BULLETIN DE LA S. M. F.

DANIEL PERRIN

Groupes henséliens

Bulletin de la S. M. F., tome 104 (1976), p. 369-381
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1976__104__369_0>

Bull. Soc. math. France,
104, 1976, p. 369-381.

GROUPES HENSÉLIENS

par

DANIEL PERRIN

[Orsay]

RÉSUMÉ. — Un groupe hensélien est l'analogue d'un groupe formel, les anneaux henséliens remplaçant les anneaux complets.

On étudie cette notion, et on prouve en particulier qu'à la différence des groupes formels, les groupes henséliens s'obtiennent essentiellement tous par hensélisation à l'origine des groupes algébriques.

Table des matières

Introduction

La notion de groupe hensélien est intermédiaire entre celle de groupe algébrique et celle de groupe formel. Elle diffère de celle de groupe formel en ce que les anneaux henséliens remplacent les anneaux complets.

De façon précise, soit k un corps, H_k la catégorie dont les objets sont les k-algèbres locales henséliennes à extensions résiduelles triviales, avec comme flèches les k-homomorphismes locaux.

Un groupe hensélien est alors un groupe dans la catégorie duale de H_k. Il revient au même de se donner un objet A de H_k et deux flèches $\sigma : A \longrightarrow A$ et $\Delta : A \longrightarrow A \mathbin{\tilde{\otimes}}_k A$ (où $A \mathbin{\tilde{\otimes}}_k A$ est un produit tensoriel hensélisé, *cf.* (1.1.2)) avec des axiomes analogues à ceux des bigèbres de [1.]

On obtient évidemment un exemple de groupe hensélien en hensélisant l'anneau local à l'origine $O_{G,e}$ d'un schéma en groupes G.

A la différence de ce qui se passe pour les groupes formels, la catégorie des groupes algébriques connexes et celle des groupes henséliens sont essentiellement équivalentes (*cf.* (4.1.2)). C'est le résultat essentiel de cet article. Il n'est cité ici que sous des hypothèses de lissité (3.3.4).

Pour un énoncé plus général et des démonstrations complètes, le lecteur se reportera à [6] dont cet article est un résumé.

1. La catégorie H_k

1.1. Définition

Soit k un corps. Un objet de H_k est une *k-algèbre* $\eta_A : k \to A$, *locale, hensélienne, à extension résiduelle triviale*, i. e. si m_A est le radical de A l'homomorphisme $\bar{\eta}_A : k \to A/m_A$ est un isomorphisme. Une flèche de H_k est un homomorphisme *local* de *k-algèbres*.

Nous désignerons par ε_A la flèche canonique $A \to A/m_A \simeq k$.

Remarques 1.1.1. — (a) k est un objet à la fois initial et fini de H_k.

(b) Si $A \in H_k$ et si I est un idéal de A distinct de A, A/I est dans H_k ainsi que la flèche canonique $p : A \to A/I$.

PROPOSITION 1.1.2. — *Il existe une somme amalgamée dans H_k. On note $B \tilde{\otimes}_A C$ la somme de B et C au-dessus de A.*

Démonstrasion. — Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & B \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, "\varepsilon_B"] & \\
C \arrow[r, "i_2"] \arrow[drr, "\varepsilon_C"'] & B \otimes_A C \arrow[dr, "\bar{\mu}_0"] & \\
& & k
\end{tikzcd}$$

où ε_B et ε_C sont les flèches canoniques et où $\bar{\mu}_0$ est défini par $\bar{\mu}_0 (b \otimes c) = \varepsilon_B (b) \varepsilon_C (c)$. Soit $n = \operatorname{Ker} \bar{\mu}_0$, $(B \otimes_A C)_n$ est un anneau local à extension résiduelle triviale, et il est immédiat de vérifier que son hensélisé $(B \otimes_A C)_n^{\sim}$ est l'objet cherché.

Remarques 1.1.3. — (a) On a de même une somme amalgamée n-uple $B_1 \tilde{\otimes}_A \ldots \tilde{\otimes}_A B_n$.

(b) Si $A = k$, on a une somme $B \tilde{\otimes}_k C$.

(c) Lorsque $B = C$, on a un homomorphisme $\mu_0 : B \otimes_A B \to B$ défini par $\mu_0 (b \otimes c) = bc$ qui induit $\bar{\mu}_0 : B \otimes_A B \to k$, $\bar{\mu}_0 = \varepsilon_B . \mu_0$. Si n_B est le noyau de $\bar{\mu}_0$, on notera μ_1 et $\bar{\mu}_1$ les factorisations de μ_0 et $\bar{\mu}_0$ par $(B \otimes_A B)_{n_B}$, μ et $\bar{\mu}$ les factorisations par $B \tilde{\otimes}_A B$.

LEMME 1.1.4. — *Soient A, $B \in H_k$. L'homomorphisme canonique $j : A \otimes_k B \to A \tilde{\otimes}_k B$ est injectif.*

PROPOSITION 1.1.5. — *Soit $f : A \to B$ un épimorphisme de H_k. On suppose A noethérien, alors f est surjectif.*

Démonstration. — Soit $\bar{f} : A/m_A = k \to B/m_A B = \bar{B}$. C'est un épimorphisme de H_k. En vertu de [2] 2.1, on est ramené à prouver que f est un isomorphisme. Mais d'après (1 .1.4), $j : \bar{B} \otimes_k \bar{B} \to \bar{B} \tilde{\otimes}_k \bar{B}$ est injectif. Il en résulte que $\bar{f}$ est un épimorphisme d'anneaux. Mais comme k est un corps, $\bar{f}$ est surjectif.

1.2. **Conditions de finitude**

(1.2.1. — Soit $\varphi \in H_k$, $\varphi : A \to B$.

On dit que φ est henséliennement de présentation finie (*HPF*), ou que B est (*HPF*) sur A si, et seulement si, B est l'hensélisé d'une A-algèbre de présentation finie A' en un idéal premier p (avec nécessairement $k(p) = k$). On a alors $B \simeq A'\tilde{p}$.

PROPOSITION 1.2.2 :

(i) *Si φ est surjectif et si* Ker φ *est un idéal de type fini de A, φ est (HPF).*

(ii) *Soient $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$ avec $\varphi, \psi \in H_k$, φ, ψ (HPF). Alors $\psi \circ \varphi$ est (HPF)*

(iii) *Soit*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow \\ A' & \xrightarrow{\varphi'} & B \tilde{\otimes}_A A' \end{array}$$

un diagramme de H_k.

Si φ est (HPF), φ' est (HPF).

(iv) *Si* $\varphi : A \to B$ et $\psi : A \to C$ *sont (HPF), il en est de même de* $\varphi \tilde{\otimes} \psi : A \to B \tilde{\otimes}_A C$.

THÉORÈME 1.2.3. — *Soit $A \in H_k$ et $I =$* Ker μ, $\mu : A \tilde{\otimes}_k A \to A$ *défini en* (1.1.3 (c)). *Alors A est (HPF) sur k si, et seulement si, I est un idéal de type fini. Le résultat est analogue à* [2] 3.6.

Démonstration. — On a les lemmes suivants :

LEMME 1. — *Soient* $f_1, \ldots, f_n$ *les générateurs de* I. *Il existe* $B \in H_k$, (*HPF*) *sur* k *et* $\varphi : B \to A$, $\varphi \in H_k$, *tels que, si* $\varphi \mathbin{\tilde{\otimes}} \varphi$ *est l'homomorphisme canonique de* $B \mathbin{\tilde{\otimes}}_k B$ *dans* $A \mathbin{\tilde{\otimes}}_k A$, $f_1 \ldots f_n$ *soient dans l'image de* $\varphi \mathbin{\tilde{\otimes}} \varphi$.

LEMME 2. — *Soit* $\varphi : B \to A$, $\varphi \in H_k$. *Le diagramme ci-dessous est commutatif*

$$\begin{tikzcd} B \mathbin{\tilde{\otimes}}_k B \arrow[r, "\varphi \tilde{\otimes} \varphi"] \arrow[d, "\mu_B"] & A \mathbin{\tilde{\otimes}}_k A \arrow[r, "\mathrm{can}"] \arrow[d, "\mu_A"] & A \mathbin{\tilde{\otimes}}_B A \\ B \arrow[r, "\varphi"] & A \arrow[ur, "i_1"'] & \end{tikzcd}$$

LEMME 3. — *Avec les notations du lemme* 1, φ *est un épimorphisme de* H_k.
Le théorème résulte alors de (1.2.2, 1°) et de (1.1.5).

1.3. **Changement du corps de base**

Soit K une extension de k. Nous allons définir un foncteur $A \mapsto A_K$ de H_k dans H_K, commutant aux sommes amalgamées.

Soit $A \in H_k$. Posons $A_1 = A \otimes_k K$. Soit ε' l'homomorphisme de A_1 dans K défini par $\varepsilon'(a \otimes \lambda) = \varepsilon(a)\lambda$, où $\varepsilon : A \to k$ est l'homomorphisme canonique. Soit $n = \operatorname{Ker} \varepsilon'$, $A_2 = (A_1)_n$, et soit $A_K = \tilde{A}_2$.

Alors $A_K \in H_K$, et la correspondance $A \mapsto A_K$ est fonctorielle.

De plus, l'homomorphisme $i : A \to A_K$ est fidèlement plat, et le foncteur $A \mapsto A_K$ commute aux sommes amalgamées.

Notons que si l'extension $k \to K$ est algébrique, $A \otimes_k K$ est local et entier sur A, donc hensélien, et donc $A_K = A \otimes_k K$.

1.4. **Hensélisation**

Le foncteur $F : \mathrm{Sch}^{\bullet}/k \to H_k^0$. — Notons $\mathrm{Sch}^{\bullet}/k$ la catégorie des k-schémas pointés (i. e. munis d'un point rationnel $x : \operatorname{spec} k \to X$) les flèches étant les morphismes de schémas respectant les points; soit d'autre part H_k^0 la catégorie opposée à H_k.

Si $A \in H_k$, on note A^0 l'objet A considéré comme objet de H_k^0.

Soit $(X, x) \in \mathrm{Sch}^{\bullet}/k$, et posons $A = 0_{X,x}$. On a $O_{X,x}/m_{X,x} \simeq k$ et donc l'hensélisé $\tilde{A}$ est dans H_k.

On définit alors F par $F(X, x) = \tilde{A}^0$; F est un foncteur covariant qui commute aux produits fibrés.

2. Groupes henséliens

2.1. Définitions

Soit k un corps, $H = H_k$. Soit H^0 la catégorie opposée. On a, par définition,

$$\mathrm{Hom}_H(A, B) = \mathrm{Hom}_{H^0}(B^0, A^0).$$

DÉFINITION 2.1.1. — On appelle *k-groupe hensélien* un groupe dans la catégorie H^0.

DÉFINITION ÉQUIVALENTE 2.1.1. — Un *groupe hensélien* $A^0 \in H^0$ consiste en les données suivantes :

(i) un objet $A \in H$;

(ii) un morphisme $\Delta_A : A \to A \widetilde{\otimes}_k A$, $\Delta_A \in H$ et un morphisme

$$\sigma_A : A \to A, \sigma_A \in H$$

avec les axiomes suivants, résumés par les diagrammes

(*a*) $$A \xrightarrow{\Delta_A} A \widetilde{\otimes}_k A \underset{A \widetilde{\otimes} \Delta_A}{\overset{\Delta_A \widetilde{\otimes} A}{\rightrightarrows}} A \widetilde{\otimes}_k A \widetilde{\otimes}_k A.$$

On a $(\Delta_A \widetilde{\otimes} A) \circ \Delta_A = (A \widetilde{\otimes} \Delta_A) \circ \Delta_A$.

(*b*) $$A \xrightarrow{\Delta_A} A \widetilde{\otimes}_k A \xrightarrow{\varepsilon_A \widetilde{\otimes} A} k \widetilde{\otimes}_k A \simeq A.$$

On a $(\varepsilon_A \widetilde{\otimes} A) \circ \Delta_A = \mathrm{id}_A$, et de même $(A \widetilde{\otimes} \varepsilon_A) \circ \Delta_A = \mathrm{id}_A$.

(*c*) $$A \xrightarrow{\Delta_A} A \widetilde{\otimes}_k A \xrightarrow{\sigma_A \widetilde{\otimes} A} A \widetilde{\otimes}_k A \xrightarrow{\mu_A} A.$$

On a $\mu_A \circ (\sigma_A \widetilde{\otimes} A) \circ \Delta_A = \eta_A \circ \varepsilon_A$ et $\mu_A \circ (A \widetilde{\otimes} \sigma_A) \circ \Delta_A = \eta_A \circ \varepsilon_A$,

DÉFINITION 2.1.4. — Soient A^0, B^0 deux groupes henséliens, $f : A \to B$. $f \in H$.

On dit que $f^0 : B^0 \to A^0$ est un homomorphisme de groupes henséliens si, pour tout $C \in H$, l'application $\mathrm{Hom}_H(B, C) \to \mathrm{Hom}_H(A, C)$ est un homomorphisme de groupes.

Il revient au même de dire que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_A"'] & B \arrow[d, "\Delta_B"] \\ A \widetilde{\otimes}_k A \arrow[r, "f \widetilde{\otimes} f"] & B \widetilde{\otimes}_k B \end{tikzcd}$$

Nous désignerons par HG_k (ou HG) la catégorie des k-groupes henséliens.

2.2. Changement de corps

Soit K une extension de k. Comme le foncteur $A \mapsto A_K$ de H_K, défini en (1.3) commute aux sommes, son opposé, $A^0 \mapsto A^0_K$, de H_k dans H^0_K, commute aux produits, donc induit un foncteur de HG_k dans HG_K,

2.3. Hensélisation

Le foncteur $F : \mathrm{Sch}^{\cdot}/k \to H^0_K$, défini en (1.4), commute aux produits. donc induit un foncteur noté encore $F : G_{r_k} \to HG_k$, où G_{r_k} est la catégorie des k-schémas en groupes.

Si G est un k-schéma en groupes, et G^0 sa composante neutre, on a $F(G) = F(G^0)$. On se limitera donc, pour étudier F, au cas des groupes connexes. L'étude de F est l'objet du n° 4.

3. Propriétés des groupes henséliens

3.1. Conditions de finitude

THÉORÈME 3.1.1. — *Soit (A, Δ, σ) un k-groupe hensélien. Si A est noethérien, A est (HPF) sur k.*

Démonstration. — En vertu de (1.2.3), il suffit de prouver que $\mathrm{Ker}\,\mu$ est un idéal de type fini. On a un isomorphisme canonique

$$A^0 \times A^0 \xrightarrow{u^0} A^0 \times A^0,$$

$$(x, y) \mapsto (xy, y)$$

de réciproque

$$v^0 : A^0 \times A^0 \to A^0 \times A^0,$$

$$(z, y) \mapsto (zy^{-1}, y)$$

et on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A^0 \times A^0 \arrow[r, "u^0"] \arrow[d, "e \times A^0"'] & A^0 \times A^0 \\ A^0 \arrow[ur, "\delta"'] & \end{tikzcd}$$

où $e \times A^0$ est défini par $x \mapsto (e, x)$, e désignant la section unité, et δ, morphisme diagonal, par $x \mapsto (x, x)$. On en déduit dans H un isomorphisme et le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \tilde{\otimes}_k A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\nu"'] & & A \tilde{\otimes}_k A \arrow[dl, "\mu"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

où ν est obtenu par hensélisation à partir de $\nu_0 : A \otimes_k A \to A$, $\nu_0 = \varepsilon_A \otimes A$, Pour voir que Ker μ est de type fini, il suffit donc de le voir pour Ker ν. mais ceci résulte du fait que A est noethérien.

3.2. Propriétés de platitude

PROPOSITION 3.2.1. — *Soit* (A, Δ, σ) *un k-groupe hensélien. Alors,* $\Delta : A \to A \tilde{\otimes}_k A$ *est fidèlement plat.*

Démonstration. — Dans H^0, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A^0 \times A^0 \arrow[r, "u^0"] \arrow[dr, "\Pi"'] & A^0 \times A^0 \arrow[d, "p_1"] \\ & A^0 \end{tikzcd}$$

avec $u^0(x, y) = (xy, y)$, $\Pi(x, y) = xy$, et u^0 est un isomorphisme

Dans H ceci se traduit par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \tilde{\otimes}_k A & A \tilde{\otimes}_k A \arrow[l, "u"'] \\ & A \arrow[ul, "\Delta"] \arrow[u, "i_1"'] \end{tikzcd}$$

i_1 est la flèche $a \mapsto a \otimes 1$.

Comme k est un corps, i_1 est plat, donc Δ aussi puisque u est un isomorphisme. Comme Δ est local, il est fidèlement plat.

PROPOSITION 3.2.2. — *Soit* (A, Δ, σ) *un k-groupe hensélien,* p *un idéal premier minimal de* A, $p' = \sigma^{-1}(p)$, C *l'algèbre définie par le carré cocartésien*

$$\begin{tikzcd} A \otimes_k A \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "\beta_0"'] & A_p \otimes_k A_{p'} \arrow[d, "\beta"] \\ A \tilde{\otimes}_k A \arrow[r, "\alpha"] & C \end{tikzcd}$$

Alors, $\alpha_0\Delta : A \to C$ *est fidèlement plat.*

Ceci est l'analogue hensélien du résultat suivant sur les schémas en groupes : Soit G un k-schéma en groupes connexe, K l'anneau des fonctions rationnelles sur G; alors le morphisme composé

$$\operatorname{spec} K \otimes_k K \xrightarrow{\text{can}} G \times_k G \xrightarrow{\Pi} G$$

est fidèlement plat.

La démonstration en est analogue.

3.3. Théorèmes de structure

THÉORÈME 3.3.1. — *Soit* (A, Δ, σ) *un k-groupe hensélien. Alors,* spec A *est irréductible.*

THÉORÈME 3.3.2. — *Soit* (A, Δ, σ) *un k-groupe hensélien. On suppose A noethérien et réduit, et k parfait. Alors, A est régulier.*

Ces deux théorèmes résultent de (3.2.2) et de l'étude des produits tensoriels $K \otimes_k K$, où K est un anneau local de dimension zéro ou un corps (*cf.* [3], EGA, IV, 6.7.4.1, 5.13.6, 5.13.7).

LEMME 3.3.3. — *Soit k un corps,* $A \in H_k$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est géométriquement réduit,*

(ii) *si* $\bar{k}$ *est une clôture parfaite de k, la* $\bar{k}$*-algèbre* $A_{\bar{k}}$ (1.3) *est réduite.*

DÉFINITION 3.3.4. — Soit (A, Δ, σ) un k-groupe hensélien. On dit que (A, Δ, σ) est *lisse sur k* si, et seulement si, A est noethérien, et vérifie les conditions de (3.3.3).

THÉORÈME DE STRUCTURE DES GROUPES LISSES 3.3.5. — *Soit* (A, Δ, σ) *un k-groupe hensélien lisse. Alors, si* $n = \dim A$, *le degré de transcendance de* $K = \operatorname{Fr}(A)$ *est n, et A est isomorphe* à $k\{T_1, \ldots, T_n\}$, *hensélisé à l'origine de* $k[T_1, \ldots, T_n]$, *ou encore sous-anneau de* $k[[T_1, \ldots, T_n]]$ *des séries algébriques sur* $k(T_1, \ldots, T_n)$.

4. Étude du foncteur F

4.1. Hensélisation et isogénies étales

PROPOSITION 4.1.1. — *Soient G, H deux groupes algébriques connexes, f un homomorphisme,* $f : G \to H$, $\tilde{f} : F(G) \to F(H)$ *le moruhisme déduit par hensélisation.*

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f *est une isogénie étale* (i. e. *étale et surjective*);

(ii) $\tilde{f}$ *est un isomorphisme.*

Démonstration :

(i) $\Rightarrow$ (ii). Posons $A = 0_{H,e}$, $B = O_{G.e}$. Alors, $f^* : A \to B$ est injectif et locale-étale, et donc $\tilde{f}^* : \tilde{A} \to \tilde{B}$ est un isomorphisme ([7], VIII, prop. 2 et th. 1).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Comme $\tilde{f}^* : \tilde{A} \to \tilde{B}$ est injectif, il en est de même de $f^* : A \to B$, donc, comme G et H sont connexes, f est fidèlement plat. D'autre part, le noyau de f est étale, donc f est étale.

La proposition (4.1.1) nous conduit à modifier la catégorie de départ, puisque deux objets non isomorphes dans G_{rk} le deviennent dans HG_k.

Soit AGC_k la catégorie des groupes algébriques connexes sur k. Nous noterons $\mathscr{A}_k$ la catégorie localisée obtenue en rendant inversibles dans AGC_k les isogénies étales. F induit un foncteur noté encore $F : \mathscr{A}_k \to HG_k$. De plus, nous nous limiterons désormais au cas des groupes lisses.

Le théorème principal s'énonce alors de la façon suivante :

THÉORÈME 4.1.2. — *Le foncteur F est une équivalence de catégories entre la catégorie $\mathscr{A}L_k$ des k-groupes algébriques lisses et connexes, modulo les isogénies étales et la catégorie HGL_k des groupes henséliens lisses.*

4.2. La pleine fidélité de F

PROPOSITION 4.2.1. — *Le foncteur $F : \mathscr{A}_k \to HG_k$ est fidèle.*

Démonstration. — Il suffit de voir que $F : AGC_k \to HG_k$ l'est.

Soient G, $H \in AGC_k$; $f, g : G \rightrightarrows H$ deux homomorphismes tels que $\tilde{f} = \tilde{g}$.

Posons $A = O_{H,e}$, $B = O_{G,e}$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f^*"] \arrow[r, shift right, "g^*"'] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d, "j"] \\ \tilde{A} \arrow[r, shift left, "\tilde{f}^*"] \arrow[r, shift right, "\tilde{g}^*"'] & \tilde{B} \end{tikzcd}$$

Comme j est injectif, on a $f^* = g^*$ et, comme G est connexe, ceci entraîne $f = g$.

THÉORÈME 4.2.2. — *Le foncteur* $F: \mathscr{A} L_k \to HGL_k$ *est pleinement fidèle.*

Ce théorème résulte de la proposition plus précise suivante :

PROPOSITION 4.2.3. — *Soient G, H deux groupes algébriques sur k, lisses et connexes,* $F(G)$ *et* $F(H)$ *leurs hensélisés, et* $f^0 : F(G) \to F(H)$ *un homomorphisme de groupes henséliens.*

Il existe alors un groupe algébrique L, lisse et connexe, une isogénie étale $u : L \to G$, *et un homomorphisme* $\alpha : L \to H$ *tels que le diagramme ci-dessous soit commutatif*

$$\begin{array}{ccc} F(L) & & \\ {\scriptstyle F(u)}\downarrow & \searrow {\scriptstyle F(\alpha)} & \\ F(G) & \xrightarrow{f^0} & F(H) \end{array}$$

et $F(u)$ *est un isomorphisme en vertu de* (4.1.1).

Démonstration de 4.2.3. — Elle repose sur la notion de groupe local (analogue aux groupes rationnels de [5]). Soit L_k la catégorie dont les objets sont les k-algèbres locales $\eta_A : k \to A$ à extension résiduelle triviale et dont les flèches sont les homomorphismes locaux.

Dans cette catégorie, si η_A désigne le noyau de $\bar{\mu}_0 : A \otimes_k A \to k$ (notations de (1.1.3)), $(A \otimes_k A)_{\eta_A}$ est une somme de l'objet A avec lui-même.

On a de plus un foncteur $\mathscr{F}$ de $\mathrm{Sch}^{\bullet}/k$ dans L_k^0, commutant aux produits, défini par $\mathscr{F}(X, x) = (O_{X,x})^0$.

On définit alors un groupe local comme un groupe dans la catégorie duale L_k^0. Comme en (2.1.2), ceci revient à se donner deux flèches :

$$\Delta_A : \quad A \to (A \otimes_k A)\eta_A,$$
$$\sigma_A : \quad A \to A,$$

avec les axiomes analogues à ceux de (2.1.2). On a bien sûr une notion de morphisme de groupes locaux, et on désigne par LG_k la catégorie des k-groupes locaux.

Le foncteur $\mathscr{F}$ induit alors un foncteur $\mathscr{F} : G_{r_k} \to LG_k$.

Le résultat essentiel est alors le suivant :

LEMME 4.2.4 (Weil). — Le foncteur $\mathscr{F}$ est une équivalence de catégories entre la catégorie AGC_k des groupes algébriques connexes et la sous-catégorie de LG_k formée des groupes locaux de type fini (i. e. dont l'algèbre est essentiellement de type fini sur k).

Autrement dit, un groupe algébrique connexe est connu dès qu'on en connait l'anneau local à l'origine. (Comparer à [5] (2.3.1).)

Venons-en à la démonstration proprement dite de (4.2.3).

On pose $A = O_{H,e}$, $B = O_{G,e}$, soient $\tilde{A}, \tilde{B}$ leurs hensélisés, de sorte qu'on a $f : \tilde{A} \to \tilde{B}$ qui commute à Δ et σ.

On note $i : A \to \tilde{A}$, $j : B \to \tilde{B}$ les injections canoniques.

Soit U un ouvert affine de H contenant e, $U = \operatorname{spec} \Lambda$, avec Λ de type fini sur k engendré par $x_1, \ldots, x_n$. On a alors $A = \Lambda_m$.

Posons $h = f \circ i$, $u_i = h(x_i)$.

Soit C_0 la sous-B-algèbre de $\tilde{B}$ engendrée par $u_1, \ldots, u_n$, et soit $C = (C_0)_{m_{\tilde{B}} \cap C_0}$.

Alors, $C \in L_k$, et on a des homomorphismes locaux

$$A \xrightarrow{h} C, \qquad B \xrightarrow{j_0} C, \qquad C \xrightarrow{\varphi} \tilde{B}.$$

Nous allons définir sur C une structure de groupe local de façon que les morphismes $A \to C$, $B \to C$ soient des homomorphismes de groupes

L'idée est la suivante : on doit définir $\Delta_C : C \to (C \otimes_k C)_{n_C}$.

Sur B, on prend $\Delta_C = \Delta_B$.

D'autre part, si $d \in C_0$, on a $d = \sum b_i \, u^i$ avec des multi-indices $i = (i_1 \ldots i_n)$, $u = (u_1 \ldots u_n)$, et on a $\Delta_{\tilde{B}}(d) = \sum_i \Delta_B(b_i) \, h \mathbin{\tilde{\otimes}} h \circ \Delta_A(x^i)$ et comme $\Delta_A(x^i) \in (A \otimes_k A)_{n_A}$, il en résulte que $\Delta_{\tilde{B}}(d) \in (C \otimes_k C)_{n_C}$, et donc $\Delta_{\tilde{B}/C}$ induit $\Delta_C : C \to (C \otimes_k C)_{n_C}$. Le lemme (4.2.4) fournit alors le groupe L et les morphismes u et α cherchés, et la lissité de G entraîne que u est une isogénie étale.

4.3. Algébrisation des groupes henséliens lisses

THÉORÈME 4.3.1. — *Soit* (A, Δ, σ) *un groupe hensélien lisse. Il existe un k-groupe algébrique lisse et connexe G tel que* $A^0 = F(G)$.

La démonstration de ce théorème est assez technique, et nous renvoyons à [6] pour les détails.

Essayons cependant d'en indiquer la ligne générale.

Soit K le corps des fractions de A. On note $K \otimes_k^v K$ le corps des fractions de $A \otimes_k A$ (resp. $K \otimes_k^v K \otimes_k^v K$, etc.).

Pour construire G, on construit un groupe rationnel au sens de [5], 2.1., et on conclut par [5], 2.3.1.

Le point crucial est de prouver que, si $L = \{ a \in K ;\ \Delta_a \in K \otimes_k^v K \}$, le degré de transcendance de L sur k est le même que celui de K (En fait, pour des raisons techniques, on doit même regarder $(1 \mathbin{\tilde{\otimes}} \Delta) \circ \Delta(a)$ dans $K \otimes_k^v K \otimes_k^v K$).

Soit donc $a \in A$, transcendant sur k. Alors, Δ_a est dans $A \tilde{\otimes}_k A$, donc algébrique sur $K \otimes_k^v K$. (En vertu de (3.3.5), A est de la forme $k\{T\} = k\{T_1 \ldots T_n\}$, donc $A \otimes_k^v A$ est isomorphe à $k\{X, Y\}$, ensemble des $S \in k[[X, Y]]$ algébriques sur $k(X, Y)$.)

On a donc une équation

$$(1) \qquad a_n (\Delta_a)^n + \ldots + a_0 = 0, \qquad \text{avec} \quad a_i \in A \otimes_k A.$$

Appliquons $1 \tilde{\otimes} \Delta$ et $\Delta \tilde{\otimes} 1$ à (1), tenant compte de ce que $(1 \tilde{\otimes} \Delta) \circ \Delta(a) = (\Delta \tilde{\otimes} 1) \circ \Delta(a) = u$, on a

$$(2) \qquad 1 \tilde{\otimes} \Delta(a_n) u^n + \ldots + 1 \tilde{\otimes} \Delta(a_0) = 0,$$

$$(3) \qquad \Delta \tilde{\otimes} 1(a_n) u^n + \ldots + \Delta \tilde{\otimes} 1(a_0) = 0,$$

et par des arguments d'anneaux factoriels on montre que ces équations sont minimales sur un corps convenable, donc proportionnelles.

On a alors :

$$(4) \qquad 1 \tilde{\otimes} \Delta(a_i) \Delta \tilde{\otimes} 1(a_j) = 1 \tilde{\otimes} \Delta(a_j) \Delta \tilde{\otimes} 1(a_i).$$

Appliquons alors $1 \tilde{\otimes} 1 \tilde{\otimes} \varepsilon$ à (4). En vertu des axiomes des groupes henséliens, on trouve $\Delta(a_i') a_j = \Delta(a_j') a_i$, où $a_i' = 1 \tilde{\otimes} \varepsilon(a_i)$.

Donc (si $a_j' \neq 0$), on a $\Delta(a_1'/a_j') = (a_i/j) \in K \otimes_k^v K$, autrement dit, $(a_1'/a_j') \in L$.

Mais, appliquant $1 \tilde{\otimes} \varepsilon$ à (1), on a aussi $a_n' a^n + \ldots + a_0' = 0$. Donc, les a_i' ne sont pas tous algébriques sur k (sinon a serait algébrique), et le degré de transcendance de L sur k est au moins égal à 1.

On montre de manière analogue que ce degré de transcendance est le même que celui de K.

En fait, on prouve la proposition suivante :

PROPOSITION 4.3.2. — *Soit* $\varphi = 1 \tilde{\otimes} \Delta \circ \Delta$, *et soit*

$$L = \{ a \in K ; \varphi(a) \in K \otimes_k^v K \otimes_k^v K \}.$$

Alors,

1° *L est un sous-corps de K, et on a* $\deg \operatorname{tr}_k L = \deg \operatorname{tr}_k K$.

2° $\Delta L \in K \otimes_k^v K$.

La démonstration est analogue à celle suggérée ci-dessus.

On peut alors construire un groupe rationnel en montrant que $\sigma L \subset L$ et $\Delta L \subset L \otimes_k^v L$, et on conclut à l'aide de [5], 2.3.1, et de [5], 2.2.1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DEMAZURE (M.) et GABRIEL (P.). — *Groupes algébriques.* Tome 1 : *géométrie algébrique.* — Paris, Masson; Amsterdam, North Holland publising Company, 1970.

[2] FERRAND (D.). — Monomorphismes et morphismes absolument plats, *Bull. Soc. Math. France*, t. 100, 1972, p. 97-128.

[3] GROTHENDIECK (A.). — *Éléments de géométrie algébrique* (EGA). — Paris, Presses universitaires de France, 1960 à 1967 (*Institut des Hautes Études Scientifiques. Publidations mathématiques*, 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28).

[4] GROTHENDIECK (A.) et DEMAZURE (M.). — *Séminaire de géométrie algébrique* (SGA 3) : *Schémas en groupes*, I-III. — Berlin, Springer-Verlag, 1970 (*Lecture Notes in Mathematics*, 151, 152, 153).

[5] PERRIN (D.). — *Schémas en groupes quasi compacts sur un corps* (*Publications mathématiques de l'Université Paris-Sud*, n° 165, 75-46).

[6] PERRIN (D.). — *Groupes henséliens* (*Publications mathématiques de l'Université Paris-Sud*, n° 165, 75-46).

[7] RAYNAUD (M.). — *Anneaux locaux henséliens.* — Berlin, Springer-Verlag, 1970 (*Lecture Notes in Mathematics*, 169).

(Texte reçu le 17 octobre 1975.)

Daniel PERRIN,
6, rue du Professeur-Einstein,
92160 Antony.