BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL METIVIER

GIOVANNI PISTONE

Sur une équation d'évolution stochastique

Bulletin de la S. M. F., tome 104 (1976), p. 65-85

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1976__104__65_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
104, 1976, p. 65-85.

SUR UNE ÉQUATION D'ÉVOLUTION STOCHASTIQUE

par

MICHEL MÉTIVIER et GIOVANNI PISTONE (*)

[Rennes]

RÉSUMÉ. — L'équation ici considérée est une équation d'évolution non linéaire, associée à un opérateur monotone et à entrée stochastique, du type de celle considérée par A. BENSOUSSAN et R. TEMAN dans leur article *Équations aux dérivées partielles stochastiques non linéaires* (*Israel J. of Math.*, t. 11, 1972, p. 95-129).

Dans BENSOUSSAN-TEMAN, les processus solutions étaient obtenus en un sens très faible (distributions à valeurs dans un espace vectoriel d'éléments aléatoires à valeurs Banach). Ici, un résultat d'existence et d'unicité trajectorielle est obtenu, lorsque l'entrée stochastique est une martingale continue à droite, très générale.

Par ailleurs, une formule récente sur la variation quadratique de martingales à valeurs Banach permet l'utilisation assez rapide, à partir d'une formule facile de l'énergie, d'une méthode de FAEDO-GALERKIN, pour la première fois semble-t-il dans ce contexte stochastique.

Dans [1], A. BENSOUSSAN et R. TEMAN considèrent un problème d'évolution non linéaire,

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dX}{dt}(t;\omega) = A(t, X(t;\omega)) + \dfrac{df}{dt}(t,\omega), \\ X(0,\omega) = \xi(\omega), \end{cases}$$

où $A(t, .)$ est une famille d'opérateurs monotones d'un espace de Banach $\mathbf{V}$ dans son dual $\mathbf{V}'$, et df/dt est une « entrée stochastique » (le « hasard » étant représenté par $\omega \in \Omega$, avec le cadre probabiliste habituel $(\Omega, \mathscr{F}, P)$).

Étant donnée l'irrégularité des trajectoires $t \mapsto f(t, \omega)$ des processus que l'on a l'habitude de considérer (en général à variation bornée sur aucun intervalle), il convient de remarquer que la dérivée df/dt ne saurait être prise au sens d'une dérivée ordinaire.

On pourrait évidemment envisager de « prendre cette dérivée au sens des distributions sur chaque trajectoire », et considérer l'équation (1)

(*) Ce travail a été effectué alors que le second auteur bénéficiait d'une bourse du Consiglio Nazional della Ricerce.

Note sur Épreuves : il faut mentionner les travaux de E. PARDOUX et M. VIOT, effectués dans leurs Thèses depuis l'écriture du présent travail et qui développent considérablement les notes [12] et [13] citées en référence.

comme une équation d'évolution indexée par ω. Il semble qu'il soit difficile, en empruntant cette voie, de mettre en évidence la régularité des solutions. On souhaite un processus X dont les trajectoires $t \mapsto X_t(\omega)$ ont de bonnes propriétés de continuité.

La méthode suivie par A. BENSOUSSAN et R. TEMAM consiste à se ramener au cadre déterministe d'une autre façon : tout simplement en considérant un processus stochastique X, à valeurs dans $\mathbf{V}$ comme une application de $[0, T]$ dans $(L^p_{\mathbf{V}}(\Omega, \mathcal{F}, P))$, et en interprétant l'équation (1) comme une équation d'évolution pour fonctions sur $[0, T]$ à valeurs dans l'espace de Banach $\mathcal{V} = L^p_{\mathbf{V}}(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Les solutions obtenues sont alors des processus X pour lesquels l'égalité

$$\frac{dX}{dt}(t) = A(t, X(t)) + \frac{df}{dt}(t)$$

a lieu en un sens faible : égalité au sens des distributions vectorielles à valeurs dans $\mathcal{V}$.

Cette méthode et ce type de résultats sont évidemment à rapprocher des théories dans lesquelles les processus, solutions des problèmes que l'on se pose, sont caractérisés par leurs propriétés de moments, plutôt que par leurs propriétés trajectorielles.

On peut également essayer d'obtenir pour (1) des théorèmes d'existence et d'unicité en un sens plus fort (trajectoriel), analogues à ce qui est fait pour les équations différentielles stochastiques. C'est l'objet de ce travail : on montre l'existence et l'unicité (à l'indistingabilité près) d'un processus X dont les trajectoires, à valeurs dans $\mathbf{V}'$, sont continues à droite, prennent leurs valeurs presque partout dans $\mathbf{V}$, et vérifient

$$X(t, \omega) = \xi(\omega) + \int_0^t A(t, X(s, \omega))\, ds + M(t, \omega) \tag{2}$$

lorsque M est une martingale à valeurs dans $\mathbf{H}$, et seulement continue à droite.

Grâce à une formule de ITO pour martingales à valeurs dans un Hilbert, nous pouvons utiliser une méthode de type Foedo-Galerkin, avec majorations *a priori*.

1. Rappels de définition et notations

1.1. Nous supposons donnée, une fois pour toutes, une base stochastique $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, P)$, où la famille croissante $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ de tribus de parties de Ω est supposée posséder, comme d'habitude, la propriété : tout F dans $\mathscr{F}_T$, et de probabilité nulle, est dans $\mathscr{F}_t$.

Pour les notions de temps d'arrêt, intervalles stochastiques, etc., nous renvoyons à [8].

1.2. Une martingale M, à valeurs dans un espace de Banach $\mathbf{V}$, est une application de $[0, T] \times \Omega$ dans $\mathbf{V}$, telle que, pour tout $t \in [0, T]$, M_t est fortement mesurable de $(\Omega, \mathscr{F}_t)$ dans $\mathbf{V}$, et telle que

$$0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \mathrm{T}, \qquad F \in \mathscr{F}_s \quad \Rightarrow \quad \int_F M(s, \omega)\, P(d\omega) = \int_F M(t, \omega)\, P(d\omega).$$

M est dite de carré intégrable si $\forall\, t \in [0, T]$, $\int \| M(t, \omega) \|_{\mathbf{V}}^2\, P(d\omega) < \infty$.

Un processus M est une martingale locale sur $[0, T]$ s'il existe une suite croissante (τ_n) de temps d'arrêt telle que $\bigcup_n [0, \tau_n] = [0, T] \times \Omega$ et telle que, pour tout n, $(M_{t \wedge \tau_n})_{t \in [0, T]}$ soit une martingale de carré intégrable.

1.3. Intégrale stochastique. — Dans ce qui suit, la martingale M considérée sera à valeurs dans un espace de Hilbert $\mathbf{H}$, de carré intégrable et à trajectoires continues à droites (i. e. les applications $t \mapsto M(t, \omega)$ sont continues à droites comme fonctions de $[0, T]$ dans $\mathbf{H}$).

A une telle martingale nous associons une intégrale stochastique, dont nous décrivons rapidement la construction (*cf.* [4], [11], [7] ou [8], pour des détails).

Nous désignons par $\mathscr{R}$ la famille des rectangles prévisibles (i. e. des parties de $[0, T] \times \Omega$ de la forme $]s, t] \times F$, où $F \in \mathscr{F}_s$), et par $\mathscr{P}$ la tribu de parties (dites « prévisibles ») de $[0, T] \times \Omega$ engendrées par $\mathscr{P}$. Les processus (i. e. les fonctions sur $[0, T] \times \Omega$) mesurables pour $\mathscr{P}$ sont dits *prévisibles*, et on vérifie très facilement que tout processus à trajectoires continues à gauche est prévisible.

Si on considère la fonction d'ensembles sur $\mathscr{R}$, à valeurs dans $L^2_{\mathbf{H}}(\Omega, \mathscr{F}, P)$, définie par $I_M(]s, t] \times F) = 1_F.(M_t - M_s)$, on montre qu'elle s'étend par linéarité et continuité en une contraction I_M de $L^2_{\mathbf{R}}([0, T] \times \Omega, \mathscr{P}, \lambda_M)$ dans $L^2_{\mathbf{H}}(\Omega, \mathscr{F}, P)$, où λ_M est l'extension σ-additive à $\mathscr{P}$ de la fonction positive définie par $\lambda(]s, t] \times F) = E\, 1_F(\| M_t \|^2 - \| M_s \|^2)$. Cette extension existe en vertu d'un théorème de C. DOLÉANS (*cf.* [8] pour les références.) Il en résulte en particulier que I_M apparaît comme l'intégrale de sa restriction à $\mathscr{P}$ (mesure vectorielle à valeurs dans $L^2_{\mathbf{H}}(\Omega, \mathscr{F}, P)$) avec les propriétés de monotonie et convergence dominée d'une intégrale. On peut évidemment étendre cette intégrale à des processus à valeurs dans $L(\mathbf{H}; \mathbf{G})$ (espace des applications linéaires continues de $\mathbf{H}$ dans un Hilbert $\mathbf{G}$), fortement prévisibles.

Par ailleurs, si $L^0_{\mathbf{G}}(\Omega, \mathscr{F}, P)$ désigne l'espace des applications fortement mesurables de Ω dans $\mathbf{G}$, muni de la convergence en probabilité, on peut définir une extension I^0_M de I_M à valeurs dans $L^0_{\mathbf{G}}(\Omega, \mathscr{F}, P)$, définie sur une classe de processus contenant en particulier les processus prévisibles X dont chaque trajectoire est bornée sur $[0, T]$.

Enfin, la notion importante du point de vue probabiliste est celle de processus intégrale stochastique $\int X.dM$: il existe un processus Y à valeurs dans $\mathbf{G}$, à trajectoires continues à droite, tel que $Y(t, .) = I^0_M(1_{]0,T]}.X)$ p. s. pour tout $t \in [0, T]$, et deux processus Y et Y', possédant cette propriété, ont presque sûrement leurs trajectoires identiques (comme applications de $[0, T]$ dans $\mathbf{G}$). Les processus Y et Y' sont dits « *indistingables* », et la classe de processus indistingables précédente notée $\int X.dM$. On note également d'ordinaire $Y_t = \int_0^t X.dM$. Le processus Y est, en outre, une martingale si $X \in L^2_{\mathscr{L}(\mathbf{H};\mathbf{G})}([0, T] \times \Omega, P, \lambda_M)$ (resp. une martingale locale si X est seulement à trajectoires bornées sur $[0, T]$).

1.4. Intervalles stochastiques. Tribu des biens mesurables, etc. — On renvoie à [10] pour les notions sur les temps d'arrêt. On notera $\mathscr{T}$ la tribu des ensembles bien mesurables sur $[0, T] \times \Omega$ (tribu engendrée par les intervalles stochastiques $]\sigma, \tau]$, où σ et τ sont deux temps d'arrêt $\sigma \leqslant \tau$).

La mesure de Lebesgue sur $[0, T]$ sera notée l.

1.5. Variation quadratique de la martingale M. — M étant une martingale, P-presque toute trajectoire a une limite à gauche en tout $t \in [0, T]$. Notons $M^-(u, \omega)$ le processus continu à gauche (donc prévisible) qu'on en déduit.

Si $\mathbf{H} \hat{\otimes}_2 \mathbf{H}$ désigne le produit tensoriel de Hilbert-Schmidt, à tout élément h de $\mathbf{H}$ associons un opérateur linéaire continu u^d_h (resp. u^g_h) de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{H} \hat{\otimes}_2 \mathbf{H}$ en posant $u^d_h(x) = h \otimes x$ (resp. $u^g_h(x) = x \otimes h$). Cela a donc un sens de parler de l'intégrale stochastique $\int u^d_{M^-}.dM \left(\text{resp. } \int u^g_{M^-}.dM\right)$ que nous noterons, pour simplifier, $\int M^- \otimes dM \left(\text{resp.} \int dM \otimes M^-\right)$.

On montre par ailleurs que les processus $\int M^- \otimes dM$ et $\int dM \otimes M^-$ prennent en fait leurs valeurs dans le produit tensoriel projectif $\mathbf{H} \hat{\otimes}_1 \mathbf{H} \subset \mathbf{H} \hat{\otimes}_2 \mathbf{H}$ (*cf.* [3]).

La variation quadratique de M est le processus $[M]$, à valeurs dans $\mathbf{H} \hat{\otimes}_1 \mathbf{H}$, défini par

$$(1.5.1) \quad [M] = M^{\otimes 2} - M^{\otimes 2}(0, .) + \int M^- \otimes dM + \int dM \otimes M^-.$$

On a la proposition suivante, qui est un cas très particulier d'une formule généralisée de Ito (pour le cas continu, *cf.* [8] et [11]; pour le cas continu à droite, *cf.* [3]), et qui jouera un rôle fondamental dans la suite.

PROPOSITION 1. — *Soit V un processus à valeurs dans un espace de Hilbert H, de la forme $V(t, \omega) = \int_0^t Y(s, \omega)\, ds$, où $Y(s, \omega) \in L^1_{\mathbf{H}}(0, T)$ pour tout ω, et soit M une martingale à valeurs dans* $\mathbf{H}$, *de carré intégrable, continue à droite. Alors on a l'égalité suivante de processus à l'indistingabilité près :*

$$|M_t + V_t|^2_{\mathbf{H}} = |M_0 + V_0|^2_{\mathbf{H}} + 2\int_0^t (M^- + V \mid dM)$$
$$+ 2\int_0^t (M(s, .) + V(s, .) \mid Y(s\ .))\, ds + \operatorname{Tr}[M_t].$$

Démonstration. — Cette formule est un cas très particulier de la « formule de Ito » telle qu'on la trouve dans [11] (*cf.* également [4]), appliquée à la fonction $(x, y) \mapsto \varphi(x, y) = |x+y|^2_{\mathbf{H}}$ sur $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$, dont les dérivées partielles $D_x \varphi(x, y)$ et $D_y \varphi(x, y)$ sont la forme linéaire $(x+y \mid .)$, et dont la dérivée seconde $D^2 \varphi(x, y)$ s'identifie à la forme bilinéaire indépendante de (x, y) : $h \times g \mapsto 2 \operatorname{Tr}(h \otimes g)$.

Notons également que, d'après la formule (1.5.1) :

$$(1.5.1.1) \quad E \operatorname{Tr}[M_t] = E\{\operatorname{Tr}(M^{\otimes 2}(t, .))\} - E\{\operatorname{Tr}. M^{\otimes 2}(0, .)\}$$
$$= E|M(t, .)|^2_{\mathbf{H}} - E|M(0, .)|^2_{\mathbf{H}}.$$

DÉFINITION 1. — *On dira qu'une martingale $(M_t)_{t \in [0, T]}$ à valeurs dans un espace de Banach B est localement bornée sur $[0, T]$ s'il existe une suite croissante (τ_n) de temps d'arrêt telle que $\bigcup_n [0, \tau_n] = [0, T] \times \Omega$, et pour tout n, la martingale $(M_{t \wedge \tau_n})_{t \in [0, T]}$ est bornée sur $[0, T] \times \Omega$.*

Nous considérons un espace de Hilbert **H**, un espace de Banach **V** de dual **V**′, **V** s'identifiant à une partie dense de **H**, **H** étant identifié comme d'ordinaire à son dual, et les injections $\mathbf{V} \mapsto \mathbf{H} \mapsto \mathbf{V}'$ étant continues.

On note $(. \mid .)$ le produit scalaire, et $|.|$ la norme dans **H**. La dualité entre **V** et **V**′ est notée $\langle .,. \rangle$.

PROPOSITION 2. — *Soient M une martingale continue à droite, à valeurs dans un espace de Banach réflexif* **V**, *localement bornée, et V un processus à valeurs dans le dual* **V**′ *de* **V**, *avec, pour tout* $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$,

$$V(t, \omega) = \int_0^t Y(s, \omega)\, ds + V(0, \omega),$$

où, pour tout ω,

$$Y(., \omega) \in L^1_{\mathbf{V}'}, [0, \mathrm{T}].$$

Alors, presque sûrement on a, pour tout t :

$$\langle M(t, .), V(t, .)\rangle = \langle M(0, .), V(0, .)\rangle + \int_0^t \langle M(s, .), Y(s, .)\rangle\, ds + N_t \quad (^1),$$

où N_t est une martingale locale réelle, telle que si V est à valeurs dans **H** *et continu :*

$$N_t = \int_0^t \langle V(s, .), dM_s\rangle.$$

Démonstration. — On peut se ramener au cas M, borné dans **V**, en considérant une suite convenable de temps d'arrêt.

Lorsque Y est à valeurs dans **H**, il s'agit là encore d'une application immédiate de la formule de Ito de [4], appliquée à la fonction $(x, y) \to \varphi(x, y) = \langle x, y \rangle$ sur $\mathbf{V} \times \mathbf{V}'$ du processus à variation bornée V, et à la martingale M. Dans le cas général, la possibilité d'approcher Y par des processus à valeurs dans **H** donne facilement la proposition.

PROPOSITION 3. — *Soit* $(1/p)+(1/q) = 1$; *soit M une martingale vérifiant les hypothèses de la proposition* 2 *et telle que* $E|M(t)|^2 < \infty$. *Soit* $\xi \in \mathscr{L}^2_{\mathbf{H}}(\Omega, \mathscr{F}_0, P)$ *et* $Y \in \mathscr{L}^p_{\mathbf{V}'}([0, T] \times \Omega, \mathscr{T}, l \otimes P)$.

On suppose en outre que le processus X, défini par

$$X(t) = \xi + \int_0^t Y(u)\, du + M(t)$$

(1) L'intégrale existe par trajectoire, puisque M est bornée sur chaque trajectoire.

prend $(l \otimes P)$*-presque partout ses valeurs dans* $\mathbf{V}$, *et appartient à* $\mathscr{L}^p_{\mathbf{V}}((0, T) \times \Omega, \mathscr{T}, l \otimes P)$. *Alors presque sûrement*, $t \mapsto \int_0^t Y(u)\,du$ *est continue à valeurs dans* $\mathbf{H}$, *et on a, pour tout* t,

$$(1.6.1)\qquad |X(t)|^2 = |\xi|^2 + 2\int_0^t \langle Y(u), X(u)\rangle\,du + 2\int_0^t \langle X(u), dM_u\rangle + \operatorname{Tr}[M_t] \quad (^2),$$

$$(1.6.2)\qquad E|X(t)|^2 < E|\xi|^2 + 2E\int_0^t \langle Y(u), X(u)\rangle\,du + E|M(t)|^2.$$

Si, de plus, le processus $\left(\int_0^t Y(u)\,du\right)$ *est borné dans H, ou bien M borné dans H*,

$$(1.6.3)\qquad E|X(t)|^2 = E|\xi|^2 + 2E\int_0^t \langle Y(u), X(u)\rangle\,du + E|M(t)|^2.$$

Démonstration. — La première partie de la proposition est conséquence immédiate d'un théorème sur les espaces $W((0, T), V)$ ([6] et [7]). On sait en effet que si $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s)\,ds$ avec $f(0) \in \mathbf{H}$,

$$f \in L^p_{\mathbf{V}}((0, T), l), f' \in L^q_{\mathbf{V}'}((0, T), l),$$

f est continue de $(0, T)$ dans $\mathbf{H}$ et (formule de « Green ») :

$$|f(t)|^2 = |f(0)|^2 + 2\int_0^t \langle f(s), f'(s)\rangle\,ds.$$

Nous appliquons ce résultat par trajectoire à $f(., \omega) = X(., \omega) - M(., \omega)$. Alors f est presque sûrement continue, et presque sûrement

$$|X(t) - M(t)|^2 = |\xi|^2 + 2\int_0^t \langle Y(u), X(u) - M(u)\rangle\,du,$$

(^{2}) Noter que cette formule est formellement une formule de Ito, mais ne résulte d'aucune formule classique puisque $t \mapsto \int_0^t Y(u)\,du$ n'est pas p. s. à trajectoires à variation bornée dans $\mathbf{H}$.

ce qui donne

$$|X(t)|^2 = |\xi|^2 + 2\int_0^t \langle Y(u),\ X(u)\rangle\, du + |M(t)|^2 + L(t),$$

avec $L(t) = 2\left\langle \int_0^t Y(u)\, du + \xi,\ M(t)\right\rangle - 2\int_0^t \langle Y(u),\ M(u)\rangle\, du.$

Posons $V(t) = \int_0^t Y(u)\, du + \xi$. La proposition 2 donne alors $L(t) = 2\int_0^t \langle V(u),\ dM_u\rangle$. Compte tenu de la proposition 1,

$$-2\int_0^t \langle M_u^-,\ dM_u\rangle = -|M_t|^2 + \mathrm{Tr}\,[M_t],$$

d'où la formule (1.6.1).

Lorsque $\left(\int_0^t Y(u)\, du\right)_{t\in[0,T]}$ est borné dans **H**, le processus L est une martingale de carré intégrable, et on a la formule (1.6.3). Dans le cas général, on considère les temps d'arrêt

$$\tau_n = \inf\left\{ t;\ \left\|\int_0^t Y(u)\, du\right\|_H > n\right\}.$$

On a alors

$$E|X_{t\wedge\tau_n}|^2 = E|\xi|^2 + 2E\int_0^{\tau_n} \langle Y(u),\ X(u)\rangle\, du + E|M_{t\wedge\tau_n}|^2.$$

Comme $1_{]0,\tau_n]}$, Y converge faiblement dans $L^q_{\mathbf{V}'}(([0,\ T]\times\Omega,\ \mathscr{T},\ l\otimes P)$, l'inégalité (1.6.3) en résulte par passage à la limite. D'où la proposition.

2. Problème et énoncé du théorème d'existence et d'unicité

La situation est la situation usuelle dans la théorie des équations d'évolution : on considère un espace de Hilbert **H** et un espace de Banach **V** de dual **V′** avec les injections continues $\mathbf{V} \mapsto \mathbf{H} \mapsto \mathbf{V}'$.

On notera $(.\ |\ .)$ le produit scalaire dans **H**, $|.|$ la norme correspondante. $\|.\|_{\mathbf{V}}$ et $\|.\|_{\mathbf{V}'}$ les normes de **V** et **V′** respectivement. La dualité entre **V** et **V′** est notée $\langle\ .,\ .\ \rangle$. Les espaces **V**, **H** et **V′** sont toujours supposés séparables.

Pour chaque $t \in [0,\ T]$, on se donne un opérateur $A(t,\ .)$ de **V** dans **V′**, qui est supposé hémicontinu (i. e. : faiblement continu en restriction aux droites affines de V), et possédant en outre les propriétés suivantes (p étant un réel $\geqslant 2$) :

(i) $\exists\, \beta > 0,\ \forall\, v \in \mathbf{V},\ \| A(t, v) \|_{\mathbf{V}'} \leqslant \beta \| v \|_{\mathbf{V}}^{p-1}$ pour presque tout t.

(ii) (Hypothèse de *coercivité* : *cf.* [5], chap. 2). Il existe λ réel, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et une semi-norme $[v]$ sur $\mathbf{V}$ tels que $[v]^p + \lambda | v |^p \geqslant \beta \| v \|_{\mathbf{V}}^p$ et $\langle A(t, v), v \rangle \leqslant -\alpha [v]^p$ pour tout $v \in \mathbf{V}$ et $t \in [0, T]$.

(iii) (Hypothèse de *monotonie*). Pour tout $v \in \mathbf{V}$, $u \in \mathbf{V}$ et $t \in [0, T]$, on a

$$\langle A(t, v) - A(t, u), v - u \rangle \leqslant 0.$$

(iv) $\forall\, v \in \mathbf{V}$, $t \mapsto A(t, v) \in \mathbf{V}'$ est fortement mesurable.

Les hypothèses (i) et (iii) entraînent (*cf.* [5], p. 171) que $v \mapsto A(t, v)$ est continue de $\mathbf{V}$ fort dans $\mathbf{V}'$ faible, d'où la mesurabilité de $(t, \omega) \mapsto A(t, X(t, \omega))$ pour tout processus fortement mesurable X, à valeurs dans $\mathbf{V}$.

DÉFINITION 2. — *M étant une martingale à valeurs dans* $\mathbf{H}$, *continue à droite, on dira que X est solution de l'équation d'évolution stochastique, dans l'intervalle* $[0, T]$,

$$dX(t) = A(t, X(t))\,dt + dM_t \tag{2.1}$$

de condition initiale $X(0) = \xi \in L_{\mathbf{H}}^p(\Omega, \mathscr{F}_0, P)$,
si X est un processus stochastique tel que pour P-presque tout ω :

$$\forall\, t \in [0, T],\quad X(t, \omega) = \xi(\omega) + \int_0^t A(s, X(s, \omega))\,ds + M(t, \omega).$$

(Sous entendu : la fonction $s \mapsto A(s, X(s, \omega))$ est définie, pour presque tout s sur $[0, T]$, et intégrable au sens de l'intégrale forte d'une fonction à valeurs dans $\mathbf{V}'$.)

THÉORÈME. — *On suppose que $(A(t, .))_{t \in [0, T]}$ vérifie les hypothèses d'hémicontinuité et* (i) *à* (iv) *ci-dessus. On suppose que M est une martingale à valeurs dans* $\mathbf{H}$, *de carré intégrable, à trajectoires continues à droite, localement bornée sur* $[0, T]$ (*resp. à trajectoires continues sur* $[0, T]$).

Alors, pour toute condition initiale $\xi \in L_{\mathbf{H}}^2(\Omega, \mathscr{F}_0, P)$, *l'équation* (2.1) *admet une solution X de condition initiale $X(0) = \xi$, à valeurs dans* $\mathbf{H}$ *à trajectoires continues à droite dans* $\mathbf{H}$ *avec limites à gauche* (*resp. à trajectoires continues*). *Une telle solution est unique à l'indistingabilité près et telle en outre que* $X \in L_{\mathbf{V}}^p([0, T] \times \Omega, \mathscr{T}, l \otimes P)$.

3. Démonstration du théorème

3.1. Construction des approximations. – L'unicité est immédiate, la différence de deux solutions X et Y étant telle que presque sûrement,

$$\forall t \in (0, T), \quad X(t, \omega) - Y(t, \omega) = \int_0^t [A(s, X(s, \omega) - A(s, Y(s, \omega))] \, ds.$$

L'argument usuel, utilisant la monotonie (*cf.* [5], p. 162) donne

$$\begin{aligned} & |X(t, \omega) - Y(t, \omega)|^2 \\ & \leqslant \int_0^t \langle A(s, X(s, \omega)) - A(s, Y(s, \omega)), X(s, \omega) - Y(s, \omega) \rangle \, ds \leqslant 0. \end{aligned}$$

Nous passons à la preuve de l'existence. Étant donnée la densité de $\mathbf{V}$ dans $\mathbf{H}$, nous pouvons considérer une base orthonormée $\{e_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ de $\mathbf{H}$, incluse dans $\mathbf{V}$. Soit $\mathbf{H}_n$ le sous-espace de $\mathbf{H}$ engendré par $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Pour tout $v' \in \mathbf{V}'$, posons $\pi_n(v') = \sum_{i=1}^n \langle e_i, v' \rangle e_i$. Posons également

$$(2.2) \qquad \begin{cases} A^n(t, .) = \pi_n \circ A(t, .), \\ M^n(t, .) = \pi_n(M(t, .)). \end{cases}$$

M^n est une martingale dans $\mathbf{H}_n$, continue à droite, et $A^n(t, .)$ un opérateur hémicontinu de $\mathbf{H}_n$ dans $\mathbf{H}_n$, possédant la même propriété de monotonie que $A(t, .)$, étant donné que $\forall v \in \mathbf{H}_n$, $\forall v' \in \mathbf{V}'$, on a

$$\langle v, v' \rangle = \langle v, \pi^n v' \rangle = (v \mid \pi^n v').$$

Nous allons utiliser le lemme suivant.

LEMME 1. – *Soit* $(A(t, .))_{t \in [0, T]}$ *une famille d'opérateurs hémicontinus de* $\mathbf{H}$, *de dimension finie, dans* $\mathbf{H}$. *Soit* M *un processus à valeurs dans* $\mathbf{H}$, *de puissance p-ième intégrable* ($p > 1$), *continu à droite. On suppose en outre les opérateurs* $A(t, .)$ *monotones, tels que, pour tout* $h \in \mathbf{H}$, $t \mapsto A(t, h)$ *soit mesurable, et tels que*

$$|A(t, u)|_{\mathbf{H}} \leqslant \beta |u|_{\mathbf{H}}^{\alpha}, \qquad où \quad \beta > 0 \quad et \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant p.$$

Alors $\forall \xi \in L_{\mathbf{H}}^{p/\alpha}(\Omega, \mathscr{F}_0, P)$ *il existe un processus* X *à valeurs dans* $\mathbf{H}$, *à trajectoires continues à droite* (*continu, si* M *l'est*), *admettant des limites* *à gauche en tout* $t \in [0, T[$, *unique à l'indistingabilité près, tel que, pour* P*-presque tout* ω,

$$(2.3)\qquad X(t, \omega) = \xi(\omega) + \int_0^t A(s, X(s, \omega))\, ds + M(t, \omega).$$

On a en outre $X(t, .) \in L_{\mathbf{H}}^{p/\alpha}(\Omega, \mathscr{F}_t, P)$ *pour tout* t.

Démonstration du lemme 1. — On considère pour chaque ω et s, l'opérateur

$$u \mapsto \tilde{A}(s, \omega, u) = A(s, u + M(s, \omega)).$$

Il est immédiat que, pour chaque ω, les opérateurs $\tilde{A}(s, \omega, .)$ sont monotones et tels en outre que, pour tout $R > 0$ et ω, existe un processus $\varphi_R(s, \omega)$ adapté, tel que $\varphi_R(., \omega) \in L^1(0, T)$, avec

$$|\tilde{A}(s, \omega, u)|_{\mathbf{H}} \leqslant \varphi_R(s, \omega) \quad \text{pour tout } u \text{ tel que } |u|_{\mathbf{H}} \leqslant R.$$

On peut prendre, en effet, $\varphi_R(s, \omega) = \beta\, 2^{(\alpha-1)}(\mathrm{R}^\alpha + |M(s, \omega)|_{\mathbf{H}}^\alpha)$, et on a d'ailleurs

$$|\varphi_0(s, \omega)|^{p/\alpha} = \beta\, 2^{(\alpha-1)/(p/\alpha)}|M(s, \omega)|^p.$$

L'unicité, pour tout ω, d'une application $t \mapsto X(t, \omega)$, vérifiant (2.3), pour tout t, est triviale en raison de la monotonie de A. L'existence résulte d'un théorème sur les équations différentielles appliqué à l'équation différentielle $(d/dt)\, Y(t) = \tilde{A}(t, \omega, Y(t))$.

En considérant, pour tout ω, la solution de cette équation différentielle, de condition initiale $\xi(\omega)$, et en posant $X(t, \omega) = Y(t, \omega) + M(t, \omega)$, on obtient une solution de (2.3). Notre ignorance d'une référence dans la littérature pour un tel théorème, et la nécessité de montrer que les solutions ont les bonnes propriétés de mesurabilité en ω, qui en font un processus adapté, nous invitent à produire une démonstration. L'énoncé de la proposition A.1, dont découle immédiatement le lemme, et une démonstration sont donnés en appendice.

Nous supposons que M est borné, quitte à s'y ramener par une suite de temps d'arrêt, et nous appliquons maintenant le lemme 1 aux opérateurs $(A^n(t, .))_{t \in [0, T]}$ définis plus haut sur les espaces $\mathbf{H}_n$ de dimension finie, et nous appelons X^n le processus solution de

$$X^n(t, \omega) = \pi^n . \xi(\omega) + \int_0^t A^n(s, X^n(s, \omega))\, ds + M^n(t, \omega).$$

Le processus X^n, somme d'un processus à trajectoires continues et de M^n, a ses trajectoires continues à droite et bornées (continues si M est continue). Ceci donne un sens à l'intégrale stochastique $\int X^n \cdot dM^n$.

3.2. Majorations et convergence dans le cas où M est localement borné dans V. — La proposition 1 donne

$$|X^n(t)|^2 = |\pi^n \xi_0|^2 + \int_0^t 2\langle X^n(s), A^n(s, X^n(s))\rangle ds$$
$$+2\int_0^t (X^n(s^-) \mid dM^n(s)) + \operatorname{Tr}[\pi^n M(t)].$$

D'après la coercivité de $A(s, .)$,

$$|X^n(t)|^2 + 2\alpha \int_0^t [X^n(s)]^p ds$$
$$\leqslant |(\pi_n(\xi_0)|^2 + 2\int_0^t (X^n(s^-) \mid dM^n(s) + \operatorname{Tr}[M^n(t)].$$

D'où l'on en déduit

$$\text{(3.2.1)} \qquad \sup_n \sup_{t\in T} E|X^n(t)|^2 \leqslant E|\xi_0|^2 + E|M(T)|^2.$$

et

$$\text{(3.2.2)} \qquad \sup_n E\int_0^T \| X^n(s)\|_{\mathbf{V}}^p ds < \infty.$$

Soit $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}$, $\mathcal{T}_2 = \mathcal{B} \otimes \mathcal{F}_T$.

En raison de la compacité faible des boules de

$$L^2_{\mathbf{H}}((0, T) \times \Omega, \mathcal{T}_i, l \otimes P)$$

et

$$L^p_{\mathbf{V}}((0, T) \times \Omega, \mathcal{T}_i, l \otimes P), \qquad i = 1, 2$$

on peut commencer par extraire une sous-suite $(X^{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ de processus qui converge faiblement dans les quatre espaces précédents. Nous supposons cette extraction faite, et appelons encore (X^n) la sous-suite obtenue, pour simplifier les notations, et X le processus limite (à valeurs dans V).

L'hypothèse (i) permet en outre d'écrire avec $Y = p/(p-1)$:

$$\text{(3.2.3)} \quad \sup_n E\int_0^T \| A(s, X^n(s, .))\|_{\mathbf{V}'}^q ds \leqslant \beta \sup_n E\int_0^T \| X^n(s, .)\|_{\mathbf{V}}^p < \infty.$$

On peut donc supposer que $A(., X^n(.))$ converge faiblement vers un processus Y dans $L^q_{V'}((0, T) \times \Omega, \mathcal{T}_i, l \otimes P)$, $i = 1, 2$.

En vertu de (3.2.1) on peut également supposer la suite (X^n) extraite de telle sorte que X^n_T converge faiblement vers X_T dans $L^2_{\mathbf{H}}(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$.

Pour tout ψ, $\mathcal{T}_2$-mesurable, réel, borné, on a alors, en posant $U = X - \xi - M$,

$$\begin{aligned}
&\int_{[0, T] \times \Omega} \psi(t, \omega)\, U(t, \omega)\, dt\, dP(\omega) \\
&\quad = \lim_n \int_{[0, T] \times \Omega} \psi(t, \omega) \left(\int_0^t A(s, X^n(s)) \right) ds\, dt\, dP(\omega) \\
&\quad = \lim_n \int_{[0, T] \times \Omega} A(s, X^n(s, \omega)) \left(\int_s^T \psi(t, \omega)\, dt \right) ds\, P(d\omega) \\
&\quad = \int_{[0, T] \times \Omega} Y(s, \omega) \left(\int_s^T \psi(t, \omega)\, dt \right) ds\, P(d\omega) \\
&\quad = \int_{[0, T] \times \Omega} \psi(t, \omega) \left(\int_0^t Y(s, \omega)\, ds \right) dt\, P(d\omega).
\end{aligned}$$

D'où, pour P-presque tout ω,

$$X(t, \omega) = \xi + \int_0^t Y(s, \omega)\, ds + M(t, \omega) \quad \text{presque tout } t.$$

LEMME 2. — *Si M est une martingale à valeurs dans $\mathbf{V}$, localement bornée dans $\mathbf{V}$ sur $(0, T)$, on a $l \otimes P$ presque partout $Y(t, \omega) = A(t, X(t, \omega))$.*

Démonstration. — L'hypothèse sur M et la continuité des trajectoires de $\int_0^t Y(u)\, du$ permettent, en considérant une suite croissante convenable de temps d'arrêt, de se ramener au cas où M est borné, et Y vérifie les hypothèses de la proposition 3.

On a alors, pour tout $U \in \mathcal{L}^p_{\mathbf{V}}((0, T) \times \Omega, \mathcal{B} \otimes \mathcal{F}_T, l \otimes P)$, en utilisant la proposition 3 :

$$\begin{aligned}
&2E \int_0^T \langle Y(u) - A(u, U(u)), X(u) - U(u) \rangle\, du \\
&\quad = 2E \int_0^T \langle Y(u), X(u) \rangle\, du - 2E \int_0^T \langle Y(u), U(u) \rangle\, du \\
&\qquad - 2E \int_0^T \langle A(u, U(u)), X(u) - U(u) \rangle\, du
\end{aligned}$$

$$= E\,|\,X_T\,|^2 - E\,|\,\xi\,|^2 - E\,|\,M_T\,|^2 - 2\lim_{k\to\infty}\int_0^T \langle A(u,\ X^k(u)),\ U(u)\rangle\, du$$

$$-2\lim_{k\to\infty} E\int_0^T \langle A(u,\ U(u)),\ X^k(u)-U(u)\rangle\, du$$

$$\leqslant \liminf_k E\,|\,X_T^k\,|^2 - \lim_k E\,|\,\pi_k\,\xi\,|^2 - \lim_k E\,|\,M_T^k\,|^2$$

$$-2\lim_{k\to\infty}\int_0^T \langle A(u,\ X^k(u)),\ U(u)\rangle\, du$$

$$-2\lim_k \int_0^T \langle A(u,\ U(u)),\ X^k(u)-U(u)\rangle\, du$$

$$\leqslant \liminf_k 2\,E\int_0^T \langle A(u,\ X^k(u))-A(u,\ U(u)),\ X^k(u)-U(u)\rangle\, du$$

$$\leqslant 0 \quad (\text{monotonie de } A).$$

Donc l'argument de Minty suivant s'applique (*cf.* [1] par exemple, ou [5]).

Choisissons alors $U = X-\rho\, V$, où V est quelconque dans

$$L^p_{\mathbf{V}}((0,\ T)\times\Omega,\ \mathscr{T},\ l\otimes P),$$

et $\rho > 0$:

$$E\left\{\int_0^T \langle\, Y(s,\ .)-A(s,\ X(s,\ .)-\rho\, V(s,\ .),\ V(s,\ .)\,\rangle\, ds\right\} \leqslant 0.$$

En faisant tendre ρ vers zéro, on obtient alors, grâce à l'hémicontinuité,

$$E\left\{\int_0^T \langle\, Y(s,\ .)-A(s,\ X(s,\ .)),\ V(s,\ .)\,\rangle\right\} \leqslant 0,$$

d'où le lemme.

Nous avons donc finalement prouvé, lorsque M est à valeurs dans $\mathbf{V}$ et localement bornée, l'existence d'un $X \in L^p_{\mathbf{V}}$ $((0,\ T)\times\Omega,\ \mathscr{T},\ l\otimes P)$ tel que pour P-presque tout ω :

$$X(t,\ \omega) = \xi_0(\omega) + \int_0^t A(s,\ X(s,\ \omega))\, ds + M(t,\ \omega) \quad l\text{-p. p. sur } (0,\ T),$$

l'application $s \mapsto A(s,\ X(s,\ \omega))$ étant fortement de puissance q-ième intégrable à valeurs dans $\mathbf{V}'$. On voit donc immédiatement que, si on pose pour P-presque tout ω,

$$\tilde{X}(t,\ .) = \xi_0(\omega) + \int_0^t A(s,\ X(s,\ \omega))\, ds + M(t,\ \omega),$$

le processus $\tilde{X}$ est une solution du problème possédant toutes les propriétés du théorème, notamment la continuité à droite des trajectoires en vertu de la proposition 3 (continuité si M est continue).

Remarque. — Sous les hypothèses du lemme 2, on a démontré (avec $U = 0$) :

$$E\int_0^T \langle A(s,\, X(s)),\, X(s)\,ds \rangle \leqslant \liminf_k E\int_0^T \langle A(s,\, X^k(s)),\, X^k(s) \rangle\,ds.$$

Or de la monotonie résulte

$$E\int_0^T \langle A(s,\, X(s))-A(s,\, X^k(s)),\, X(s)-X^k(s) \rangle\,ds \leqslant 0.$$

D'où, en raison des convergences faibles de X^k et $A(s,\, X^k(s))$,

$$E\int_0^T \langle A(s,\, X(s),\, X_s \rangle\,ds \geqslant \limsup_k E\int_0^T \langle A(s,\, X^k(s)),\, X^k(s) \rangle\,ds.$$

D'où, sous les hypothèses du lemme 2, la formule

$$E\int_0^T \langle A(s,\, X(s)),\, X(s) \rangle\,ds = \lim_k E\int_0^T \langle A(s,\, X^k(s)),\, X^k(s) \rangle\,ds. \tag{3.2.4}$$

3.3. Démonstration du théorème sans hypothèse complémentaire sur M. — On se ramène en utilisant des temps d'arrêt au cas d'une martingale M bornée dans **H**.

La martingale $M^n = \pi_n(M)$ est évidemment bornée dans **V**. Considérons alors la solution unique $X^n(t) = \xi+\int_0^t A(s,\, X^n(s))\,ds+M^n(t)$.

Appliquons l'inégalité de l'énergie (1.6.2). On obtient :

$$E\,|\,X^n(t)\,|^2 \leqslant E\,|\,\xi\,|^2+2E\int_0^t \langle A(s,\, X^n(s)),\, X^n(s) \rangle\,ds+E\,|\,M^n(t)\,|^2.$$

D'où, comme en 3.2, des majorations :

$$\sup_n \sup_{t\leqslant T} E\,|\,X^n(t)\,|^2 \leqslant E\,|\,\xi\,|^2+E\,|\,M(T)\,|^2 \tag{3.3.1}$$

et

$$\sup_n E\int_0^T \|\,X^n(s)\,\|_{\mathbf{V}}^p\,ds < \infty. \tag{3.3.2}$$

En outre,

$$(3.3.3) \quad E\,|X^n(t)-X^m(t)|^2 \leqslant 2E\int_0^t \langle A(s, X^n(s))-A(s, X^m(s)), X^n(s)-X^m(s)\rangle\, ds + E\,|M^n(t)-M^m(t)|^2.$$

De la monotonie de A, on déduit donc

$$(3.3.4) \qquad E\,|X^n(t)-X^m(t)|^2 \leqslant E\,|M^n(t)-M^m(t)|^2$$

et

$$(3.3.5) \quad 0 \leqslant -2E\int_0^t \langle A(s, X^n(s))-A(s, X^m(s)), X^n(s)-X^m(s)\rangle\, ds \leqslant E\,|M_T^n-M_T^m|^2.$$

On raisonne alors comme en 3.2 pour extraire une sous-suite $(X^{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ convergeant faiblement vers un X dans $L_{\mathbf{V}}^p((0, T)\times\Omega, \mathscr{T}_i, l\otimes P)$, telle que $(A(., X^{n_k}(.)))_k$ converge faiblement vers un Y dans

$$L_{\mathbf{V}'}^p((0, T)\times\Omega, \mathscr{T}_i, l\otimes P).$$

On a en outre, en vertu de (3.3.4) :

$$(3.3.6) \qquad \lim_k \sup_{t\leqslant T} E\,|X^{n_k}(t)-X(t)|^2 = 0.$$

On raisonne alors comme dans [1] (p. 126) pour déduire de (3.3.5) que

$$\lim_{k\to\infty} E\int_0^T \langle A(s, X^{n_k}(s)), X^{n_k}(s)\rangle\, ds = E\int_0^T \langle Y(s), X(s)\rangle\, ds,$$

d'où l'on déduit, pour tout $U\in L_{\mathbf{V}}^p((0, T)\times\Omega, \mathscr{B}\otimes\mathscr{F}_T, l\otimes P)$, que

$$E\int_0^T \langle Y(s, .)-A(s, \mathrm{U}(s, .)), X(s, .)-\mathrm{U}(s, .)\rangle\, ds \leqslant 0$$

et, en raisonnant comme à la fin de la démonstration du lemme 2, on obtient

$$Y(t, \omega) = A(t, X(t, \omega)) \qquad (l\otimes P)\text{-presque partout.}$$

Montrons enfin que X admet un représentant continu à valeurs dans H. D'après la proposition 3,

$$|X^m(t)-X^n(t)|^2 = 2\int_0^t \langle A(s, X^n(s)-A(s, X^m(s)); X^n(s)-X^m(s)\rangle\, ds + 2N^{n,m}(t)+|M^n-M^m|_t^2,$$

où $N^{n,m}(t) = \int_0^t \langle (M_u^n - M_u^m)^-, d(M_u^m - M_u^n) \rangle$ est une martingale. La monotonie de A donne

$$\sup_{t \leqslant T} | X^n(t) - X^m(t) |^2 \leqslant \sup_{t \leqslant T} [2 N_t^{n,m} + | M^m - M^n |_t^2]$$

le processus $(2 N_t^{n,m} + | M^m - M^n |_t^2)_{t \in [0,t]}$ étant, en outre, sous-martingale positive telle que $E(2 N_t^{n,m} + | M_T^n - M_T^m |^2) = E | M_T^n - M_T^m |^2$.

L'inégalité de Doob, appliquée à cette sous-martingale, la convergence vers zéro de $E | M_T^n - M_T^m |^2$, et un argument standard, utilisant Borel-Cantelli, montrent que l'on peut extraire une sous-suite (X^{n_k}) convergeant p. s. uniformément par trajectoire dans $\mathbf{H}$. Ceci montre l'existence d'un représentant continu de X.

APPENDICE

PROPOSITION A.1. – *Soit $\tilde{A}(t, \omega, .)$ une famille d'opérateurs de* $\mathbf{H}$ *dans* $\mathbf{H}$ *(de dimension finie) possédant les propriétés suivantes :*

1° *Pour tout $h \in \mathbf{H}$, $(\tilde{A}(t, ., h))_{t \in [0,T]}$ est un processus bien mesurable.*

2° *Les opérateurs $\tilde{A}(t, \omega, .)$ sont hémicontinus.*

3° *Les opérateurs $\tilde{A}(t, \omega, .)$ sont monotones.*

4° *Pour tout $R > 0$ existe un processus réel bien mesurable φ_R tel que*

$$| h |_{\mathbf{H}} \leqslant R \quad \Rightarrow \quad | \tilde{A}(s, \omega, h) |_{\mathbf{H}} \leqslant \varphi_R(s, \omega)$$

et

$$\varphi_R(., \omega) \in L^1(0, T) \quad \textit{pour tout } \omega.$$

Alors, pour tout $\xi \in L^p_{\mathbf{H}}(\Omega, \mathscr{F}_0, P)$, existe un processus adapté X, à trajectoires continues, unique à l'indistingabilité près, tel que, pour P-presque tout ω, la fonction $t \mapsto X(t, \omega)$ vérifie sur $[0, T]$:

$$X(t, \omega) = \xi(\omega) + \int_0^t \tilde{A}(s, \omega, X(s, \omega)) \, ds;$$

si, en outre,

$$E\left(\int_0^t | \varphi_0(s, .) |^p \, ds \right) < \infty,$$

on a $X_t \in L^p_{\mathbf{H}}(\Omega, \mathscr{F}_t, P)$ pour tout t.

Démonstration (³). — L'unicité résulte immédiatement de l'hypothèse 3°.

Comme ξ est $\mathscr{F}_0$-mesurable, il est clair que, quitte à considérer les processus x_n correspondant aux conditions initiales, $\xi_n = 1_{[|\xi|_{\mathbf{H}} \leqslant n]} \cdot \xi$, on peut se ramener au cas $\sup_{\omega \in \Omega} |\xi|_{\mathbf{H}} < \infty$. Nous posons $a = \sup_{\omega \in \Omega} |\xi|_{\mathbf{H}}$.

Supposons maintenant que τ soit un temps d'arrêt à valeurs dans $[0, T]$, que ξ_τ soit un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbf{H}$, $\mathscr{F}_\tau$-mesurable, et que $\sup_{\omega \in \Omega} |\xi_\tau(\omega)|_{\mathbf{H}} \leqslant R/2$.

Posons

$$\tau'(\omega) = \inf\left\{ t;\ t > \tau(\omega),\ \int_{\tau(\omega)}^{t} \varphi_R(s, \omega)\, ds > R/2 \right\} \wedge T.$$

En vertu de la continuité de $t \mapsto \int_{\tau(\omega)}^{t} \varphi_R(s, \omega)\, ds$, τ' est un temps d'arrêt.

Soit $\delta > 0$. Posons $t_n(\delta) = \inf\{\tau(\omega) + n\delta, \tau'(\omega)\}$, et définissons, pour $t \in [t_n(\delta), t_{n+1}(\delta)]$, par récurrence sur n,

$$v(t, \omega, \delta) = v(t_n(\delta), \omega, \delta) + \int_{t_n(\delta)}^{t} \tilde{A}(s, \omega, v(t_n(\delta), \omega, \delta))\, ds.$$

La définition de τ' permet de vérifier facilement que le processus $v(.,.,\delta)$ est parfaitement défini sur l'intervalle stochastique $[\tau, \tau']$. En outre, les inégalités

$$|1_{[\tau, \tau']}(t, \omega)\, v(t, \omega, \delta)|_{\mathbf{H}} \leqslant R$$

et

$$|\tilde{A}(t, \omega, v(t_n(\delta), \omega, \delta))|_{\mathbf{H}} \leqslant \varphi_R(t, \omega)$$

montrent que les ensembles

$$\{1_{[\tau, \tau']} \cdot v(.,.,\delta)\}_{\delta > 0} \qquad \text{et} \qquad \{\tilde{v}_\delta(.,.)\}_{\delta > 0},$$

où

$$\tilde{v}_\delta(t, \omega) = \textstyle\sum_n 1_{[t_n(\delta), t_{n+1}(\delta)[}(t, \omega)\, \tilde{A}(t, \omega, v(t_n(\delta), \omega, \delta))$$

sont faiblement compacts dans $L^1_{\mathbf{H}}([0, T] \times \Omega, \mathscr{T}, l \otimes P)$.

Il existe donc une suite (δ_n) décroissant vers zéro, telle que les processus $(1_{[\tau, \tau']}\, v(.,.,\delta_n))_{n \in \mathbf{N}}$ et $(\tilde{v}_{\delta_n})$ convergent respectivement vers X et Y, respectivement pour la topologie faible de $L^1_{\mathbf{H}}([0, T] \times \Omega, \mathscr{T}, l \otimes P)$.

(³) Inspirée par une démonstration communiquée par M. CROUZEIX dans le cas déterministe.

Le même argument de monotonie que celui utilisé dans la démonstration du lemme 2 montre que

$$Y(t, \omega) = \tilde{A}(t, \omega, X(t, \omega)) \quad (l \otimes P)\text{-p. p.},$$

et en outre pour P-presque tout ω, on a

$$X(t, \omega) = \xi_\tau(\omega) + \int_{\tau(\omega)}^{t} \tilde{A}(s, \omega, X(s, \omega))\, ds \quad l\text{-p. p. sur } [\tau, \tau'].$$

En posant, $\tilde{X}(t, \omega) = \xi_\tau(\omega) + \int_{\tau(\omega)}^{t} \tilde{A}(s, \omega, X(s, \omega))\, ds$, on obtient immédiatement un processus $\tilde{X}$ à trajectoires continues à droite tel que, pour P-presque tout ω, on ait

$$\tilde{X}(t, \omega) = \xi_\tau(\omega) + \int_{\tau(\omega)}^{t} \tilde{A}(s, \omega, \tilde{X}(s, \omega))\, ds \quad \text{sur } [\tau(\omega), \tau'(\omega)].$$

Notons enfin, qu'en raison de la monotonie,

$$(\tilde{A}(s, \omega, X(s, \omega)) \mid \tilde{X}(s, \omega)) \leqslant (\tilde{A}(s, \omega, 0) \mid \tilde{X}(s, \omega))$$

et par suite,

$$\text{(A.1)} \qquad |\tilde{X}(t, \omega)|_{\mathbf{H}} \leqslant |\xi_\tau(\omega)|_{\mathbf{H}} + \int_{\tau(\omega)}^{t} \varphi_0(s, \omega)\, ds.$$

Supposons d'abord que

$$\text{(A.2)} \qquad \sup_\omega \int_0^T \varphi_0(s, \omega)\, ds < +\infty,$$

et choisissons

$$\text{(A.3)} \qquad R = 2\left(a + \sup_\omega \int_0^T \varphi_0(s, \omega)\, ds\right);$$

définissons, par récurrence sur n,

$$\tau_0 = 0,$$

$$\tau_{n+1}(\omega) = \inf\left\{t;\ t > \tau_n(\omega), \int_{\tau_n(\omega)}^{t} \varphi_R(s, \omega)\, ds > \frac{R}{2}\right\} \wedge T.$$

Il est clair d'abord que $\bigcup_n [\tau_n, \tau_{n+1}) = [0, T)$. Ensuite, on peut définir le processus stochastique $\tilde{X}$ sur $[\tau_n, \tau_{n+1})$, par récurrence sur n, en posant

$\tilde{X}(0, \omega) = \xi(\omega)$, et en considérant, pour chaque n, le processus continu sur $[\tau_n, \tau_{n+1}]$ tel que, $\forall\, t \in [\tau_n, \tau_{n+1}]$,

$$\tilde{X}(t, \omega) = \tilde{X}(\tau_n(\omega), \omega) + \int_{\tau_n(\omega)}^{t} \tilde{A}(s, \omega, \tilde{X}(s, \omega))\, ds.$$

[On a en effet, pour tout ω, d'après (A.1) et (A.3),

$$\left| \tilde{X}(\tau_n(\omega), \omega) \right|_{\mathbf{H}} \leqslant a + \int_{0}^{\tau_n(\omega)} \varphi_0(s, \omega)\, ds \leqslant \frac{R}{2} \Bigg].$$

Ceci achève la construction du processus solution sur tout l'intervalle $[0, T]$ lorsque (A.2) est satisfaite. Si (A.2) n'est pas satisfaite, on s'y ramène en utilisant la propriété 4°, en considérant la famille σ_m de temps d'arrêt

$$\sigma_m(\omega) = \inf\left\{ t;\ \int_0^t \varphi_0(s, \omega)\, ds > m \right\} \wedge \mathrm{T},$$

et en considérant les équations associées aux opérateurs

$$\tilde{A}_m(t, \omega, u) = 1_{]0, \sigma_m]}(t, \omega) . \tilde{A}(t, \omega, u),$$

dont les solutions coïncident avec celles de l'équation donnée sur $[\sigma_m = T]$.

Comme $\bigcup_m [\sigma_m = T] = \Omega$ d'après le 4°, la réduction au cas où (A.2) est satisfaite est donc immédiate.

Comme en outre, d'après (A.1),

$$\int_0^t \varphi_0(s, \omega)\, ds \leqslant \lambda \quad \Rightarrow \quad \left| X(t, \omega) \right| \leqslant \xi_0(\omega) + \lambda,$$

la propriété

$$E\left(\int_0^T \left| \varphi_0(s, .) \right|^p ds \right) < \infty$$

implique

$$E \left| X(t, .) \right|^p < \infty \quad \text{pour tout } t.$$

D'où la dernière conclusion de la proposition.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bensoussan (A.) et Temam (R.). — Équations aux dérivées partielles stochastiques non linéaires, *Israel J. of Math.*, t. 11, 1972, p. 95-129.

[2] Bensoussan (A.) et Teman (R.). — Équations stochastiques du type Navier-Stokes, *J. funct. Anal.*, t. 13, 1973, p. 195-222.

[3] GRAVEREAUX (B.) et PELLAUMAIL (J.). — Formule de Ito pour des processus non continus à valeurs dans des espaces de Banach. *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. 10, 1974, p. 399-422.

[4] KUNITA (H.). — Stochastic integrals based on martingales taking values in Hilbert spaces, *Nagoya Math. J.*, t. 38, 1970, p. 41-52.

[5] LIONS (J.-L.). — *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.* — Paris, Dunod, 1969.

[6] LIONS (J.-L.) et MAGENES (E.). — *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol. 1 et 2. — Paris, Dunod, 1968.

[7] LIONS (J.-L.) et PEETRE (P.). — *Sur une classe d'espaces d'interpolation.* — Paris, Presses universitaires de France, 1964 (*Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications mathématiques*, 19, p. 5-68).

[8] MÉTIVIER (M.). — Advances in the theory of stochastic integration and applications, "*Proceedings of the 7th Prague Conference on information and probability theory*" [1974. Prague] (à paraître).

[9] MÉTIVIER (M.). — Intégrale stochastique par rapport à des processus à valeurs dans un espace de Banach réflexif, *Theor. of Prob. and Appl.*, t. 19, 1974, p. 577-606.

[10] MEYER (P. A.). — *Probabilités et potentiels.* — Paris, Hermann, 1966 (*Act. scient. et ind.*, 1918; *Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg*, 14).

[11] PELLAUMAIL (J.). — Sur l'intégrale stochastique et la décomposition de Doob-Meyer, *Astérisque* n° 9, 1973, 125 p.

[12] PARDOUX (E.). — Sur des équations aux dérivées partielles stochastiques monotones, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 275 1972, série A, p. 101-103.

[13] VIOT (M.). — Solution en loi d'une équation aux dérivées partielles stochastique non linéaire : méthode de compacité, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 278, 1974, série A, p. 1185-1188.

(Texte reçu le 16 février 1975.)

Michel MÉTIVIER et Giovanni PISTONE,
Université de Rennes-I,
I. R. I. S. A., L. A. C. N. R. S., n° 227,
B. P. n° 25 A,
35031 Rennes Cedex.