduit que T'_2 est invariant par σ^{T_1} si, et seulement si, $(DT_2 : DT_1)_t \in M_{T_1}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, c'est-à-dire si, et seulement si, $(DT_2 : DT_1)$ est un groupe à un paramètre.

5.3. THÉORÈME. — *Soient M une algèbre de von Neumann, et N une sous-algèbre de von Neumann espérée de M. L'application $r : T \mapsto T \mid N^c$ est une bijection de $E(M, N)$ sur $E(N^c, Z(N))$.*

D'après la proposition 5.1, pour tout $T \in E(M, N)$, on a bien $T \mid N^c \in E(N^c, Z(N))$. Toujours d'après cette proposition, si T_1 et T_2 sont deux éléments de $E(M, N)$ dont les restrictions T'_1 et T'_2 à N^c sont égales, on a

$$(DT_2 : DT_1)_t = (DT'_2 : DT'_1)_t = 1$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$ et par suite $T_2 = T_1$ (th. 4.8). L'application r est donc injective. Montrons qu'elle est surjective.

Soit T' un élément de $E(N^c, Z(N))$, et soit T_1 un élément de $E(M, N)$. Posons $u = (DT' : Dr(T_1))$. D'après la proposition 4.4, u est un $r(T_1)$-cocycle qui possède la propriété de prolongement analytique. Comme u est aussi un T_1-cocycle (prop. 5.1 (i)), d'après le théorème 4.8, il existe $T \in E(M, N)$ tel que $(DT : DT_1) = u$. La proposition 5.1 (i) nous donne alors

$$(Dr(T) : Dr(T_1)) = (DT : DT_1) = u = (DT' : Dr(T_1)).$$

On a donc $r(T) = T'$ et r est bien surjective.

5.4. *Remarque.* — Si N est un facteur, $T \mapsto T \mid N^c$ est une bijection de $E(M, N)$ sur l'ensemble des états normaux fidèles de N^c. On peut donc dire que la « dimension » de $E(M, N)$ est très liée à celle du prédual de N^c, donc à celle de N^c.

5.5. LEMME. — *Soient R une algèbre de von Neumann de genre dénombrable, et A une sous-algèbre de von Neumann de R distincte de R. Il existe sur R deux états normaux fidèles distincts ayant la même restriction à A.*

Soit x un élément de R^+ n'appartenant pas à A. D'après le théorème de Hahn-Banach appliqué à l'espace vectoriel réel des éléments hermitiens de R, il existe une forme linéaire hermitienne f ultrafaiblement continue sur R, nulle sur A, et telle que $f(x) \neq 0$. Soient f^+ et f^- les parties positives et négatives de f. On a alors $f^+ \mid A = f^- \mid A$, donc en particulier

$f^+(1) = f^-(1)$, et $f^+(x) \neq f^-(x)$. Soit alors g un état normal fidèle sur M. En posant

$$f_1 = f^+ + g, \qquad f_2 = f^- + g,$$

et en normalisant correctement ces formes, on obtient des états vérifiant les conditions énoncées.

5.6. THÉORÈME. — *Soient M une algèbre de von Neumann, N une sous-algèbre de von Neumann espérée de M. Pour que $E(M, N)$ soit réduit à un seul élément, il faut et il suffit que N^c soit inclus dans N.*

La condition suffisante est due à A. CONNES ([3], th. 1.5.2), et se déduit immédiatement du théorème 5.3. En effet, $N^c \subset N$ signifie que $N^c = Z(N)$. Dans ce cas $E(N^c, Z(N))$ est réduit à un seul élément, et il en est de même de $E(M, N)$.

Réciproquement, supposons que N^c soit distinct de $Z(N)$, et montrons que $E(M, N)$ contient au moins deux éléments distincts ou, ce qui revient au même, que $E(N^c, Z(N))$ contient deux éléments distincts. Soit $(p_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité de $Z(N)$, où p_i est, pour tout $i \in I$, de genre dénombrable (par exemple un projecteur cyclique). Comme $Z(N)$ est espérée dans N^c (prop. 5.1), pour tout $i \in I$, $N^c_{p_i}$ est de genre dénombrable. Il existe au moins un indice $i_0 \in I$ tel que $Z(N)_{p_{i_0}} \neq N^c_{p_{i_0}}$. D'après le lemme 5.5 il existe deux états normaux fidèles f_1, f_2 sur $N^c_{p_{i_0}}$ distincts, et égaux sur $Z(N)_{p_{i_0}}$. Pour tout $i \in I$ distinct de i_0 choisissons un état normal fidèle g_i sur $N^c_{p_i}$ et, pour $x \in (N^c)^+$, posons

$$\varphi_1(x) = f_1(x p_{i_0}) + \textstyle\sum_{i \neq i_0} g_i(x p_i) \qquad \varphi_2(x) = f_2(x p_{i_0}) + \textstyle\sum_{i \neq i_0} g_i(x p_i).$$

On obtient ainsi deux poids strictement semi-finis sur N^c et tels que $p_i \in \mathfrak{M}_{\varphi_1} \cap \mathfrak{M}_{\varphi_2}$ pour tout $i \in I$, donc de restriction à $Z(N)^+$ semi-finie. Comme on a $Z(N) \subset Z(N^c) \subset M_{\varphi_1} \cap M_{\varphi_2}$, on voit que $Z(N)$ réduit φ_1 et φ_2. Soient T_1, $T_2 \in E(N^c, Z(N))$ les éléments définis par φ_1 et φ_2. Comme φ_1 et φ_2 ont même restriction à $Z(N)^+$ et sont distincts, on a nécessairement $T_1 \neq T_2$.

5.7. COROLLAIRE. — *Soient M une algèbre de von Neumann, A une sous-algèbre de von Neumann abélienne espérée de M. Pour que $E(M, A)$ soit réduit à un seul élément, il faut et il suffit que A soit abélienne maximale.*

La condition suffisante est depuis longtemps connue (par exemple, *voir* [14], th. 6.1). La condition nécessaire nous semble nouvelle.

5.8. DÉFINITION. — Soient M une algèbre de von Neumann, N une sous-algèbre de von Neumann espérée de M, et T un élément de $E(M, N)$. Si $\sigma_t^T = 1$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, nous dirons que T est une *application bécarre de M sur N*. La proposition 3.11 montre qu'il existe une application bécarre de M sur N si, et seulement si, N^c est finie. Dans le cas où $N = Z(M)$, on retrouve un résultat classique de J. DIXMIER ([8], chap. III, § 4, th. 3), comme le montre la proposition suivante.

5.9. PROPOSITION. — *Soient M une algèbre de von Neumann, N une sous-algèbre de von Neumann espérée de M. Pour un élément T de $E(M, N)$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *T est une application bécarre;*

(ii) *$T(xy) = T(yx)$ pour tout $x \in M$ et tout $y \in N^c$;*

(iii) *$T(uxu^*) = T(x)$ pour tout $x \in M$ et tout unitaire u de N^c;*

(iv) *$T \mid N^c$ est une application bécarre de N^c sur $Z(N)$.*

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) d'après le corollaire 3.10 caractérisant le centralisateur M_T de T.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) du fait que tout $y \in N^c$ est combinaison linéaire de quatre unitaires de N^c.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) d'après la proposition 5.1 (i).

5.10. PROPOSITION. — *Soient M une algèbre de von Neumann, et N une sous-algèbre de von Neumann espérée de M telle que N^c soit finie. Pour qu'il existe une seule application bécarre de M sur N, il faut et il suffit que $Z(N^c) = Z(N)$.*

D'après la proposition 5.9 (iv), $T \in E(M, N)$ est une application bécarre si, et seulement si, $T' = T \mid N^c$ est une application bécarre de N^c sur $Z(N)$. Si $Z(N) = Z(N^c)$, d'après un résultat de J. DIXMIER ([8], chap. III, § 4, th. 3) une telle application bécarre de N^c sur $Z(N^c)$ est unique, d'où l'unicité de T en utilisant le théorème 5.3.

Notons que cette unicité résulte aussi de l'étude précédente de la façon suivante. Soit S une autre application bécarre. D'après la remarque 4.12 (*b*), $u = (DS : DT)$ est un groupe à un paramètre $t \mapsto h^{it}$, où h est auto-adjoint positif, injectif, affilié à $Z(N^c)$. D'autre part, $t \mapsto T(u_t) = T(h^{it})$ admet un prolongement analytique u^T sur la bande B_{-1} de $\mathbf{C}$ avec $u^T(-i) = 1$. Si on suppose que $Z(N^c) = Z(N)$, on a $T(h^{it}) = h^{it}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. On en déduit que $h = 1$, d'où $(DS : DT)_t = 1$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, d'où $S = T$.

Réciproquement, supposons qu'il existe une seule application bécarre T de M sur N. D'après la proposition 3.4, il existe une application bécarre S de M sur N^{cc}. De plus, toujours d'après la proposition 3.4, pour tout $T_1 \in E(N^{cc}, N)$, l'application $T_1 \circ S$ est bécarre. Il en résulte que $E(N^{cc}, N)$ est réduit au seul élément $T \mid N^{cc}$. On a donc $N' \cap N^{cc} = Z(N)$ (th. 5.6). Comme $Z(N^c)$ est contenu dans $N' \cap N^{cc}$, on en déduit que $Z(N^c) = Z(N)$.

5.11. PROPOSITION. — *Soient M une algèbre de von Neumann, et N une sous-algèbre de von Neumann espérée de M. Pour que N^c soit finie, il faut et il suffit que M soit G-finie pour le groupe G des automorphismes intérieurs de M définis par les unitaires de N^c.*

Si N^c est finie, il existe une application bécarre T de M sur N^{cc} (prop. 3.11 (ii) et 3.4). Comme N^{cc} est l'algèbre M^G des points fixes de G, on voit que T est un élément de $E(M, M^G)$ qui est G-invariant (prop. 5.9 (iii). Donc M est G-finie (*voir* [10]).

Réciproquement, si M est G-finie, il existe $T \in E(M, N^{cc})$ qui est G-invariante. C'est une application bécarre de M sur N^{cc} (prop. 5.9 (iii), donc $N^{ccc} = N^c$ est finie (prop. 3.11 (ii)).

5.12. PROPOSITION. — *Soient M une algèbre de von Neumann, et N une sous-algèbre de von Neumann de M. On suppose que N est semi-finie, égale à N^{cc} et que N^c est finie. Soit G le groupe des automorphismes intérieurs de M définis par les unitaires de N^c. Notons $P^G(M)$ l'ensemble des éléments de $P(M)$ qui sont invariants par G. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *N est espérée;*

(ii) *il existe $\tau \in P^G(M)$ tel que $\tau \mid N^+$ soit semi-fini;*

(iii) *$P^G(M) \neq \varnothing$ et tout $\tau \in P^G(M)$ est tel que $\tau \mid N^+$ soit semi-fini.*

De plus, si T désigne l'unique application bécarre de M sur N, alors on a $\tau \circ T = \tau$ pour tout $\tau \in P^G(M)$.

Faisons une remarque préliminaire. Soit u un unitaire de M, et soit α_u l'automorphisme intérieur qu'il définit. On a

$$(D\varphi \circ \alpha_u : D\varphi)_t = u^* \sigma_t^\varphi(u) \quad \text{pour tout } t \in \mathbf{R} \text{ et tout } \varphi \in P(M)$$

([3], lemme 1.4.3). On voit donc que $\varphi \circ \alpha_u = \varphi$ si, et seulement si, $\sigma_t^\varphi(u) = u$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, c'est-à-dire si, et seulement si, $u \in M_\varphi$. Ainsi, pour tout $\tau \in P^G(M)$, on a $N^c \subset M_\tau$. Comme N est normale, $N = N^{cc}$ est donc invariante par les automorphismes modulaires σ_t^τ.

(ii) $\Rightarrow$ (i) En effet, sous l'hypothèse (ii), la remarque ci-dessus montre que N réduit τ et le théorème 1.1 montre que N est espérée.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Supposons que N soit espérée. Comme N^c est finie, il existe une application bécarre T de M sur N (prop. 3.11 (ii)), et il n'en existe qu'une car N étant normale, on a $Z(N) = Z(N^c)$ (prop. 5.10). Pour tout $\varphi \in P(N)$, le poids $\varphi \circ T$ appartient évidemment à $P^G(M)$ et donc $P^G(M)$ n'est pas vide. Soit φ une trace normale semi-finie sur N, et posons $\psi = \varphi \circ T$. Comme T est une application bécarre, on a $N^c = M_T = M_\psi \cap N^c \subset M_\psi$. D'autre part, si τ est un élément de $P^G(M)$, on a $N^c \subset M_\tau$ d'après la remarque préliminaire. On voit donc que $(D\tau : D\psi)$ prend ses valeurs dans $N^{cc} = N$. Le lemme 1.6 montre alors que τ est réduit par N, ce qui démontre (iii), et que $\tau = \tau \circ T$, ce qui établit la dernière assertion de l'énoncé.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) est évident.

5.13. *Remarques.* — En appliquant cet énoncé à divers cas particuliers on retrouve des résultats plus ou moins connus.

(*a*) Supposons M semi-finie. Une sous-algèbre de von Neumann N de M vérifiant les hypothèses de la proposition 5.12 est espérée si et seulement s'il existe une trace $\tau \in P(M)$ telle que $\tau \mid N^+$ soit semi-finie, et alors toute trace normale fidèle semi-finie sur M possède cette propriété. Ceci s'applique en particulier aux sous-algèbres abéliennes maximales de M.

(*b*) Supposons M finie, et prenons $N = Z(M)$. On retrouve le fait que toute trace $\tau \in P(M)$ a une restriction à $Z(M)^+$ semi-finie et se factorise à travers l'application bécarre de M sur $Z(M)$. En particulier, toute trace $\tau \in P(M)$ a une restriction semi-finie sur toute sous-algèbre abélienne maximale de M, et par conséquent les sous-algèbres abéliennes maximales de M sont espérées.

(*c*) M étant quelconque, soient N une sous-algèbre abélienne maximale de M, et G le groupe des automorphismes intérieurs de M définis par les unitaires de N. Un élément φ de $P(M)$ appartient à $P^G(M)$ si, et seulement si, $N \subset M_\varphi$. On voit donc que N est espérée si et seulement s'il existe $\varphi \in P(M)$ tel que $N \subset M_\varphi$ et $\varphi \mid N^+ \in P(N)$. En outre, dans ces conditions, tout autre poids $\psi \in P(M)$, vérifiant $N \subset M_\varphi$, est tel que $\psi \mid N^+ \in P(N)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Combes (F.). — Poids associé à une algèbre hilbertienne à gauche, *Comp. Math.*, Groningen, t. 23, 1971, p. 49-77.

[2] Combes (F.). — Poids et espérances conditionnelles dans les algèbres de von Neumann, *Bull. Soc. math. France*, t. 99, 1971, p. 73-112.

[3] CONNES (A.). — Une classification des facteurs de type III, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 6, 1973, p. 133-252.
[4] CONNES (A.). — *The Tomita-Takesaki theory and classification of type III factors*, Notes of Lectures in Varenna, july 1973.
[5] CONNES (A.). — *Conditional expectations and Krieger's factors* (à paraître).
[6] DIXMIER (J.). — Les anneaux d'opérateurs de classe finie, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 66, 1949, p. 209-261.
[7] DIXMIER (J.). — Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs, *Bull. Soc. math. France*, t. 81, 1953, p. 9-39.
[8] DIXMIER (J.). — *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien* (*algèbres de von Neumann*), 2e édition. — Paris, Gauthier-Villars, 1969 (*Cahiers scientifiques* 25).
[9] HILLE (E.) and PHILLIPS (R.). — *Functional analysis and semi-groups*, 2nd edition. — New York, American mathematical Society, 1957 (*American mathematical society. Colloquium Publications*, 31).
[10] KOVACS (I.) and SZÜCS (J.). — Ergodic types theorems in von Neumann algebras, *Acta Sc. Math. Szeged*, t. 27, 1966, p. 233-246.
[11] PEDERSEN (G. K.) and TAKESAKI (M.). — The Radon-Nikodym theorem for von Neumann algebras, *Acta Math.*, Uppsala, t. 130, 1973, p. 53-87.
[12] TAKESAKI (M.). — *Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications.* — Berlin, Springer-Verlag, 1970 (*Lectures Notes in Mathematics*, 128).
[13] TAKESAKI (M.). — Conditional expectations in von Neumann algebras. *J. Funct. Anal.*, t. 9, 1972, p. 306-321.
[14] TOMIYAMA (J.). — *Tensor products and projections of norm one in von Neumann algebras*, University of Copenhagen, 1970.
[15] UMEGAKI (H.). — Conditional expectation in an operator algebra, II., *Tôhoku Math. J.*, t. 8, 1956, p. 86-100.

(Texte reçu le 16 septembre 1974.)

François COMBES et Claire DELAROCHE,
Département de Mathématiques,
Université d'Orléans,
45045 Orléans Cedex.