

BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES DIXMIER

Polarisation dans les algèbres de Lie. II

Bulletin de la S. M. F., tome 104 (1976), p. 145-164

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1976__104__145_0

© Bulletin de la S. M. F., 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

POLARISATIONS DANS LES ALGÈBRES DE LIE, II

par

JACQUES DIXMIER

[Université Pierre-et-Marie-Curie (Univ. Paris-VI)]

RÉSUMÉ. — Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie complexe, et d la dimension maximale des orbites du groupe adjoint opérant dans \mathfrak{g}^* . Soit $f \in \mathfrak{g}^*$. Si l'orbite de f est de dimension d , on sait que f admet une polarisation résoluble. Si maintenant l'orbite de f est de dimension $d' < d$, et si f est polarisable, on prouve qu'il existe une polarisation en f dont la partie semi-simple peut être « majorée » en fonction de $d' - d$.

Introduction

Dans cet article, k désigne un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Les espaces vectoriels considérés sont supposés de dimension finie sur k .

(A) Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie. Si $f \in \mathfrak{g}^*$, on note B_f la forme bilinéaire alternée $(x, y) \mapsto f([x, y])$ sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. Si \mathfrak{a} est une partie de \mathfrak{g} , on note \mathfrak{a}^f l'orthogonal de \mathfrak{a} pour B_f . En particulier, le noyau \mathfrak{g}^f de B_f est une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} . On appelle *polarisation* de \mathfrak{g} en f une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} qui est un sous-espace vectoriel totalement isotrope maximal pour B_f . On dit que f est polarisable s'il existe une polarisation de \mathfrak{g} en f .

Soit $m_{\mathfrak{g}} = \inf_{f \in \mathfrak{g}^*} \dim \mathfrak{g}^f$. (Si \mathfrak{g} est semi-simple, $m_{\mathfrak{g}}$ est le rang de \mathfrak{g} .) On dit que f est une forme régulière sur \mathfrak{g} si $\dim \mathfrak{g}^f = m_{\mathfrak{g}}$. Les formes régulières sur \mathfrak{g} constituent une partie de \mathfrak{g}^* ouverte pour la topologie de Zariski. Si $f \in \mathfrak{g}^*$, on appellera *irrégularité* de f , et l'on notera $\text{irr}(f)$, le nombre pair $\dim \mathfrak{g}^f - m_{\mathfrak{g}}$.

On appellera *partie semi-simple* d'une algèbre de Lie \mathfrak{h} le quotient \mathfrak{h}_1 de \mathfrak{h} par son radical. On notera $\gamma(\mathfrak{h})$ le nombre d'éléments du système de racines de \mathfrak{h}_1 , c'est-à-dire $\dim \mathfrak{h}_1 - \text{rang } \mathfrak{h}_1$; c'est un entier pair qui, pour nous, mesurera la « grandeur » de \mathfrak{h}_1 .

(B) Si $f \in \mathfrak{g}^*$ est régulière, on sait que f admet une polarisation résoluble. Quand $\text{irr}(f)$ augmente, les parties semi-simples des polarisations en f ont tendance à augmenter. Par exemple, si \mathfrak{g} est semi-simple, $\gamma(\mathfrak{p}) = \text{irr}(f)$

pour toute polarisation \mathfrak{p} de \mathfrak{g} en f [cf. 1.2 (iii)]. Bien entendu, si \mathfrak{g} est résoluble, $\gamma(\mathfrak{p}) = 0$ pour toute polarisation. Nous établirons le résultat suivant :

THÉORÈME. — Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie, f un élément polarisable de \mathfrak{g}^* . Il existe une polarisation \mathfrak{p} de \mathfrak{g} en f possédant la propriété suivante : écrivons la partie semi-simple de \mathfrak{p} sous la forme $\mathfrak{c}_1 \times \mathfrak{c}_2 \times \dots \times \mathfrak{d}$, où \mathfrak{c}_i est produit d'algèbres simples de type C_i , et où aucun facteur simple de \mathfrak{d} n'est de type C . Alors

$$\gamma(\mathfrak{c}_1) + \sum_{i \geq 2} \frac{i-1}{i} \gamma(\mathfrak{c}_i) + \gamma(\mathfrak{d}) \leq \text{irr}(f).$$

(Rappelons que $C_1 = A_1$, $C_2 = B_2$.)

Ce théorème est en un sens le meilleur possible [cf. 3.7].

COROLLAIRE. — Soit f un élément polarisable de \mathfrak{g}^* tel que $\text{irr}(f) = 2$ (resp. 4). Il existe une polarisation de \mathfrak{g} en f dont la partie semi-simple est nulle ou de type A_1 (resp. nulle ou de l'un des types A_1 , $A_1 \times A_1$, C_2).

(C) Soit $f \in \mathfrak{g}^*$. Le résultat de (B) concerne la partie semi-simple d'une polarisation bien choisie de \mathfrak{g} en f . Il serait souhaitable d'avoir des renseignements concernant la partie semi-simple de toute polarisation de \mathfrak{g} en f . Ici nos résultats sont très partiels. Lorsque le radical de \mathfrak{g} est une algèbre de Heisenberg, nous prouverons en 2.8, pour toute polarisation de \mathfrak{g} en f , l'inégalité affaiblie $\sum_{i \geq 2} (i-1/i) \gamma(\mathfrak{c}_i) + \gamma(\mathfrak{d}) \leq \text{irr}(f)$ (avec les notations de (B)). Le rôle spécial de A_1 est dans la nature des choses. En effet, pour tout entier $n \geq 1$, il existe une algèbre de Lie \mathfrak{g} dont le radical est une algèbre de Heisenberg, une forme f régulière sur \mathfrak{g} , et une polarisation de \mathfrak{g} en f dont la partie semi-simple est de type $A_1 \times A_1 \times \dots \times A_1$ avec n facteurs (cela résulte de 3.5). D'autre part, il existe des algèbres de Lie pour lesquelles même l'inégalité affaiblie peut être mise en défaut (cf. 4.3).

(D) Malgré le résultat cité en (C), les exemples laissent supposer que, pour presque toute f régulière, toute polarisation en f est résoluble. Nous établirons ce point lorsque le radical de \mathfrak{g} est une algèbre de Heisenberg (2.7).

NOTATIONS. — On emploiera les notations introduites ci-dessus, et les suivantes. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie. Si $x \in \mathfrak{g}$, on note \mathfrak{g}^x le commutant dans \mathfrak{g} . Soit V un \mathfrak{g} -module. On dit que V est symplectique (resp. orthogonal) si l'on s'est donné sur V une forme bilinéaire alternée (resp. symétrique) non dégénérée \mathfrak{g} -invariante; terminologie analogue

pour les représentations. Quand on dit que V admet une orbite ouverte, on se réfère à l'action dans V d'un groupe algébrique irréductible d'algèbre de Lie \mathfrak{g} (supposant par exemple \mathfrak{g} semi-simple).

1. Lemmes sur les algèbres de Lie semi-simples

1.1. LEMME. — Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple, $f \in \mathfrak{g}^*$, x l'image de f dans \mathfrak{g} par l'isomorphisme de Killing, \mathfrak{q} une sous-algèbre de \mathfrak{g} , \mathfrak{n} le radical nilpotent de \mathfrak{q} . On suppose $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{q}^f$.

(i) \mathfrak{q} est une sous-algèbre parabolique de \mathfrak{g} ;

(ii) $[x, \mathfrak{q}^f] = \mathfrak{n}$.

(Lorsque \mathfrak{q} est une polarisation en f , ce lemme a été prouvé dans [7] pour $k = \mathbf{C}$, et généralisé pour k quelconque par P. TAUVEL (non publié). La démonstration ci-dessous suit pas à pas celle de TAUVEL.)

On a $x \in \mathfrak{g}^x = \mathfrak{q}^f \subset \mathfrak{q}^f \subset \mathfrak{q}$.

Soient K la forme de Killing de \mathfrak{g} , et \mathfrak{s} l'orthogonal de \mathfrak{q} dans \mathfrak{g} pour K . On a $K([x, \mathfrak{q}^f], \mathfrak{q}) = K(x, [\mathfrak{q}^f, \mathfrak{q}]) = f([\mathfrak{q}^f, \mathfrak{q}]) = 0$, donc

$$(1) \quad [x, \mathfrak{q}^f] \subset \mathfrak{s}.$$

L'application $y \mapsto [x, y]$, où y parcourt \mathfrak{q}^f , a pour noyau $\mathfrak{g}^x = \mathfrak{q}^f$, donc $\dim [x, \mathfrak{q}^f] = \dim \mathfrak{q}^f - \dim \mathfrak{q}^f = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{q} = \dim \mathfrak{s}$. La relation (1) entraîne alors

$$(2) \quad [x, \mathfrak{q}^f] = \mathfrak{s}.$$

On a $K([[x, \mathfrak{q}^f], \mathfrak{q}], \mathfrak{q}) = K([x, \mathfrak{q}^f], [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}]) \subset K([x, \mathfrak{q}^f], \mathfrak{q}) = 0$, donc $[[x, \mathfrak{q}^f], \mathfrak{q}] \subset \mathfrak{s} = [x, \mathfrak{q}^f]$, de sorte que $\mathfrak{s} = [x, \mathfrak{q}^f]$ est un idéal de \mathfrak{q} .

Soient ρ la représentation adjointe de \mathfrak{g} dans \mathfrak{g} , T l'ensemble des endomorphismes t de l'espace vectoriel \mathfrak{g} tels que $[t, \rho(\mathfrak{q})] \subset \rho(\mathfrak{s})$. Soit $z \in \mathfrak{q}^f$. Pour tout $u \in T$, on a

$$\mathrm{Tr}(u \rho([x, z])) = \mathrm{Tr}([u, \rho(x)] \rho(z)) \in \mathrm{Tr}(\rho(\mathfrak{s}) \rho(\mathfrak{q})) = K(\mathfrak{s}, \mathfrak{q}) = 0.$$

Par ailleurs, $\rho([x, z]) \in \rho(\mathfrak{s}) \subset T$. D'après [2] (p. 68, lemme 3), $[x, z]$ est nilpotent dans \mathfrak{g} .

Comme $[x, \mathfrak{q}^f]$ est un idéal de \mathfrak{q} , donc une sous-algèbre de \mathfrak{g} , il existe une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} et une base du système de racines $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ telles que, si l'on note \mathfrak{v} la sous-algèbre de \mathfrak{g} correspondant aux racines positives, on ait $[x, \mathfrak{q}^f] \subset \mathfrak{v}$. Alors

$$0 = K(\mathfrak{v}, \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{v}) \supset K([x, \mathfrak{q}^f], \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{v}) = f(\mathfrak{q}^f, \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{v}),$$

donc $\mathfrak{h} + \eta \subset (\mathfrak{q}^f)^f = \mathfrak{q}$. On a prouvé (i). On sait qu'alors $s = n$, donc (ii) résulte de (2).

1.2. LEMME. — Soient \mathfrak{g} , f , x , \mathfrak{q} , \mathfrak{n} comme dans 1.1. Soit de plus \mathfrak{m} le radical de \mathfrak{q} .

$$(i) \quad \mathfrak{q}^f \supset \mathfrak{m};$$

$$(ii) \quad \dim(\mathfrak{q}/\mathfrak{n}) = \dim(\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^f) + \dim \mathfrak{g}^x;$$

$$(iii) \quad \gamma(\mathfrak{q}) = \dim(\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^f) + \text{irr}(f).$$

Soit K la forme de Killing de \mathfrak{g} . On a

$$\begin{aligned} 0 &= K(x, \mathfrak{n}) \text{ car } \mathfrak{q} \text{ est parabolique et } x \in \mathfrak{q}, \\ &= K(x, [\mathfrak{q}, \mathfrak{m}]), \\ &= f([\mathfrak{q}, \mathfrak{m}]), \end{aligned}$$

d'où (i). D'après 1.1 (ii), on a $\dim \mathfrak{n} = \dim \mathfrak{q}^f - \dim \mathfrak{g}^x$, d'où (ii). Soit r le rang de \mathfrak{g} . L'algèbre $\mathfrak{q}/\mathfrak{n}$ est réductrice de rang r , donc

$$\begin{aligned} \gamma(\mathfrak{q}) &= \dim(\mathfrak{q}/\mathfrak{n}) - r, \\ &= \dim(\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^f) + \dim \mathfrak{g}^f - r \text{ d'après (ii),} \\ &= \dim(\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^f) + \text{irr}(f). \end{aligned}$$

1.3. LEMME. — Soient $m \geq 3$, $n \geq 1$ des entiers. Soit $V = k^m \otimes k^{2n}$. Le groupe $\text{SO}(m) \times \text{Sp}(2n)$, opérant de manière évidente dans V , n'a pas d'orbite ouverte.

Supposons $2n \leq m$. Le stabilisateur d'un point générique de V se calcule grâce à [6] (théorème 5). Il est produit d'un sous-groupe $\text{SO}(m')$ de $\text{SO}(m)$ et d'un sous-groupe de Cartan de $\text{Sp}(2n)$; il est donc réductif, d'où le lemme dans ce cas.

Supposons $2n > m$. Si m est impair, le stabilisateur d'un point générique de V est donné par [6] (table 4); il n'est pas produit semi-direct d'un groupe semi-simple et d'un radical unipotent, d'où le lemme dans ce cas ([8], théorème 2). Si m est pair, le stabilisateur d'un point générique de V a pour composante neutre le produit d'un sous-groupe $\text{Sp}(2n')$ de $\text{Sp}(2n)$ et d'un sous-groupe de Cartan de $\text{SO}(m)$ ([6], théorème 6, et [5] table 2, cas de C_n et de $mR(\varphi_1)$); il est donc réductif, d'où le lemme dans ce cas.

1.4. LEMME. — Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple, ρ une représentation simple injective symplectique de \mathfrak{g} dans un espace V de dimension $2n$, admettant une orbite ouverte. Alors, à isomorphisme près, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n, k)$ et ρ est la représentation identique de \mathfrak{g} .

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \dots \times \mathfrak{g}_r$ la décomposition de \mathfrak{g} en facteurs simples. Alors $\rho = \rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_r$, où ρ_i est une représentation simple injective de \mathfrak{g}_i . Les ρ_i sont symplectiques ou orthogonales, un nombre impair d'entre elles étant symplectiques. On peut donc supposer que ρ_1 est symplectique, et $\rho_2 \otimes \dots \otimes \rho_r$ orthogonale. Si $r > 1$, le lemme 1.3 prouve que ρ n'a pas d'orbite ouverte, d'où contradiction.

Ainsi, \mathfrak{g} est simple. D'après [1], l'indice de ρ est < 1 , et $\dim \rho < \dim \mathfrak{g}$ (ce point résulte aussi des premières lignes de la démonstration de 3.5). On trouve dans [5], pour toute algèbre de Lie simple \mathfrak{g} , la liste des représentations simples de dimension $< \dim \mathfrak{g}$, avec, pour chaque cas, le stabilisateur d'un point générique. Les seuls cas où ce stabilisateur n'est pas réductif sont les suivants :

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(q, k)$ et ρ est la représentation identique de \mathfrak{g} ; cette représentation n'est symplectique que si $q = 2$, et l'on trouve un des cas du lemme;

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2q+1, k)$ et $\rho = \Lambda^2 \rho_1$, où ρ_1 est la représentation identique de \mathfrak{g} ; cette représentation n'est jamais symplectique;

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2q, k)$ et ρ est la représentation identique de \mathfrak{g} ; on trouve un des cas du lemme;

$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(10, k)$ et ρ est l'une des représentations semi-spinorielles de \mathfrak{g} ; cette représentation n'est pas symplectique.

1.5. LEMME. — Soient $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_r$ des algèbres de Lie simples, ρ une représentation injective symplectique de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \dots \times \mathfrak{g}_r$ dans un espace V , admettant une orbite ouverte.

(i) Il existe une décomposition $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ de V en sous- \mathfrak{g} -modules deux à deux orthogonaux, avec la propriété suivante : pour tout i , \mathfrak{g}_i s'identifie à l'algèbre de Lie symplectique de V_i opérant identiquement dans V_i , et opère trivialement dans $V_{i'}$ pour $i' \neq i$;

(ii) 0 n'est pas poids de V .

Soit $V = \bigoplus_{j \in J} W_j$ une décomposition de V en sous- \mathfrak{g} -modules simples. S'il existe $j, j' \in J$ tels que $j \neq j'$ et que les \mathfrak{g} -modules W_j et $W_{j'}$ soient duaux, il existe sur $W_j \oplus W_{j'}$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée \mathfrak{g} -invariante, donc une fonction polynomiale homogène non nulle du second degré \mathfrak{g} -invariante, ce qui contredit l'existence d'une orbite ouverte. Donc W_j et $W_{j'}$ sont non duaux pour $j \neq j'$. D'après [3] (lemme 4), V est somme de sous-modules simples deux à deux non isomorphes, deux à deux orthogonaux, symplectiques. Pour tout $j \in J$, il existe $i \in \{1, \dots, r\}$ tel que \mathfrak{g}_i s'identifie à l'algèbre de Lie symplectique de W_j opérant identiquement dans W_j , et que $\mathfrak{g}_{i'}$ opère trivialement dans W_j

pour $i' \neq i$ (lemme 1.4). Comme les sous-modules simples de V sont deux à deux non isomorphes et que ρ est injective, on définit ainsi une bijection de J sur $\{1, \dots, r\}$, d'où (i). L'assertion (ii) résulte aussitôt de (i) (et peut d'ailleurs s'établir directement).

1.6. LEMME. — *Pour $i = 1, 2, \dots, r$, soit \mathfrak{c}_i une algèbre de Lie produit d'algèbres simples de type C_i . Soit \mathfrak{d} une algèbre de Lie semi-simple dont aucun facteur simple n'est de type C . Soient $\mathfrak{g} = \mathfrak{c}_1 \times \mathfrak{c}_2 \times \dots \times \mathfrak{c}_r \times \mathfrak{d}$, et ρ une représentation symplectique de \mathfrak{g} admettant une orbite ouverte. On a*

$$(3) \quad \dim \rho \leq \gamma(\mathfrak{c}_1) + \frac{1}{2}\gamma(\mathfrak{c}_2) + \frac{1}{3}\gamma(\mathfrak{c}_3) + \dots + \frac{1}{r}\gamma(\mathfrak{c}_r).$$

Si ρ est injective, cette inégalité devient une égalité.

Il suffit d'envisager le cas où ρ est injective. Grâce à 1.5, on se ramène au cas où \mathfrak{g} est l'algèbre de Lie symplectique d'un espace V de dimension $2n$, \mathfrak{g} opérant identiquement dans V . Le deuxième membre de (3) est alors $1/n \cdot 2n^2 = 2n$.

2. Cas où le radical est une algèbre de Heisenberg

2.1. Dans cette partie, le rôle principal sera tenu par les algèbres de Lie \mathfrak{g} possédant la propriété suivante :

(RH) \mathfrak{g} est produit semi-direct d'une algèbre réductive et d'une algèbre de Heisenberg \mathfrak{n} , le centre \mathfrak{c} de \mathfrak{n} étant tel que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{c}] = 0$.

Par exemple, si le radical de \mathfrak{g} est une algèbre de Heisenberg \mathfrak{n} , \mathfrak{g} est produit semi-direct d'une algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{s} et de \mathfrak{n} , et \mathfrak{s} opère trivialement dans le centre de \mathfrak{n} puisque celui-ci est de dimension 1. Donc \mathfrak{g} vérifie (RH).

2.2. LEMME. — *Soient W, X des espaces vectoriels munis de formes bilinéaires alternées B_W, B_X . Soient $G = W \oplus X$, B_G la somme directe de B_W et B_X . Soient P un sous-espace vectoriel totalement isotrope maximal de G , Q et R les projections de P sur W et X (pour la décomposition $G = W \oplus X$), $Q' = P \cap W \subset Q$, $R' = P \cap X \subset R$.*

(i) Q et Q' sont l'orthogonal l'un de l'autre pour B_W ;

(ii) R et R' sont l'orthogonal l'un de l'autre pour B_X ;

(iii) la correspondance entre W et X associée à P admet Q pour ensemble de définition, R pour ensemble des valeurs, et définit par passage au quotient une bijection linéaire de Q/Q' sur R/R' .

Soient N_W, N_X, N_G les noyaux de B_W, B_X, B_G . On a $N_W \oplus N_X = N_G \subset P$, donc

$$(4) \quad N_W \subset Q' \subset Q, \quad N_X \subset R' \subset R.$$

Soit Q_1 l'orthogonal de Q pour B_W . On a

$$Q_1 = \{x \in W; B_G(x, P) = 0\} = W \cap P = Q'.$$

Compte tenu de (4), l'orthogonal de Q' pour B_W est donc Q . On a prouvé (i), et (ii) s'en déduit par symétrie. L'assertion (iii) (qui n'a rien à voir avec les formes alternées) est évidente.

2.3. LEMME. — Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie, \mathfrak{n} un idéal de \mathfrak{g} qui est une algèbre de Heisenberg, \mathfrak{c} le centre de \mathfrak{n} , $f \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{x} = (\text{Ker } f) \cap \mathfrak{n}$, $\mathfrak{w} = \{y \in \mathfrak{g}; [y, \mathfrak{x}] \subset \mathfrak{x}\}$, et $g = f|_{\mathfrak{w}}$. On suppose que $f|_{\mathfrak{c}} \neq 0$.

(i) La restriction de B_f à \mathfrak{x} est non dégénérée;

(ii) \mathfrak{w} est l'orthogonal de \mathfrak{x} pour B_f , et c'est une sous-algèbre de \mathfrak{g} contenant \mathfrak{c} ;

(iii) $\mathfrak{g} = \mathfrak{w} \oplus \mathfrak{x}$;

(iv) $\mathfrak{g}^f = \mathfrak{w}^g$;

(v) $\text{irr}(g) = \text{irr}(f)$.

Les assertions (i) à (iv) sont très faciles, et signalées dans [3] (lemme 1). Soit g_1 un élément régulier de \mathfrak{w}^* non nul sur \mathfrak{c} . Soit $f_1 \in \mathfrak{g}^*$ le prolongement de g_1 qui s'annule sur \mathfrak{x} . On a

$$\text{irr}(g) = \dim \mathfrak{w}^g - \dim \mathfrak{w}^{g_1} = \dim \mathfrak{g}^f - \dim \mathfrak{g}^{f_1} \leq \text{irr}(f).$$

Soient f_2 un élément régulier de \mathfrak{g}^* non nul sur \mathfrak{c} , $\mathfrak{x}' = (\text{Ker } f_2) \cap \mathfrak{n}$, $\mathfrak{w}' = \{x \in \mathfrak{g}; [x, \mathfrak{x}'] \subset \mathfrak{x}'\}$, et $g' = f_2|_{\mathfrak{w}'}$. Il existe $n \in \mathfrak{n}$ tel que $(\exp \text{ ad } n)(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}'$, d'où $(\exp \text{ ad } n)(\mathfrak{w}) = \mathfrak{w}'$. Il existe donc $g_2 \in \mathfrak{w}^*$ tel que $\dim \mathfrak{w}^{g_2} = \dim \mathfrak{w}'^{g'}$. Alors

$$\text{irr}(f) = \dim \mathfrak{g}^f - \dim \mathfrak{g}^{f_2} = \dim \mathfrak{w}^g - \dim \mathfrak{w}'^{g'} = \dim \mathfrak{w}^g - \dim \mathfrak{w}^{g_2} \leq \text{irr}(g).$$

2.4. LEMME. — Soient $\mathfrak{g}, \mathfrak{n}, \mathfrak{c}, f, \mathfrak{x}, \mathfrak{w}, g$ comme en 2.3. Soient \mathfrak{p} une polarisation de \mathfrak{g} en f , \mathfrak{q} et \mathfrak{r} les projections de \mathfrak{p} sur \mathfrak{w} et \mathfrak{x} (pour la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{w} \oplus \mathfrak{x}$), $\mathfrak{q}' = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{w} \subset \mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}' = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{x} \subset \mathfrak{r}$. On suppose \mathfrak{c} central dans \mathfrak{g} .

(i) \mathfrak{q} et \mathfrak{q}' sont l'orthogonal l'un de l'autre dans \mathfrak{w} pour B_g , et sont des sous-algèbres de \mathfrak{w} contenant \mathfrak{c} ;

(ii) \mathfrak{r} et \mathfrak{r}' sont l'orthogonal l'un de l'autre dans \mathfrak{x} pour $B_f|_{\mathfrak{x} \times \mathfrak{x}}$, et $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'] = 0$;

(iii) on a $[q, r] \subset r, [q, r'] \subset r'$, de sorte que r/r' peut être considéré comme un q -module grâce à la représentation adjointe; la forme alternée non dégénérée sur r/r' déduite de B_f est q -invariante;

(iv) soit $u : q \rightarrow r/r'$ la surjection de noyau q' associée à p (cf. 2.2 (iii)); alors u est un cocycle de q à valeurs dans r/r' ;

(v) le radical de p contient r' , et sa projection sur w est le radical de q ; les parties semi-simples de p et q sont isomorphes.

Appliquons le lemme 2.2 avec $W = w, X = \mathfrak{x}, G = \mathfrak{g}, P = p, B_G = B_f$. On voit que q, q' sont l'orthogonal l'un de l'autre pour B_g , et que r, r' sont l'orthogonal l'un de l'autre pour $B_f | \mathfrak{x} \times \mathfrak{x}$. On a $c \subset g_f = w_g \subset q' \subset q$.

Il est clair que $q' = p \cap w$ est une sous-algèbre de w . D'autre part, q/c est la projection de p/c sur w/c pour la décomposition $g/c = (w/c) \oplus (n/c)$, et n/c est un idéal de g/c , donc q est une sous-algèbre de w .

On a $[r, r'] \subset c$, et $f([r, r']) = B_f(r, r') = 0$, donc $[r, r'] = 0$. Les assertions (i) et (ii) sont démontrées.

Considérons \mathfrak{x} comme un w -module pour la représentation adjointe. On a, pour $x \in w, y \in \mathfrak{x}$ et $z \in \mathfrak{x}$:

$$[x \cdot y, z] + [y, x \cdot z] = [[x, y], z] + [y, [x, z]] = [x, [y, z]] \in [x, c] = 0;$$

donc $B_f(x \cdot y, z) + B_f(y, x \cdot z) = 0$. Autrement dit, $B_f | \mathfrak{x} \times \mathfrak{x}$ est w -invariante.

On a $[q, r'] \subset [p+r, r'] = [p, r'] \subset [p, p] \subset p$, et $[q, r'] \subset [w, \mathfrak{x}] \subset \mathfrak{x}$, donc $[q, r'] \subset p \cap \mathfrak{x} = r'$. Comme $B_f | \mathfrak{x} \times \mathfrak{x}$ est q -invariante, on en déduit que $[q, r] \subset r$. L'assertion (iii) est démontrée.

Soient $x, y \in p$. Ecrivons $x = x' + x'', y = y' + y''$ avec $x', y' \in q, x'', y'' \in r$. On a

$$[x', y'] + [x', y''] + [x'', y'] = [x, y] - [x'', y''] \in p + c = p,$$

$$[x', y'] \in q,$$

$$[x', y''] + [x'', y'] \in [q, r] \subset r,$$

donc $u([x', y'])$ est la classe modulo r' de $[x', y''] - [y', x'']$, c'est-à-dire $x' \cdot u(y'') - y' \cdot u(x'')$. Cela prouve (iv). L'assertion (v) est immédiate.

2.5. LEMME. — Soient \mathfrak{n} une algèbre de Heisenberg, c son centre, \mathfrak{g} un produit semi-direct d'une algèbre de Lie réductive et de \mathfrak{n} , tel que $[g, c] = 0$. Soient $f, \mathfrak{x}, w, p, q, r, q', r', u$ comme en 2.3 et 2.4. Soient l le radical de p , m le radical de q .

(i) On a $m \subset q', l = m + r' \subset q' + r'$;

(ii) il existe $\xi \in r/r'$ tel que $u(x) = x \cdot \xi$ pour tout $x \in q$;

(iii) si q'' est un idéal de q contenu dans q' , on a $q'' \cdot (\mathfrak{r}/\mathfrak{r}') = 0$; en particulier, $m \cdot (\mathfrak{r}/\mathfrak{r}') = 0$, de sorte que $\mathfrak{r}/\mathfrak{r}'$ peut être considéré comme un (q/m) -module symplectique; ce module admet une orbite ouverte;

(iv) on a $\gamma(\mathfrak{p}) = \dim(\mathfrak{r}/\mathfrak{r}') + \text{irr}(f)$.

L'algèbre \mathfrak{w} est produit de \mathfrak{c} et d'une algèbre réductive, donc est elle-même réductive. Soit $g = f|_{\mathfrak{w}}$. On a $q \supset q'$ et $q' = q^g$ (2.4 (i)), donc $m \subset q'$ (1.2 (i)). Si $x \in I$, soit $x = y + z$ avec $y \in q$, $z \in \mathfrak{r}$; on a $y \in m$ (2.4 (v)), donc $y \in q'$, $u(y) = 0$, $z \in \mathfrak{r}'$, $x \in m + \mathfrak{r}'$. Cela prouve que $I \subset m + \mathfrak{r}'$. Si $x' \in m$, soit $x' = y' + z'$ avec $y' \in I$, $z' \in \mathfrak{r}$; on a

$$z' \in (I + m) \cap \mathfrak{r} \subset (m + \mathfrak{r}') \cap \mathfrak{r} = \mathfrak{r}' \subset I,$$

donc $x' \in I$. Cela prouve que $m + \mathfrak{r}' \subset I$.

Le cocycle u s'annule sur m d'après (i); c'est donc un cobord, ce qui prouve (ii). Soit q'' un idéal de q contenu dans q' . Si $y \in q''$ et $x \in q$, on a $y \cdot u(x) = x \cdot u(y) - u([x, y]) \subset x \cdot u(q'') + u(q'') \subset x \cdot u(q') + u(q') = 0$;

comme u est surjectif, on en déduit que $q'' \cdot (\mathfrak{r}/\mathfrak{r}') = 0$. Le fait que u est surjectif entraîne aussi, avec les notations de (ii), que $q \cdot \xi = \mathfrak{r}/\mathfrak{r}'$, de sorte que le (q/m) -module $\mathfrak{r}/\mathfrak{r}'$ admet une orbite ouverte. Enfin, on a

$$\begin{aligned} \gamma(\mathfrak{p}) &= \gamma(q) && (2.4(v)) \\ &= \dim(q/q'') + \text{irr}(g) && (1.2(iii)) \\ &= \dim(q/q') + \text{irr}(f) && (2.3(v)) \\ &= \dim(\mathfrak{r}/\mathfrak{r}') + \text{irr}(f) && (2.2(iii)). \end{aligned}$$

2.6. LEMME. — On reprend les hypothèses de 2.5. Soient \mathfrak{w}_1 l'algèbre semi-simple $[\mathfrak{w}, \mathfrak{w}]$, $g_1 = f|_{\mathfrak{w}_1}$, x l'élément de \mathfrak{w}_1 correspondant à g_1 par l'isomorphisme de Killing. Si x est régulier semi-simple dans \mathfrak{w}_1 , \mathfrak{p} est résoluble.

Si x est régulier semi-simple, $\mathfrak{w}_1^{g_1}$ est une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{w}_1 . On a $\mathfrak{h} = \mathfrak{w}_1^{g_1} \subset \mathfrak{w}^{f|_{\mathfrak{w}}} \subset q'$, donc u s'annule sur \mathfrak{h} . Avec les notations de 2.5 (ii), ξ est donc de poids 0. D'après 1.5 (ii), on a $\xi = 0$, donc $u = 0$, donc $q = q'$. Alors $q \cap \mathfrak{w}_1$ est une polarisation de \mathfrak{w}_1 en g_1 . Comme x est régulier, $q \cap \mathfrak{w}_1$ est résoluble, donc q est résoluble, donc \mathfrak{p} est résoluble.

2.7. PROPOSITION. — Soit g une algèbre de Lie vérifiant la condition (RH). Il existe une partie ouverte non vide U de g^* telle que, pour toute $f \in U$, toute polarisation de g en f soit résoluble.

Soient \mathfrak{n} et \mathfrak{c} comme dans (RH), \mathfrak{g} l'algèbre semi-simple $[g/\mathfrak{n}, g/\mathfrak{n}]$, U' l'ensemble des $f \in g^*$ telles que $f|_{\mathfrak{c}} \neq 0$. Si $f \in U'$, soient \mathfrak{w} comme en 2.3, g_f la forme linéaire sur \mathfrak{g} correspondant à $f|_{[\mathfrak{w}, \mathfrak{w}]}$ par l'isomor-

phisme $[w, w] \rightarrow [g/n, g/n]$, et x_f l'image de g_f dans \mathfrak{z} par l'isomorphisme de Killing. L'application $f \mapsto x_f$ de U' dans \mathfrak{z} est régulière. L'ensemble U des $f \in U'$ tels que x_f soit régulier semi-simple dans \mathfrak{z} et donc une partie ouverte de \mathfrak{g}^* , évidemment non vide. Pour $f \in U$, toute polarisation de \mathfrak{g} en f est résoluble d'après 2.6.

2.8. PROPOSITION. — Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie vérifiant la condition (RH). Soient $f \in \mathfrak{g}^*$, \mathfrak{p} une polarisation de \mathfrak{g} en f . Ecrivons la partie semi-simple de \mathfrak{p} sous la forme $\mathfrak{c}_1 \times \mathfrak{c}_2 \times \dots \times \mathfrak{c}_r \times \mathfrak{d}$, où \mathfrak{c}_i est produit d'algèbres simples de type C_i et où aucun facteur simple de \mathfrak{d} n'est de type C. Alors

$$\sum_{i \geq 2} \frac{i-1}{i} \gamma(\mathfrak{c}_i) + \gamma(\mathfrak{d}) \leq \text{irr}(f).$$

Introduisons les notations de 2.5. D'après 2.4 (v), 2.5 (iii) et 1.6, on a

$$\dim(\mathfrak{r}/\mathfrak{r}') \leq \gamma(\mathfrak{c}_1) + \frac{1}{2} \gamma(\mathfrak{c}_2) + \dots + \frac{1}{r} \gamma(\mathfrak{c}_r).$$

Alors, d'après 2.5 (iv) :

$$\gamma(\mathfrak{c}_1) + \gamma(\mathfrak{c}_2) + \dots + \gamma(\mathfrak{c}_r) + \gamma(\mathfrak{d}) \leq \gamma(\mathfrak{c}_1) + \frac{1}{2} \gamma(\mathfrak{c}_2) + \dots + \frac{1}{r} \gamma(\mathfrak{c}_r) + \text{irr}(f),$$

d'où la proposition.

2.9. LEMME. — On reprend les notations de 2.5. Soit $\mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{t}_a$ une décomposition en facteurs simples d'une sous-algèbre de Levi de \mathfrak{q} . Soit $\mathfrak{s}_1 \oplus \mathfrak{s}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{s}_a$ une décomposition en facteurs simples d'une sous-algèbre de Levi de \mathfrak{p} , telle que la projection sur \mathfrak{q} parallèlement à \mathfrak{x} définisse un isomorphisme de \mathfrak{s}_i sur \mathfrak{t}_i , \dots , \mathfrak{s}_a sur \mathfrak{t}_a ($\mathfrak{s}_1, \dots, \mathfrak{s}_a$ existent). Soit \mathfrak{j} un supplémentaire de \mathfrak{r}' dans \mathfrak{r} stable pour $\mathfrak{t}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{t}_a$ (\mathfrak{j} existe). Après renumérotation de $\mathfrak{t}_1, \dots, \mathfrak{t}_a$, il existe une décomposition $\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{j}_b$ ($b \leq a$) en sous- $(\mathfrak{t}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{t}_a)$ -modules simples, telle que \mathfrak{t}_i opère trivialement dans $\mathfrak{j}_{i'}$ pour $i \neq i'$, et que \mathfrak{t}_i opère injectivement dans \mathfrak{j}_i avec orbite ouverte pour $i = 1, \dots, b$ (1.5 (i)).

(i) On a $u(\mathfrak{t}_1) = \mathfrak{j}_1, \dots, u(\mathfrak{t}_b) = \mathfrak{j}_b, u(\mathfrak{t}_{b+1}) = \dots = u(\mathfrak{t}_a) = 0$ (on identifie \mathfrak{j} à $\mathfrak{r}/\mathfrak{r}'$);

(ii) on a $\mathfrak{s}_1 \subset \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{j}_1 + \mathfrak{r}', \dots, \mathfrak{s}_b \subset \mathfrak{t}_b + \mathfrak{j}_b + \mathfrak{r}', \mathfrak{s}_{b+1} \subset \mathfrak{t}_{b+1} + \mathfrak{r}', \dots, \mathfrak{s}_a \subset \mathfrak{t}_a + \mathfrak{r}'$;

(iii) pour $i \neq i'$, on a

$$\begin{aligned} [\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_{i'}] &= [\mathfrak{t}_i, \mathfrak{t}_{i'}] = [\mathfrak{j}_i, \mathfrak{j}_{i'}] = [\mathfrak{t}_i, \mathfrak{j}_{i'}] = 0 \\ [\mathfrak{t}_i, \mathfrak{s}_{i'}] &\subset \mathfrak{r}' \quad [\mathfrak{j}_i, \mathfrak{s}_{i'}] \subset \mathfrak{r}'. \end{aligned}$$

L'assertion (i) résulte de 2.5 (ii); elle entraîne (ii). Soit $i \neq i'$. Evidemment, $[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_{i'}] = [\mathfrak{t}_i, \mathfrak{t}_{i'}] = 0$. Les sous-espaces $\mathfrak{j}_1, \dots, \mathfrak{j}_b$ sont deux à deux orthogonaux pour la forme alternée (q/m) -invariante sur \mathfrak{j} (identifié à $\mathfrak{r}/\mathfrak{r}'$), donc $[\mathfrak{j}_i, \mathfrak{j}_{i'}] = 0$. On a $\mathfrak{t}_i \cdot \mathfrak{j}_{i'} = 0$, donc $[\mathfrak{t}_i, \mathfrak{j}_{i'}] = 0$. Comme $[\mathfrak{t}_i, \mathfrak{t}_{i'}] = [\mathfrak{t}_i, \mathfrak{j}_{i'}] = 0$, on a $[\mathfrak{t}_i, \mathfrak{s}_{i'}] \subset \mathfrak{r}'$ d'après (ii). On voit de même que $[\mathfrak{j}_i, \mathfrak{s}_{i'}] \subset \mathfrak{r}'$.

2.10. LEMME. — On reprend les notations de 2.9. Soit $c \in \{1, 2, \dots, b\}$. Pour $i = 1, \dots, c$, soient \mathfrak{v}_i une sous-algèbre de \mathfrak{t}_i et \mathfrak{k}_i un sous-espace vectoriel totalement isotrope de \mathfrak{j}_i tels que $\mathfrak{v}_i \cdot \mathfrak{k}_i \subset \mathfrak{k}_i$. Soit

$$\mathfrak{p}_* = \mathfrak{v}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{v}_c \oplus \mathfrak{k}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{k}_c \oplus \mathfrak{s}_{c+1} \oplus \dots \oplus \mathfrak{s}_a \oplus \mathfrak{l}.$$

- (i) \mathfrak{p}_* est une sous-algèbre de \mathfrak{g} ;
- (ii) $\mathfrak{k}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{k}_c \oplus \mathfrak{l}$ est un idéal résoluble de \mathfrak{p}_* ;
- (iii) si $\mathfrak{v}_1, \dots, \mathfrak{v}_c$ sont résolubles, le radical de \mathfrak{p}_* est

$$\mathfrak{v}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{v}_c \oplus \mathfrak{k}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{k}_c \oplus \mathfrak{l};$$

(iv) si $\mathfrak{v}_1, \dots, \mathfrak{v}_c$ sont totalement isotropes pour B_f , \mathfrak{p}_* est totalement isotrope pour B_f ;

(v) si $\dim \mathfrak{v}_i + \dim \mathfrak{k}_i = \dim \mathfrak{t}_i$, pour $i = 1, \dots, c$, on a $\dim \mathfrak{p}_* = \dim \mathfrak{p}$.

1° On a $[\mathfrak{v}_i, \mathfrak{v}_i] \subset \mathfrak{v}_i$, $[\mathfrak{k}_i, \mathfrak{k}_i] = B_f(\mathfrak{k}_i, \mathfrak{k}_i) = 0$, $[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_i] \subset \mathfrak{s}_i$, $B_f(\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_i) \subset B_f(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) = 0$, $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] \subset \mathfrak{l}$, $B_f(\mathfrak{l}, \mathfrak{l}) \subset B_f(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) = 0$.

2° Si $i \neq i'$, on a $[\mathfrak{v}_i, \mathfrak{v}_{i'}] \subset [\mathfrak{t}_i, \mathfrak{t}_{i'}] = 0$, donc $B_f(\mathfrak{v}_i, \mathfrak{v}_{i'}) = 0$.

3° On a $[\mathfrak{v}_i, \mathfrak{k}_i] = \mathfrak{v}_i \cdot \mathfrak{k}_i \subset \mathfrak{k}_i$, $B_f(\mathfrak{v}_i, \mathfrak{k}_i) \subset B_f(\mathfrak{w}, \mathfrak{x}) = 0$, et, pour $i \neq i'$, $[\mathfrak{v}_i, \mathfrak{k}_{i'}] \subset \mathfrak{t}_i \cdot \mathfrak{j}_{i'} = 0$, donc $B_f(\mathfrak{v}_i, \mathfrak{k}_{i'}) = 0$.

4° Pour $i = 1, \dots, c$ et $i' = c+1, \dots, a$, on a

$$[\mathfrak{v}_i, \mathfrak{s}_{i'}] \subset [\mathfrak{t}_i, \mathfrak{s}_{i'}] \subset \mathfrak{r}' \subset \mathfrak{l}, \quad \text{et} \quad B_f(\mathfrak{v}_i, \mathfrak{s}_{i'}) \subset B_f(\mathfrak{t}_i, \mathfrak{t}_{i'} + \mathfrak{x}) = 0.$$

5° On a

$$[\mathfrak{v}_i, \mathfrak{l}] \subset [\mathfrak{q}, \mathfrak{m} + \mathfrak{r}'] \subset \mathfrak{m} + \mathfrak{r}' = \mathfrak{l} (2.5(i)),$$

et

$$B_f(\mathfrak{v}_i, \mathfrak{l}) \subset B_f(\mathfrak{q}, \mathfrak{q}' + \mathfrak{r}') = 0.$$

6° Si $i \neq i'$, \mathfrak{k}_i et $\mathfrak{k}_{i'}$ sont orthogonaux, donc $[\mathfrak{k}_i, \mathfrak{k}_{i'}] = 0 = B_f(\mathfrak{k}_i, \mathfrak{k}_{i'})$.

7° Pour $i = 1, \dots, c$ et $i' = c+1, \dots, a$, on a

$$[\mathfrak{k}_i, \mathfrak{s}_{i'}] \subset [\mathfrak{k}_i, \mathfrak{t}_{i'} + \mathfrak{j}_{i'} + \mathfrak{r}'] = \mathfrak{t}_{i'} \cdot \mathfrak{k}_i = 0 \quad \text{donc} \quad B_f(\mathfrak{k}_i, \mathfrak{s}_{i'}) = 0.$$

8° On a

$$[\mathfrak{f}_i, \mathfrak{l}] \subset [\mathfrak{r}, \mathfrak{m} + \mathfrak{r}'] = [\mathfrak{m}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r}' \subset \mathfrak{l}, \quad \text{et} \quad B_f(\mathfrak{f}_i, \mathfrak{l}) \subset B_f(\mathfrak{r}, \mathfrak{q} + \mathfrak{r}') = 0.$$

9° Si $i \neq i'$, on a $[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_{i'}] = 0$, donc $B_f(\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_{i'}) = 0$.

10° On a $[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{l}] \subset [\mathfrak{p}, \mathfrak{l}] \subset \mathfrak{l}$, et $B_f(\mathfrak{s}_i, \mathfrak{l}) \subset B_f(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) = 0$.

Cela prouve les assertions (i) à (iv). L'assertion (v) est évidente.

2.11. LEMME. — *On reprend les notations de 2.9. On suppose la numérotation des \mathfrak{t}_i telle que $\mathfrak{t}_1, \dots, \mathfrak{t}_c$ soient de type $A_1 = C_1$, et que $\mathfrak{t}_{c+1}, \dots, \mathfrak{t}_b$ ne soient pas de type A_1 . Pour $i = 1, \dots, c$, il existe une sous-algèbre résoluble \mathfrak{v}_i de \mathfrak{t}_i , totalement isotrope pour B_f , de dimension 2; il existe ensuite une droite \mathfrak{f}_i de \mathfrak{j}_i telle que $\mathfrak{v}_i \cdot \mathfrak{f}_i \subset \mathfrak{f}_i$. Définissons alors \mathfrak{p}_* comme en 2.10.*

(i) \mathfrak{p}_* est une polarisation de \mathfrak{g} en f .

(ii) Définissons \mathfrak{q}_* , \mathfrak{q}'_* , \mathfrak{r}_* , \mathfrak{r}'_* relativement à \mathfrak{p}_* comme \mathfrak{q} , \mathfrak{q}' , \mathfrak{r} , \mathfrak{r}' ont été définis relativement à \mathfrak{p} . Alors les facteurs simples de type A_1 de la partie semi-simple de \mathfrak{q}_* opèrent trivialement dans $\mathfrak{r}_*/\mathfrak{r}'_*$.

L'assertion (i) résulte aussitôt de 2.10. (Le rôle spécial de A_1 apparaît dans l'égalité $\dim \mathfrak{v}_i + \dim \mathfrak{f}_i = \dim \mathfrak{t}_i$).

D'après 2.10 (iii), $\mathfrak{s}_{c+1} \oplus \dots \oplus \mathfrak{s}_a$ est une sous-algèbre de Levi de \mathfrak{p}_* , donc $\mathfrak{t}_{c+1} \oplus \dots \oplus \mathfrak{t}_a$ est une sous-algèbre de Levi de \mathfrak{q}_* . Pour $i = c+1, \dots, b$, \mathfrak{t}_i n'est pas de type A_1 . Pour $i = b+1, \dots, a$, on a $\mathfrak{t}_i \subset \mathfrak{q}'$, donc $\mathfrak{t}_i + \mathfrak{m} \subset \mathfrak{q}'$, donc l'idéal $\mathfrak{t}_i + \mathfrak{m}$ de \mathfrak{q} opère trivialement dans $\mathfrak{r}/\mathfrak{r}'$ (2.5 (iii)). Or $\mathfrak{r}'_* = \mathfrak{p}_* \cap \mathfrak{x} \supset \mathfrak{l} \cap \mathfrak{x} = \mathfrak{r}'$, donc $\mathfrak{r}_* \subset \mathfrak{r}$, et \mathfrak{t}_i opère trivialement dans $\mathfrak{r}_*/\mathfrak{r}'_*$.

2.12. LEMME. — *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie vérifiant la condition (RH). Alors le théorème de l'introduction est vrai.*

On reprend les notations de 2.10. En choisissant bien \mathfrak{p} , on peut supposer, d'après 2.11, que \mathfrak{c}_1 opère trivialement dans $\mathfrak{r}/\mathfrak{r}'$. Alors, dans la démonstration de 2.8, la première inégalité est remplacée par

$$\dim(\mathfrak{r}/\mathfrak{r}') \leq \frac{1}{2}\gamma(\mathfrak{c}_2) + \dots + \frac{1}{r}\gamma(\mathfrak{c}_r),$$

et la démonstration s'achève comme celle de 2.8.

3. Cas général

3.1. LEMME. — Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie, \mathfrak{a} un idéal de \mathfrak{g} , $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, f un élément de \mathfrak{g}^* tel que $f(\mathfrak{a}) = 0$, f' l'élément de \mathfrak{g}'^* déduit de f par passage au quotient. On a $\text{irr}(f') \leq \text{irr}(f)$.

On a $\mathfrak{g}_f \supset \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{g}^f/\mathfrak{a} = \mathfrak{g}'^{f'}$, d'où très facilement le lemme.

3.2. LEMME. — Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie, \mathfrak{a} un idéal commutatif de \mathfrak{g} , $f \in \mathfrak{g}^*$, \mathfrak{g}' la sous-algèbre \mathfrak{a}^f , $f' = f|_{\mathfrak{g}'}$. Soient \mathfrak{a}' le noyau de $f|_{\mathfrak{a}}$ (qui est un idéal de \mathfrak{g}), $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{g}'/\mathfrak{a}'$, f'' l'élément de \mathfrak{g}''^* déduit de f' par passage au quotient. On a $\text{irr}(f'') \leq \text{irr}(f)$.

Si $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$, le lemme résulte de 3.1. Supposons $\mathfrak{a}' \neq \mathfrak{a}$. Soit U l'ensemble des formes linéaires sur \mathfrak{g}'' dont le noyau ne contient pas $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}'$. Il existe un élément f''_1 de U qui est une forme régulière sur \mathfrak{g}'' . Soit f'_1 la forme correspondante sur \mathfrak{g}' , et $f_1 \in \mathfrak{g}^*$ un prolongement de f'_1 . On a $f_1(\mathfrak{a}) \neq 0$ et $f_1(\mathfrak{a}') = 0$, donc il existe $\lambda \in k - \{0\}$ tel que $f_1|_{\mathfrak{a}} = \lambda f|_{\mathfrak{a}}$. Par suite $\mathfrak{a}^{f_1} = \mathfrak{a}^f = \mathfrak{g}'$. Comme \mathfrak{g}' est l'orthogonal de \mathfrak{a} pour B_f , on a

$$\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}^f = \dim \mathfrak{g}' + \dim \mathfrak{g}'^{f'}.$$

De même,

$$\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}^{f_1} = \dim \mathfrak{g}' + \dim \mathfrak{g}'^{f'_1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \text{irr}(f'') &= \dim \mathfrak{g}''^{f''} - \dim \mathfrak{g}''^{f''_1} \\ &= \dim \mathfrak{g}'^{f'} - \dim \mathfrak{g}'^{f'_1} \\ &= \dim \mathfrak{g}^f - \dim \mathfrak{g}^{f_1} \leq \text{irr}(f). \end{aligned}$$

3.3. LEMME. — Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie, \mathfrak{a} un idéal commutatif de \mathfrak{g} , f un élément polarisable de \mathfrak{g}^* . Il existe une polarisation de \mathfrak{g} en f contenant \mathfrak{a} .

Si \mathfrak{h} est une sous-algèbre de \mathfrak{g} subordonnée à f , $\mathfrak{h}' = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}^f) + \mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de \mathfrak{g} subordonnée à f . Posons $\dim(\mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}) = q$. On a $\dim(\mathfrak{h}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}^f) \leq q$, d'où $\dim \mathfrak{h}' \geq \dim \mathfrak{h}$. Cela entraîne aussitôt le lemme.

3.4. Démonstration du théorème de l'introduction. — Le théorème est évident si $\mathfrak{g} = 0$. On raisonne par récurrence sur $\dim \mathfrak{g}$.

1° Supposons qu'il existe un idéal commutatif $\mathfrak{a} \neq 0$ de \mathfrak{g} tel que $f(\mathfrak{a}) = 0$. Soient $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, π le morphisme canonique de \mathfrak{g} sur \mathfrak{g}' , f' la forme linéaire sur \mathfrak{g}' telle que $f = f' \circ \pi$. Toute polarisation en f contient \mathfrak{a} . Puisque f est polarisable, f' est polarisable. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une polarisation \mathfrak{p}' de \mathfrak{g}' en f' telle que, avec des notations évidentes

$$\gamma(\mathfrak{c}'_1) + \sum_{i \geq 2} \frac{i-1}{i} \gamma(\mathfrak{c}'_i) + \gamma(\mathfrak{d}') \leq \text{irr}(f').$$

Alors $\mathfrak{p} = \pi^{-1}(\mathfrak{p}')$ est une polarisation de \mathfrak{g} en f dont la partie semi-simple est isomorphe à celle de \mathfrak{p}' . Il suffit maintenant d'appliquer le lemme 3.1. (H₁) *Nous supposons donc désormais que f ne s'annule sur aucun idéal commutatif de \mathfrak{g} distinct de 0.*

2° Supposons qu'il existe un idéal commutatif \mathfrak{a} de \mathfrak{g} tel que $f([\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]) \neq 0$. Introduisons $\mathfrak{g}', f', \mathfrak{a}', \mathfrak{g}'', f''$ comme en 3.2. Puisque f est polarisable, il existe une polarisation de \mathfrak{g} en f qui contient \mathfrak{a} (3.3); cette polarisation est contenue dans $\mathfrak{a}^f = \mathfrak{g}'$, donc est une polarisation de \mathfrak{g}' en f' . Donc f'' est polarisable. On a $\mathfrak{g}' \neq \mathfrak{g}$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une polarisation \mathfrak{p}'' de \mathfrak{g}'' en f'' telle que, avec des notations évidentes,

$$\gamma(\mathfrak{c}_1'') + \sum_{i \geq 2} \frac{i-1}{i} \gamma(\mathfrak{c}_i'') + \gamma(\mathfrak{d}'') \leq \text{irr}(f'').$$

Soit \mathfrak{p}' l'image réciproque de \mathfrak{p}'' dans \mathfrak{g}' . Alors \mathfrak{p}' est une polarisation de \mathfrak{g}' en f' dont la partie semi-simple est isomorphe à celle de \mathfrak{p}'' . Comme $\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}^f = \dim \mathfrak{g}' + \dim \mathfrak{g}'^{f'}$, \mathfrak{p}' est une polarisation de \mathfrak{g} en f . Il suffit maintenant d'appliquer le lemme 3.2.

(H₂) *Nous supposons donc désormais que, pour tout idéal commutatif \mathfrak{a} de \mathfrak{g} , on a $f([\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]) = 0$.*

3° Comme dans [3] (p. 325), les hypothèses (H₁) et (H₂) entraînent qu'on est dans l'un des trois cas suivants :

(a) \mathfrak{g} est semi-simple;

(a') \mathfrak{g} est produit d'une algèbre semi-simple et d'une algèbre de dimension 1;

(b) le plus grand idéal nilpotent \mathfrak{n} de \mathfrak{g} est une algèbre de Heisenberg, le centre \mathfrak{c} de \mathfrak{n} est central dans \mathfrak{g} , et $f(\mathfrak{c}) \neq 0$.

Le cas (a') se ramène au cas (a), qui résulte de 1.2. Plaçons-nous désormais dans le cas (b).

4° Adoptons les notations de 2.3. D'après [3] (lemme 3), il existe une décomposition en somme directe $\mathfrak{w} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{c}$, telle que \mathfrak{s} soit une sous-algèbre de Levi de \mathfrak{g} et que $[\mathfrak{s}, \mathfrak{t}] = 0$, $[\mathfrak{t}, \mathfrak{t}] \subset \mathfrak{c}$. Alors $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2$, où \mathfrak{t}_2 est une algèbre de Lie commutative et où $\mathfrak{t}_1 + \mathfrak{c}$ est une algèbre de Heisenberg (éventuellement réduite à \mathfrak{c}) permutable à \mathfrak{t}_2 . Si $\mathfrak{t}_1 = 0$, \mathfrak{g} vérifie la condition (RH) et le théorème résulte de 2.12. Supposons désormais $\mathfrak{t}_1 \neq 0$. Soit $\mathfrak{a} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{t}_2 \oplus \mathfrak{n}$. On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{t}_1$, $[\mathfrak{t}_1, \mathfrak{s} + \mathfrak{t}_2] = 0$, et $f([\mathfrak{t}_1, \mathfrak{n}]) \subset f([\mathfrak{w}, \mathfrak{x}]) = 0$, donc \mathfrak{a} et \mathfrak{t}_1 sont orthogonaux pour B_f . D'autre part, $B_f|_{\mathfrak{t}_1 \times \mathfrak{t}_1}$ est non dégénérée. Donc $\mathfrak{g}^f \subset \mathfrak{a}$.

On a $[g, g] = [s+t+n, s+t+n] \subset [s+t, s+t] + n \subset s+n$. Soit g_1 la somme de a et d'un sous-espace vectoriel t'_1 de codimension 1 dans t_1 . Puisque $g_1 \supset s+n \supset [g, g]$, g_1 est un idéal de g . Soit $f_1 = f|_{g_1}$. Alors n est un idéal de g_1 , et l'orthogonal de n dans g_1 est

$$w_1 = \{x \in g_1 \mid [x, x] \subset x\} = w \cap g_1 = s + t'_1 + t_2 + c.$$

L'algèbre w (resp. w_1) est produit des algèbres s et $t+c$ (resp. t'_1+t_2+c). Soit $g_1 = f_1|_{w_1} = f|_{w_1}$. Comme $f(c) \neq 0$, on a $\text{irr}(f|_{t+c}) = 0$ et $\text{irr}(f|_{t'_1+t_2+c}) = 0$, donc, d'après 2.3,

$$(5) \quad \text{irr}(f) = \text{irr}(g) = \text{irr}(g|_s) = \text{irr}(g_1|_s) = \text{irr}(g_1) = \text{irr}(f_1).$$

Il existe un élément t de $t_1 - \{0\}$ tel que g_1 soit l'orthogonal de t dans g . Soit G le groupe adjoint algébrique de g . Considérons l'enveloppe algébrique de $k(\text{ad } t)$ dans $g\mathbb{I}(g)$; c'est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe algébrique irréductible commutatif G_1 de G . Comme $[t, s] = [t, c] = 0$ et que $[t, x] \subset x$, G_1 laisse fixe $f|_{s+n}$, donc $f|_{[g, g]}$, donc B_f , donc laisse stable l'ensemble P des polarisations de g en f . Or P est une sous-variété algébrique complète d'une grassmannienne de g . Par hypothèse, $P \neq \emptyset$. Il existe donc une polarisation p' de g en f telle que $[t, p'] \subset p'$.

Puisque $g^f \subset a \subset g_1$, la dimension des sous-espaces vectoriels totalement isotropes maximaux est la même pour B_f et B_{f_1} ([4], 1.12.2). Si $p' \subset g_1$, p' est une polarisation de g_1 en f_1 . Sinon, on a $t \notin p'$; comme $[t, p'] \subset p'$, $kt+p'$ est une sous-algèbre de g ; comme $kt+(p' \cap g_1)$ est totalement isotrope de même dimension que p' , $kt+(p' \cap g_1)$ est une polarisation de g_1 en f_1 . Dans les deux cas, on voit que f_1 est polarisable. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une polarisation p de g_1 en f_1 telle que, avec des notations évidentes

$$\gamma(c_1) + \sum_{i \geq 2} \frac{i-1}{i} \gamma(c_i) + \gamma(d) \leq \text{irr}(f_1).$$

Or p est une polarisation de g en f . Compte tenu de (5), cela achève la démonstration.

3.5. LEMME. — Soit V un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée B . Soit $\mathfrak{n} = V \oplus k$, muni du crochet $[\xi + \lambda, \xi' + \lambda'] = B(\xi, \xi')$ pour $\xi, \xi' \in V$, $\lambda, \lambda' \in k$ (c'est une algèbre de Heisenberg). Soit \mathfrak{s} une algèbre de Lie qui opère dans V en laissant B invariante. Faisons opérer trivialement \mathfrak{s} dans k , de sorte que \mathfrak{s} opère par dérivations dans \mathfrak{n} . Soit g le produit semi-direct correspondant de \mathfrak{s} par \mathfrak{n} .

Soit $\xi \in V$. Soit g la forme linéaire sur \mathfrak{s} telle que $g(x) = (1/2) B(\xi, x \cdot \xi)$ pour $x \in \mathfrak{s}$. Soit f la forme linéaire sur \mathfrak{g} telle que $f|_{\mathfrak{s}} = g$, $f|_V = 0$, et $f(\lambda) = \lambda$ pour $\lambda \in k$.

(i) On a $g([x, y]) = -B(x \cdot \xi, y \cdot \xi)$ pour $x, y \in \mathfrak{s}$;

(ii) on a $g^f = \mathfrak{s}^g + k$;

(iii) supposons $\mathfrak{s} \cdot \xi = V$. Alors

$$\mathfrak{s}^g = \{x \in \mathfrak{s}, x \cdot \xi = 0\} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}^f) = 1 + \dim \mathfrak{s};$$

(iv) pour $\lambda \in k$, soit $\mathfrak{s}_\lambda = (\exp \operatorname{ad} \lambda \xi)(\mathfrak{s})$. On a

$$\lambda = \pm 1 \Rightarrow \mathfrak{s}_\lambda \text{ est subordonnée à } f;$$

(v) supposons $\mathfrak{s} \cdot \xi = V$. Alors

$$\lambda = \pm 1 \Leftrightarrow \mathfrak{s}_\lambda + k \text{ est une polarisation de } \mathfrak{g} \text{ en } f.$$

Pour $x, y \in \mathfrak{s}$, on a

$$\begin{aligned} 2g([x, y]) &= B(\xi, xy \cdot \xi) - B(\xi, yx \cdot \xi) \\ &= -B(x \cdot \xi, y \cdot \xi) + B(y \cdot \xi, x \cdot \xi) \\ &= -2B(x \cdot \xi, y \cdot \xi), \end{aligned}$$

d'où (i). L'assertion (ii) résulte de 2.3 (iv). Supposons $\mathfrak{s} \cdot \xi = V$. On a $\mathfrak{s}^g = \{x \in \mathfrak{s}; x \cdot \xi = 0\}$ d'après (i), donc, compte tenu de (ii),

$$\begin{aligned} \dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}^f &= \dim \mathfrak{s} + \dim V + 1 + \dim \mathfrak{s} - \dim V + 1 \\ &= 2(1 + \dim \mathfrak{s}) \end{aligned}$$

d'où (iii). Pour $x \in \mathfrak{s}$, on a

$$\begin{aligned} (\exp \operatorname{ad} \lambda \xi)(x) &= x - \lambda x \cdot \xi + \frac{1}{2} B(\lambda \xi, -\lambda x \cdot \xi) \\ &= x - \lambda x \cdot \xi - \lambda^2 g(x), \end{aligned}$$

d'où, pour $x, y \in \mathfrak{s}$,

$$(6) \quad f((\exp \operatorname{ad} \lambda \xi)[x, y]) = -(1 - \lambda^2) B(x \cdot \xi, y \cdot \xi).$$

Cela prouve (iv). Supposons $\mathfrak{s} \cdot \xi = V$. Alors $\mathfrak{s}_{\pm 1} + k$ est une polarisation en f d'après (iii) et (iv). Si $\mathfrak{s}_\lambda + k$ est une polarisation en f , on a $\lambda = \pm 1$ d'après (6).

3.6. LEMME. — On conserve les notations de 3.5, avec les hypothèses supplémentaires suivantes : $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ ou les V_i sont deux à deux orthogonaux et de dimension ≥ 4 ; $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 \times \dots \times \mathfrak{s}_r$; \mathfrak{s}_i opère trivialement

dans V_i , pour $i \neq i'$, et s'identifie à l'algèbre de Lie symplectique de V_i ; si ξ_i désigne la projection de ξ sur V_i , on a $\xi_i \neq 0$ pour tout i .

(i) f admet exactement deux polarisations, sommes de k et de sous-algèbres de Levi de \mathfrak{g} .

(ii) Posons $\dim V_i = 2n_i$. On a

$$\text{irr}(f) = \sum_{1 \leq i \leq r} \frac{n_i - 1}{n_i} \gamma(\mathfrak{s}_i).$$

D'après 3.5, f admet au moins deux polarisations, sommes de k et de sous-algèbres de Levi de \mathfrak{g} . Soit \mathfrak{p} une polarisation en f , et utilisons les notations de 2.4. On a $\mathfrak{x} = V$, $\mathfrak{c} = k$, $\mathfrak{w} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{c}$, $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^{\sim} \oplus k$, où \mathfrak{q}^{\sim} est une sous-algèbre parabolique de \mathfrak{s} , donc de la forme $\mathfrak{q}_1 \times \dots \times \mathfrak{q}_r$, où \mathfrak{q}_i est une sous-algèbre parabolique de \mathfrak{s}_i . Soit $g_i = f|_{\mathfrak{s}_i}$. Comme \mathfrak{q} contient son orthogonal pour $B_f|_{\mathfrak{w} \times \mathfrak{w}}$, on a

$$\mathfrak{q}_i \supset \mathfrak{q}_i^{g_i} \supset \mathfrak{s}_i^{g_i} = \{x \in \mathfrak{s}_i; x \cdot \xi_i = 0\}.$$

Or, les seules sous-algèbres de \mathfrak{s}_i contenant $\{x \in \mathfrak{s}_i; x \cdot \xi_i = 0\}$ sont \mathfrak{s}_i , $\mathfrak{s}_i^{g_i}$ et $\mathfrak{s}_i' = \{x \in \mathfrak{s}_i; x \cdot \xi_i \in k \xi_i\}$; on a

$$\dim \mathfrak{s}_i' / \mathfrak{s}_i^{g_i} = 1 < \frac{1}{2} \dim V_i = \frac{1}{2} \dim \mathfrak{s}_i / \mathfrak{s}_i^{g_i} \quad \text{puisque } \dim V_i \geq 4;$$

comme $\mathfrak{q}_i \supset \mathfrak{q}_i^{g_i}$, on voit que $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{s}_i$, d'où $\mathfrak{q} = \mathfrak{w}$, $\dim \mathfrak{q} / \mathfrak{q}' = \dim V$, $\dim \mathfrak{r} / \mathfrak{r}' = \dim V$, $\mathfrak{r} = V$ et $\mathfrak{r}' = 0$. Cela prouve que \mathfrak{p} est somme de \mathfrak{c} et d'une sous-algèbre de Levi de \mathfrak{g} , donc de la forme $\mathfrak{c} \oplus (\exp \text{ad } \xi')(\mathfrak{s})$, où $\xi' \in V$. Comme en outre $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{s}^g = \{x \in \mathfrak{s}; x \cdot \xi = 0\}$, on a

$$x \cdot \xi = 0 \Rightarrow x \cdot \xi' = 0 \quad \text{pour } x \in \mathfrak{s},$$

donc ξ' est proportionnel à ξ . Alors \mathfrak{p} est de la forme $\mathfrak{s}_\lambda + k$ pour un $\lambda \in k$. D'après 3.5 (v), \mathfrak{p} est l'une des 2 polarisations signalées plus haut. Cela prouve (i). D'autre part,

$$\begin{aligned} \text{irr}(f) &= \dim \mathfrak{s}^g + 1 - (\text{rang } \mathfrak{s} + 1) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq r} \dim \mathfrak{s}_i^{g_i} - \text{rang } \mathfrak{s}_i \\ &= \sum_{1 \leq i \leq r} \dim \mathfrak{s}_i - \dim V_i - \frac{1}{2} \dim V_i \\ &= \sum_{1 \leq i \leq r} (2n_i^2 + n_i) - 3n_i \\ &= \sum_{1 \leq i \leq r} \frac{n_i - 1}{n_i} \cdot 2n_i^2 = \sum_{1 \leq i \leq r} \frac{n_i - 1}{n_i} \gamma(\mathfrak{s}_i). \end{aligned}$$

3.7. PROPOSITION. — Soient $\mathfrak{c}_1, \dots, \mathfrak{c}_r, \mathfrak{d}$ des algèbres de Lie semi-simples, où \mathfrak{c}_i est produit de facteurs simples de type C_i , et où aucun facteur simple de \mathfrak{d} n'est de type C . Il existe une algèbre de Lie \mathfrak{g} et une forme linéaire polarisable f sur \mathfrak{g} telles que :

$$1^\circ \gamma(\mathfrak{c}_1) + \sum_{i \geq 2} (i-1/i) \gamma(\mathfrak{c}_i) + \gamma(\mathfrak{d}) = \text{irr}(f);$$

2° pour toute polarisation \mathfrak{p} de \mathfrak{g} en f , la partie semi-simple de \mathfrak{p} est isomorphe à $\mathfrak{c}_1 \times \dots \times \mathfrak{c}_r \times \mathfrak{d}$.

Soient \mathfrak{h} une algèbre de Lie, $f' \in \mathfrak{h}^*$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times \mathfrak{c}_1 \times \mathfrak{d}$, f la forme linéaire sur \mathfrak{g} qui prolonge f' et s'annule sur $\mathfrak{c}_1 \times \mathfrak{d}$. On a $\text{irr}(f) = \text{irr}(f') + \gamma(\mathfrak{c}_1) + \gamma(\mathfrak{d})$. D'autre part, $\mathfrak{g}^f \supset \mathfrak{c}_1 \times \mathfrak{d}$, donc toute polarisation en f est de la forme $\mathfrak{p} \times \mathfrak{c}_1 \times \mathfrak{d}$, où \mathfrak{p} est une polarisation de \mathfrak{h} en f' . On est donc ramené au cas où $\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{d} = 0$, et il suffit alors d'appliquer 3.6.

4. Quelques contre-exemples

4.1. La construction de 3.5 et 3.6 fournit aussi un contre-exemple pour une conjecture assez naturelle. Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie, \mathfrak{n} un idéal nilpotent de \mathfrak{g} , et $f \in \mathfrak{g}^*$. D'après un résultat de DUFLO ([4], 10.3.1), si f admet une polarisation résoluble \mathfrak{p} , f admet une polarisation résoluble \mathfrak{p}' telle que $\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{n}$ soit polarisation de \mathfrak{n} en $f|_{\mathfrak{n}}$. D'après 3.6, on ne peut, dans cet énoncé, supprimer l'hypothèse que \mathfrak{p} est résoluble, même si l'on n'exige pas que \mathfrak{p}' soit résoluble. (Par contre, quand \mathfrak{n} est commutatif, cf. 3.3).

4.2. Reprenons l'algèbre \mathfrak{g} de 3.6. L'étude des polarisations aux différents points de \mathfrak{g}^* est intéressante. Nous allons en signaler un cas particulier. Prenons $r = 1$, $n_1 = 2$. Soient \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{s} , (α, β) une base de $R(\mathfrak{s}, \mathfrak{h})$, de telle sorte que

$$R(\mathfrak{s}, \mathfrak{h}) = \{ \pm \alpha, \pm \beta, \pm (\alpha + \beta), \pm (2\alpha + \beta) \}.$$

Soit e la forme linéaire sur \mathfrak{g} telle que : 1° $e|_{\mathfrak{V}} = 0$; 2° $e(\lambda) = \lambda$ pour $\lambda \in k$; 3° $e|_{\mathfrak{s}} = e'$ correspond par l'isomorphisme de Killing à un élément x_0 de $\mathfrak{h} - \{0\}$ tel que $\beta(x_0) = 0$. Soit \mathfrak{p} une polarisation de \mathfrak{g} en e . On a $\mathfrak{s}^{e'} = \mathfrak{h} + \mathfrak{s}^\beta + \mathfrak{s}^{-\beta}$, donc $\dim \mathfrak{g}^e = 5$ et $\dim \mathfrak{p} = (1/2)(5+15) = 10$. D'après 2.4 (ii), $1 \leq \dim(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{n}) \leq 3$. Soit \mathfrak{p}' la projection de \mathfrak{p} sur \mathfrak{s} correspondant à la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{n}$. On a $\dim \mathfrak{p}' = 10 - \dim(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{n})$. Or une sous-algèbre de \mathfrak{s} est de dimension 10 ou ≤ 7 . On voit que $\dim(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{n}) = 3$ et que $\mathfrak{p}' = \mathfrak{q} \cap \mathfrak{s}$ est une sous-algèbre parabolique distincte de \mathfrak{s} contenant \mathfrak{s}^β et $\mathfrak{s}^{-\beta}$. Or, dans la représentation identique

de \mathfrak{s} , une sous-algèbre parabolique contenant \mathfrak{s}^β et $\mathfrak{s}^{-\beta}$ ne laisse stable aucun sous-espace totalement isotrope de dimension 2. Donc e n'est pas polarisable. On obtient ainsi, en faisant varier $\alpha(x_0)$, une infinité d'éléments de \mathfrak{g}^* , deux à deux non conjugués par le groupe adjoint, qui sont non polarisables. Si l'on prend $\beta(x_0) \neq 0$ et $\alpha(x_0) = 0$, on montre que f est polarisable. Si l'on prend $x_0 = 0$, on montre que f est non polarisable. La structure de l'ensemble des éléments non polarisables de \mathfrak{g}^* est donc assez compliquée.

4.3. Montrons que la proposition 2.8 ne se généralise pas aux algèbres de Lie quelconques. Soit \mathfrak{g} le produit semi-direct de $\mathfrak{s} = \mathfrak{sl}(n, k)$ par l'idéal commutatif k^n , défini par la représentation identique de \mathfrak{s} ($n \geq 3$). Soit $f \in \mathfrak{g}^*$ tel que $f|_{\mathfrak{s}} = 0$ et $f|_{k^n} \neq 0$. Si $x \in k^n - \{0\}$, il existe $y \in \mathfrak{s}$ tel que $[y, x] = y \cdot x \notin \text{Ker } f$; donc \mathfrak{s} est totalement isotrope maximal pour B_f , et par suite est une polarisation de \mathfrak{g} en f . Pour cette polarisation, la quantité $\sum_{i \geq 2} (i-1/i) \gamma(\mathfrak{c}_i) + \gamma(\mathfrak{d})$ de la proposition 2.8 est $\gamma(\mathfrak{s}) = n^2 - n$. D'autre part, $\dim \mathfrak{g}^f = 2 \dim \mathfrak{s} - \dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{s} - \dim k^n = n^2 - n - 1$. Comme $\dim \mathfrak{g} = n^2 - 1 + n$ est impair, l'indice $m_{\mathfrak{g}}$ de \mathfrak{g} est ≥ 1 (en fait, on peut montrer par récurrence sur n que $m_{\mathfrak{g}} = 1$). Donc

$$\text{irr}(f) \leq n^2 - n - 2 < \gamma(\mathfrak{s}).$$

4.4. Reprenons l'algèbre \mathfrak{g} de 3.5, avec $\dim V = 2$ et $\mathfrak{s} = \mathfrak{sl}(V)$. Il existe des bases (e, h, f) , (u, v) , (w) de \mathfrak{s} , V , k telles que

$$\begin{aligned} [e, f] &= h, [h, e] = 2e, [h, f] = -2f, [e, u] = 0, \\ [e, v] &= u, [h, u] = u, [h, v] = -v, \\ [f, u] &= v, [f, v] = 0, [u, v] = w, [g, w] = 0. \end{aligned}$$

Soit φ la forme linéaire $e^* + w^*$ sur \mathfrak{g} . On a $\mathfrak{g}^f = \mathbf{C}f + \mathbf{C}w$ (on prend $k = \mathbf{C}$). En appliquant 3.5 (ou directement), on trouve que, si \mathfrak{s}' désigne la sous-algèbre de Levi

$$\mathbf{C}(e - i\sqrt{2}u - w) + \mathbf{C}(h + i\sqrt{2}v) + \mathbf{C}f,$$

alors $\mathfrak{p} = \mathfrak{s}' + \mathbf{C}w$ est une polarisation en φ . Par ailleurs,

$$\mathfrak{p}_1 = \mathbf{C}h + \mathbf{C}f + \mathbf{C}v + \mathbf{C}w$$

est une polarisation résoluble en φ . Posons $\rho = \text{ind}^{\sim}(\varphi|_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{g})$, $\rho_1 = \text{ind}^{\sim}(\varphi|_{\mathfrak{p}_1}, \mathfrak{g})$, représentations qui opèrent dans $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \mathbf{C}$, $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_1)} \mathbf{C}$. Soit

$$z = 4efw + h^2w + 2ev^2 - 2fu^2 + 2huv - 3hw \in U(\mathfrak{g}).$$

On vérifie facilement que z est central dans $U(\mathfrak{g})$, et que

$$\rho(z)(1 \otimes 1) = 0, \quad \rho_1(z)(1 \otimes 1) = -(1/4)(1 \otimes 1).$$

Comme $1 \otimes 1$ est générateur pour ρ et ρ_1 , on en déduit que $\rho(z) = 0$, $\rho_1(z) = -1/4$, d'où $\text{Ker } \rho \neq \text{Ker } \rho_1$. Ainsi,, dans le théorème de Duflo sur l'indépendance vis-à-vis de la polarisation ([4], 10.3.3 (ii)), l'hypothèse qu'on utilise des polarisations résolubles est essentielle.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ANDREEV (E. M.), VINBERG (E. B.) and ELASHVILI (A. G.). — Orbits of greatest dimension in semi-simple linear Lie groups, *Funct. Anal. and its Appl.*, t. 1, 1967, p. 257-261.
- [2] BOURBAKI (N.). — *Algèbres de Lie*, 2^e éd. — Paris, Hermann, 1971 (*Act. scient. et Ind.*, 1285).
- [3] DIXMIER (J.). — Polarisation dans les algèbres de Lie, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 4, 1971, p. 321-335.
- [4] DIXMIER (J.). — *Algèbres enveloppantes*. — Paris, Gauthier-Villars, 1974. (*Cahiers scientifiques*, 37).
- [5] ELASHVILI (A. G.). — Canonical forms and stationary subalgebras of points of general position for simple linear Lie groups, *Funct. Anal. and its Appl.*, t. 6, 1972, p. 44-53.
- [6] ELASHVILI (A. G.). — Stationary subalgebras of points of the common state for irreducible linear Lie groups, *Funct. Anal. and its Appl.*, t. 6, 1972, p. 139-148.
- [7] OZEKI (H.) and WAKIMOTO (M.). — On polarizations of certain homogeneous spaces, *Hiroshima math. J.*, t. 2, 1972, p. 445-482.
- [8] VUST (T.). — Sur le type principal d'orbites d'un module rationnel, *Comment. Math. Helv.*, t. 49, 1974, p. 408-416.

(Texte reçu le 13 octobre 1975.)

Jacques DIXMIER,
64, rue Gay-Lussac,
75005 Paris.