

# BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-CLAUDE TOUGERON

**Sur l'anneau des germes de fonctions holomorphes  
qui appartiennent à la classe de Bernstein**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 106 (1978), p. 207-224

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1978\\_\\_106\\_\\_207\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1978__106__207_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR L'ANNEAU DES GERMES DE FONCTIONS HOLOMORPHES  
QUI APPARTIENNENT A LA CLASSE DE BERNSTEIN**

PAR

JEAN-CLAUDE TOUGERON

[Université Rennes-I]

RÉSUMÉ. — Soient  $\mathcal{O}_n$  l'anneau des germes de fonctions holomorphes à l'origine de  $\mathbb{C}^n$ ;  $\mathcal{P}_n$  l'anneau des polynômes  $\mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n]$ . On étudie les propriétés algébriques de l'anneau  $\mathcal{B}_n$  (resp.  $\mathcal{C}_n$ ) formé des  $f \in \mathcal{O}_n$  tels que  $f$  et les  $D^\omega f$ ,  $\omega \in \mathbb{N}^n$ , engendrent un espace vectoriel de dimension finie sur le corps des fractions  $[\mathcal{P}_n]$  de  $\mathcal{P}_n$  (resp. engendrent un corps de degré de transcendance fini sur  $[\mathcal{P}_n]$ ). L'anneau  $\mathcal{B}_n$  est pathologique, mais possède de bonnes propriétés en tant que module sur  $\mathcal{P}_n$ ;  $\mathcal{C}_n$  est un anneau local régulier de dimension  $n$  vérifiant toutes les propriétés classiques de  $\mathcal{O}_n$ .

ABSTRACT. — Let  $\mathcal{O}_n$  be the ring of germs of holomorphic functions at the origin of  $\mathbb{C}^n$ ; let  $\mathcal{P}_n$  be the ring of polynomials  $\mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n]$ . We study the algebraic properties of the ring  $\mathcal{B}_n$  (resp.  $\mathcal{C}_n$ ) whose elements are germs  $f \in \mathcal{O}_n$  such that  $f$  and  $D^\omega f$ ,  $\omega \in \mathbb{N}^n$ , generate a finite dimensional vector space on the field of fractions  $[\mathcal{P}_n]$  of  $\mathcal{P}_n$  (resp. generate a field with finite transcendence degree on  $[\mathcal{P}_n]$ ). The ring  $\mathcal{B}_n$  is pathologic, but possesses good properties as a modulus on  $\mathcal{P}_n$ ;  $\mathcal{C}_n$  is a regular local ring of dimension  $n$  which verifies all classic properties of  $\mathcal{O}_n$ .

Soient  $X$  un germe d'ensemble de Nash irréductible à l'origine de  $\mathbb{C}^n$ ,  $\mathcal{N}_X$  l'anneau des germes de fonctions de Nash sur  $X$ ,  $\mathcal{O}_X$  l'anneau des germes de fonctions holomorphes sur  $X$ , et  $[\mathcal{N}_X]$  (resp.  $[\mathcal{O}_X]$ ) le corps des fractions de  $\mathcal{N}_X$  (resp.  $\mathcal{O}_X$ ). Soit  $\text{Der}_{\mathbb{C}}[\mathcal{N}_X]$  l'ensemble des  $\mathbb{C}$ -dérivations de  $[\mathcal{N}_X]$  dans lui-même : une telle  $\mathbb{C}$ -dérivation se prolonge de façon unique en une  $\mathbb{C}$ -dérivation de  $[\mathcal{O}_X]$  dans lui-même. Dans cet article, nous étudions d'abord l'ensemble  $\mathcal{B}_X$  des  $f \in \mathcal{O}_X$  tels que l'espace vectoriel engendré sur  $[\mathcal{N}_X]$  par tous les  $D_1 \dots D_s f$ ,  $s \in \mathbb{N}$  et  $D_i \in \text{Der}_{\mathbb{C}}[\mathcal{N}_X]$ , soit de dimension finie sur  $[\mathcal{N}_X]$  :  $\mathcal{B}_X$  est un anneau ( $\mathcal{N}_X \subset \mathcal{B}_X \subset \mathcal{O}_X$ ) qui n'est pas local et qui n'est pas noethérien (sauf évidemment si  $\dim X = 0$ ). Cependant,  $\mathcal{B}_X$  vérifie de bonnes propriétés par rapport à  $\mathcal{N}_X$  : par exemple,  $\mathcal{B}_X$  est un module plat sur  $\mathcal{N}_X$ ; si  $X \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  est un plongement et si  $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n} = \mathcal{B}_n$ , on a  $\mathcal{B}_X \sim \mathcal{B}_n/I \cdot \mathcal{B}_n$ , où  $I$  désigne l'idéal de  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}^n} = \mathcal{N}_n$  formé des  $f$  tels que  $f|_X = 0$  (th. 2.12). Ainsi, l'étude des  $\mathcal{B}_X$  est ramenée à celle des  $\mathcal{B}_n$ . Un germe  $f \in \mathcal{O}_n = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$  appartient à  $\mathcal{B}_n$  si, et seulement si,  $A_n(\mathbb{C}).f$  est un module de Bernstein sur  $A_n(\mathbb{C})$  (cf. [1],  $A_n(\mathbb{C})$  désigne l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients polynômes en les variables  $z_1, \dots, z_n$ ).

On définit ensuite un sous-anneau  $\mathcal{C}_X$  de  $\mathcal{O}_X$  ( $\mathcal{B}_X \subset \mathcal{C}_X \subset \mathcal{O}_X$ ) de la façon suivante :  $f \in \mathcal{C}_X$  si le corps engendré sur  $[\mathcal{N}_X]$  par tous les  $D_1 \dots D_s f$ ,  $s \in \mathbf{N}$  et  $D_i \in \text{Der}_{\mathbf{C}}[\mathcal{N}_X]$ , est de degré de transcendance fini sur  $[\mathcal{N}_X]$ ;  $\mathcal{C}_X$  se comporte mieux que  $\mathcal{B}_X$ ; c'est un anneau local noethérien jouissant des propriétés bien connues de  $\mathcal{N}_X$  ou  $\mathcal{O}_X$  : théorème de préparation, théorème des fonctions implicites, platitude de  $\mathcal{C}_X$  sur  $\mathcal{N}_X$  ou de  $\mathcal{O}_X$  sur  $\mathcal{C}_X$ , théorème d'Artin sur les solutions d'un système d'équations analytiques, etc.

Les démonstrations utilisent comme outils principaux un critère de platitude et un critère de noethérianité pour des sous-anneaux  $A_n$  de  $\mathcal{O}_n$  contenant  $\mathcal{N}_n$  : ces critères sont démontrés au paragraphe 1. Pour terminer, signalons une question intéressante : en quelle mesure, les résultats de cet article subsistent-ils quand on considère, au lieu de germes de fonctions holomorphes à l'origine de  $\mathbf{C}^n$ , des germes de fonctions holomorphes au voisinage d'un compact convenable de  $\mathbf{C}^n$  ou des germes de fonctions  $\mathbf{C}^\infty$  au voisinage de l'origine (ou plus généralement d'un compact) de  $\mathbf{R}^n$ ?

### 1. Un critère de platitude et un critère de noethérianité

On pose  $\mathcal{P}_n = \mathbf{C}[z_1, \dots, z_n]$ ;  $\mathcal{O}_n = \mathbf{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ ;  $\mathcal{N}_n$  désigne l'anneau des germes de fonctions de Nash à l'origine de  $\mathbf{C}^n$ . Si  $K$  est un anneau intègre,  $[K]$  désigne son corps des fractions. Pour tout  $n \geq 0$ , soit  $A_n$  un sous-anneau de  $\mathcal{O}_n$  contenant  $\mathcal{N}_n$ .

PROPOSITION 1.1. — *On suppose que la famille  $A_n$  vérifie les conditions suivantes :*

1° si  $a : (\mathbf{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{C}^p, 0)$  a ses composantes dans  $\mathcal{N}_n$  et si  $f \in A_p$ , alors  $f \circ a \in A_n$ ;

2° si  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{P}_n$  forment un système de paramètres de  $\mathcal{N}_n$ , et si  $a = (a_1, \dots, a_n) : (\mathbf{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{C}^n, 0)$  et  $f \in \mathcal{O}_n$  vérifient  $f \circ a \in A_n$ , on a  $f \in A_n$ ;

3° si  $f \in A_n$ ,  $g \in \mathcal{O}_n$  et  $a \in \mathcal{P}_n \setminus \{0\}$  vérifient  $f = a.g$ , on a  $g \in A_n$ .

Soit  $f \in A_n$  et soit  $\Pi \in \mathcal{N}_n$  un germe de Nash distingué d'ordre  $p$  en la variable  $z_n$  (i. e.  $\Pi(0; z_n) = \alpha_n z_n^p + \dots$ , avec  $\alpha_n \neq 0$ ). Si  $z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$ , on a

$$f(z) = q(z)\Pi(z) + \sum_{i=1}^p g_i(z')z_n^{p-i},$$

avec  $q \in A_n$  et  $g_i \in A_{n-1}$ . Une telle décomposition est unique.

*Preuve.* — Posons  $y = (y_1, \dots, y_p)$ . Soit

$$\Gamma(z_n; y) = z_n^p + y_1 z_n^{p-1} + \dots + y_p$$

le polynôme générique en  $z_n$  de degré  $p$ . Considérons l'application  $a$  :

$$\mathbb{C}^{n+p} \ni (z, \xi) \rightarrow (z, s(\xi)) \in \mathbb{C}^{n+p},$$

où les composantes de  $s$  sont au signe près, les fonctions symétriques élémentaires de  $\xi_1, \dots, \xi_p$  de telle sorte que

$$\Gamma \circ a(z_n; \xi) = (z_n - \xi_1) \dots (z_n - \xi_p).$$

Soit  $f \in A_n$ ; alors  $g = f \circ a \in A_{n+p}$  d'après le 1°. En outre, si  $z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$  :

$$g(z'; z_n; \xi) - g(z'; \xi_1; \xi) = (z_n - \xi_1) g_1(z'; z_n; \xi)$$

et  $g(z'; \xi_1; \xi), g_1$  appartient à  $A_{n+p}$  d'après 1° et 3°. En recommençant avec  $g_1$ , puis en itérant, on voit que

$$(1.1.4) \quad g(z; \xi) = q(z; \xi)(z_n - \xi_1) \dots (z_n - \xi_p) \\ + \sum_{i=1}^p z_n^{p-i} g_i(z'; \xi),$$

avec  $q$  et  $g_i \in A_{n+p}$ ;  $q$  et  $g_i$  sont symétriques en  $\xi$ ; donc  $q = Q \circ a$ ,  $g = G_i \circ a$ , avec  $Q, G_i \in A_{n+p}$ , d'après le théorème de Newton pour les germes de fonctions holomorphes et le 2°. D'après (1.1.4) :

$$(1.1.5) \quad f(z) = Q(z; y) \Gamma(z_n; y) + \sum_{i=1}^p z_n^{p-i} G_i(z'; y)$$

$\Pi$  étant distingué d'ordre  $p$  en la variable  $z_n$ , on a  $\Pi P' \neq P$  avec  $P' \in \mathcal{N}_n$  inversible et  $P$  polynôme distingué en  $z_n$  :

$$P(z) = z_n^p + y_1(z') z_n^{p-1} + \dots + y_p(z').$$

D'après (1.1.5), après substitution  $y \rightarrow y(z')$  :

$$f(z) = Q(z; y(z')) P'(z) \Pi(z) + \sum_{i=1}^p G_i(z'; y(z')) z_n^{p-i}.$$

Il suffit de poser

$$q(z) = Q(z; y(z')) P'(z) \quad \text{et} \quad g_i(z') = G_i(z'; y(z')).$$

**PROPOSITION 1.2.** — *Sous les hypothèses de 1.1,  $\mathcal{O}_n/A_n$  est un module plat sur  $\mathcal{N}_n$ .*

*Preuve.* —  $\mathcal{O}_n$  étant un module plat sur  $\mathcal{N}_n$ , on a, pour tout idéal  $I$  de  $\mathcal{N}_n$ , une suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{Tor}_1\left(\mathcal{O}_n/A_n, \frac{\mathcal{N}_n}{I}\right) \rightarrow \frac{A_n}{I.A_n} \rightarrow \frac{\mathcal{O}_n}{I.\mathcal{O}_n}.$$

Donc,  $\mathcal{O}_n/A_n$  est un module plat sur  $\mathcal{N}_n$  si, et seulement si, pour tout idéal  $I$  de  $\mathcal{N}_n$  :

$$A_n \cap I.\mathcal{O}_n = I.A_n.$$

On procède par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 1$ , l'idéal  $I$  est principal, et le théorème résulte de (1.1.3). Si  $n > 1$ , soit  $a_1, \dots, a_q$  une famille de générateurs de  $I$  ( $I \neq 0$  et  $\mathcal{N}_n$ ). On peut supposer que  $a_1$  est un polynôme distingué de degré  $p$  en  $z_n$  et que  $a_2, \dots, a_q$  sont des polynômes en  $z_n$  de degré  $< p$ . Soit  $b \in A_n$  tel que  $b = \sum_{i=1}^q f_i a_i, f_i \in \mathcal{O}_n$ . Après division de  $b$  et  $f_2, \dots, f_q$  par  $a_1$ , on peut supposer que  $b$  et  $f_2, \dots, f_q$  sont des polynômes en  $z_n$  de degré  $< q$  ( $b$  à coefficients dans  $A_{n-1}$ , d'après 1.1). De l'unicité de la décomposition dans le théorème de division, on déduit que  $f_1$  est aussi un polynôme en  $z_n$  de degré  $< q-1$ . Ainsi, à l'idéal  $I$ , on a associé un sous-module  $N$  de  $\mathcal{N}_{n-1}^{2q-1}$ , et l'on doit montrer que  $N.\mathcal{O}_{n-1} \cap A_{n-1}^{2q-1} = N.A_{n-1}$ . Mais ceci résulte de l'hypothèse de récurrence.

**COROLLAIRE 1.3.** — *Sous les hypothèses de 1.1, soit  $M$  un sous-module de  $\mathcal{N}_n^q$ . Alors,  $M.\mathcal{O}_n \cap A_n^q = M.A_n$ .*

**COROLLAIRE 1.4.** — *Sous les hypothèses de 1.1,  $A_n$  est un module plat sur  $\mathcal{N}_n$ .*

**PROPOSITION 1.5.** — *Soit  $a : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$  un morphisme de Nash. Soit  $M$  un module de type fini sur  $\mathcal{N}_n$  tel que  $a_* M$  soit de type fini sur  $\mathcal{N}_p$ . Sous les hypothèses de 1.1,*

$$1 \otimes a^* : a_* M \otimes_{\mathcal{N}_p} A_p \rightarrow M \otimes_{\mathcal{N}_n} A_n$$

*est un isomorphisme.*

*Preuve.* — On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} a_* M \otimes_{\mathcal{N}_p} \mathcal{O}_p & \xrightarrow{\sim} & M \otimes_{\mathcal{N}_n} \mathcal{O}_n \\ \uparrow & & \uparrow \\ a_* M \otimes_{\mathcal{N}_p} A_p & \xrightarrow{1 \otimes a^*} & M \otimes_{\mathcal{N}_n} A_n \end{array}$$

Les deux flèches verticales sont injectives d'après 1.2, donc  $1 \otimes a^*$  est injective. En décomposant  $a$  à l'aide de son graphe, on voit qu'il suffit de démontrer la surjectivité de  $1 \otimes a^*$  lorsque  $a$  est une immersion ou lorsque  $a$  est la submersion  $(\mathbb{C}^n, 0) \ni (z', z_n) \rightarrow z' \in (\mathbb{C}^{n-1}, 0)$ . Le cas d'une immersion est trivial, car alors  $a^* : A_p \rightarrow A_n$  est surjectif.

Reste à examiner la submersion  $a : (z', z_n) \rightarrow z'$ . Soit  $m_1, \dots, m_p$  une famille de générateurs de  $a_* M$  sur  $\mathcal{N}_{n-1}$ . On a, pour  $i = 1, \dots, p$  :

$$z_n \cdot m_i = \sum_{j=1}^p a_{ij} m_j, \quad a_{ij} \in \mathcal{N}_{n-1}.$$

Si  $P$  est le déterminant de la matrice  $|\delta_{ij} z_n - a_{ij}|$ , on a  $P \cdot m_i = 0$  pour  $i = 1, \dots, p$ . Soit  $m = \sum_{i=1}^p m_i \otimes b_i \in M \otimes_{\mathcal{N}_n} A_n$ ; d'après le théorème de division 1.1 :

$$b_i = P \cdot q_i + \sum_{j=1}^p g_{ij} z_n^{p-j},$$

avec  $g_{ij} \in A_{n-1}$  et  $q_i \in A_n$ . D'où :

$$m = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^p z_n^{p-j} m_i \otimes g_{ij},$$

si  $m'$  désigne la somme  $\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p z_n^{p-j} m_i \otimes g_{ij}$  calculée dans  $a_* M \otimes_{\mathcal{N}_{n-1}} A_{n-1}$ , on a évidemment :

$$1 \otimes a^*(m') = m,$$

C.Q.F.D.

1.6. Soit  $X$  le germe en un point d'un ensemble de Nash complexe non nécessairement réduit. Soient  $X \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ ,  $X \hookrightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$  deux plongements de  $X$ ; soit  $I$  (resp.  $J$ ) l'idéal de  $\mathcal{N}_n$  (resp.  $\mathcal{N}_p$ ) formé des germes nuls sur  $X$ . On a un isomorphisme  $\mathcal{N}_n/I \sim \mathcal{N}_p/J$ ; sous les hypothèses de 1.1, d'après 1.5, on a donc un isomorphisme  $A_n/I \cdot A_n \sim A_p/J \cdot A_p$ . Ainsi,  $A_n/I \cdot A_n$  est indépendant du plongement  $X \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  choisi; nous désignerons cet anneau par  $A_X$ . D'après 1.2,  $A_X$  est un sous-anneau de  $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_n/I \cdot \mathcal{O}_n$ .

PROPOSITION 1.7. — *On suppose que la famille  $A_n$  vérifie les conditions suivantes :*

1° si  $a : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$  a ses composantes dans  $A_n$  et si  $f \in A_p$ ,  $f \circ a \in A_n$ ;

2° si  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{P}_n$  forment un système de paramètres de  $\mathcal{N}_n$  et si  $a = (a_1, \dots, a_n) : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  et  $f \in \mathcal{O}_n$  vérifient  $f \circ a \in A_n$ , on a  $f \in A_n$ ;

3° si  $a_1, \dots, a_n \in A_n$  forment un système régulier de paramètres de  $\mathcal{O}_n$ , les fonctions inverses  $b_1, \dots, b_n$  ( $b_i \circ a = z_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ ) appartiennent à  $A_n$ ;

4°  $A_n$  est un anneau local, i. e. si  $a \in A_n$  et  $a(0) \neq 0$ ,  $a^{-1} \in A_n$ ;

5° si  $f \in A_n$ ,  $g \in \mathcal{O}_n$  et  $a \in \mathcal{P}_n \setminus \{0\}$  vérifient  $f = a.g$ , on a  $g \in A_n$ .

Alors,  $A_n$  est un anneau local régulier de dimension  $n$ . En outre, les anneaux  $A_n$  vérifient le théorème des fonctions implicites et le théorème de préparation.

Preuve. — D'après 1° et 3°, le théorème des fonctions implicites est vrai pour les anneaux  $A_n$ . Les conditions 1°, 2° et 5° entraînent celles de la proposition 1.1. On sait donc diviser  $\Pi \in A_n$  par le polynôme générique :  $\Gamma(z_n; y) = z_n^p + \sum_{i=1}^p y_i z_n^{p-i}$  :

$$\Pi(z) = \Gamma(z_n; y) \cdot Q(z; y) + \sum_{i=1}^p G_i(z'; y) z_n^{p-i},$$

avec  $Q \in A_{n+p}$ ;  $G_i \in A_{n+p-1}$ . Si  $\Pi$  est distingué d'ordre  $p$  en la variable  $z_n$  on vérifie que

$$Q(0; 0) \neq 0; G_i(0; 0) = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, p;$$

en outre, le jacobien des  $G_i$  par rapport aux  $y_j$  est  $\neq 0$  en  $(0, 0)$ . Ainsi, par le théorème des fonctions implicites, il existe

$$y_1(z'), \dots, y_p(z') \in A_{n-1}, y_i(0) = 0,$$

tels que

$$\Pi(z) = \Gamma(z_n; y(z')). \cdot Q(z; y(z')).$$

D'après le 4°,  $Q(z; y(z'))$  est inversible dans  $A_n$ . Ainsi,  $\Pi(z)$  est équivalent dans  $A_n$  au polynôme distingué  $\Gamma(z_n; y(z'))$ . On sait diviser  $f \in A_n$  par  $\Gamma(z_n; y)$ . donc par  $\Gamma(z_n; y(z'))$  après substitution  $y \rightarrow y(z')$  (ceci est possible d'après le 1°), donc par  $\Pi(z)$ . Ainsi :

$$f(z) = q(z) \cdot \Pi(z) + \sum_{i=1}^p g_i(z') z_n^{p-i},$$

avec  $q(z) \in A_n$  et  $g_i(z') \in A_{n-1}$ , pour  $i = 1, \dots, p$ . Une telle décomposition est évidemment unique.

Du théorème de préparation, on déduit que  $A_n$  est un anneau local noethérien; les inclusions  $\mathcal{N}_n \subset A_n \subset \mathcal{O}_n$  entraînent

$$\hat{A}_n = \hat{\mathcal{O}}_n = \mathbf{C}[[z_1, \dots, z_n]].$$

Le complété de  $A_n$  étant régulier de dimension  $n$ , il en est de même de  $A_n$ .

Les conséquences de 1.7 sont nombreuses. Signalons les deux suivantes :

COROLLAIRE 1.8. — Sous les hypothèses de 1.7,  $\mathcal{O}_n/A_n$  et  $\mathcal{O}_n$  sont des modules plats sur  $A_n$ .

COROLLAIRE 1.9. — Sous les hypothèses de 1.7, soit

$$a : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$$

un morphisme à composantes dans  $A_n$ , et soit  $M$  un module de type fini sur  $A_n$ . Le module  $a_* M$  est de type fini sur  $A_p$  si, et seulement si,  $a_* M/\mathfrak{m}_p \cdot a_* M$  est de dimension finie sur  $\mathbb{C}$  ( $\mathfrak{m}_p$  : idéal maximal de  $A_p$ ).

## 2. Les anneaux de Bernstein $\mathcal{B}_n^{(i)}$

2.1. Soit  $A_n$  une sous-algèbre unitaire de  $\mathcal{O}_n$  stable par dérivation (donc  $1 \in A_n$ ; si  $f \in A_n$ ,  $\partial_i f \in A_n$  pour  $i = 1, \dots, n$ ). On note  $\mathcal{B}(A_n)$  l'ensemble des  $f \in \mathcal{O}_n$  qui vérifient les deux conditions suivantes, visiblement équivalentes :

1° la dimension  $v_{A_n}(f)$  (ou  $v(f)$  si aucune confusion n'est à redouter) de l'espace vectoriel, engendré sur  $[A_n]$  par les  $\partial^\omega f$ ,  $\omega \in \mathbb{N}^n$ , est finie;

2° il existe un entier  $p \geq 0$ ,  $a \in A_n \setminus \{0\}$ , des  $b_{i,\omega} \in A_n$  tels que

$$a \cdot \frac{\partial^p f}{\partial z_i^p} = \sum_{|\omega| < p} b_{i,\omega} \partial^\omega f, \quad i = 1, \dots, n.$$

On vérifie immédiatement les inégalités suivantes, si  $f, g \in \mathcal{O}_n$  :

$$v(f+g) \leq v(f) + v(g); \quad v(fg) \leq v(f) + v(g); \quad v(\partial_i f) \leq v(f)$$

pour  $i = 1, \dots, n$ .

Il en résulte que  $\mathcal{B}(A_n)$  est une algèbre unitaire stable par dérivation et contenant  $A_n$ . On pose  $\mathcal{B}^{(0)}(A_n) = A_n$ ;  $\mathcal{B}^{(1)}(A_n) = \mathcal{B}(A_n)$ ; et par récurrence  $\mathcal{B}^{(i+1)}(A_n) = \mathcal{B}(\mathcal{B}^{(i)}(A_n))$ ;  $\mathcal{B}^*(A_n) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{B}^{(i)}(A_n)$ . Nous dirons que  $\mathcal{B}(A_n)$  est l'anneau de Bernstein de  $A_n$ .

Soit  $\mathcal{N}(A_n)$  la sous-algèbre de  $\mathcal{O}_n$  (visiblement unitaire et stable par dérivation) formée des  $f \in \mathcal{O}_n$  qui sont algébriques sur  $[A_n]$ .

LEMME 2.2. — Avec les notations précédentes,  $\mathcal{B}(\mathcal{N}(A_n)) = \mathcal{B}(A_n)$ .

Preuve. — Bien entendu,  $\mathcal{B}(A_n) \subset \mathcal{B}(\mathcal{N}(A_n))$ . Réciproquement, soit  $f \in \mathcal{B}(\mathcal{N}(A_n))$ . Il existe un entier  $p$ ,  $a \in \mathcal{N}(A_n) \setminus \{0\}$  et des  $b_{i,\omega} \in \mathcal{N}(A_n)$  tels que

$$a \cdot \frac{\partial^p f}{\partial z_i^p} = \sum_{|\omega| < p} b_{i,\omega} \partial^\omega f, \quad i = 1, \dots, n.$$



Soit  $K$  le corps engendré sur  $[A_n]$  par  $a$  et les  $b_{i,\omega}$  :  $K$  est une extension finie de  $[A_n]$  contenant toutes les dérivées de  $a$  et des  $b_{i,\omega}$ . En dérivant les relations précédentes, on voit que l'espace vectoriel engendré sur  $K$  par les  $\partial^\omega f$ ,  $\omega \in \mathbb{N}^n$ , est de dimension finie sur  $K$ , donc de dimension finie sur  $[A_n]$ . Ainsi  $f \in \mathcal{B}(A_n)$ .

C.Q.F.D.

LEMME 2.3. — Soient  $f \in \mathcal{B}(A_n)$ ,  $a \in A_n \setminus \{0\}$  et  $g \in \mathcal{O}_n$  tels que  $f = a \cdot g$ . Alors  $g \in \mathcal{B}(A_n)$ .

*Preuve.* — Elle est évidente.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $A_n$  une sous-algèbre unitaire de  $\mathcal{O}_n$ , stable par dérivation.

LEMME 2.4. — Soit  $a : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$  un morphisme dont les composantes  $a_i$  appartiennent à  $A_n$ , et supposons que  $a^*(A_p) \subset A_n$ . Alors, pour tout  $f \in \mathcal{O}_p$ , on a l'inégalité :  $v_{A_n}(f \circ a) \leq v_{A_p}(f)$ . En particulier,  $a^*(\mathcal{B}(A_p)) \subset \mathcal{B}(A_n)$ .

*Preuve.* — Soit  $f \in \mathcal{O}_p$  telle que  $v_{A_p}(f) = s < \infty$ . L'espace vectoriel sur  $[A_n]$  engendré par les  $\partial^\omega (f \circ a)$  est contenu dans l'espace vectoriel sur  $[A_n]$  engendré par les  $\partial^\omega f \circ a$ . Il suffit donc de montrer le résultat suivant : soient  $g_1, \dots, g_{s+1} \in \mathcal{O}_p$  linéairement dépendantes sur  $[A_p]$ ; alors  $g_1 \circ a, \dots, g_{s+1} \circ a$  sont linéairement dépendantes sur  $[A_n]$ . Soit  $\sum_{i=1}^{s+1} \Theta_i g_i = 0$  une relation,  $\Theta_i \in A_p$ , et l'un des  $\Theta_i$  est  $\neq 0$ . Soit  $\mu \in \mathbb{N}^p$  un multi-indice tel que :

(i) il existe un indice  $i$  avec  $\partial^\mu \Theta_i \circ a \neq 0$ ;

(ii) pour tout  $i$  et tout  $\omega \in \mathbb{N}^p$ ,  $|\omega| < |\mu|$ ,  $\partial^\omega \Theta_i \circ a = 0$  (un tel  $\mu$  existe certainement).

Visiblement,

$$0 = \partial^\mu \left( \sum_{i=1}^{s+1} \Theta_i g_i \right) \circ a = \sum_{i=1}^{s+1} (\partial^\mu \Theta_i \circ a)(g_i \circ a).$$

Ainsi,  $g_1 \circ a, \dots, g_{s+1} \circ a$  sont linéairement dépendantes sur  $[A_n]$ .

C.Q.F.D.

LEMME 2.5. — Soit  $a : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  un morphisme dont les composantes  $a_i$  appartiennent à  $A_n$ , et forment un système de paramètres de  $\mathcal{O}_n$ . On suppose que  $a^*(A_p) \subset A_n$ , et qu'il existe  $e_1, \dots, e_q \in A_n$  formant une base de  $a_*(A_n)$  sur  $A_n$  et de  $a_*(\mathcal{O}_n)$  sur  $\mathcal{O}_n$ . Alors, pour tout  $f \in \mathcal{O}_n$ , on a l'égalité :  $v_{A_n}(f \circ a) = v_{A_n}(f)$ . En particulier,  $f \in \mathcal{B}(A_n)$  si, et seulement si  $f \circ a \in \mathcal{B}(A_n)$ .

*Preuve.* — Le jacobien  $D(a_1, \dots, a_n)/D(z_1, \dots, z_n)$  est  $\neq 0$ ; ainsi, l'espace vectoriel engendré sur  $[A_n]$  par les  $\partial^0 f \circ a$  est égal à l'espace vectoriel engendré sur  $[A_n]$  par les  $\partial^0 (f \circ a)$ . Compte tenu de 2.4, il suffit de montrer le résultat suivant : soient  $g_1, \dots, g_{s+1} \in \mathcal{O}_n$  telles que  $g_1 \circ a, \dots, g_{s+1} \circ a$  soient linéairement dépendantes sur  $[A_n]$ ; alors  $g_1, \dots, g_{s+1}$  sont linéairement dépendantes sur  $[A_n]$ . Soit  $\sum_{i=1}^{s+1} \alpha_i g_i \circ a = 0$  une relation,  $\alpha_i \in A_n$ , et l'un des  $\alpha_i$  est  $\neq 0$ . Alors :

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^q (\alpha_{ij} \circ a) \cdot e_j, \quad \alpha_{ij} \in A_n;$$

d'où

$$\sum_{j=1}^q (\sum_{i=1}^{s+1} (\alpha_{ij} g_i) \circ a) e_j = 0$$

et donc, pour  $j = 1, \dots, q$ ,  $\sum_{i=1}^{s+1} \alpha_{ij} g_i = 0$ .

L'un des  $\alpha_{ij}$  étant non nul, il existe une relation non triviale entre les  $g_i$ .

C.Q.F.D.

On pose

$$\mathcal{B}_n = \mathcal{B}(\mathcal{P}_n); \quad \mathcal{B}_n^{(i)} = \mathcal{B}^{(i)}(\mathcal{P}_n); \quad \mathcal{B}_n^* = \mathcal{B}^*(\mathcal{P}_n).$$

LEMME 2.6. — Soit  $a : (\mathbf{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{C}^p, 0)$  un morphisme dont les composantes appartiennent à  $\mathcal{B}_n^{(i)}$ . Si  $f \in \mathcal{B}_p^{(j)}$ , on a  $f \circ a \in \mathcal{B}_n^{(i+j)}$ .

*Preuve.* — On procède par récurrence sur  $j$ . Si  $j = 0$ ,  $f$  est un polynôme, et  $f \circ a \in \mathcal{B}_n^{(i)}$ . Supposons que  $a^* \mathcal{B}_p^{(j)} \subset \mathcal{B}_n^{(i+j)}$ ; alors, d'après 2.4 :  $a^* \mathcal{B}_p^{(j+1)} \subset \mathcal{B}_n^{(i+j+1)}$ .

THÉORÈME 2.7. — Les anneaux  $A_n = \mathcal{B}_n^{(i)}$  ( $i$  fixé  $> 0$ ) et  $A_n = \mathcal{B}_n^*$  vérifient les conditions 1°, 2°, 3° de la proposition 1.1. Les propositions 1.1, ..., 1.5, s'appliquent donc à ces anneaux.

*Preuve.* — Visiblement, si les conditions 1°, 2°, 3° sont vérifiées par les anneaux  $A_n = \mathcal{B}_n^{(i)}$ , pour chaque  $i$  fixé, elles sont vérifiées par  $A_n = \mathcal{B}_n^*$ .

Pour tout  $i > 0$ , on a  $\mathcal{B}_n^{(i)} \supset \mathcal{B}_n = \mathcal{B}(\mathcal{N}_n) \supset \mathcal{N}_n$ , d'après 2.2. D'après 2.3, la condition 3° est satisfaite par les  $A_n = \mathcal{B}_n^{(i)}$ .

La condition 1° est vérifiée par  $A_n = \mathcal{B}_n$ , d'après 2.4. Procédant par récurrence sur  $i$ , on voit qu'elle est aussi vérifiée par  $A_n = \mathcal{B}_n^{(i)}$ , toujours d'après 2.4.

Enfin, la condition 2° est vérifiée par  $\mathcal{B}_n$ , ceci d'après le lemme 2.5 appliqué à  $A_n = \mathcal{N}_n$ . Supposons la condition 2° vérifiée par  $A_n = \mathcal{B}_n^{(j)}$ ,  $j \leq i$ . La proposition 1.1 est alors vérifiée par les  $A_n = \mathcal{B}_n^{(i)}$ , de même que la proposition 1.5. Si les composantes  $a_1, \dots, a_n$  de  $a : (\mathbf{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{C}^n, 0)$

forment un système de paramètres de  $\mathcal{N}_n$ , il existe  $e_1, \dots, e_q \in \mathcal{N}_n$  formant une base de  $a_* \mathcal{N}_n$  sur  $\mathcal{N}_n$  et une base de  $a_* \mathcal{O}_n$  sur  $\mathcal{O}_n$ . D'après 1.5, les  $e_1, \dots, e_q$  forment aussi une base de  $a_* \mathcal{B}_n^{(i)}$  sur  $\mathcal{B}_n^{(i)}$ . D'après 2.5, si  $f \in \mathcal{O}_n$  vérifie  $f \circ a \in \mathcal{B}_n^{(i+1)}$ , on a  $f \in \mathcal{B}_n^{(i+1)}$ . Ceci démontre, par récurrence sur  $i$ , la condition 2° pour  $\mathcal{B}_n^{(i)}$ .

L'anneau  $\mathcal{B}_n^*$  vérifie quelques propriétés supplémentaires résumées dans la proposition suivante :

PROPOSITION 2.8 :

1°  $\mathcal{B}_n^*$  est le plus petit ensemble  $B$  de  $\mathcal{O}_n$  contenant  $\mathcal{P}_n$  et vérifiant la condition suivante : si  $f \in \mathcal{O}_n$  est solution d'un système :

$$a. \frac{\partial^p f}{\partial z_i^p} = \sum_{|\omega| < p} b_{i,\omega} \partial^\omega f, \quad i = 1, \dots, n,$$

avec

$$a \in B \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad b_{i,\omega} \in B,$$

on a  $f \in B$ ;

2°  $\mathcal{B}(\mathcal{B}_n^*) = \mathcal{N}(\mathcal{B}_n^*) = \mathcal{B}_n^*$ ;

3° si  $f = a.g, f \in \mathcal{B}_n^*, a \in \mathcal{B}_n^*$  et  $g \in \mathcal{O}_n$ , on a  $g \in \mathcal{B}_n^*$ .

En particulier,  $\mathcal{B}_n^*$  est un anneau local;

4° si  $a : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$  a ses composantes dans  $\mathcal{B}_n^*$  et si  $f \in \mathcal{B}_p^*$ , on a  $f \circ a \in \mathcal{B}_n^*$ .

Preuve. — Le 1° résulte de la définition même de  $\mathcal{B}_n^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n^{(i)}$ ; le 2° résulte du lemme 2.2; le 3° résulte de 2.3 et le 4° résulte de 2.6.

Les anneaux  $A_n = \mathcal{B}_n^*$  vérifient donc toutes les conditions de la proposition 1.7 sauf la condition 3° (théorème des fonctions implicites).

Soit  $A_n(\mathbb{C})$  l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans  $\mathcal{P}_n$ . Pour tout module à gauche de type fini, et  $\neq 0, M$  sur  $A_n(\mathbb{C})$ , on a  $n \leq \dim M \leq 2n$ ;  $M$  est un module de Bernstein si  $M = 0$  ou  $\dim M = n$  (cf. [1]). La proposition suivante fournit diverses caractérisations des éléments de  $\mathcal{B}_n$ .

PROPOSITION 2.9. — Soit  $f \in \mathcal{O}_n$ ;  $f \in \mathcal{B}_n$  si, et seulement si, les conditions suivantes (équivalentes) sont satisfaites :

1° l'espace vectoriel engendré sur  $[\mathcal{P}_n]$  (ou sur  $[\mathcal{N}_n]$ ) par les  $\partial^\omega f, \omega \in \mathbb{N}^n$ , est de dimension finie sur  $[\mathcal{P}_n]$  (ou sur  $[\mathcal{N}_n]$ );

2° il existe un entier  $p \geq 0, a, b_{i,\omega} \in \mathcal{P}_n$  (ou  $\in \mathcal{N}_n$ ),  $a \neq 0$ , tels que

$$a. \frac{\partial^p f}{\partial z_i^p} = \sum_{|\omega| < p} b_{i,\omega} \partial^\omega f, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n;$$

3°  $A_n(\mathbb{C}).f$  est un module de Bernstein sur  $A_n(\mathbb{C})$ .

*Preuve.* — D'après 2.2, les conditions 1° et 2° signifient l'une et l'autre que  $f \in \mathcal{B}_n$ . Le 3° entraîne le 2°, d'après BERNSTEIN (cf. [1]).

2°  $\Rightarrow$  3° : cela résulte du fait que tout polynôme  $P \in \mathcal{P}_n$  n'est pas diviseur de zéro pour  $A_n(\mathbb{C}).f \subset \mathcal{O}_n$ . Plus précisément, soit  $r$  la borne supérieure des degrés des polynômes  $a, b_{i,\omega}$ . En dérivant les relations 2°, on a, pour tout multi-indices  $\mu, |\mu|$  assez grand :

$$\partial^\mu f = \sum_{|\omega| < p} \frac{C_{\mu, \omega}}{a^{|\mu| - p + 1}} \partial^\omega f,$$

où  $C_{\mu, \omega} \in \mathcal{P}_n$  et  $\deg C_{\mu, \omega} \leq (|\mu| - p + 1)r$ . Donc, si  $\mu' \in \mathbb{N}^n$  et

$$|\mu| + |\mu'| = v,$$

$$z^{\mu'} \cdot \partial^\mu f = \sum_{|\omega| < p} \frac{d_{\mu', \mu, \omega}}{a^{v - p + 1}} \partial^\omega f,$$

où  $d_{\mu', \mu, \omega} \in \mathcal{P}_n$  et  $\deg d_{\mu', \mu, \omega} \leq v(r+1)$  pour  $|\mu|$  assez grand. Soit  $T_v$  le sous-espace de  $A_n(\mathbb{C})$  formé des opérateurs de degré total  $\leq v$ ; soit  $\rho_v$  la dimension de l'espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  formé des  $P \in \mathcal{P}_n$ ,  $\deg P \leq v$ . Visiblement, il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $v \geq 0$  :  $\dim_{\mathbb{C}} T_v.f \leq C \rho_v(r+1)$ ; ainsi, pour  $v$  assez grand,  $\dim_{\mathbb{C}} T_v.f$  est un polynôme en  $v$  de degré  $\leq n$ , i. e.  $A_n(\mathbb{C}).f$  est un module de Bernstein.

*Remarque 2.10.* — Soit  $f \in \mathcal{B}_n$ . Soit  $L(f)$  l'idéal à gauche de  $A_n(\mathbb{C})$ , formé des opérateurs  $D$  tels que  $D.f = 0$ . Si  $z \in \mathbb{C}^n$ , soit  $\mathcal{P}_z$  le localisé de  $\mathcal{P}_n$  en  $z$ , et soit  $\mathcal{O}_z$  l'anneau des germes de fonctions holomorphes en  $z$ . Désignons par  $\mathcal{P}_z[\partial]$ ,  $\mathcal{O}_z[\partial]$  les anneaux d'opérateurs différentiels à coefficients dans  $\mathcal{P}_z$  et  $\mathcal{O}_z$  respectivement. Enfin, soit  $v(f)$  la dimension sur  $[\mathcal{P}_n]$  de l'espace vectoriel engendré sur  $[\mathcal{P}_n]$  par les  $\partial^\omega f$ ,  $\omega \in \mathbb{N}^n$ .

Soit  $X_f$  l'ensemble des  $z \in \mathbb{C}^n$  tels que  $\mathcal{P}_z[\partial]/\mathcal{P}_z[\partial].L(f)$  ne soit pas un module de type fini sur  $\mathcal{P}_z$ . On voit facilement que  $X_f$  est une variété algébrique fermée de  $\mathbb{C}^n$  et que  $X_f \neq \mathbb{C}^n$  (1). En chaque point,  $z \in \mathbb{C}^n \setminus X_f$ ,  $\mathcal{P}_z[\partial]/\mathcal{P}_z[\partial].L(f)$  est un module de type fini sur  $\mathcal{P}_z$ , donc un module libre de type fini sur  $\mathcal{P}_z$ , d'après un résultat classique (cf. [1], chap. III). On vérifie alors que la dimension de ce module libre est constante sur  $\mathbb{C}^n \setminus X_f$  et égale à  $v(f)$ .

(1) Si  $X_f \neq \emptyset$ ,  $X_f$  est toujours une hypersurface, i. e.  $X_f$  est définie par une seule équation  $P=0$ ,  $P \in \mathcal{P}_n$ .

Pour tout  $z \in \mathbf{C}^n - X_f$ ,  $\mathcal{O}_z[\partial]/\mathcal{O}_z[\partial].L(f) = \mathcal{O}_z[\partial]/L_z(f)$  est donc un module libre de rang  $v(f)$  sur  $\mathcal{O}_z$ . Soit  $S_z(f)$  l'espace vectoriel des solutions de  $L_z(f)$ , i. e.  $S_z(f) = \{g \in \mathcal{O}_z; D.g = 0 \text{ pour tout } D \in L_z(f)\}$ . D'après [1], chapitre III,

$$\dim_{\mathbf{C}} S_z(f) = v(f).$$

Il en résulte facilement que  $f$  se prolonge analytiquement le long de tout chemin contenu dans  $\mathbf{C}^n \setminus X_f$ ; en outre, si  $f_z$  est l'un des germes en  $z \in \mathbf{C}^n \setminus X_f$  obtenu par prolongement analytique de  $f$ ,  $f_z \in S_z(f)$ .

*Remarques 2.11.*

(2.11.1)  $\mathcal{B}_n$  n'est pas local et n'est pas noethérien. Exemple, dû à LENGYEL, pour  $n = 1$  : si  $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ ,  $\cos \lambda z \in \mathcal{B}_1$ , mais  $(\cos \lambda z)^{-1} \notin \mathcal{B}_1$ , donc  $\mathcal{B}_1$  n'est pas local. En outre, la suite  $(\sin(z/2^p))$  est une suite croissante d'idéaux qui n'est pas stationnaire, donc  $\mathcal{B}_1$  n'est pas noethérien.

(2.11.2) Le théorème des fonctions implicites n'est pas vrai dans  $\mathcal{B}_n$  : par exemple,  $\text{arc tg } z \in \mathcal{B}_1$  mais  $\text{tg } z \notin \mathcal{B}_1$ . Il est sans doute faux dans  $\mathcal{B}_n^*$ , mais je n'ai pas de contre-exemple.

(2.11.3)  $e^z \in \mathcal{B}_1$ , mais  $e^{e^z} \in \mathcal{B}_1^{(2)} \setminus \mathcal{B}_1$ ; plus généralement, le germe  $e^{0^i}$  l'exponentielle composée  $(i-1)$  fois avec elle-même) appartient à  $\mathcal{B}_1^{(i)} \setminus \mathcal{B}_1^{(i-1)}$ .

(2.11.4) Si  $P \in \mathcal{P}_n$ ,  $P \neq 0$ , on note  $m(P)$  (resp.  $M(P)$ ) la borne inférieure (resp. la borne supérieure) des degrés des monômes qui interviennent dans  $P$ . Une série  $f = \sum_{\omega} a_{\omega} z^{\omega} \in \mathcal{O}_n$  étant supposée lacunaire, on peut, après regroupement des monômes  $a_{\omega} z^{\omega}$ , l'écrire sous la forme  $f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i$ , avec  $P_i \in \mathcal{P}_n \setminus \{0\}$  et, pour tout  $i \geq 0$ ,  $m(P_{i+1}) \geq M(P_i) + i$ . Une série lacunaire n'appartient jamais à  $\mathcal{B}_n$  : en effet, si  $f$  est solution du système d'équations aux dérivées partielles 2.9.2, tous les  $P_i$ , pour  $i$  assez grand, sont solutions du même système, ce qui est absurde puisque l'espace des solutions est de dimension finie sur  $\mathbf{C}$ .

Soit  $X$  un germe d'ensemble de Nash, réduit ou non. D'après 1.6 et le théorème 2.7, on sait définir les anneaux  $\mathcal{B}_X$ ,  $\mathcal{B}_X^{(i)}$  et  $\mathcal{B}_X^*$  : ce sont des sous-anneaux de  $\mathcal{O}_X$ . Si  $X$  est un germe irréductible, on a une caractérisation de  $\mathcal{B}_X$  analogue à celle de  $\mathcal{B}_n$ . Soit  $\text{Der}_{\mathbf{C}}[\mathcal{N}_X]$  l'ensemble des  $\mathbf{C}$ -dérivations de  $[\mathcal{N}_X]$  dans lui-même : une telle  $\mathbf{C}$ -dérivation se prolonge de manière unique en une  $\mathbf{C}$ -dérivation de  $[\mathcal{O}_X]$  dans lui-même.

**THÉORÈME 2.12.** — *Si  $f \in \mathcal{O}_X$ , les conditions suivantes sont équivalentes :*

1°  $f \in \mathcal{B}_X$ ;

2° l'espace vectoriel sur  $[\mathcal{N}_X]$ , engendré par tous les  $D_1 \dots D_s f$ ,  $s \in \mathbf{N}$ , et  $D_i \in \text{Der}_{\mathbf{C}}[\mathcal{N}_X]$ , est de dimension finie sur  $[\mathcal{N}_X]$ .

*Preuve.* — Soit  $p$  la dimension de  $X$ , et plongeons  $X$  dans  $(\mathbf{C}^n, 0)$ , d'où un isomorphisme  $\mathcal{N}_X \sim \mathcal{N}_n/I$ . Quitte à effectuer un changement linéaire de coordonnées sur  $\mathbf{C}^n$ , on peut supposer (cf. [2]) :

(i) si  $\mathcal{N}_p$  désigne l'anneau des germes de fonctions de Nash en les variables  $z_1, \dots, z_p$ , l'application  $\mathcal{N}_p \rightarrow \mathcal{N}_X$  est injective, et  $\mathcal{N}_X$  est un module de type fini sur  $\mathcal{N}_p$ ; en outre,  $\bar{z}_{p+1} = z_{p+1} \bmod I$  est un générateur de  $[\mathcal{N}_X]$  sur  $[\mathcal{N}_p]$ ;

(ii) si  $Z^q + \sum_{i=1}^q \Theta_i Z^{q-i}$  est le polynôme minimal de  $\bar{z}_{p+1}$ , on a  $\Theta_i \in \mathcal{N}_p$  (a priori  $\Theta_i \in [\mathcal{N}_p]$ );

(iii) si  $\delta$  est le discriminant de ce polynôme minimal,  $\delta \in \mathcal{N}_p \setminus \{0\}$ , et pour tout  $\xi \in \mathcal{O}_X$ , il existe  $b_1, \dots, b_q \in \mathcal{O}_p$  tels que  $\delta \cdot \xi = \sum_{j=1}^q b_j \bar{z}_{p+1}^{q-j}$

(iv) pour tout  $i = p+1, \dots, n$ , il existe un polynôme  $P_i \in I$ , distingué en  $z_i$ , à coefficients germes de fonctions de Nash des variables  $z_1, \dots, z_{i-1}$ .

Soit  $\mathcal{B}'_X$  le sous-ensemble de  $\mathcal{O}_X$  formé des germes qui vérifient la condition 2° du théorème. Les remarques suivantes sont à peu près évidentes :

(v)  $\mathcal{B}'_X$  est un anneau contenant  $\mathcal{N}_X$  et  $\mathcal{B}_p$ ;

(vi) Soit  $\text{Der}_{\mathbf{C}}[\mathcal{N}_p]$  l'ensemble des  $\mathbf{C}$ -dérivations de  $[\mathcal{N}_p]$  dans lui-même : une telle  $\mathbf{C}$ -dérivation se prolonge de manière unique en une  $\mathbf{C}$ -dérivation de  $[\mathcal{O}_X]$  dans lui-même. Si  $f \in \mathcal{O}_X$ , on a  $f \in \mathcal{B}'_X$  si, et seulement si, l'espace vectoriel sur  $[\mathcal{N}_p]$  engendré par tous les  $D_1, \dots, D_s f$ ,  $s \in \mathbf{N}$  et  $D_i \in \text{Der}_{\mathbf{C}}[\mathcal{N}_p]$  est de dimension finie (immédiat, car

$$\text{Der}_{\mathbf{C}}[\mathcal{N}_X] = \text{Der}_{\mathbf{C}}[\mathcal{N}_p] \otimes_{[\mathcal{N}_p]} [\mathcal{N}_X]$$

est de dimension finie sur  $[\mathcal{N}_p]$ ).

*Preuve de  $\mathcal{B}_X \subset \mathcal{B}'_X$ .* — Soit  $f \in \mathcal{B}_n$ . Par divisions successives par les polynômes  $P_n, P_{n-1}, \dots, P_{p+1}$  (cf. (iv) et 2.7), on voit qu'il existe  $g \in I \cdot \mathcal{B}_n$  telle que

$$f - g = \sum a_{\omega_1 \dots \omega_{n-p}} z_{p+1}^{\omega_1} \dots z_n^{\omega_{n-p}},$$

où la somme est finie, et  $a_{\omega_1 \dots \omega_{n-p}} \in \mathcal{B}_p$ . Donc, mod  $I \cdot \mathcal{B}_n$  :

$$\bar{f} = \sum a_{\omega_1 \dots \omega_{n-p}} \bar{z}_{p+1}^{\omega_1} \dots \bar{z}_n^{\omega_{n-p}}.$$

D'après (v),  $\bar{f} \in \mathcal{B}'_X$ ; d'où l'inclusion :  $\mathcal{B}_X \subset \mathcal{B}'_X$ .

*Preuve de  $\mathcal{B}'_X \subset \mathcal{B}_X$ .* — Il existe un corps  $K$ , extension finie de  $[\mathcal{O}_X]$ , dans lequel l'équation  $Z^q + \sum_{i=1}^q \Theta_i Z^{q-i} = 0$  admet  $q$  racines distinctes  $\bar{z}_{p+1} = x_1, x_2, \dots, x_q$ ; des  $[\mathcal{O}_p]$ -automorphismes  $\sigma_1 = \text{id}$ ,  $\sigma_2, \dots, \sigma_q$

de  $K$  tels que pour tout  $i$ ,  $\sigma_i(x_1) = x_i$ . Tout élément de  $\text{Der}_{\mathbb{C}}[\mathcal{N}_p]$  se prolonge de manière unique en une  $\mathbb{C}$ -dérivation de  $K$  dans lui-même. Si  $\xi \in K$ , désignons par  $E_{\xi}$  l'espace vectoriel sur  $[\mathcal{N}_p]$  engendré par les  $D_1 \dots D_s \xi$ , où  $s \in \mathbb{N}$ , et  $D_i \in \text{Der}_{\mathbb{C}}[\mathcal{N}_p]$ ; pour tout  $i = 1, \dots, q$ , et tout  $D \in \text{Der}_{\mathbb{C}}[\mathcal{N}_p]$ , on a visiblement  $\sigma_i D = D \sigma_i$ , d'où  $\sigma_i E_{\xi} = E_{\sigma_i(\xi)}$ .

Soit  $\xi \in \mathcal{B}'_X$ ; d'après (iii), il existe  $b_1, \dots, b_q \in \mathcal{O}_p$  tels que

$$\delta \cdot \xi = \sum_{j=1}^q b_j \cdot z_{p+1}^{q-j}$$

d'où pour tout  $i = 1, \dots, q$  :

$$\delta \cdot \sigma_i(\xi) = \sum_{j=1}^q b_j \cdot x_i^{q-j}$$

Remarquons que  $\delta = (\det |x_i^{q-j}|)^2$ . En résolvant ce système par rapport aux  $b_j$ , on trouve que  $b_j$  est un polynôme à coefficients entiers en les  $\sigma_i(\xi)$ , et  $x_i^{q-j} = \sigma_i(\bar{z}_{p+1}^{q-j})$ . On a  $\xi \in \mathcal{B}'_X$ ,  $\bar{z}_{p+1}^{q-j} \in \mathcal{B}'_X$ ; d'après (vi),  $E_{\xi}$  et  $E_{\bar{z}_{p+1}^{q-j}}$  sont des espaces vectoriels de dimension finie sur  $[\mathcal{N}_p]$ ; d'après une remarque antérieure, il en est de même de  $E_{\sigma_i(\xi)}$  et  $E_{x_i^{q-j}}$ , et donc de  $E_{b_j}$ ,  $j = 1, \dots, q$ . Ainsi  $b_j \in \mathcal{B}_p$  et  $\delta \cdot \xi \in \mathcal{B}_X$ .

Soit  $f \in \mathcal{O}_n$  telle que  $\bar{f} = \xi$ . Il existe  $b \in \mathcal{B}_n$ ,  $a_1, \dots, a_s \in I \subset \mathcal{N}_n$ ,  $f_1, \dots, f_s \in \mathcal{O}_n$  tels que

$$b = f \cdot \delta + \sum_{i=1}^s f_i \cdot a_i$$

D'après 1.3 et 2.7,

$$b = f' \cdot \delta + \sum_{i=1}^s f'_i \cdot a_i \quad \text{avec } f', f'_i \in \mathcal{B}_n$$

D'où

$$(f - f') \delta + \sum_{i=1}^s (f_i - f'_i) a_i = 0$$

Mais  $\delta$  n'est pas diviseur de zéro dans  $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_n/I \cdot \mathcal{O}_n$ ; donc :

$$f - f' \in I \cdot \mathcal{O}_n \quad \text{et} \quad \bar{f} = \bar{f}' = \xi \in \mathcal{B}_X$$

Ainsi,  $\mathcal{B}'_X \subset \mathcal{B}_X$ ,

C.Q.F.D.

*Remarques 2.13.*

(2.13.1) On a des caractérisations, analogues à celle du théorème 2.12, de  $\mathcal{B}_X^{(i)}$  et  $\mathcal{B}_X^*$ , lorsque  $X$  est un germe de Nash irréductible.

(2.13.2) Les résultats de 2.10 s'étendent au cas singulier. Soit  $\tilde{X}$  une sous-variété algébrique fermée et irréductible de  $\mathbb{C}^n$ , contenant l'origine, et soit  $X$  le germe de  $\tilde{X}$  en 0. Si  $f \in \mathcal{B}_X$ , il existe une sous-variété  $\tilde{Y}$  de  $\tilde{X}$  telle que  $\dim \tilde{Y} < \dim \tilde{X}$ ;  $\tilde{X} \setminus \tilde{Y}$  est une variété régulière de dimension égale à celle de  $\tilde{X}$ ; enfin,  $f$  est prolongeable analytiquement le long de tout chemin situé dans  $\tilde{X} \setminus \tilde{Y}$ .

### 3. L'anneau $\mathcal{C}_n$

PROPOSITION 3.1. — Soit  $f \in \mathcal{O}_n$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

1° le corps engendré sur  $\mathbf{C}$  par les  $\partial^\omega f$ ,  $\omega \in \mathbf{N}^n$ , est de degré de transcendance fini sur  $\mathbf{C}$ ;

2° il existe un entier  $p \geq 0$  et des polynômes  $P_1(X), \dots, P_n(X)$  non identiquement nuls, à coefficients dans l'anneau  $\mathbf{C}[\partial^\omega f]$ , avec  $|\omega| < p$ , tels que, pour  $i = 1, \dots, n$ ,

$$P_i\left(\frac{\partial^p f}{\partial z_i^p}\right) = 0.$$

Preuve. — Elle est immédiate et laissée au lecteur.

PROPOSITION 3.2. — Soit  $\mathcal{C}_n$  l'ensemble des  $f \in \mathcal{O}_n$  qui vérifient les conditions équivalentes de la proposition 3.1.  $\mathcal{C}_n$  est un anneau local unitaire et  $\mathcal{C}_n$  est stable par dérivation.

Preuve. — Elle est immédiate et laissée au lecteur.

PROPOSITION 3.3. — Soit  $f \in \mathcal{O}_n$ . Supposons qu'il existe un entier  $p \geq 0$ , des polynômes  $P_1(X), \dots, P_n(X)$  non identiquement nuls, à coefficients dans l'anneau  $\mathcal{C}_n[\partial^\omega f]$ , avec  $|\omega| < p$ , tels que, pour  $i = 1, \dots, n$ ,  $P_i(\partial^p f / \partial z_i^p) = 0$ ; alors  $f \in \mathcal{C}_n$ .

Preuve. — Soit  $\Delta$  le sous-ensemble de  $\mathcal{C}_n$  formé des coefficients de tous les polynômes coefficients des  $P_i(X)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Soit  $K$  le corps engendré sur  $\mathbf{C}$  par les éléments de  $\Delta$  et toutes leurs dérivées : le degré de transcendance de  $K$  sur  $\mathbf{C}$  est fini. En dérivant les relations  $P_i(\partial^p f / \partial z_i^p) = 0$ , on voit que les  $\partial^\omega f$  engendrent sur  $K$  un corps dont le degré de transcendance sur  $K$ , et donc sur  $\mathbf{C}$ , est fini.

C.Q.F.D

COROLLAIRE 3.4. —  $\mathcal{B}_n^* \subset \mathcal{C}_n$ .

THÉORÈME 3.5. — Les anneaux  $A_n = \mathcal{C}_n$  vérifient les conditions de la proposition 1.7. En conséquence, les anneaux  $\mathcal{C}_n$  sont des anneaux locaux réguliers de dimension  $n$  stables par dérivation; les anneaux  $\mathcal{C}_n$  vérifient le théorème des fonctions implicites et le théorème de préparation.

Preuve. — Vérifions les conditions 1°, ..., 5° de 1.7.

1° Visiblement, le degré de transcendance sur  $\mathbf{C}$  du corps engendré sur  $\mathbf{C}$  par les  $\partial^\mu f \circ a$  est  $\leq$  au degré de transcendance sur  $\mathbf{C}$  du corps engendré sur  $\mathbf{C}$  par les  $\partial^\mu f$ .



Soit  $K$  le corps engendré sur  $\mathbf{C}$  par les  $\partial^\mu a_i$ ,  $\omega \in \mathbf{N}^n$  et  $i = 1, \dots, p$  : le degré de transcendance de  $K$  sur  $\mathbf{C}$  est fini. Le corps engendré sur  $\mathbf{C}$  par les  $\partial^\mu (f \circ a)$  est contenu dans le corps engendré sur  $K$  par les  $\partial^\mu f \circ a$ , corps dont le degré de transcendance sur  $K$ , et donc sur  $\mathbf{C}$ , est fini, d'où le 1°.

2° Le corps engendré sur  $[\mathcal{P}_n]$  par les  $\partial^\omega (f \circ a)$  est le même que le corps engendré sur  $[\mathcal{P}_n]$  par les  $\partial^\mu f \circ a$ , car le jacobien

$$D(a_1, \dots, a_n)/D(z_1, \dots, z_n)$$

est  $\neq 0$ . Le corps engendré sur  $\mathbf{C}$  par les  $\partial^\mu f \circ a$  est donc de degré de transcendance fini sur  $\mathbf{C}$ . L'application  $a^* : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{O}_n$  étant injective, il en sera de même du corps engendré sur  $\mathbf{C}$  par les  $\partial^\mu f$ .

3° Le corps engendré sur  $[\mathcal{P}_n]$  par les  $\partial^\omega a_i$  est de degré de transcendance fini sur  $\mathbf{C}$ . Il en sera de même du corps engendré sur  $\mathbf{C}$  par les  $\partial^\omega b_i \circ a$ , et donc du corps engendré sur  $\mathbf{C}$  par les  $\partial^\omega b_i$ .

Enfin, 4° et 5° résultent de la remarque suivante (évidente) : si  $f = a \cdot g$ ,  $f \in \mathcal{C}_n$ ,  $a \in \mathcal{C}_n$  et  $g \in \mathcal{O}_n$ , on a  $g \in \mathcal{C}_n$ .

3.6. Les conséquences du théorème 3.5 sont nombreuses. Par exemple, le théorème d'Artin sur les solutions d'un système d'équations analytiques est vrai pour les anneaux  $\mathcal{C}_n$ . Les anneaux  $A_n = \mathcal{C}_n$  vérifient *a fortiori* les hypothèses de la proposition 1.1, donc toutes les propositions du paragraphe 1 s'appliquent à ces anneaux. En particulier, si  $X$  est un germe d'ensemble de Nash réduit ou non, on sait définir  $\mathcal{C}_X \subset \mathcal{O}_X$ . Si  $X$  est irréductible, et si  $f \in \mathcal{O}_X$ , on démontre l'équivalence des conditions suivantes :

1°  $f \in \mathcal{C}_X$ ;

2° le corps engendré sur  $[\mathcal{N}_X]$  par tous les  $D_1 \dots D_s f$ ,  $s \in \mathbf{N}$  et  $D_i \in \text{Der}_{\mathbf{C}}[\mathcal{N}_X]$ , est de degré de transcendance fini sur  $[\mathcal{N}_X]$  (les notations sont celles de 2.12; la preuve est analogue).

*Remarque 3.7.* — Il n'est pas trivial d'exhiber une série appartenant à  $\mathcal{O}_n \setminus \mathcal{C}_n$ . On peut procéder comme suit. Rappelons tout d'abord qu'un sous-ensemble  $\Sigma$  de  $\mathcal{O}_n$  est une *sous-variété algébrique fermée* de  $\mathcal{O}_n$  s'il existe une famille dénombrable de polynômes  $P_i \in \mathbf{C}[y_\omega]_{\omega \in \mathbf{N}^n}$  telle que

$$f = \sum_{\omega \in \mathbf{N}^n} a_\omega z^\omega \in \Sigma \Leftrightarrow P_i(a_\omega) = 0 \text{ pour tout } i.$$

Si  $p, p' \in \mathbf{N}$ ,  $p' \geq p$ , soit  $\prod_{p,p'}$  la projection associant à tout polynôme  $\sum_{|\omega| \leq p'} a_\omega z^\omega$  le polynôme  $\sum_{|\omega| \leq p} a_\omega z^\omega$ ; soit  $\prod_p$  l'application associant à  $f = \sum_{\omega \in \mathbf{N}^n} a_\omega z^\omega$  le polynôme  $\sum_{|\omega| \leq p} a_\omega z^\omega$ .

On définit sans peine la codimension d'une sous-variété  $\Sigma$  de  $\mathcal{O}_n$  (cf. [2], p. 150). La variété  $\Sigma$  est de codimension infinie si, et seulement si, la condi-

tion suivante est satisfaite :  $\forall p \in \mathbb{N}$ , il existe un entier  $p' \geq p$  et une sous-variété algébrique  $V_{p, p'}$  de l'espace des polynômes de  $\text{deg} \leq p'$  telle que :

(i) quel que soit le polynôme  $f_p$  de  $\text{deg} \leq p$ ,  $V_{p, p'} \cap \prod_{p, p'}^{-1}(f_p)$  est une sous-variété algébrique propre de  $\prod_{p, p'}^{-1}(f_p)$ ;

(ii)  $\forall f_{p'} \in \prod_{p, p'}^{-1}(f_p) \setminus V_{p, p'}$ , on a  $\prod_{p'}^{-1}(f_{p'}) \cap \Sigma = \emptyset$ .

Munissons  $\mathcal{O}_n$  de la topologie fine (un système fondamental de voisinages de  $\Sigma a_\omega z^\omega$  est formé par les  $\mathcal{V}(\varepsilon_\omega)_{\omega \in \mathbb{N}^n}$ , où  $\varepsilon_\omega > 0$  pour tout  $\omega$ , et  $\mathcal{V}(\varepsilon_\omega) = \{ \Sigma b_\omega z^\omega, |a_\omega - b_\omega| < \varepsilon_\omega \text{ pour tout } \omega \}$ . On a le résultat suivant :

(3.7.1) Soit  $\Sigma_i$  une famille dénombrable de sous-variétés fermées de  $\mathcal{O}_n$  toutes de codimension infinie. Alors, si  $f_q = \sum_{|\omega| \leq q} a_\omega z^\omega$ ,

$$\prod_q^{-1}(f_q) \setminus \bigcup_{i=0}^\infty \Sigma_i$$

est dense dans  $\prod_q^{-1}(f_q)$  muni de la topologie fine.

*Preuve.* — Cela résulte de (i) et (ii) et du fait que  $\prod_q^{-1}(f_q)$  est un espace de Baire; la démonstration directe à partir de (i) et (ii) est d'ailleurs évidente.]

Soit  $i \in \mathbb{N}$ . Si  $f \in \mathcal{O}_n$ , considérons l'ensemble des

$$f_{v, \mu, \alpha} = z^v (\partial^{\mu^1} f)^{\alpha_1} \dots (\partial^{\mu^i} f)^{\alpha_i} \quad \text{où } v \in \mathbb{N}^n;$$

$\mu^1 < \dots < \mu^i \in \mathbb{N}^n$  (on suppose que  $\mathbb{N}^n$  est ordonné), et  $\mu = (\mu^1, \dots, \mu^i)$ ;  $\alpha_i \in \mathbb{N}$  et  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_i)$ ,  $|\alpha| \leq i$ . Posons

$$f_{v, \mu, \alpha} = \sum_{\omega \in \mathbb{N}^n} a_\omega^{v, \mu, \alpha} z^\omega;$$

les  $f_{v, \mu, \alpha}$  sont linéairement dépendants sur  $\mathbb{C}$ , si, et seulement si, la matrice  $(a_\omega^{v, \mu, \alpha})$  (qui a un nombre infini de lignes mais un nombre fini de colonnes) n'est pas de rang maximal, c'est-à-dire si tous les mineurs d'ordre maximal sont nuls. Ainsi, les  $f_{v, \mu, \alpha}$  sont linéairement dépendants sur  $\mathbb{C}$  si, et seulement si,  $f \in \Sigma_i$ , où  $\Sigma_i$  est une variété algébrique de codimension infinie (vérification immédiate). Posons  $\Sigma = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i$  : on voit que  $f \in \mathcal{O}_n \setminus \Sigma$  si, et seulement si, les  $\partial^\omega f$ ,  $\omega \in \mathbb{N}^n$ , sont algébriquement indépendantes sur  $\mathbb{C}[z]$ . On a  $\mathcal{C}_n \subset \Sigma$ , i. e.  $\mathcal{O}_n \setminus \mathcal{C}_n \supset \mathcal{O}_n \setminus \Sigma$ . D'après (3.7.1), on a le résultat suivant.

(3.7.2) Si  $f \in \mathcal{C}_n$  et si  $q \in \mathbb{N}$ , il existe  $g \in \mathcal{O}_n \setminus \mathcal{C}_n$  aussi proche que l'on veut de  $f$  pour la topologie fine, et vérifiant  $\prod_q(f) = \prod_q(g)$ .

*Remarque 3.8.* — En remplaçant  $\mathcal{O}_n$  par l'anneau  $\mathcal{F}_n = \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$ , on définirait des anneaux  $\overline{\mathcal{B}}_n, \overline{\mathcal{B}}_n^{(i)}, \overline{\mathcal{B}}_n^*, \overline{\mathcal{C}}_n$ . Les résultats précédents se transposent immédiatement.

PROBLÈMES. — Une série lacunaire (cf. 2.11.4) peut-elle appartenir à  $\mathcal{C}_n$ ? Que peut-on dire du prolongement analytique d'un germe appartenant à  $\mathcal{C}_n$ ?

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BJÖRK (Jan-Erik). — *The Weyl algebra  $A_n(\mathbb{C})$* , Lectures from the Summer School at Grebbestad, June 1975.
- [2] TOUGERON (J.-C.). — *Idéaux de fonctions différentiables*. — Berlin, Springer-Verlag, 1972, (Ergebnisse der Mathematik, 71).

(Texte reçu le 25 mai 1977.)

Jean-Claude TOUGERON,  
Département de Mathématiques et Informatique,  
Université de Rennes-I,  
avenue du Général-Leclerc, B.P. n° 25-A,  
35031 Rennes Cedex.