BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-JACQUES RISLER

Le théorème des zéros en géométries algébrique et analytique réelles

Bulletin de la S. M. F., tome 104 (1976), p. 113-127
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1976__104__113_0>

Bull. Soc. math. France,
104, 1976, p. 113-127.

LE THÉORÈME DES ZÉROS EN GÉOMÉTRIES ALGÉBRIQUE ET ANALYTIQUE RÉELLES

par

Jean-Jacques RISLER

[École Polytechnique]

RÉSUMÉ. — On montre qu'un idéal I de l'anneau A des polynômes sur $\mathbf{R}^n$ (resp. de l'anneau des germes en $0 \in \mathbf{R}^n$ de fonctions analytiques réelles) est l'idéal de sa variété $V(I)$ si et seulement s'il est réel, i. e. si l'anneau A/I est ordonnable. Ceci constitue l'analogue réel des théorèmes de Hilbert-Rückert.

Introduction

Le but de ce travail, qui constitue le premier chapitre de ma thèse, est d'essayer de faire, avec des méthodes algébriques, de la géométrie sur le corps des réels; l'élégance et la profondeur des résultats obtenus on fait que les géomètres se sont principalement occupés des corps algébriquement clos, le résultat central de la théorie étant, aussi bien en géométrie algébrique qu'en géométrie analytique, le théorème des zéros de Hilbert-Rückert (*cf.* par exemple le rôle de ce théorème dans F.A.C. de J.-P. SERRE [19]).

On donne ici une démonstration de théorèmes analogues dans le cas réel : soient A un anneau de polynômes (ou une algèbre de séries convergentes) sur un corps k, I un idéal de A, et $V(I)$ la variété des zéros de I.

On dit que I a la propriété des zéros si tout élément de A nul sur $V(I)$ appartient à I.

Si k est algébriquement clos, le théorème des zéros s'énonce par l'équivalence suivante :

$$I \text{ a la propriété des zéros} \Leftrightarrow A/I \text{ est réduit.}$$

Si $k = \mathbf{R}$, le théorème des zéros devient :

$$I \text{ a la propriété des zéros} \Leftrightarrow A/I \text{ est ordonnable.}$$

(A/I est ordonnable si, et seulement si, I est réel, i. e. satisfait à la condition suivante : $f_1^2+\ldots+f_p^2 \in I \Rightarrow f_i \in I\,(1 \leqslant i \leqslant p)$).

Ce théorème avait, à ma connaissance, été conjecturé par TOGNOLI.

Dans tout ce travail, A désignera un anneau commutatif unitaire; nous noterons $\mathcal{O}_n$ l'anneau des séries convergentes $\mathbf{R}\{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\mathcal{F}_n$ l'anneau des séries formelles $\mathbf{R}[[x_1, \ldots, x_n]]$. Toutes les relations d'ordre considérées sont des relations d'ordre total.

1. Idéaux réels

Soient A un anneau commutatif, et I un idéal de A. Nous dirons que I est un idéal réel s'il vérifie la condition suivante (condition des carrés) :

(c) Si $f_1, \ldots, f_p$ sont des éléments de A tels que $f_1^2 + \ldots + f_p^2 \in I$, alors $f_i \in I$, $(1 \leqslant i \leqslant p)$.

Remarquons que cela implique que A/I est réduit, et d'après la théorie d'Artin-Schreïer [8], la condition (c) est équivalente au fait que l'anneau A/I soit *ordonnable*.

LEMME 1.1. — *Soit I un idéal de A, intersection d'un nombre fini d'idéaux premiers $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$ (tels que l'inclusion $\mathcal{P}_i \subset \mathcal{P}_j$ implique $i = j$). Alors, pour que I soit réel, il faut et il suffit que chaque $\mathcal{P}_i$ le soit.*

Démonstration. — Si les $\mathcal{P}_i$ sont réels, il est clair que I est réel; réciproquement, supposons I réel, et soient $g_1, \ldots, g_k$ des éléments de A tels que $g_1^2 + \ldots + g_k^2 \in \mathcal{P}_1$ par exemple. Soit $h \in A$ tel que $h \in \bigcap_{i \neq 1} \mathcal{P}_i$ et $h \notin \mathcal{P}_1$. Alors $h^2 g_1^2 + \ldots + h^2 g_k^2 \in \cap \mathcal{P}_i = I$, d'où $hg_i \in I$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ puisque I est réel, et donc $hg_i \in \mathcal{P}_1$, soit $g_i \in \mathcal{P}_1$ puisque par hypothèse $h \notin \mathcal{P}_1$, et $\mathcal{P}_1$ est premier.

DÉFINITION 1.2. — Soit I un idéal de A; on appelle *racine réelle* de I, et l'on note $\sqrt[R]{I}$ l'ensemble des éléments f de A vérifiant la condition suivante : il existe un entier $n > 0$ et des éléments $g_1, \ldots, g_k$ de A tels que $f^{2n} + g_1^2 + \ldots + g_k^2 \in I$.

La démonstration de la proposition suivante est immédiate :

PROPOSITION 1.3. — *$\sqrt[R]{I}$ est le plus petit idéal réel contenant I.*

Le but de cet article est principalement de montrer que la racine réelle joue le même rôle sur le corps $\mathbf{R}$ (ou sur un corps ordonné maximal) que la racine habituelle sur un corps algébriquement clos.

La notion de racine réelle a été introduite par divers auteurs (*cf.* par exemple [2] ou [6]).

Nous aurons besoin de la proposition suivante :

PROPOSITION 1.4. — *Soient A un anneau intègre, f un élément de A tel que la topologie (f)-adique soit séparée, et que (f) soit réel. Alors f n'est pas une somme finie de carrés non nuls dans le corps des fractions $K(A)$ de A.*

Supposons en effet que f soit une somme de carrés, non nuls dans $K(A)$, ce qui donne une relation de la forme : $Q^2 f = P_1^2 + \ldots + P_k^2$, Q et les P_i étant des éléments non nuls de A.

L'idéal (f) étant réel, cela implique que chaque P_i est divisible par $f : P_i = f P'_i$, d'où $Q^2 = f(P'^2_1 + \ldots + P'^2_k)$, d'où $Q = f Q'$ toujours parce que (f) est réel. On obtient donc une relation de la même forme :

$$Q'^2 f = P'^2_1 + \ldots + P'^2_k,$$

d'où, en recommençant la même opération, $Q \in (f^n)$, $\forall n$, donc $Q = 0$ puisque par hypothèse la topologie (f)-adique est séparée, ce qui est absurde.

C. Q. F. D.

2. **Le théorème d'E. Artin et ses généralisations**

Le théorème suivant, dû à E. ARTIN, a été montré pour donner une réponse au 17[e] problème de Hilbert. (Pour une démonstration, *cf.* [8], ou [18].)

THÉORÈME 2.1. — *Soient k un corps ordonné, $\bar{k}$ sa clôture réelle, et K le corps des fractions rationnelles $k(X_1, \ldots, X_n)$. Supposons donné un ordre sur K (qui prolonge celui de k), et soient $f_1, \ldots, f_p$ des éléments de $k[X_1, \ldots, X_n]$. Alors il existe un point $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \bar{k}_n$ tel que $f_i(x)$ ait le même signe dans $\bar{k}$ que f_i dans $K (1 \leqslant i \leqslant p)$.*

COROLLAIRE 2.2. — *Soit $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$, tel que $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in \bar{k}^n$. Alors il existe des éléments $p_i \geqslant 0$ de k et des éléments u_i de K tels que $f = \sum p_i u_i^2$.*

La démonstration du corollaire est immédiate à partir du théorème 2.1, modulo la théorie d'Artin-Schreïer ([8], p. 288).

Remarque. — S'il n'y a qu'un seul ordre sur k (par exemple, si $k = Q$, ou si k est réellement clos), on peut conclure, sous les hypothèses du corollaire, que f est une somme de carrés dans K, car chaque p_i est alors une somme de carrés dans k; ceci est la réponse (positive) au 17[e] problème de Hilbert.

Nous allons généraliser ce théorème aux séries convergentes [16] :

THÉORÈME 2.3. — *Supposons l'anneau $\mathcal{O}_n$ totalement ordonné, et soient $f_1, \ldots, f_p$ des éléments non nuls de $\mathcal{O}_n$. Il existe alors dans tout voisinage U de 0 dans $\mathbf{R}^n$ un point $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tel que, pour $1 \leqslant i \leqslant p$,*

(*a*) *la série f_i converge au point x,*

(*b*) *$f_i(x)$ soit $\neq 0$ et ait le même signe dans $\mathbf{R}$ que f_i dans $\mathcal{O}_n$.*

La démonstration suit pas à pas celle d'E. ARTIN telle qu'on la trouve dans [8] : elle s'appuie sur deux lemmes.

Soit $K(\mathcal{O}_{n-1})$ le corps des fractions de $\mathcal{O}_{n-1}$, et soit P sa clôture réelle ($K(\mathcal{O}_{n-1})$ est ordonné, car $\mathcal{O}_{n-1}$ est plongé dans $\mathcal{O}_n$ qui est supposé ordonné).

LEMME 2.4. — *Soit $f \in \mathcal{O}_{n-1}[X_n]$ un polynôme unitaire. Supposons que f ait t racines distinctes dans P. Il existe alors des éléments $g_1, \ldots, g_s$ de $\mathcal{O}_{n-1}$ tels que, quel que soit $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}$ (assez proche de zéro pour que f et les g_i convergent en x) pour lequel $g_i(x)$ ait le même signe dans $\mathbf{R}$ que g_i dans $\mathcal{O}_{n-1}$ ($1 \leqslant i \leqslant s$), le polynôme $f(x) \in \mathbf{R}[X_n]$ ait t racines dans $\mathbf{R}$.*

LEMME 2.5. — *Soient $f_1, \ldots, f_t$ des polynômes unitaires (non nécessairement tous distincts) dans l'anneau $\mathcal{O}_{n-1}[X_n]$.*

Pour $1 \leqslant i \leqslant t$, soit r_i une racine dans P du polynôme f_i; supposons que $r_1 < \ldots < r_t$. Il existe alors des éléments $g_1, \ldots, g_s$ de $\mathcal{O}_{n-1}$ tels que, quel que soit le point $x \in \mathbf{R}^{n-1}$ pour lequel :

— *les séries f_i et g_j convergent;*

— *$g_j(x)$ ait le même signe dans $\mathbf{R}$ que g_j dans $\mathcal{O}_{n-1}$;*

il existe des nombres réels $b_1 < \ldots < b_t$ tels que b_i soit une racine du polynôme $f_i(x) \in \mathbf{R}[X_n]$ ($1 \leqslant i \leqslant t$).

La démonstration de ces lemmes est identique à celle de [8]; démontrons maintenant le théorème 2.3 par récurrence sur n en le supposant vrai pour $\mathcal{O}_{n-1}$.

Soient donc $f_1, \ldots, f_p$ des éléments de $\mathcal{O}_n$; quitte à faire un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que $f_i(0, \ldots, 0, X_n) \neq 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$, et donc, d'après le théorème de préparation de Weirstrass, que $f_i = u_i g_i$ où u_i est inversible dans $\mathcal{O}_n$ et où g_i est un polynôme distingué en X_n. Or le signe de u_i (pour l'ordre donné sur $\mathcal{O}_n$) est le même que celui de $u_i(0) \in \mathbf{R}$, car si $u_i(0) > 0$, u_i est un carré dans $\mathcal{O}_n$.

D'autre part, si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est assez proche de 0 dans $\mathbf{R}^n$, $u_i(x) \in \mathbf{R}$ est du signe de $u_i(0)$. On voit donc que, pour x assez proche de 0, u_i et $u_i(x)$ ont le même signe : on peut donc, dans le théorème, supposer que les f_i sont des polynômes distingués en X_n de degré non nul.

La démonstration suit maintenant fidèlement celle d'ARTIN ([8], p. 293). Soient donc $f_1, \ldots, f_p$ des polynômes distingués en X_n à coefficients dans $\mathcal{O}_{n-1}$, que l'on peut supposer irréductibles dans $\mathcal{O}_{n-1}[X_n]$ et deux à deux distincts.

L'anneau $\mathcal{O}_{n-1}$ étant factoriel, les f_i sont aussi irréductibles dans $K(\mathcal{O}_{n-1})[X_n]$, et donc leurs racines (dans la clôture réelle P de $K(\mathcal{O}_{n-1})$) sont deux à deux distinctes.

Soient $r_1 < \ldots < r_t$ les racines des f_i. On peut former une suite $f_{j_1}, \ldots, f_{j_t}$ (quitte à répéter plusieurs fois le même f_i) telle que, pour $1 \leqslant i \leqslant t$, r_i soit racine de f_{j_i}.

Soit $f = f_1 \ldots f_p$; toutes les racines de f sont distinctes : il existe donc des éléments $g_1, \ldots, g_s \in \mathcal{O}_{n-1}$ satisfaisant au lemme 2.4, et des éléments $g_{s+1}, \ldots, g_l$ satisfaisant au lemme 2.5.

Grâce à ces deux lemmes et à l'hypothèse de récurrence, on voit qu'il existe dans tout voisinage V de 0 dans $\mathbf{R}^{n-1}$ un point $x = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ tel que les séries f_i convergent en x et que si, dans $P[X_n]$, on a la factorisation

$$f_i = (X_n - r_{i_1}) \ldots (X_n - r_{i_{t_i}})\, Q_1 \ldots Q_s,$$

où $Q_1, \ldots, Q_s$ sont des formes quadratiques irréductibles et unitaires, alors

$$f_i(x) = (X_n - \beta_{i_1}) \ldots (X_n - \beta_{i_{t_i}})\, Q'_1 \ldots Q'_s (\beta_{i_j} \in \mathbf{R}),$$

$Q'_1, \ldots, Q'_s$ étant aussi des formes quadratiques irréductibles et unitaires.

Pour démontrer le théorème 2.3, donnons-nous un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^n$ de la forme I^n, où I est un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$; les f_i étant des polynômes distingués en X_n, on peut prendre un voisinage V de 0 dans $\mathbf{R}^{n-1}$ contenu dans I^{n-1} tel que

$$x = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in V \Rightarrow \beta_{i_j} \in I, \qquad (1 \leqslant i \leqslant t,\ 1 \leqslant j \leqslant t_i),$$

et choisir un point x dans V satisfaisant à la propriété ci-dessus.

Si maintenant X_n est (pour l'ordre donné sur $P[X_n]$) dans le k-ième intervalle de la suite

$$]-\infty, r_1[,]r_1, r_2[, \ldots,]r_t, +\infty[,$$

il suffit de prendre x_n dans I et dans le k-ième intervalle de la suite

$$]-\infty, \beta_1[,]\beta_1, \beta_2[, \ldots,]\beta_t, +\infty[$$

pour que f_i converge en $(x_1, \ldots, x_n)$ et que $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ ait le même signe dans $\mathbf{R}$ que f_i dans $\mathcal{O}_n$, une forme quadratique irréductible et unitaire étant une somme de carrés donc toujours positive.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 2.6. — *Soit f un élément non nul de $\mathcal{O}_n$; les conditions suivantes sont équivalentes :*

1° *f est une somme (finie) de carrés dans le corps des fractions $K(\mathcal{O}_n)$ de $\mathcal{O}_n$;*

2° *$\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$ pour tout point $x \in \mathbf{R}_n$ assez proche de 0 ($\tilde{f}$ désignant un représentant de f);*

3° *$f > 0$ pour toute relation d'ordre sur $\mathcal{O}_n$.*

Démonstration. — 1° $\Rightarrow$ 2° : si f est une somme de carrés dans $K(\mathcal{O}_n)$, on peut écrire $f = (P_1^2 + \ldots + P_r^2)/Q^2$ avec P_i et $Q \in \mathcal{O}_n$, et donc $Q^2 f = P_1^2 + \ldots + P_r^2$. Ceci implique que $\tilde{f}(x) \geqslant 0$ pour tout point $x \in \mathbf{R}^n$ en lequel les séries en question convergent et tel que $Q(x) \neq 0$. Mais, dans un voisinage de 0, l'ensemble des points tels que $Q(x) \neq 0$ est dense, et donc $\tilde{f}(x) \geqslant 0$ partout dans ce voisinage par continuité.

2° $\Rightarrow$ 3° résulte immédiatement du théorème 2.3;

3° $\Rightarrow$ 1° : c'est une propriété générale des corps ordonnés (*cf.* [8], th. 10, p. 288).

Remarque 2.7. — On a évidemment un énoncé analogue en remplaçant $\mathcal{O}_n$ par l'anneau $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$, ou même par l'anneau $k[X_1, \ldots, X_n]$ où k est un corps ordonné.

Signalons une autre généralisation du théorème d'ARTIN au cas formel ([12]; *cf.* aussi [9]). Nous prendrons comme ordre sur l'anneau $\mathbf{R}[[t]]$ l'unique ordre total pour lequel t est > 0 (t est alors « infiniment petit », i. e. plus petit que toutes les constantes positives).

THÉORÈME 2.8. — *Supposons $\mathcal{F}_n$ totalement ordonné, et soient $f_1, \ldots, f_p$ des éléments de $\mathcal{F}_n$. Il existe alors un homomorphisme d'algèbres $\varphi : \mathcal{F}_n \to \mathbf{R}[[t]]$ tel que $\varphi(f_i)$ ait le même signe dans $\mathbf{R}[[t]]$ que f_i dans $\mathcal{F}_n$ ($1 \leqslant i \leqslant p$).*

La démonstration précédente qui utilise le théorème de préparation se transpose sans difficulté au cas formel.

Remarques 2.9 :

1° Une démonstration et une généralisation dans le cadre algébrique du théorème d'ARTIN par des méthodes logiques très élégantes se trouve dans [18].

2° Il est intéressant de se poser un problème analogue au 17^e problème de Hilbert dans d'autres cadres, par exemple dans celui des germes de fonctions indéfiniment différentiables. La réponse semble difficile à obtenir, même dans le cas d'une variable.

3. Le théorème des zéros dans le cas algébrique

Ce théorème a été montré indépendamment par DUBOIS [4] et par moi-même [15]. On peut aussi le montrer très simplement par des méthodes logiques (*cf.* [5], par exemple).

La démonstration donnée ici suppose pour simplifier que le corps de base est contenu dans **R**; un théorème classique de logique permet de conclure pour un corps réellement clos quelconque.

Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $k[X_1, \ldots, X_n]$, nous noterons $V(\mathfrak{a})$ ou $V_k(\mathfrak{a})$ l'ensemble des zéros de $\mathfrak{a}$ dans k^n.

THÉORÈME 3.1. — *Soient k un corps réellement clos contenu dans* **R**, *$\mathfrak{a}$ un idéal de $k[X_1, \ldots, X_n]$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(Z) *Tout polynôme nul sur $V(\mathfrak{a})$ appartient à $\mathfrak{a}$ (« condition des zéros »);*
(C) *$\mathfrak{a}$ est un idéal réel (« condition des carrés »).*

Démonstration. — Il est clair que (Z) $\Rightarrow$ (C), car si $f_1^2 + \ldots + f_p^2 \in \mathfrak{a}$, $f_1^2 + \ldots + f_p^2$ est nul sur $V(\mathfrak{a})$, donc chaque f_i est nul sur $V(\mathfrak{a})$ (car k est ordonnable), d'où $f_i \in \mathfrak{a}$ par la condition (Z).

Pour démontrer que (C) $\Rightarrow$ (Z), le point essentiel est la proposition suivante :

PROPOSITION 3.2. — *Soit K un sous-corps de* **R** *tel que* **R** *soit de degré de transcendance infini sur K. Soit L un corps ordonnable, extension de type fini de K. Il existe alors un K-homomorphisme : $L \to$* **R**.

Comme un corps ordonnable est de caractéristique zéro, le théorème de l'élément primitif permet de supposer que L est le corps des fractions de l'anneau $K[Y_1, \ldots, Y_p]/(f)$, où f est un élément irréductible de $K[Y_1, \ldots, Y_p]$.

L étant supposé ordonnable, l'idéal (f) est réel, et donc f n'est pas une somme de carrés dans L (1.4). On en déduit que f change de signe dans K^p (2.7) : il existe donc dans K^p deux points $M = (y_1, \ldots, y_p)$ et $M' = (y_1', \ldots, y_p')$ tels que

$$f(M) > 0,$$
$$f(M') < 0.$$

En faisant un changement linéaire de coordonnées dans K^p qui fait coïncider la droite MM' avec l'axe des y_p, on voit que l'on peut supposer $y_1 = y_1', \ldots, y_{p-1} = y_{p-1}'$.

Grâce à la continuité de f, et en utilisant le fait que $\mathbf{R}$ est de degré de transcendance infini sur K, on peut arriver à la situation suivante : on a $p+1$ nombres réels $y_1, \ldots, y_p, y'_p$ tels que :

– y_p et $y'_p \in K$;

– $y_1, \ldots, y_{p-1}$ sont algébriquement indépendants sur K;

– $f(y_1, \ldots, y_{p-1}, y_p) > 0$;

– $f(y_1, \ldots, y_{p-1}, y'_p) < 0$.

L'application $K[Y_1, \ldots, Y_p] \to K[y_1, \ldots, y_{p-1}, Y_p]$ (qui à Y_i fait correspondre y_i pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$) est donc bijective, ce qui montre que

$$L \simeq K(y_1, \ldots, y_{p-1}, Y_p)[Y_p]/f(y_1, \ldots, y_{p-1}, Y_p)$$

Mais le polynôme en Y_p, $f(y_1, \ldots, y_{p-1}, Y_p)$, à coefficients réels, change de signe : il s'annule donc dans $\mathbf{R}$, et si α est une de ses racines, l'application qui à Y_p fait correspondre α composée avec l'isomorphisme précédent induit un K-isomorphisme de L sur un sous-corps de $\mathbf{R}$.

C. Q. F. D.

Montrons maintenant le théorème (3.1) : soient k un sous-corps de $\mathbf{R}$ réellement clos, $\mathfrak{a}$ un idéal réel de $k[X] = k[X_1, \ldots, X_n]$, et f un polynôme nul sur $V(\mathfrak{a})$: il faut voir que $f \in \mathfrak{a}$.

Comme $\mathfrak{a}$ est réel, il est intersection d'idéaux premiers et ceux-ci sont réels (1.1), ce qui permet de supposer $\mathfrak{a}$ premier.

Soit k_1 un sous-corps de k, de type fini sur Q, qui contienne les coefficients de f et ceux d'un système fini de générateurs de $\mathfrak{a}$. (k_1 est un « corps de définition » de la variété $V(\mathfrak{a})$).

L'idéal $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a} \cap k_1[X]$ est encore réel dans $k_1[X]$: il existe donc un k_1-plongement $\varphi : k_1[X]/\mathfrak{a}_1 \to \mathbf{R}$ (3.1), et si l'on pose $x_i = \varphi(X_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, on a, pour tout élément g de $k_1[X]$, l'équivalence

$$g \in \mathfrak{a}_1 \quad \Leftrightarrow \quad g(x_1, \ldots, x_n) = 0;$$

(le point $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est un point générique de $V(\mathfrak{a})$ sur le corps k_1).

Pour montrer le théorème, il suffit donc de montrer que f s'annule au point x (ce qui est vrai par hypothèse si les $x_i \in k$), ce qui, grâce à la continuité de f et au fait que les générateurs de $\mathfrak{a}$ s'annulent en x, sera entraîné par le lemme suivant :

LEMME 3.3. — *Soit k un sous-corps de* $\mathbf{R}$ *réellement clos, et soit I un idéal quelconque de $k[X] = k[X_1, \ldots, X_n]$; alors l'ensemble $V_k(I)$ (zéros de I*

dans k^n) *est dense* (*pour la topologie habituelle*) *dans l'ensemble* $V_{\mathbf{R}}(I)$ (*zéros de* I *dans* $\mathbf{R}^n$).

Démonstration. — Le corps $k(i)$ est algébriquement clos, et l'ensemble des $k(i)$-zéros de I est dense dans l'ensemble des $\mathbf{C}$-zéros d'après le théorème des zéros classique.

1° Montrons d'abord que tout $x \in V_{\mathbf{R}}(I)$ isolé dans $V_{\mathbf{R}}(I)$ appartient en fait à $V_k(I)$.

Soit U un voisinage compact de x dans $\mathbf{R}^n$ ne contenant aucun autre zéro de I. Si x n'appartenait pas à $V_k(I)$, on aurait $V_{k(i)}(I) \cap U = \varnothing$, d'où $V_{\mathbf{C}}(I) \cap U = \varnothing$, car $V_k^{(i)}(I)$ est dense dans $V_{\mathbf{C}}(I)$, ce qui est absurde.

2° On peut donc supposer x non isolé dans $V_{\mathbf{R}}(I)$. Soit U un voisinage réel de x, et soit y un point de $U \cap V_{\mathbf{R}}(I)$ tel que sa première coordonnée $y_1 \in k$: on peut alors « couper par l'hyperplan $X_1 = y_1$ », i. e. se placer dans l'anneau $k[X_1, \ldots, X_n]/(I, X-y_1)$, et raisonner par récurrence sur n pour trouver un point de $V_k(I)$ dans U.

Ceci démontre le lemme 3.3, et donc le théorème 3.1.

Remarques 3.4 :

1° On déduit facilement du lemme 3.3 le corollaire suivant : *Soit* k *un sous-corps réellement clos de* $\mathbf{R}$; *si* $\mathfrak{a}$ *est un idéal réel de* $k[X]$, $\mathfrak{a}\,\mathbf{R}[X]$ *est réel dans* $\mathbf{R}[X]$.

2° Contrairement à ce qui se passe dans la théorie des corps algébriquement clos, l'hypothèse de finitude est essentielle dans la proposition 3.2.

Voici un contre-exemple (une extension réellement close L de degré de transcendance 1 sur $\mathbf{Q}$ qui ne se plonge pas dans $\mathbf{R}$) :

Mettons sur $\mathbf{Q}[T]$ l'ordre pour lequel T est positif et infiniment petit (plus petit que toutes les constantes positives), et soit L une clôture réelle de $\mathbf{Q}[T]$. Comme il n'y a qu'une relation d'ordre possible sur L, car tout élément positif est un carré, il est clair que L ne peut se plonger dans $\mathbf{R}$.

4. **Le théorème des zéros dans le cas analytique** [16]

Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathbf{R}\{X\} = \mathbf{R}\{X_1, \ldots, X_n\}$, nous noterons $V(\mathfrak{a})$ le germe d'espace analytique réel défini par $\mathfrak{a}$. Si $f \in \mathbf{R}\{X\}$, $\tilde{f}$ désignera un représentant de f.

THÉORÈME 4.1. — *Soit* $\mathfrak{a}$ *un idéal de* $\mathbf{R}\{X_1, \ldots, X_n\}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(Z) *Toute série nulle sur* $V(\mathfrak{a})$ *appartient à* $\mathfrak{a}$;

(C) $\mathfrak{a}$ *est un idéal réel.*

Remarque. — Un autre énoncé possible du théorème des zéros est le suivant : si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathbf{R}\{X\}$, l'idéal du germe $V(\mathfrak{a})$ est égal à la racine réelle $\sqrt[R]{\mathfrak{a}}$ de $\mathfrak{a}$.

Il est clair, compte tenu de (1.3), que cet énoncé est équivalent à celui du théorème 4.1.

Démonstration du théorème. — Comme pour le cas algébrique, il est évident que (Z) $\Rightarrow$ (C), et pour montrer que (C) $\Rightarrow$ (Z) on peut supposer que $\mathfrak{a}$ est un idéal premier.

(A) **Démonstration de 4.1 dans le cas ou $\mathfrak{a}$ est un idéal principal**

PROPOSITION 4.2. — *Soit $f \in \mathbf{R}\{X\}$ un élément irréductible* (i. e. *tel que l'idéal (f) soit premier*); *les conditions suivantes sont équivalentes :*

1° *Toute série nulle sur $V(f)$ appartient à l'idéal (f);*

2° *l'idéal (f) est réel;*

3° *ni f ni $-f$ n'est une somme de carrés dans le corps des fractions de $\mathbf{R}\{X\}$;*

4° *si $\tilde{f}$ est un représentant de f, $\tilde{f}$ change de signe dans tout voisinage de zéro.*

Démonstration. — 1° $\Rightarrow$ 2° : c'est l'implication facile (Z) $\Rightarrow$ (C) dans le cas d'un idéal principal;

2° $\Rightarrow$ 3° : il suffit d'appliquer la proposition 1.4;

3° $\Rightarrow$ 4° : c'est une des assertions du corollaire 2.6. La généralisation du théorème d'ARTIN est donc indispensable pour montrer la proposition 4.2.

Il reste à montrer l'implication 4° $\Rightarrow$ 1°; nous aurons besoin de deux lemmes bien connus :

LEMME 4.3. — *Soit $\mathscr{P} \in \mathbf{R}\{X\}$ un idéal premier, et soit d la dimension de Krull de l'anneau $\mathbf{R}\{X\}/\mathscr{P}$. Alors*

1° *la dimension (topologique) du germe $V(\mathscr{P})$ est $\leqslant d$;*

2° *si la dimension de $V(\mathscr{P})$ est égale à d, $\mathscr{P}$ est l'idéal de toutes les séries nulles sur $V(\mathscr{P})$.*

Désignons par $IV(\mathscr{P})$ l'idéal de toutes les séries nulles sur $V(\mathscr{P})$: $IV(\mathscr{P})$ contient $\mathscr{P}$. La dimension de $V(\mathscr{P})$ est égale à celle de son complexifié ([14], p. 93), donc égale à la dimension de Krull de l'anneau $C\{X\}/(IV(\mathscr{P}))$ (à cause du théorème des zéros sur $\mathbf{C}$) elle-même égale à celle de

$\mathbf{R}\{X\}/IV(\mathscr{P})$, d'où on a 1° et 2° immédiatement. (*Cf.* [6] pour des compléments sur ce sujet.)

LEMME 4.4. — *Soit V un germe en $0 \in \mathbf{R}^n$ d'espace analytique réel de codimension $\geqslant 2$. Alors, si $\tilde{V}$ est un représentant de V, dans toute boule ouverte de centre 0 suffisamment petite, le complémentaire de $\tilde{V}$ est connexe, et donc connexe par arcs.*

La démonstration, par récurrence sur la dimension de V, est immédiate.

Nous pouvons maintenant achever la démonstration de la proposition 4.2 : pour montrer 1°, il suffit, d'après le lemme 4.3, de montrer que le germe d'espace analytique $V(f)$ est de codimension 1.

Or si $\tilde{f}$ est un représentant de f, il existe, par hypothèse, dans tout voisinage U de 0 deux points M et M' tels que $\tilde{f}(M) > 0$ et $\tilde{f}(M') < 0$: $\tilde{f}$ s'annule donc sur tout chemin continu joignant M à M'. Le lemme 4.4 montre alors que $V(f)$ ne peut être de codimension $\geqslant 2$.

C. Q. F. D.

(B) Démonstration de 4.1 dans le cas général

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal premier réel de $\mathbf{R}\{X\} = \mathbf{R}\{X_1, \ldots, X_n\}$, de hauteur $n-p$: on sait ([14], p. 35) que l'on peut choisir les coordonnées $X_1, \ldots, X_n$ de façon que l'homomorphisme naturel

$$\mathbf{R}\{X_1, \ldots, X_p\} \to \mathbf{R}\{X\}/\mathfrak{a}$$

soit une injection, et fasse de $\mathbf{R}\{X\}/\mathfrak{a}$ un $\mathbf{R}\{X_1, \ldots, X_p\}$-module fini.

De plus, si Q est le polynôme minimal de $\bar{X}_{p+1} \in \mathbf{R}\{X\}/\mathfrak{a}$, et si Δ est son discriminant (on a donc $\Delta \in \mathbf{R}\{X_1, \ldots, X_p\}$), il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbf{R}^n$ tel que tout point $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\tilde{V}(\mathfrak{a}) \cap U$, tel que $\tilde{\Delta}(x_1, \ldots, x_p) \neq 0$, soit un point régulier de dimension p de $\tilde{V}(\mathfrak{a})$ ([14], p. 39).

Or, d'après le lemme 4.3, pour montrer que $\mathfrak{a}$ satisfait à la condition (Z), il suffit de montrer que $V(\mathfrak{a})$ est de dimension p, donc, d'après ce que l'on vient de voir, qu'il existe dans tout voisinage U de 0 un point $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\tilde{V}(\mathfrak{a})$, tel que $\tilde{\Delta}(x_1, \ldots, x_p) \neq 0$.

Si cela n'avait pas lieu, on aurait dans U :

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \tilde{V}(\mathfrak{a}) \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Delta}(x_1, \ldots, x_p) = 0$$

et donc

$$\tilde{Q}(x_1, \ldots, x_{p+1}) = 0 \Rightarrow \tilde{\Delta}(x_1, \ldots, x_p) = 0,$$

puisque les points $(x_1, \ldots, x_n)$ de $V(\mathfrak{a}) \cap U$ tels que $\Delta(x_1, \ldots, x_p) \neq 0$ sont en bijection (par la projection canonique) avec les points $(x_1, \ldots, x_{p+1})$ tels que $\Delta(x_1, \ldots, x_p) \neq 0$ et $\tilde{Q}(x_1, \ldots, x_{p+1}) = 0$ ([14], p. 37).

Or $\mathfrak{a}$ étant réel, l'idéal $(Q) = \mathfrak{a} \cap \mathbf{R}\{X_1, \ldots, X_{p+1}\}$ est réel dans l'anneau $\mathbf{R}\{X_1, \ldots, X_{p+1}\}$; l'implication

$$\tilde{Q}(x_1, \ldots, x_{p+1}) \Rightarrow \tilde{\Delta}(x_1, \ldots, x_p) = 0$$

entraînerait alors $\Delta \in (Q)$, d'après la proposition 4.2, ce qui est absurde.

C. Q. F. D.

5. Le théorème des zéros dans le cas formel

Ce théorème, analogue pour les séries formelles au théorème 4.1, est dû à J. MERRIEN [12] (*cf.* aussi [9] et pour les notions rappelées ici [11]).

Si $f \in \mathscr{F}_n = \mathbf{R}[[x_1, \ldots, x_n]]$, nous noterons $\tilde{f}$ une fonction indéfiniment différentiable sur $\mathbf{R}^n$ telle que sa série de Taylor à l'origine $T\tilde{f}$ soit égale à f.

Soit F un germe de fermés à l'origine de $\mathbf{R}^n$, $\tilde{F}$ un représentant de F; nous dirons que f est nulle sur F si, pour tout $n \geqslant 0$, il existe un voisinage Ω_n de 0 tel que $|\tilde{f}(x)| \leqslant \|x\|^n$, $\forall x \in \Omega_n \cap \tilde{F}$.

Il est facile de vérifier que cette notion ne dépend ni du représentant $\tilde{F}$ de F, ni du choix de la fonction différentiable $\tilde{f}$ telle que $T\tilde{f} = f$.

Si I est un idéal de $\mathscr{F}_n$, nous appellerons variété formelle de I, et nous noterons $V_f(I)$, l'ensemble des germes en 0 de fermés de $\mathbf{R}^n$ qui annulent tous les éléments de I. Les variétés formelles ont des propriétés analogues aux germes d'espaces analytiques réels. On a en particulier le théorème suivant :

THÉORÈME 5.1. — *Soit* $\mathfrak{a}$ *un idéal de* $\mathscr{F}_n$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(Z) *Toute série nulle sur* $V_f(\mathfrak{a})$ *appartient à* $\mathfrak{a}$;

(C) $\mathfrak{a}$ *est un idéal réel.*

La démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème 4.1, et s'appuie sur le « théorème d'ARTIN » 2.8, mais doit utiliser des techniques spécifiques aux variétés formelles pour remplacer les notions de dimension topologique et de connexité utilisées dans le cas analytique.

6. Quelques applications

PROPOSITION 6.1. — *Soit* $\mathfrak{a}$ *un idéal premier réel de* $\mathbf{R}\{X\}$ (*resp.* $\mathbf{R}[[X]]$). *Alors* $\mathfrak{a}\,\mathbf{C}\{X\}$ (*resp.* $\mathfrak{a}\,\mathbf{C}[[X]]$) *est premier.*

Dans le cas analytique, cela résulte du théorème 4.1, qui dit que $\mathfrak{a}$ est l'idéal du germe $V(\mathfrak{a})$, et du fait que le complexifié d'un germe irréductible est irréductible ([14], p. 92).

On peut aussi faire un calcul direct qui sera valable dans le cas formel : soit $(f_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ un système de générateurs de $\mathfrak{a}$, et soient $a+ib$ et $c+id$ deux éléments dont le produit appartient à $\mathfrak{a}\,\mathbf{C}\{X\}$ (resp. $\mathfrak{a}\,\mathbf{C}[[X]]$) :

$$(a+ib)(c+id) = \textstyle\sum_{j=1}^{p} (\lambda_j + i\,\mu_j) f_j,$$

d'où

$$ac - bd = \textstyle\sum \lambda_j f_j,$$

$$ad + bc = \textstyle\sum \mu_j f_j,$$

soit

$$a(c^2+d^2) = \textstyle\sum f_j (c\lambda_j + d\mu_j),$$

$$-b(c^2+d^2) = \textstyle\sum f_j (d\lambda_j - c\,\mu_j),$$

d'où immédiatement le résultat en utilisant le fait que $\mathfrak{a}$ est premier et réel (*cf.* [6] pour une démonstration analogue).

Dans le cas des courbes, il y a une réciproque à la proposition 6.1.

PROPOSITION 6.2. — *Soit* $\mathfrak{a}$ *un idéal premier de* $\mathbf{R}\{X\}$ (*resp.* $\mathbf{R}[[X]]$), *de hauteur* $n-1$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1° $\mathfrak{a}$ *est réel;*

2° $\mathfrak{a}\,\mathbf{C}\{X\}$ (resp. $\mathfrak{a}\,\mathbf{C}[[X]]$) *est premier.*

Il reste à montrer que 2° ⇒ 1°, et nous le ferons dans le cas analytique pour simplifier. Nous allons raisonner par récurrence sur le nombre minimal p d'éclatements ponctuels nécessaires pour résoudre le germe de courbe complexe C défini par l'idéal $\mathfrak{a}\,\mathbf{C}\{X\}$.

— Si $p = 0$, $V(\mathfrak{a}\,\mathbf{C}\{X\})$ est un germe de courbe lisse dont les équations sont réelles : sa partie réelle est donc de dimension topologique 1, ce qui entraîne que $\mathfrak{a}$ est réel en vertu de 4.3.

— Si $p > 0$, soit $\tilde{C}$ la transformée stricte de la courbe C : $\tilde{C}$ est encore un germe de courbe irréductible défini par un idéal premier $\tilde{\mathfrak{a}}$ de $\mathbf{C}\{Y\}$ dont un système de générateurs est réel; par hypothèse de récurrence, la partie réelle de $\tilde{C}$ est de dimension topologique 1, et il en est donc de même pour la partie réelle de C, l'éclatement étant un isomorphisme en dehors de l'origine; l'idéal $\mathfrak{a}$ est donc réel en vertu de 4.3.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 6.3. — *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal réel de $\mathcal{O}_n$, alors $\mathfrak{a}\,\mathcal{F}_n$ est réel.*

Démonstration. — D'après le théorème 4.1, $\mathfrak{a}$ est l'idéal de toutes les séries s'annulant sur $V(\mathfrak{a})$, ce qui entraîne, d'après un théorème de Malgrange ([10], p. 90), que $\mathfrak{a}\,\mathcal{F}_n$ est l'idéal de toutes les séries formelles nulles sur la variété formelle $V_f(\mathfrak{a})$; $\mathfrak{a}\,\mathcal{F}_n$ est donc bien un idéal réel.

On peut aussi démontrer cette proposition algébriquement en utilisant le théorème de M. ARTIN [1] sur les solutions d'équations analytiques.

En revanche, si $\mathfrak{a}$ est un idéal réel de $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$, $\mathfrak{a}\,\mathbf{R}\{X_1, \ldots, X_n\}$ n'est pas nécessairement réel (prendre par exemple

$$\mathfrak{a} = (Y^2 + X^2 - X^3) \subset \mathbf{R}[X, Y],$$

l'origine est un point isolé de $V(\mathfrak{a})$).

Ce dernier problème est étudié en détail dans [5].

PROPOSITION 6.4 (« *inégalité de Lojasiewicz* »). — *Soient f et g deux germes de fonctions analytiques réelles à l'origine de $\mathbf{R}^n$ telles que $V(f) \supset V(g)$. Il existe alors une constante $K > 0$ et un entier N tels que $K\,|\tilde{g}(x)| \geqslant |\tilde{f}(x)|^N$ pour x assez voisin de zéro, $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ désignant des représentants des germes f et g.*

f étant nulle sur $V(g)$ par hypothèse, f appartient à la racine réelle de (g) dans $\mathcal{O}_n$: il existe donc un entier N et des séries h_i tels que l'on ait

$$f^N + h_1^2 + \ldots + h_p^2 = \lambda g, \qquad (4.1).$$

On a donc $\tilde{\lambda}(x)\,\tilde{g}(x) \geqq |\tilde{f}(x)|^N$ dans un voisinage convenable de zéro, d'où le résultat en majorant $|\tilde{\lambda}(x)|$ par K.

Remarques :

1° Une démonstration très élégante, mais utilisant la résolution des singularités, des inégalités de Lojasiewicz a été donnée par HIRONAKA ([7]).

2° Il est naturel de se demander si un énoncé comme celui du théorème 4.1 est valable dans d'autres cadres que ceux étudiés dans cet article : par exemple, pour l'anneau des fonctions analytiques sur un ouvert donné de $\mathbf{R}^n$ (problème non résolu à ma connaissance, sauf en dimension 2 [3], ou pour les fonctions de Nash (*cf.* [13]), ou encore pour les fonctions indéfiniment différentiables; ce dernier point fait principalement l'objet de [17].

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN M. — On the solutions of analytic equations, *Invent. Math.*, Berlin, t. 5, 1968, p. 277-291.

[2] BOCHNAK J. — Sur le théorème des zéros de Hilbert « différentiable », *Topology*, London, t. 12, 1973, p. 417-424.

[3] BOCHNAK (J.) et RISLER (J.-J.). — Le théorème des zéros pour les variétés analytiques de dimension 2, *Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 8, 1975, p. 353-364.

[4] DUBOIS (D. W.). — A nullstellensatz for ordered fielsd, *Arkiv for Mat.*, Stockholm, t. 8, 1969, p. 111-114.

[5] EFROYMSON (G.). — Local reality on algebraic varieties, *J. of Algebra*, t. 29, 1974, p. 133-142.

[6] GALBIATI (M.) et TOGNOLI (A.). — Alcune proprieta delle varieta algebriche reali, *Ann. Sc. N. Sup. Pisa*, série 3, t. 27, 1973, p. 359-404.

[7] HIRONAKA (H.). — *Introduction to real-analytic sets and real-analytic maps*, Cours à l'Istituto Matematico L. Tonelli dell'Universitá da Pisa, 1973.

[8] JACOBSON (N.). — *Lectures in abstract algebra*, vol. 3. — Princeton, D. Van Nostrand Company, 1964 (*University Series in higher Mathematics*).

[9] LASSALLE (G.). — *Le théorème des zéros formels*, Université d'Orsay (preprint).

[10] MALGRANGE (B.). — *Ideals for differentiable functions.* — Bombay, Oxford Unisity Press, 1966 (*Tata Institute for fundamental Research. Studies in Mathematics*, 3).

[11] MERRIEN (J.). — Idéaux de l'anneau des séries formelles à coefficients réels et variétés associées, *J. Math. pures et appl.*, t. 51, 1972, p. 169-187.

[12] MERRIEN (J.). — Un théorème des zéros pour les idéaux de séries formelles à coefficients réels, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 276, 1973, série A, p. 1055-1058.

[13] MOSTOWSKI (T.). — *On the ring of global Nash functions*, Warzawa, 1974 (preprint).

[14] NARASIMHAN (R.). — *Introduction to the theory of analytic spaces.* — Berlin, Springer-Verlag, 1966 (*Lecture Notes in Mathematics*, 25).

[15] RISLER (J.-J.). — Une caractérisation des idéaux des variétés algébriques réelles, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 271, 1970, série A, p. 1171-1173.

[16] RISLER (J.-J.). — Un théorème des zéros en géométrie analytique réelle, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 274, 1972, série A, p. 1488-1490.

[17] RISLER (J.-J.). — Un théorème des zéros pour les idéaux de fonctions différentiables, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 26, 1976, fasc. 3.

[18] ROBINSON (A.). — Further remarks on ordered fielsd on definite functions, *Math. Annalen*, t. 130, 1956, p. 405-409.

[19] SERRE (J.-P.). — Faisceaux algébriques cohérents, *Annals of Math.*, t. 61, 1955, p. 197-278.

(Texte reçu le 29 avril 1975.)

Jean-Jacques RISLER,
23, rue Vergniaud,
75013 Paris.