BULLETIN DE LA S. M. F.

DANIEL BERTRAND

Séries d'Eisenstein et transcendance

Bulletin de la S. M. F., tome 104 (1976), p. 309-321
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1976__104__309_0>

Bull. Soc. math. France,
104, 1976, p. 309-321.

SÉRIES D'EISENSTEIN ET TRANSCENDANCE

PAR

DANIEL BERTRAND

[École Polytechnique]

RÉSUMÉ. — Les séries d'Einsenstein normalisées de poids 4 et 6 ne peuvent prendre simultanément des valeurs algébriques en dehors de l'origine. On démontre ce résultat d'abord dans le domaine complexe, puis dans le cas ultramétrique.

Nous nous proposons d'étudier certaines propriétés arithmétiques des valeurs des séries d'Eisenstein normalisées de poids 4 et 6, définies respectivement pour $k = 2$ et 3, par

$$E_{2k}(q) = 1+(-1)^k(4\,k/B_k)\sum_{n=1}^{+\infty}\sigma_{2k-1}(n)\,q^n,$$

où B_k désigne le k-ième nombre de Bernoulli, et $\sigma_{2k-1}(n)$ la somme des puissances $(2\,k-1)$-ièmes des diviseurs de l'entier n.

Pour cette étude, nous utiliserons le rôle que jouent les séries d'Eisenstein dans la théorie des courbes elliptiques, tant dans le domaine complexe que dans un domaine ultramétrique.

Nous montrons d'abord que lorsque q désigne un nombre complexe non nul de leur domaine de convergence, les séries E_4 et E_6 ne peuvent prendre simultanément des valeurs algébriques au point q. On déduit aisément ce résultat des travaux de SCHNEIDER concernant les invariants de certaines fonctions elliptiques de Weierstrass. L'outil essentiel de la méthode qu'il expose dans [5], chapitre II, est un critère de transcendance, dont LANG a donné un nouvel énoncé (*voir* [2], p. 645) et selon lequel deux fonctions méromorphes sur **C** d'ordre fini, algébriquement indépendantes, et vérifiant certaines équations différentielles algébriques, ne peuvent prendre simultanément des valeurs dans un corps de nombres donné qu'en un nombre fini de points.

Cette démarche présente l'inconvénient de ne pouvoir être suivie dans un domaine ultramétrique Ω, et nous montrons ici comment le point de vue de Jacobi-Tate permet de résoudre cette difficulté. On obtient ainsi le résultat suivant (théorème 2) : si q désigne un élément non nul de leur domaine de convergence dans Ω, les séries E_4 et E_6 ne peuvent prendre simultanément des valeurs algébriques au point q.

Le principe de la démonstration de ce théorème est calqué sur la méthode de Schneider mentionnée plus haut : aux fonctions elliptiques de Weierstrass correspondent les fonctions elliptiques de Jacobi-Tate, qui vérifient des équations différentielles algébriques à coefficients dans le corps $\mathbf{Q}(E_4(q), E_6(q))$. Mais ces fonctions ne sont méromorphes que dans le complémentaire de l'origine de Ω, et c'est à un nouveau critère de transcendance (théorème 1) généralisant le théorème de Schneider-Lang qu'il faut faire appel. On démontre à cet effet un « lemme de Schwarz » pour les fonctions holomorphes sur un disque épointé.

Signalons pour conclure que cette dernière démarche a l'avantage d'être « universelle », en ce sens qu'*on peut aussi la suivre pour traiter le cas complexe* (pour un exposé détaillé, *voir* [1], § 6).

La première partie de cet article résout le cas complexe par la méthode de Schneider. Dans la seconde, on étudie les fonctions elliptiques de Jacobi-Tate et leur lien avec le problème proposé. La troisième partie est consacrée à la démonstration du nouveau critère de transcendance.

1. Le cas complexe

1.1. Séries d'Eisenstein et formes modulaires

Soient Λ un réseau du plan complexe, $\{\omega_1, \omega_2\}$ une base de Λ telle que le nombre $\tau = \omega_1/\omega_2$ ait une partie imaginaire strictement positive. Pour $k = 2, 3$, on pose

$$G_k(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \omega^{-2k}.$$

La série $G_k(\tau) = \omega_2^{2k} G_k(\omega_1, \omega_2)$ définit une forme modulaire pour le groupe modulaire $SL_2(\mathbf{Z})$, de poids $2k$, dont le développement de Fourier à l'infini en la variable $q = \exp(2i\pi\tau)$ s'écrit :

$$G_k(\tau) = 2\zeta(2k) E_{2k}(q),$$

ζ désignant la fonction de Riemann, et E_{2k} la série d'Eisenstein normalisée de poids $2k$.

Il est bien connu qu'à des facteurs rationnels près, les nombres $G_2(\omega_1, \omega_2)$ et $G_3(\omega_1, \omega_2)$ apparaissent comme coefficients de l'équation différentielle satisfaite par la fonction elliptique de Weierstrass $\wp$ de périodes ω_1, ω_2.

Or, selon un résultat de SCHNEIDER ([5], théorème 18) dont nous esquissons la démonstration ci-dessous (§ 1.3) toute période non nulle d'une fonction elliptique de Weierstrass d'invariants algébriques est linéairement indépendante de π sur le corps $\overline{\mathbf{Q}}$ des nombres algébriques. En conséquence, pour tout ω_1 de partie réelle strictement négative, l'un au moins des nombres $G_2(\omega_1, 2i\pi)$, $G_3(\omega_1, 2i\pi)$ est transcendant. Mais

$$G_k(\omega_1, 2i\pi) = (2i\pi)^{-2k}.2\zeta(2k)E_{2k}(q) = (-1)^k(B_k/(2k)!)E_{2k}(q).$$

Les nombres de Bernoulli étant rationnels, on a ainsi démontré le résultat suivant :

Pour tout nombre complexe q non nul, de module strictement inférieur à 1, *'un au moins des nombres $E_4(q)$, $E_6(q)$ est transcendant sur* $\overline{\mathbf{Q}}$.

1.2. Application à la fonction modulaire

Soient $j(\tau)$ l'invariant modulaire de la courbe elliptique $\mathbf{C}/\Lambda$, et $J(q)$ son développement de Fourier en la variable q. On a

$$J = 1728\,E_4^3.(E_4^3 - E_6^2)^{-1}.$$

La dérivée de J pour l'opérateur de dérivation $D = q(d/dq) = (2i\pi)^{-1}(d/d\tau)$ vérifie la formule (*cf.* [3], p. 119) :

$$DJ/J = -E_6/E_4.$$

On déduit donc du résultat précédent que si q n'est pas zéro de l'une des séries E_4, E_6 (c'est-à-dire si $J(q) \neq 0$, 1728), l'un au moins des nombres $J(q)$, $DJ(q)$ est transcendant. En particulier, *si τ est un nombre imaginaire quadratique non congru à* $\exp(i\pi/2)$ *ou* $\exp(2i\pi/3)$ modulo *le groupe modulaire,* $J(q)$ est un entier algébrique, et *le nombre $DJ(q) = (2i\pi)^{-1}(d/d\tau)j(\tau)$ est transcendant.* Dans le même ordre d'idée, signalons que, d'après SIEGEL ([6], § 5), le nombre $2i\pi(d/d\tau)j(\tau)$ est, sous les mêmes hypothèses, transcendant, et qu'on peut déduire la transcendance du nombre $(d/d\tau)j(\tau)$ lui-même (*voir* à ce sujet [2], p. 652) des résultats du chapitre III de [3].

1.3. La méthode de Schneider

Elle consiste à ramener l'étude arithmétique des périodes ou des invariants d'une fonction elliptique de Weierstrass à celle des valeurs de certaines fonctions méromorphes. On utilise dans ce contexte le critère de transcendance suivant :

THÉORÈME DE SCHNEIDER-LANG. — *Soient K un corps de nombres, ρ un nombre réel strictement positif, et $f_1, \ldots, f_l$ des fonctions méromorphes sur* $\mathbf{C}$, *d'ordre inférieur ou égal à ρ. On suppose que l'algèbre $K[f_1, \ldots, f_l]$ est stable par l'opérateur de dérivation d/dz, et que son degré de transcendance sur K est strictement supérieur à 1. Alors les fonctions $f_1, \ldots, f_l$ ne peuvent prendre simultanément des valeurs dans K qu'en un nombre fini ν de points, et ν est majoré par $2\rho[K:\mathbf{Q}]$.*

Une démonstration de ce critère est donnée dans [7], chapitre III.

COROLLAIRE (SCHNEIDER [5], théorème 18). — *Toute période non nulle ω d'une fonction elliptique de Weierstrass $\wp$ d'invariants g_2 et g_3 algébriques est linéairement indépendante du nombre π sur $\overline{\mathbf{Q}}$.*

Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi, et soit k le corps de nombres engendré par g_2 g_3, et $i\pi/\omega$. Si h désigne le plus petit entier tel que $\omega/2^h$ ne soit pas période de $\wp$, le point $\omega/2^h$ est un point de torsion d'ordre 2 de la courbe elliptique $\mathbf{C}/\Lambda$ (avec $(d/dz)\wp(\omega/2^h) = 0$), et le corps K engendré sur k par $\wp(\omega/2^h)$ est une extension algébrique de k. Les fonctions

$$f_1(z) = \exp(2^h i(\pi/\omega) z), \qquad f_2(z) = \wp(z) \qquad \text{et} \qquad f_3(z) = (d/dz)\wp(z)$$

vérifient les hypothèses du théorème de Schneider-Lang avec $\rho = 2$. Or, elles prennent leurs valeurs dans K en tous les multiples impairs du nombre $\omega/2^h$, ce qui fournit une contradiction.

2. Le cas ultramétrique

Soit Ω un corps ultramétrique complet, algébriquement clos, de caractéristique nulle, et de caractéristique résiduelle non nulle. Nous notons Ω^* le groupe multiplicatif des éléments non nuls de Ω.

2.1. Points de vue de Weierstrass et de Jacobi-Tate

Soient q un nombre complexe non nul de module strictement inférieur à 1, et $\mathscr{E}_{\mathbf{C}}$ la cubique de $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$, définie par l'équation

$$Y^2 T - 4X^3 + (1/12) E_4(q) X T^2 - (1/216) E_6(q) T^3 = 0.$$

La théorie de Weierstrass associe à cette équation un réseau Λ du plan complexe, et deux fonctions méromorphes $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}' = (d/dz)\,\mathfrak{P}$, telles que l'application

$$z \to (\mathfrak{P}(z),\ \mathfrak{P}'(z))$$

définisse un isomorphisme de groupe de Lie entre le groupe quotient $\mathbf{C}/\Lambda$ et la courbe elliptique $\mathscr{E}_{\mathbf{C}}$. L'application $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}')$ est l'application exponentielle sur $\mathscr{E}_{\mathbf{C}}$. Elle est définie sur $\mathbf{C}$ tout entier, et c'est à elle que nous avons eu recours au premier paragraphe.

Soit maintenant q un élément non nul de Ω, de valeur absolue strictement inférieure à 1. Les coefficients des développements des séries E_4 et E_6, étant des entiers rationnels, ces séries convergent au point q. Si l'on cherche à reprendre la description précédente quand le corps des nombres complexes est remplacé par le corps Ω on peut encore, selon E. LUTZ, définir localement une application exponentielle sur un voisinage de l'origine de $\mathscr{E}_{\Omega}$, grâce au développement de Taylor de $\mathfrak{P}(z)-1/z^2$ (son rayon de convergence sur Ω est en effet positif).Mais cette application n'est pas prolongeable à Ω. D'autre part, elle ne permet pas de paramétrer les points de torsion de $\mathscr{E}_{\Omega}$. La méthode que nous avons utilisée au premier paragraphe ne peut donc être appliquée au cas ultramétrique. Nous exposons ici brièvement le point de vue de Jacobi-Tate qui permet de résoudre cette difficulté.

Soit $\mathscr{M}_q$ le corps des fonctions méromorphes sur Ω^*, admettant q pour période (multiplicative). Il résulte du théorème de Riemann-Roch que $\mathscr{M}_q$ est de genre 1. La caractéristique de Ω étant nulle, on peut choisir pour générateurs de $\mathscr{M}_q$ (*voir* [4], VI, formules 40 et 41) la fonction elliptique de Jacobi-Tate :

$$P_q(z) = \sum\nolimits_{n\in\mathbf{Z}} \frac{q^n z}{(1-q^n z)^2} + \frac{1}{12} - 2\sum\nolimits_{n\geqslant 1} \frac{q^n}{(1-q^n)^2},$$

et sa dérivée pour l'opérateur de dérivation sur $\mathscr{M}_q : D = z\,(d/dz)$:

$$DP_q(z) = \sum\nolimits_{n\in\mathbf{Z}} \frac{q^n z + q^{2n} z^2}{(1-q^n z)^3}.$$

Ces fonctions sont liées par la relation

$$(DP_q)^2 = 4\,P_q^3 - (1/12)\,E_4(q)\,P_q + (1/216\ \ E_6(q).$$

Autrement dit, l'application

$$z \to (P_q(z),\ DP_q(z))$$

définit un isomorphisme de groupe de Lie entre le groupe quotient $\Omega^*/q^{\mathbf{Z}}$ (où $q^{\mathbf{Z}}$ désigne le sous-groupe de Ω^* engendré par q) et $\mathscr{E}_\Omega$.

Ainsi posé le problème de l'algébricité des nombres $E_4(q)$, $E_6(q)$ peut être ramené à l'étude des valeurs de la fonction elliptique de Jacobi-Tate par la méthode de Schneider. Mais la fonction P_q n'est méromorphe que dans le complémentaire de l'origine de Ω, et le théorème de Schneider-Lang doit être généralisé à cette nouvelle situation.

2.2. Les résultats principaux

L'étude analytique des fonctions méromorphes sur Ω^* nécessite l'introduction des définitions suivantes, où $|.|$ désigne la valeur absolue de Ω.

Définitions. — Soit ρ un nombre réel strictement positif. Une fonction f analytique sur Ω^* est dite d'ordre inférieur ou égal à ρ s'il existe deux constantes A et B telles que, pour z élément de Ω^*,

$$\begin{aligned} &\text{si} \quad |z| > B, \qquad |f(z)| < \exp(A|z|^{\rho}),\\ &\text{si} \quad |z| < B^{-1}, \qquad |f(z)| < \exp(A|z|^{-\rho}). \end{aligned}$$

Une fonction méromorphe sur Ω^* est dite d'ordre inférieur ou égal à ρ si elle peut s'écrire comme quotient de deux fonctions analytiques sur Ω^* d'ordre inférieur ou égal à ρ.

Exemple. — Nous démontrons ci-dessous (§ 2.3, lemme 1) que la fonction elliptique de Jacobi-Tate P_q, et donc sa dérivée DP_q, sont, pour tout nombre réel strictement positif ε, d'ordre inférieur ou égal à ε.

Le critère de transcendance que nous avons en vue peut alors s'énoncer comme suit :

THÉORÈME 1. — *Soient K un corps de nombres (plongé dans Ω), ρ un nombre réel strictement positif, et $f_1, \ldots, f_l$ des fonctions méromorphes sur Ω^*, d'ordre inférieur ou égal à ρ. On suppose que l'algèbre $K[f_1, \ldots, f_l]$ est stable par l'opérateur de dérivation $D = z(d/dz)$, et que son degré de transcendance sur K est strictement supérieur à 1. Alors les fonctions $f_1, \ldots, f_l$ ne peuvent prendre simultanément des valeurs dans K qu'en un nombre fini ν de points de Ω^*, et ν est majoré par $4\rho[K:\mathbf{Q}]$.*

Nous démontrons ce critère au paragraphe 3. Il admet pour corollaire le résultat suivant :

THÉORÈME 2. — *Pour tout élément q non nul de Ω de valeur absolue strictement inférieure à 1, l'un au moins des nombres $E_4(q)$, $E_6(q)$ est transcendant sur $\mathbf{Q}$.*

Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi, et soit k le corps de nombres engendré par $E_4(q)$, $E_6(q)$. Le point -1 est un point d'ordre 2 de la courbe elliptique $\Omega^*/q^{\mathbf{Z}}$ (avec $DP_q(-1) = 0$), et le corps K engendré sur k par $P_q(-1)$ est une extension algébrique de k.

Soit alors ε un nombre réel tel que $0 < \varepsilon < (4\,[K : \mathbf{Q}])^{-1}$. Les fonctions

$$f_1(z) = z, \qquad f_2(z) = P_q(z) \qquad \text{et} \qquad f_3(z) = DP_q(z)$$

vérifient les hypothèses du théorème 1, avec $\rho = \varepsilon$ (la stabilité de D est assurée par le fait que $Df_1 = f_1$, $Df_2 = f_3$ et $Df_3 = 6f_2^2 - E_4(q)/24$). Or elles prennent leurs valeurs dans K en au moins un point : $z = -1$. On en déduit :

$$1 \leqslant \nu \leqslant 4\varepsilon[K : \mathbf{Q}] < 1,$$

ce qui fournit la contradiction recherchée.

2.3. **Ordre des fonctions elliptiques de Jacobi-Tate**

LEMME 1. — *Pour tout nombre réel strictement positif* ε, *les fonctions elliptiques de Jacobi-Tate sont d'ordre inférieur ou égal à* ε.

Démonstration. — Considérons la fonction Θ_q analytique sur Ω^*, définie par

$$\Theta_q(z) = (1 - z^{-1}) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^n z^{-1})(1 - q^n z)}{(1 - q^n)^2}$$

(c'est, à un facteur constant près, la fonction θ_4 de Jacobi, qui correspond à la fonction σ de Weierstrass).

Soit α un élément de Ω vérifiant : $\alpha \neq q$, $|q| \leqslant |\alpha| < 1$. La fonction $P_q(z) - P_q(\alpha)$ admet $1(\alpha) + 1(q\alpha^{-1}) - 2(1)$ pour diviseur sur $\Omega^*/q^{\mathbf{Z}}$. Il en est de même de la fonction q-multiplicativement périodique $\Theta_q(z\alpha^{-1})\,\Theta_q(z\alpha)\,[\Theta_q(z)]^{-2}$. En vertu du théorème d'Abel-Jacobi ([4], proposition 1), elles sont donc proportionnelles. On calcule le facteur de proportionnalité en les multipliant par $(1 - z^{-1})^2$, puis en faisant tendre z vers 1. On obtient ainsi :

$$P_q(z) - P_q(\alpha) = \frac{1}{\Theta_q(\alpha)\,\Theta_q(\alpha^{-1})} \; \frac{\Theta_q(\alpha z)\,\Theta_q(\alpha^{-1} z)}{[\Theta_q(z)]^2}$$

Il reste à montrer que la fonction Θ_q est d'ordre inférieur ou égal à tout nombre réel ε strictement positif. Or, si λ désigne un nombre rationnel strictement positif, on a, pour $|z| = |q|^{-\lambda}$:

$$|\Theta_q(z)| = \prod_{n=1}^{[\lambda]} |q|^{n-\lambda} \leqslant |q|^{-\lambda^2} \leqslant \exp \frac{(\log |z|)^2}{\log |1/q|}.$$

On démontre aisément le même type d'inégalité pour $|z| < 1$, ce qui termine la démonstration du lemme 1.

3. Démonstration du théorème 1

3.1. Principe de la démonstration

Nous allons montrer que si $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ désignent m éléments de Ω^*, où les fonctions $f_1, \ldots, f_l$ considérées dans l'énoncé du théorème 1 (§ 2.2) prennent simultanément des valeurs dans K, alors m est inférieur ou égal à $4\rho[K:\mathbf{Q}]$.

Soit S un entier arbitrairement grand. Les notations o et $\mathcal{O}$ se rapportent à la variable S tendant vers $+\infty$.

Premier pas : Le degré de transcendance de l'algèbre $K[f_1, \ldots, f_l]$ sur K étant strictement supérieur à 1, on peut supposer que les fonctions f_1 et f_2 sont algébriquement indépendantes sur $\mathbf{Q}$. Soit alors $L = [S^{1/2}(\log S)^{1/2}]$. Le lemme de Siegel permet de construire un polynôme non nul

$$P_S(X_1, X_2) = \sum_{\lambda_1=0, \ldots, L;\ \lambda_2=0, \ldots, L} p_{\lambda_1, \lambda_2} X_1^{\lambda_1} X_2^{\lambda_2},$$

dont les coefficients p_{λ_1, λ_2} sont des entiers rationnels de valeur absolue archimédienne majorée par $\exp(\mathcal{O}(S))$ et tel que la fonction $F = P_S(f_1, f_2)$, méromorphe sur Ω^*, admette les points $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ pour zéros d'ordre au moins égal à S.

La démonstration de cette construction est classique lorsque c'est la dérivation d/dz qui opère sur $K[f_1, \ldots, f_l]$. Elle est encore valable avec la nouvelle hypothèse de dérivation (*voir* [7], p. 94).

Deuxième pas : Les fonctions f_1 et f_2 étant algébriquement indépendantes, la fonction F n'est pas identiquement nulle, et on peut définir le plus petit entier σ (nécessairement supérieur ou égal à S) tel que l'un au moins des points $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$, soit ζ_p, soit zéro d'ordre σ de F.

D'après les hypothèses analytiques du théorème 1, il existe, pour $i = 1, 2$, une fonction θ_i analytique sur Ω^*, d'ordre inférieur ou égal à ρ non nulle en ζ_p, et telle que la fonction $\theta_i f_i$ soit analytique sur Ω^* d'ordre inférieur ou égal à ρ. La fonction

$$G = (\theta_1 \theta_2)^L F$$

est alors analytique sur Ω^*, et admet les points $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ pour zéros d'ordre supérieur ou égal à σ. Posons alors :

$$\gamma = \frac{1}{\sigma!} D^\sigma(G)(\zeta_p) = \frac{1}{\sigma!} \theta_1^L(\zeta_p) \theta_2^L(\zeta_p) D^\sigma F(\zeta_p) \neq 0.$$

Troisième pas (minoration de $|\gamma|$) : Ce pas est de nature arithmétique. L'hypothèse de dérivation entraîne que le nombre $D^\sigma F(\zeta_p)$ est algébrique sur $\mathbf{Q}$. Comme il est non nul par construction, on sait minorer sa valeur absolue. De façon précise, on a (*voir* [7], chapitre III) :

– $\log |D^\sigma F(\zeta_p)| \leqslant ([K : \mathbf{Q}] + o(1)) \sigma \log \sigma$;

– $\log |\gamma| \leqslant ([K : \mathbf{Q}] + o(1)) \sigma \log \sigma$.

Quatrième pas (majoration de $|\gamma|$) : Ce dernier pas est de nature analytique, et nous en détaillons la démonstration au paragraphe suivant. Il fournit, grâce à une extension du lemme de Schwarz (*voir* lemme 2 ci-dessous), une majoration de $|\gamma|$ en fonction du nombre de zéros de la fonction G :

$$\log |\gamma| \leqslant -\frac{m}{4\rho} \sigma \log \sigma + o(\sigma \log \sigma).$$

L'inégalité du troisième pas conduit alors à la relation

$$m\sigma \leqslant 4\rho([K : \mathbf{Q}] + o(1))\sigma,$$

d'où l'on tire, en faisant croître S indéfiniment,

$$m \leqslant 4\rho[K : \mathbf{Q}].$$

3.2. Extension du lemme de Schwarz et fin de la démonstration

La plupart des démonstrations de transcendance font appel à un « lemme de Schwarz » qui permet d'améliorer l'inégalité donnée par le principe du maximum pour une fonction analytique sur un disque, dont on connaît de nombreux zéros. Nous avons ici besoin d'un résultat analogue pour des fonctions analytiques sur un disque épointé.

Notations. — Nous désignons par $|\Omega|$ le groupe des valeurs de Ω. Il est dense dans $\mathbf{R}^+$ d'après les hypothèses faites sur Ω :

— pour tout nombre réel x strictement supérieur à 1, nous notons C_x la couronne $\{ z \in \Omega, x^{-1} \leqslant |z| \leqslant x \}$;

— si f est une fonction analytique sur C_x, et si μ désigne un élément de $|\Omega|$ tel que $x^{-1} \leqslant \mu \leqslant x$, nous notons $|f|_\mu$ le maximum de $|f(z)|$ lorsque z parcourt le cercle $\{ z \in \Omega, |z| = \mu \}$.

LEMME 2. — *Soient R et r deux éléments de $|\Omega|$ tels que $R > r > 1$, h un entier positif ou nul, f une fonction analytique sur C_R admettant h zéros (comptés avec leurs ordres de multiplicité) dans C_r. Alors, on a, en posant* $\alpha = \log r/\log R$:

(*a*)
$$|f|_r^2 \leqslant |f|_R^{1+\alpha} |f|_{R^{-1}}^{1-\alpha} (r/R)^{(1-\alpha)h},$$
$$|f|_{r^{-1}}^2 \leqslant |f|_R^{1-\alpha} |f|_{R^{-1}}^{1+\alpha} (r/R)^{(1-\alpha)h};$$

(*b*) *pour tout élément ζ de C_r,*
$$|f(\zeta)| \leqslant \sup(|f|_r, |f|_{r^{-1}}),$$
$$|f(\zeta)| \leqslant (r/R)^{(1-\alpha)h/2} \sup(|f|_R, |f|_{R^{-1}}).$$

Démonstration :

(*a*) Pour tout élément μ de $|\Omega|$, tel que $R^{-1} \leqslant \mu \leqslant R$, l'application $f \to |f|_\mu$ définit une norme sur l'algèbre des fonctions analytiques sur C_R, et l'inégalité ultramétrique entraîne que cette norme est *multiplicative*. Ceci permet, pour démontrer la première inégalité de (*a*), de supposer que f est, ou bien $z - z_0$ où z_0 désigne un élément de C_r, ou bien une fonction sans zéros dans C_r. Dans le premier cas, on a

$$h = 1, \qquad |f|_r = r, \qquad |f|_{R^{-1}} \geqslant r^{-1}, \qquad |f|_R = R,$$

et l'inégalité recherchée se déduit de la définition de α. Dans le second cas, il s'agit de prouver

$$|f|_r \leqslant |f|_R^{(1+\alpha)/2} |f|_{R^{-1}}^{(1-\alpha)/2}.$$

ce qui résulte du fait que, d'après la théorie du polygone de Newton, la fonction $\log |f|_x$ est une fonction convexe de $\log x$, pour $\{ x \in |\Omega|; R^{-1} \leqslant x \leqslant R \}$.

La deuxième inégalité se déduit de la première par le changement de variable $z \to z^{-1}$.

(*b*) La première inégalité de (*b*) est une conséquence immédiate du principe du maximum. Posons alors

$$M = \sup(|f|_R, |f|_{R^{-1}}).$$

Il découle de (*a*) que $|f|_r$ et $|f|_{r^{-1}}$ sont tous deux majorés par $M(r/R)^{(1-\alpha)h/2}$, et on obtient la dernière inégalité du lemme 2 en regroupant les résultats précédents.

Remarque. — Les propriétés ultramétriques ont été utilisées de façon essentielle. On peut néanmoins démontrer un résultat analogue dans le cas complexe (*voir* [1], proposition 2), mais les estimations sont moins fines. La démonstration de [1] s'adapte au cas ultramétrique. Je dois au « referee » l'amélioration donnée ci-dessus. On notera que l'exposant $(1-\alpha)h/2$ qui apparaît dans la dernière inégalité est le meilleur possible, comme le montre l'exemple de la fonction $f(z) = z^2 + Rz^{-1}$, avec $R = r^3 > 1$, $|\zeta| = r^{-1}$.

Nous sommes maintenant en mesure de terminer la démonstration du théorème 1. Nous reprenons les notations introduites dans les deux premiers pas de l'alinéa 2.2, et nous posons

$$r = \sup(\sup_{i=1,\ldots,m}(|\zeta_i|+1), \sup_{i=1,\ldots,m}(|\zeta_i|^{-1}+1)).$$

La fonction G admet par construction au moins $m\sigma$ zéros dans la couronne C_r. Par ailleurs, l'inégalité de Cauchy appliquée à la fonction G sur le disque de centre ζ_p de et rayon r^{-2}, jointe à la troisième inégalité du lemme 2, entraîne

$$|(1/\sigma!)(d^\sigma/dz^\sigma)G(\zeta_p)| \leqslant r^{2\sigma}\sup(|G|_r, |G|_{r^{-1}}).$$

Mais, en vertu de la minimalité de σ, on a $D^\sigma G(\zeta_p) = \zeta_p^\sigma (d^\sigma/dz^\sigma) G(\zeta_p)$. En conséquence

$$|\gamma| \leqslant r^{3\sigma}\sup(|G|_r, |G|_{r^{-1}}).$$

Soit alors R un élément de $|\Omega|$ strictement supérieur à r. On déduit de la dernière inégalité du lemme 2 :

$$|\gamma| \leqslant r^{3\sigma}(r/R)^{(1-\alpha)m\sigma/2}\sup(|G|_R, |G|_{R^{-1}}),$$

soit

$$\log|\gamma| \leqslant -(1-\alpha)^2(m/2)\sigma\log R + \sup(\log|G|_R, \log|G|_{R^{-1}}) + 3\sigma\log r.$$

Choisissons $R = [\sigma^{1/(2\rho)}]$, de sorte que R tende vers $+\infty$ avec σ, donc avec S, et majorons le terme de droite de cette inégalité.

Les fonctions $\theta_1 f_1$, $\theta_2 f_2$, θ_1 et θ_2 étant d'ordre inférieur ou égal à ρ, on tire de $L = [S^{1/2} (\log S)^{1/2}]$ et $R = [\sigma^{1/(2\rho)}]$ l'estimation

$$\sup(\log | G |_R, \log | G |_{R-1}) \leqslant \mathcal{O}(\sigma(\log\sigma)^{1/2}).$$

D'autre part, $\alpha \leqslant o(1)$, $\log r \leqslant \mathcal{O}(1)$, et l'on obtient en définitive l'inégalité :

$$\log|\gamma| \leqslant -\frac{m}{4\rho}\sigma\log\sigma+o(\sigma\log\sigma),$$

qui permet de conclure la démonstration du théorème 1.

3.3. **Quelques remarques sur l'énoncé du théorème 1**

Nous terminons en indiquant comment on peut généraliser ou étendre le théorème 1 à quelques situations similaires.

REMARQUE 1. — *Étude des points algébriques des fonctions* $f_1, \ldots, f_l$. — Pour tout entier d, désignons par ν_d le nombre de points ζ tels que le corps $K(f_1(\zeta), \ldots, f_l(\zeta))$ soit une extension algébrique de K, de degré d (de sorte que $\nu_1 = \nu$). Alors, la conclusion du théorème peut être améliorée sous la forme

$$\textstyle\sum_{d\in\mathbf{N}} \nu_d/d \leqslant 4\rho[K:\mathbf{Q}].$$

REMARQUE 2. — *Hypothèse de dérivation.* — On peut remplacer l'opérateur $z(d/dz)$ par d'autres dérivations sur l'algèbre $K[f_1, \ldots, f_l]$. En particulier, l'opérateur d/dz convient.

REMARQUE 3. — *Le cas complexe.* — Le théorème 1 est encore valable lorsqu'on remplace le corps ultramétrique Ω par le corps des nombres complexes, et on peut alors le généraliser à l'étude des fonctions méromorphes sur le complémentaire dans la sphère de Riemann d'un ensemble fini de points $\{a_i\}_{i=0,1,\ldots,g}$: si, pour $i = 0, 1, \ldots, g$, on désigne par $\mu^{(i)}$ un majorant des ordres de croissance analytique des fonctions $f_1, \ldots, f_l$ au voisinage des points a_i, la conclusion du théorème s'écrit :

$$\textstyle\sum_{d\in\mathbf{N}} \nu_d/d \leqslant 2(\mu^{(0)}+\mu^{(1)}+\ldots+\mu^{(g)})[K:\mathbf{Q}],$$

d'où l'on tire l'inégalité $\nu \leqslant 4\rho[K:\mathbf{Q}]$ dans le cas où $g = 1$, $\mu^{(0)} = \mu^{(1)} = \rho$.

Cette assertion résulte d'une nouvelle extension du lemme de Schwarz aux domaines bornés par deux lemniscates emboîtées. On en trouvera la démonstration dans [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERTRAND (D.). — Un théorème de Schneider-Lang sur certains domaines non simplement connexes, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres*, 16ᵉ année, 1974/75, G-18, 13 p.

[2] LANG (S.). — Transcendental numbers and diophantine approximations, *Bull. Amer. math. Soc*, t. 77, 1971, p. 635-677.

[3] MASSER (D.). — *Elliptic functions and transcendence.* — Berlin Springer-Verlag, 1975 (*Lecture Notes in Mathematics*, 437).

[4] ROQUETTE (P.). — *Analytic theory of elliptic functions over local fields.* — Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1970 (*Hamburger mathematische Einzelschriften*, 1).

[5] SCHNEIDER (T.). — *Einführung in die transzendenten Zahlen.* — Berlin Springer-Verlag, 1957 (*Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 81).

[6] SIEGEL (C. L.). — Bestimmung der elliptischen Modulfunktion durch eine Transformationsgleichung, *Abh. math. Sem. Univ. Hamburg*, t. 27, 1964, p. 32-38

[7] WALDSCHMIDT (M.). — *Nombres transcendants.* — Berlin, Springer-Verlag, 1974 (*Lecture Notes in Mathematics*, 402).

(Texte reçu le 17 novembre 1975.)

Daniel BERTRAND
Centre de Mathématiques,
École Polytechnique,
Plateau de Palaiseau,
91120 Palaiseau.