BULLETIN DE LA S. M. F.

MANUEL SAMUELIDES

Mesures de Haar et W^*-couple d'un groupoïde mesuré

Bulletin de la S. M. F., tome 106 (1978), p. 261-278
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1978__106__261_0>

Bull. Soc. math. France,
106, 1978, p. 261-278.

MESURES DE HAAR ET W^*-COUPLE D'UN GROUPOÏDE MESURÉ

PAR

MANUEL SAMUELIDES

[Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris]

RÉSUMÉ. — On définit une mesure de Haar à gauche sur un groupoïde comme l'intégrale d'un champ à gauche invariant pour une mesure quelconque sur l'ensemble des unités du groupoïde. L'ensemble des modules de ces mesures constitue une classe de similarité d'homomorphismes du groupoïde dans $\mathbf{R}^+$. Les représentations régulières gauches et les poids opératoriels associés à deux champs à gauche invariante sont construits par une procédure du type « poids dual » et comparés au moyen des densités de Radon-Nikodym des champs à gauche. L'unicité du W^*-couple de la représentation régulière pour tous les champs à gauche est prouvée.

SUMMARY. — A left Haar measure on a groupoid is defined as the integral of an invariant left field for any measure on the set of units. The modules of these measures define a similarity class of homomorphisms of the groupoid into $\mathbf{R}^+$. The left regular representations and the operator weights associated to left invariant fields are built using the group measure space construction and a computation of their Radon-Nikodym densities is given. The W^*-couple is the same for any left invariant field.

Introduction

Dans ce travail, le produit croisé et le produit croisé réduit de Krieger sont généralisés pour un groupoïde analytique mesuré quelconque. On commence par définir la notion de champ à gauche invariant et, à partir de celle-ci, celle de mesure de Haar à gauche d'un groupoïde mesuré (paragraphe 1); il apparaît ainsi que la décomposition invariante d'une mesure de Haar n'est unique en général que dans le cas d'un groupoïde ergodique. On montre ensuite (paragraphe 2) que les homomorphismes modulaires qu'on peut associer à ces mesures sont tous les éléments d'une classe de similarité ou de cohomologie. La construction standard du W^*-couple est effectuée dans le paragraphe 3. Dans le paragraphe 4, on montre l'unicité du W^*-couple ainsi associé à un groupoïde, et on compare les différents poids obtenus sur le W^*-couple au moyen des constructions standard de 3.

La valeur générale de ces constructions est une conséquence directe du résultat dû à P. HAHN [2], affirmant l'existence de mesures de Haar sur n'importe quel groupoïde analytique mesuré. Celui-ci développe dans la suite de [2] une construction standard. Cependant, la définition plus restrictive qui est donnée d'une mesure de Haar masque les résultats soulignés ici dans les paragraphes 1 et 2. Surtout, elle conduit à penser que l'algèbre de convolution des fonctions sur le groupoïde G, notée $I(G)$ dans [2], et par suite l'algèbre hilbertienne à gauche sont uniques à isomorphisme près. On verra ici, au paragraphe 4, qu'il n'en est rien. La comparaison des poids sur la W^*-algèbre régulière gauche du groupoïde G se fait naturellement au moyen des densités-opérateurs affiliés.

En conclusion, il semble bien que la classe d'objets adaptée à la caractérisation des algèbres de groupoïde ne soit pas celle des mesures de Haar à gauche, mais celle des champs à gauche invariants.

1. Mesures de Haar sur un groupoïde mesuré

Un *groupoïde* G est un ensemble muni d'une loi de composition non partout définie associative et régulière telle que tout élément x de G admette une unité à droite $d(x)$, une unité à gauche $r(x)$ et un inverse x^{-1} qui sont uniques d'après la régularité de la loi. On note $G^{(0)}$ l'ensemble des unités de G, et $G^{(2)}$ l'ensemble des couples d'éléments composables de G. On a en particulier :

$xx^{-1} = r(x);$

$x^{-1}x = d(x);$

$d(x) = r(y) \Leftrightarrow (x, y)\ G^{(2)}.$

Dans ce travail, on appelle *groupoïde mesuré* un groupoïde G :

– muni d'une structure borélienne analytique telle que :

(*a*) l'application $x \in G \to x^{-1} \in G$ soit borélienne;

(*b*) l'ensemble $G^{(2)}$ est borélien dans $G \times G$ muni de la tribu produit;

(*c*) l'application $(x, y) \in G^{(2)} \to xy \in G$ est borélienne;

– muni d'une classe d'équivalence $\mathscr{C}$ de mesures positives σ-finies sur la tribu borélienne de G possédant les deux propriétés suivantes :

(*a*) *symétrie :* $\mathscr{C}$ est invariante par l'application $x \in G \to x^{-1} \in G$,

(*b*) *invariance à gauche :* si on désigne par $(G^{(0)}, \mathscr{C}^{(0)})$ l'espace borélien analytique mesuré obtenu en munissant $G^{(0)}$ de la structure borélienne trace de celle de G et de la classe de mesures $\mathscr{C}^{(0)}$, image de $\mathscr{C}$ par d ou r, et si, pour u éléments de $G^{(0)}$, on désigne par $(G, \mathscr{C}^u)$ une désintégration de $(G, \mathscr{C})$ pour r (deux désintégrations ne différant que sur un ensemble de mesure $\mathscr{C}^{(0)}$-nulle), alors pour $\mathscr{C}$-presque tout x, $(G, \mathscr{C}^{r(x)})$ est l'image de $(G, \mathscr{C}^{d(x)})$ par la translation à gauche de x.

On peut remarquer qu'un groupoïde mesuré possède aussi une propriété d'invariance à droite analogue à (*b*). Ces objets ont été étudiés systématiquement dans [3].

Dans la suite, on notera $u \in G^{(0)} \to \beta^u \in \mathscr{C}^u$ une application $\mathscr{C}^{(0)}$-mesurable, définie pour une désintégration $(G, C^u)_{u \in G^{(0)}}$ de $(G, \mathscr{C})$ pour r. En réalité, on ne considère que les classes d'équivalence modulo $\mathscr{C}^{(0)}$ de telles applications qu'on appelle *champ à gauche mesurable*, leur définition est donc indépendante du choix de la désintégration.

On dit qu'un champ à gauche mesurable est *invariant* si, pour presque tout x de G, $\beta^{r(x)}$ est l'image de $\beta^{d(x)}$ par la translation à gauche de x.

On dit qu'un champ à gauche mesurable est *intégrable* s'il admet une intégrale σ-finie pour une mesure de $\mathscr{C}^{(0)}$, donc pour toute mesure de $\mathscr{C}^{(0)}$.

Définition 1. — On appelle *mesure de Haar à gauche* une mesure de $\mathscr{C}$ intégrale pour une mesure de $\mathscr{C}^{(0)}$ d'un champ à gauche intégrable et invariant.

Dans [2], P. HAHN construit, dans tout groupoïde mesuré $(G, \mathscr{C})$, des mesures de Haar à gauche, intégrales, de champs à gauche mesurables intégrables invariants pour des mesures de $\mathscr{C}^{(0)}$, images de probabilités symétriques de $\mathscr{C}$.

En considérant les désintégrations $(G, \mathscr{C}_u)$ de $(G, \mathscr{C})$ pour d, on peut définir de même les champs à droite mesurables, notés $u \in G^{(0)} \to \beta_u \in \mathscr{C}_u$, les champs à droite invariants, les champs à droite intégrables, et les mesures de Haar à droite sur un groupoïde mesuré $(G, \mathscr{C})$. L'application inverse $x \in G \to x^{-1} \in G$ échange les objets à gauche et les objets à droite.

Exemples :

Systèmes dynamiques. — Soit $(\Gamma, X, \mathscr{N})$ un système dynamique mesuré, i. e. un groupe standard d'automorphismes boréliens d'un espace analytique mesuré $(X, \mathscr{N})$ tel que $\mathscr{N}$ soit Γ-invariante (on note à droite l'action de Γ). L'ensemble $\Gamma \times X$ est muni de la structure de groupoïde mesuré par :

$(g, x)(h, x, g) = (gh, x)$;

$r(g, x) = (e, x)$;

$d(g, x) = (e, xg)$;

$(g, x)^{-1} = (g^{-1}, xg)$.

La classe de mesures sur ce groupoïde est le produit de la classe invariante de Γ par $\mathscr{C}$.

Alors, si dg est une mesure de Haar à gauche sur Γ, le champ $(e, x) \to dg \otimes \delta_x$ est un champ à gauche invariant car

$$\int f\{(g, x)(h, xg)\}\,dh = \int f(gh, x)\,dh = \int f(h, x)\,dh.$$

Relations d'équivalence mesurées. — On peut munir le graphe d'une relation d'équivalence mesurée sur un espace analytique mesuré $(X, \mathcal{N})$ de la structure de groupoïde mesuré par :

$(x, y)(y, z) = (x, z)$;

$r(x, y) = (y, y)$;

$d(x, y) = (x, x)$;

$(x, y)^{-1} = (y, x)$.

Un champ invariant à gauche est un champ $\mathcal{N}$-mesurable $x \in X \to \beta^x$, où β^x est une mesure portée par la classe de x et telle que

$$\int f\{(x, y)(y, z)\}\,d\beta^y(z) = \int f(x, z)\,d\beta^x(z) \quad \Leftrightarrow \quad \beta^y = \beta^x$$

pour presque tout (x, y) du graphe de la relation d'équivalence mesurée.

Le choix d'un tel champ $\mathcal{N}$-mesurable est trivial si les classes d'équivalence sont toutes finies ou dénombrables, ou si la relation d'équivalence est dénombrablement séparée. Dans le cas où celle-ci est la relation d'équivalence orbitale d'un système dynamique mesuré, on construit directement dans [4] un tel champ à gauche invariant en utilisant la structure borélienne associée à la topologie de Fell.

PROPOSITION 1. — *Soient $(\beta_1^u)_{u \in G^{(0)}}$ et $(\beta_2^u)_{u \in G^{(0)}}$ deux champs à gauche invariants. Il existe ψ, application mesurable de $G^{(0)}$ dans $\mathbf{R}^+$, telle que pour $\mathscr{C}^{(0)}$-presque tout u, $(d\,\beta_2^u/d\,\beta_1^u) = \psi \circ d$.*

Démonstration. — On montre comme dans le théorème 1-8 de [2] que si on pose

$$\gamma^u = (d\beta_2^u/d\beta_1^u), \qquad \text{pour } \mathscr{C}^{(0)} \text{ presque tout } u,$$

on a

$$0 = \int |\gamma^{d(x)}(x^{-1}y) - \gamma^{r(x)}(y)|\,d\beta^{r(x)}(y)\,d\beta^u(x)$$
$$= \int |\gamma^{r(x)}(x) - \gamma^{r(y)}(y)|\,d\beta^{d(y)}(x^{-1})\,d\beta^u(y).$$

Ainsi, pour $\mathscr{C}^{(0)}$-presque tout u, l'application $x \in d^{-1}(u) \to \gamma^{r(x)}(x)$ est $\mathscr{C}_u$ essentiellement constante.

Il existe alors un relèvement mesurable de d, soit s, vérifiant, pour $\mathscr{C}^{(0)}$-presque tout u,

$$\gamma^{r\{s(u)\}}\{s(u)\} = \gamma^{r(x)}(x) \qquad \text{pour } \mathscr{C}_u \text{ presque tout } x.$$

On pose alors

$$\psi(u) = \gamma^{r\{s(u)\}}\{s(u)\} \qquad \text{et} \qquad \psi\{d(x)\} = \gamma^{r(x)}(x)\mathscr{C} \quad \text{p.p.}$$

COROLLAIRE 1. — *Soit* β *une mesure de Haar à gauche intégrale du champ à gauche invariant* (β^u) *pour une mesure* ρ *de* $\mathscr{C}^{(0)}$. *Pour que* $\rho' \in \mathscr{C}$ *soit une mesure de Haar à gauche sur* $(G, \mathscr{C})$, *il faut et il suffit qu'existent deux applications* φ *et* ψ *de* $G^{(0)}$ *dans* $\mathbf{R}^+$ *mesurables telles que*

$$(d\beta'/d\beta) = (\varphi \circ r)(\psi \circ d).$$

Démonstration.

Condition *nécessaire :* si $\beta' = \int \beta'^u \, d\beta'(u)$, on pose $\varphi = (d\beta'/d\beta)$, l'application ψ est fournie par la proposition 1, et $(d\beta'/d\beta)$ a la forme annoncée.

Condition *suffisante* : on vérifie la définition d'une mesure de Haar à gauche en remarquant que si (β^u) est un champ à gauche invariant, le champ $\{(\psi \circ d)\, \beta^u\}$ aussi.

LEMME 1. — *Soit* E *un ensemble conégligeable de* G. *Alors*

$$E' = \{xy/(x, y) \in E \times E \cap G^{(2)}\}$$

est un ensemble conégligeable de G.

Démonstration. — Si E est conégligeable dans G, l'ensemble

$$E^{(0)} = \{u \in G^{(0)};\ E \text{ est } \mathscr{C}^u\text{-conégligeable}\}$$

est $\mathscr{C}^{(0)}$-conégligeable dans $G^{(0)}$. Alors, on pose

$$F = E \cap r^{-1}(E^{(0)}) \cap d^{-1}(E^{(0)}).$$

Comme $E^{(0)}$ est $\mathscr{C}^{(0)}$-conégligeable dans $G^{(0)}$, les ensembles $r^{-1}(E^{(0)})$ et $d^{-1}(E^{(0)})$ sont conégligeables dans G. Alors

$$F^{(0)} = \{u \in G^{(0)};\ F \text{ est } \mathscr{C}^u\text{-conégligeable}\}$$

est $\mathscr{C}^{(0)}$-conégligeable dans $G^{(0)}$. On choisit $u \in F^{(0)}$ et on a

$$E' \cap r^{-1}(u) = \{xy;\ (x, y) \in E \times E \text{ et } r(x) = u \text{ et } d(x) = r(y)\}.$$

Soit $x_u \in F \cap r^{-1}(u)$, alors :

$$\{x_u y;\ y \in E \cap r^{-1}[d(x_u)]\} \subset E' \cap r^{-1}(u).$$

D'autre part, comme $d(x_u) \in E^{(0)}$, l'ensemble $E \cap r^{-1} d(x_u)$ est $\mathscr{C}^{d(x_u)}$-conégligeable. Donc, par translation à gauche, l'ensemble $\{x_u y;\ y \in E \cap r^{-1}\{d(x_u)\}\}$ est $\mathscr{C}^u$-conégligeable. Ainsi, pour u élément de $F^{(0)}$, l'ensemble E' est $\mathscr{C}^u$-conégligeable; comme $F^{(0)}$ est $\mathscr{C}^{(0)}$-conégligeable, on en déduit le lemme.

PROPOSITION 2. — *Soit f une fonction définie sur $G^{(0)}$ et $\mathscr{C}^{(0)}$-mesurable. S'il existe g fonction définie sur $G^{(0)}$ et $\mathscr{C}^{(0)}$-mesurable vérifiant $f \circ r = g \circ d$ ($\mathscr{C}$ p. p.), alors $f \circ r = f \circ d$ ($\mathscr{C}$ p. p.).*

Démonstration. — Soit E l'ensemble conégligeable des éléments x de G vérifiant

$$f\{r(x)\} = g\{d(x)\} \quad \text{et} \quad f\{d(x)\} = g\{r(x)\}.$$

Si $(x, y) \in E \times E$, et si $d(x) = r(y)$, on a

$$f\{r(xy)\} = f\{r(x)\} = g\{d(x)\} = g\{r(y)\} = f\{d(y)\} = f\{d(xy)\}.$$

La proposition se déduit alors immédiatement du lemme ci-dessus.

COROLLAIRE 2. — *La désintégration invariante d'une mesure de Haar à gauche d'un groupoïde ergodique est unique à une constante multiplicative près.*

Démonstration. — Soient (β_1^u) et (β_2^u) deux champs à gauche invariants, ρ_1 et ρ_2 deux mesures de $\mathscr{C}^{(0)}$, tels que $\int \beta_1^u \, d\rho_1(u) = \int \beta_2^u \, d\rho_2(u)$. On pose

$$\psi \circ d = (d\beta_2^u / d\beta_1^u) \quad \text{et} \quad \varphi \circ r = (d\rho_2 / d\rho_1).$$

Comme, d'après l'hypothèse, on a $(\psi \circ d)(\varphi \circ r) = 1$, d'après la proposition précédente, on a

$$\varphi \circ r = \varphi \circ d \quad \mathscr{C}\,\text{p. p.}$$

Alors φ est constante par définition d'un groupoïde ergodique.

Remarque. — Il est clair que si le groupoïde n'est pas ergodique, on peut toujours, à partir d'une décomposition invariante d'une mesure de Haar à gauche $\int \beta^u \, d\rho(u)$, obtenir une autre decomposition

$$\int (\varphi \circ r)\, \beta^u \frac{1}{\psi \circ d} \, d\rho(u)$$

si φ est une fonction définie sur $G^{(0)}$ positive et $\mathscr{C}^{(0)}$-mesurable telle que $\varphi \circ r = \varphi \circ d$.

Si l'homomorphisme modulaire défini au paragraphe 2 ne dépend que de la mesure de Haar à gauche, la construction standard du paragraphe 3 n'est pas relative à une mesure de Haar à gauche mais à un champ à gauche invariant et à une mesure de $\mathscr{C}^{(0)}$.

2. Homomorphisme modulaire d'un groupoïde mesuré

Soit $(G, \mathscr{C})$ un groupoïde mesuré; soit (β^u) un champ à gauche intégrable sur $(G, \mathscr{C})$, et soit β' une mesure finie de $\mathscr{C}$; alors $\delta_x \otimes \beta^{d(x)}\, d\beta'(x)$ est une mesure σ-finie sur $G^{(2)}$, dont la classe d'équivalence est indépendante du choix de (β^u) et de β', soit $\mathscr{C}^{(2)}$ cette classe de mesures qu'on peut encore définir en intégrant des champs à droite.

Définition 2.

(*a*) On appelle *homomorphisme du groupoïde mesuré* $(G, \mathscr{C})$ dans le groupe borélien analytique Γ une application mesurable δ de G dans Γ vérifiant

$$\delta(xy) = \delta(x)\delta(y)\mathscr{C}^{(2)} \quad \text{p.p.}$$

(*b*) Soient δ_1 et δ_2 deux homomorphismes du groupoïde mesuré $(G, \mathscr{C})$ dans le groupe borélien analytique Γ; ils sont dits *similaires* quand il existe une application mesurable φ de $G^{(0)}$ dans Γ vérifiant

$$\delta_2(x) = \varphi\{r(x)\}\delta_1(x)\varphi\{d(x)\}^{-1}.$$

Les homomorphismes de groupoïdes et leurs similarités ont été étudiés dans [3]. Ils expriment la cohomologie du groupoïde mesuré. Dans le cas d'un système dynamique mesuré ou d'une relation d'équivalence mesurée, on retrouve la notion habituelle de cohomologie de ces objets.

Définition 3. — Soit β une mesure de Haar à gauche sur le groupoïde $(G, \mathscr{C})$. On note $\tilde{\beta}$ l'image de β par l'application inverse, et on pose $\delta = (d\beta/d\tilde{\beta})$. La fonction δ est appelée la *fonction modulaire* de $(G, \mathscr{C})$ associée à β.

THÉORÈME 1.

(*a*) *La fonction modulaire associée à une mesure de Haar du groupoïde mesuré est un homomorphisme de ce groupoïde dans* $\mathbf{R}^+$.

(*b*) *Toutes les fonctions modulaires associées aux mesures de Haar d'un groupoïde mesuré sont des homomorphismes similaires.*

(*c*) *Tout homomorphisme similaire à la fonction modulaire d'une mesure de Haar est la fonction modulaire d'une mesure de Haar sur le groupoïde.*

(Dans la démonstration, on choisit une mesure de Haar à gauche β, intégrale d'un champ à gauche invariant intégrable (β^u) pour la mesure ρ de $\mathscr{C}^{(0)}$.)

Démonstration.

(*a*) Soient f et g des fonctions boréliennes positives quelconques sur G. On a

$$\int f(x)g(y)\frac{\delta(xy)}{\delta(x)\delta(y)}\,d\beta^{d(x)}(y)\,d\beta(x)$$

$$= \int f(x^{-1})g(y)\delta(x^{-1}y)\delta(y)^{-1}\,d\beta^{r(x)}(y)\,d\beta^{u}(x)\,d\rho(u)$$

$$= \int f(x^{-1})g(y^{-1})\delta(x^{-1}y^{-1})\,d\beta^{d(y)}(x)\,d\beta(y)$$

$$= \int f(x^{-1}y)g(y^{-1})\delta(x^{-1})\,d\beta^{r(y)}(x)\,d\beta(y)$$

$$= \int f(xy)g(y^{-1})\,d\beta^{d(x)}(y)\,d\beta(x)$$

$$= \int f(yx)g(x^{-1})\,d\beta^{d(y)}(x)\,d\beta(y)$$

$$= \int f(x)g(x^{-1}y)\,d\beta^{r(y)}(x)\,d\beta(y)$$

$$= \int f(x)g(y)\,d\beta^{d(x)}(y)\,d\beta(x).$$

(*b*) Avec les notations du corollaire 1, étant données δ et δ' les fonctions modulaires respectives des mesures de Haar à gauche β et β', on a

$$\delta' = \delta(\varphi\circ r/\psi\circ r)/(\varphi\circ d/\psi\circ d)]$$

d'après la définition des fonctions modulaires par densités de Radon-Nikodym.

(*c*) Si $\delta' = \delta(\varphi\circ r/\varphi\circ d)$, où δ est la fonction modulaire associée à la mesure de Haar à gauche β, la fonction δ' est la fonction modulaire associée à la mesure de Haar à gauche $(\varphi\circ r)\,\beta$.

3. Construction standard associée à l'intégrale d'un champ invariant

Soit (β^u) un champ à gauche intégrable invariant sur un groupoïde mesuré $(G, \mathscr{C})$, et soit ρ une mesure de $\mathscr{C}^{(0)}$. On notera

$\beta = \int \beta^u \, d\rho(u)$ la mesure de $\mathscr{C}$ intégrale du champ a gauche invariant,

H l'espace de Hilbert $L^2(G, \beta)$ et δ la fonction modulaire associée à β mesure de Haar à gauche,

Δ l'opérateur autoadjoint non nécessairement borné de H de multiplication par cette fonction,

D et D' les sous-espaces vectoriels de H domaines respectifs des opérateurs autoadjoints $\Delta^{1/2}$ et $\Delta^{-1/2}$.

Quand, pour (f, g) élément de $H \times H$, les conditions suivantes sont vérifiées :

(*a*) l'application $y \to f(xy)\,g(y^{-1})$ est $\beta^{d(x)}$ intégrable pour $\mathscr{C}$ presque tout x,

(*b*) l'application $x \to \int f(xy)\,g(y^{-1})\,d\beta^{d(x)}(y)$ a un module de carré β-intégrable,

on définit l'élément de H suivant noté $f \star g$ par la formule

$$(f \star g)(x) = \int f(xy)\,g(y^{-1})\,d\beta^{d(x)}(y).$$

Définition 4.

(*a*) Si l'élément f de H est tel que $f \star \xi$ soit défini quand ξ décrit la boule unité de H, on dit que f est *borné à gauche*, et on pose : $L_f(\xi) = f \star \xi$. On note H_g l'ensemble des éléments de H bornés à gauche.

(*b*) Si l'élément f de H est tel que $\xi \star f$ soit défini quand ξ décrit la boule unité de H, on dit que f est *borné à droite*, et on pose : $R_f(\xi) = \xi \star f$. On note H_d l'ensemble des éléments de H bornés à droite.

LEMME 2. — *L'opérateur J de H, défini par $J(\xi)(x) = \overline{\xi(x^{-1})}\,\delta(x)^{-1/2}$ pour ξ élément de H, est une involution isométrique antilinéaire de H, et l'opérateur J vérifie $J(D) = D'$ et $J\Delta^{1/2} = \Delta^{-1/2}$.*

Démonstration. — La première assertion découle de

$$\| J(\xi) \|^2 = \int |\xi(x^{-1})|^2 \,\delta(x^{-1})\,d\beta(x) = \|\xi\|^2,$$

la seconde de

$$\int |\xi(x)|^2 \delta(x)\, d\beta(x) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int |\xi(x^{-1})|^2 \delta(x)^{-2}\, d\beta(x) < \infty,$$

la troisième est une vérification immédiate.

LEMME 3. — *H_g et H_d sont des sous-espaces vectoriels de H images l'un de l'autre par l'involution J, et l'on a $JL_f J = R_{J(f)}$.*

Démonstration.

$$\delta(x)^{-(1/2)} \overline{\int f(x^{-1} y) \overline{\xi(y)}\, \delta(y)^{1/2}\, d\beta^{r(x)}(y)} = \int \overline{f(y)}\, \xi(xy)\, \delta(y)^{1/2}\, d\beta^{a(x)}(y).$$

L'égalité ci-dessus est vraie dès que l'un des deux membres est défini et exprime alors l'égalité de $J(f\star J(\xi))$ et de $\xi\star J(f)$.

Il est trivial que H_g et H_d sont des sous-espaces vectoriels de H. Comme J est isométrique, l'égalité ci-dessus indique que f est borné à gauche si, et seulement si, $J(f)$ est borné à droite.

On pose $\mathcal{U} = H_g \cap D$ et $\mathcal{U}' = H_d \cap D'$, on constate que $J(\mathcal{U}) = \mathcal{U}'$. On note $\mathcal{U}^2$ (resp. $\mathcal{U}'^2$) le sous-espace vectoriel de H engendré par les éléments du type $f\star g$ pour (f, g) élément de $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{U}'\times\mathcal{U}'$).

LEMME 4. — *$\mathcal{U}^2$ et $\mathcal{U}'^2$ sont denses dans H.*

Démonstration. — On note $\beta = \int \beta_u\, d\rho(u)$ la désintégration de β pour d relative à ρ; alors $\tilde{\beta} = \int \tilde{\beta}_u\, d\rho(u)$ est la désintégration de $\tilde{\beta}$ pour r relative à ρ. Soit maintenant (p^u) un champ à gauche mesurable de probabilités sur $(G, \mathscr{C})$; il est intégrable, on pose $p = \int p^u\, d\rho(u)$, et on définit

$$P = (d\beta/dp) \qquad \text{et} \qquad Q = (d\tilde{\beta}/dp).$$

Par définition de l'homomorphisme modulaire de β, et par unicité des désintégrations pour r relatives à ρ des mesures β et $\tilde{\beta}$, on a alors d'une part

$$\delta(x) = Q(x)/P(x)\,\mathscr{C} \quad \text{p. p.},$$

et d'autre part

$$P = (d\beta^u/dp^u) \qquad \text{et} \qquad Q = (d\tilde{\beta}_u/dp^u)\,\mathscr{C}^u \quad \text{p. p.}$$

Soit K_n une suite croissante de boréliens de $G^{(0)}$ de mesure ρ finie et de réunion $G^{(0)}$. On pose :

$$F_n = \left\{ x \star G \text{ tels que } \frac{1}{n} \leqslant P(x) \leqslant n \text{ et } \frac{1}{n} \leqslant Q(x) \leqslant n \right\}$$

et

$$f_n = 1_r - 1_{(K_n) \cap F_n \cap d} - 1_{(K_n) \cap F_n} - 1.$$

Alors f_n est un élément de H, car $\int |f_n|^2 \, d\beta \leqslant n^2 \, \rho(K_n)$.

Si ξ appartient à H, pour montrer que $f_n \star \xi$ est défini, il suffit de montrer que, pour tout η élément de H, l'application $(y, x) \to f_n(xy) \, \xi(y^{-1}) \, \overline{\eta(x)}$ est $\left(\int \beta^{d(x)} \otimes \delta_x \, d\beta(x) \right)$-intégrable, ce que l'on constatera en remplaçant dans le calcul qui suit ξ et η par leurs modules respectifs :

$$\left| \int f_n(xy) \, \xi(y^{-1}) \, \overline{\eta(x)} \, d\beta^{d(x)}(y) \, d\beta^u(x) \, d\rho(u) \right|$$

$$\left| \int f_n(y) \, \xi(y^{-1} x) \, \overline{\eta(x)} \, d\beta^u(y) \, d\beta^u(x) \, d\rho(u) \right|$$

$$\left| \int f_n(y) \, \xi(x) \, \overline{\eta(yx)} \, d\beta^{d(y)}(x) \, d\beta^u(y) \, d\rho(u) \right|$$

$$\leqslant \int f_n(y) \left\{ \int |\xi(x)|^2 \, d\beta^{d(y)}(x) \right\}^{1/2} \left\{ \int |\eta(x)|^2 \, d\beta^{r(y)}(x) \right\}^{1/2} d\beta(y)$$

$$\leqslant \left\{ \int f_n(y) \left\{ \int |\xi(x)| \, d\beta^{d(y)}(x) \right\} d\beta(y) \right\}^{1/2}$$

$$\times \left\{ f_n(y) \left\{ \int |\eta(x)|^2 \, d\beta^{r(y)}(x) \right\} d\beta(y) \right\}^{1/2}.$$

On va utiliser maintenant les majorations ci-dessus, et l'expression de β par rapport à p, pour montrer que f_n est bornée à gauche :

– d'une part, on a

$$\int f_n(y) \, |\eta(x)|^2 \, d\beta^{r(y)}(x) \, d\beta(y)$$

$$\leqslant \int \left\{ \int_{F_n} P(y) \, dp^u(y) \right\} \left\{ \int |\eta(x)|^2 \, d\beta^u(x) \right\} d\rho(u)$$

$$\int f_n(y) \, |\eta(x)|^2 \, d\beta^{r(y)}(x) \, d\beta(y) \leqslant \| \eta \|^2,$$

– d'autre part, on a

$$\int f_n(y)\,|\,\xi(x)\,|^2\, d\beta^{d(y)}(x)\, d\beta(y)$$

$$\int f_n(y^{-1})\,|\,\xi(x)\,|^2\, d\beta^{r(y)}(x)\, d\tilde{\beta}(y)$$

$$\leqslant \int\left\{\int f_n(y^{-1})\, Q(y)\, dp^u(y)\right\}\left\{\int |\,\xi(x)\,|^2\, d\beta^u(x)\right\} d\rho(u)$$

$$\leqslant \int\left\{\int_{F_n} Q(y)\, dp^u(y)\right\}\left\{\int |\,\xi(x)\,|^2\, d\beta^u(x)\right\} d\rho(u) \leqslant n\,\|\,\xi\,\|^2;$$

donc $f_n \star \xi$ est défini, et $|f_n \star \xi \mid \eta) \leqslant n\,\|\,\xi\,\|.\|\,\eta\,\|$, f_n est donc borné à gauche. Comme f_n est la fonction indicatrice d'un sous-ensemble borélien symétrique de G,

$$J(f_n)(x) = \delta(x)^{-1/2} f_n(x) \leqslant n f_n(x), \qquad \text{donc} \quad J(f_n) \in H_g;$$

$$\Delta^{1/2}(f_n)(x) = \delta(x)^{1/2} f_n(x) \leqslant n f_n(x), \qquad \text{donc} \quad f_n \in D;$$

$$\Delta^{-1/2}(f_n)(x) = \delta(x)^{-1/2} f_n(x) \leqslant n f_n(x), \qquad \text{donc} \quad f_n \in D'.$$

En définitive, $f_n \in \mathscr{U} \cap \mathscr{U}'$, et il en est de même de toute fonction majorée en module par f_n.

On choisit maintenant un vecteur ξ de H orthogonal à $\mathscr{U}^2$, en particulier, ξ est orthogonal à $f(\varphi \circ r) \star g$ pour $(f, g, \varphi) \in \mathscr{U} \times \mathscr{U} \times L^\infty(G^{(0)}, \mathscr{C}^{(0)}$; en effet,

$$\int\left\{\int f(y)\,\varphi\circ r(y)\, g(y^{-1}x)\, d\beta^{r(x)}(y)\right\}\xi(x)\, d\beta^u(x)\, d\rho(u) = 0,$$

donc

$$\int f(y)\, g(y^{-1}x)\,\overline{\xi(x)}\, d\beta^u(y)\, d\beta^u(x) = 0, \qquad \text{pour } \mathscr{C}^{(0)} \text{ presque tout } u.$$

Soit G_m une famille dénombrable de boréliens de G séparatrice et génératrice. On pose $f_{n,m} = f_n\, 1_{G_m}$. Comme $f_{n,m} \in \mathscr{U}$, pour tout g de $\mathscr{U}$, il existe un ensemble conégligeable A de $G^{(0)}$ tel que, pour tout u dans A et pour tout couple d'entiers (m, n), on ait

$$\int_{G_m}\left\{\int g(y^{-1}x)\,\overline{\xi(x)}\, d\beta^u(x)\right\} 1_{F_n}(y)\, d\beta^u(y) = 0.$$

Pour tout entier n, il existe donc un ensemble conégligeable A_n de G tel que, pour tout y de A_n,

$$\left\{\int g(y^{-1}x)\overline{\xi(x)}\,d\beta^{r(y)}(x)\right\}1_{F_n}(y) = 0.$$

Donc, si $y \in \bigcap A_n$, comme $G = \bigcup F_n$,

$$\int g(y^{-1}x)\overline{\xi(x)}\,d\beta^{r(y)}(x) = \int g(x)\overline{\xi(yx)}\,d\beta^{d(y)}(x) = 0.$$

En faisant décrire à g l'ensemble $f_{n,m}$, on obtient un ensemble conégligeable B tel que, pour tout y dans B et pour tout couple d'entiers (m, n), on ait

$$\int f_{n,m}(x)\,\xi(yx)\,d\beta^{d(y)}(x) = \int_{G_m} f_n(x)\,\xi(yx)\,d\beta^{d(y)}(x) = 0.$$

Pour chaque entier n, il existe donc un ensemble $\left(\int \beta^{d(x)} \otimes \delta_x\, d\beta(x)\right)$-conégligeable de $G^{(2)}$, soit B'_n, tel que, pour tout (y, x) élément de B'_n, on ait $1_{F_n}(x)\,\xi(yx) = 0$. Donc, si $(y, x) \in B' = \bigcap B'_n$, on a $\xi(yx) = 0$, soit

$$\int |\xi^{(yx)}|\,d\beta^{d(y)}(x)\,d\beta^{u}(y)\,d\rho(u) = 0.$$

On en déduit, d'après l'invariance du champ à gauche (β^u), que $\xi = 0$ $\mathscr{C}$ presque partout.

On a ainsi démontré que $\mathscr{U}^2$ est dense. La même démonstration, en choisissant un ξ orthogonal à $\mathscr{U}'^2$, montrerait que $\mathscr{U}'^2$ est dense.

LEMME 5.
$f \in \mathscr{U} \Rightarrow J\Delta^{1/2}(f)\,\mathscr{U}$. On pose $f^{\#} = J\Delta^{1/2}(f)$, et on a $L_f^* = L_{f^{\#}}$.
$f \in \mathscr{U}' \Rightarrow \Delta^{1/2}J(f)\,\mathscr{U}$. On pose $f^{\flat} = \Delta^{1/2}j(f)$, et on a $R_f^* = R_{f^{\flat}}$.

Démonstration. — On vérifie que, pour tout f de $\mathscr{U}$ et pour tout couple (ξ, η) de vecteurs de H, on a $(\xi \mid f \star \eta) = (f^{\#} \star \xi \mid \eta)$. La deuxième assertion se déduit de la première après avoit vérifié que $J(f^{\flat}) = J(f)^{\#}$.

LEMME 6. — *La loi $\star$ est associative.*

La vérification de cette propriété est facile en utilisant l'invariance à gauche du champ (β^u).

THÉORÈME 2. — *$\mathscr{U}$, muni de l'opération $\star$ et de l'involution $\#$, est une algèbre hilbertienne à gauche achevée. $\mathscr{U}'$ est l'algèbre hilbertienne à droite achevée associée.*

Démonstration. — En fait, il suffit de montrer que $\mathscr{U}$ est une algèbre involutive, on a

$$(\{f\star g\}^{\#}\star h\,|\,k)=(h\,|\,f\star g\star k)=(f^{\#}\star h\,|\,g\star k)=(g^{\#}\star f^{\#}\star h\,|\,k).$$

L'opérateur Δ étant autoadjoint, $J\Delta^{1/2}$ est un opérateur fermé, ce qui achève de montrer que $\mathscr{U}$ est une algèbre hilbertienne à gauche. Il est clair, d'après les constructions de $\mathscr{U}$ et de $\mathscr{U}'$, que $\mathscr{U}'$ est l'algèbre hilbertienne à droite associée et que $\mathscr{U}$ et $\mathscr{U}'$ sont achevées.

4. W*-couple d'un groupoïde mesuré

Soit $(G, \mathscr{C})$ un groupoïde mesuré, (β_1^u) un champ à gauche intégrable invariant, ρ une mesure de $\mathscr{C}^{(0)}$; on pose alors $\beta_1=\int\beta_1^u\,d\rho_1(u)$ la mesure de Haar associée dont on note la fonction modulaire δ_1. On note $H_1=L^2(G,\beta_1)$, on considère $\mathscr{U}_1$ l'algèbre hilbertienne à gauche achevée, M_1 l'algèbre de Von Neumann à gauche correspondante, Δ_1 l'opérateur modulaire de multiplication par δ_1, et J_1 l'involution isométrique de la construction standard du paragraphe précédent; L_1 et R_1 sont les représentations standard de $\mathscr{U}_1$ et de $\mathscr{U}_1'$ dans $\mathscr{M}_1$ et dans $\mathscr{M}_1'$.

D'autre part, pour f dans $L^\infty(G^{(0)}, \mathscr{C}^{(0)})$ et ξ dans H_1, on pose

$$\pi_1(f)\xi(x)=f\circ r(x)\xi(x)$$

et

$$\theta_1(f)\xi(x)=f\circ d(x)\xi(x).$$

On a $J_1\,\pi_1(f)\,J_1=\theta_1(\bar{f})$, il est clair que π_1 et θ_1 sont des représentations normales fidèles de $L^\infty(G^{(0)}, \mathscr{C}^{(0)})$; on pose $\mathscr{A}_1=\pi_1\{L^\infty(G^{(0)}, \mathscr{C}^{(0)}\}$. On remarque que $\mathscr{A}_1$ est une sous-algèbre de Von Neumann abélienne de $\mathscr{M}_1$ incluse dans le centralisateur du poids associé à la représentation standard $(\mathscr{M}_1, H_1)$ considérée ici. Nous allons montrer que le W^*-couple $(\mathscr{M}_1, \mathscr{A}_1)$ est indépendant à un isomorphisme spatial près de la donnée de $\{(\beta_1^u), \rho_1\}$. Soit en effet un autre champ à gauche intégrable invariant $(\beta_2^u$, et ρ_2 une mesure de $G^{(0)}$; soient $\beta_2=\int\beta_2^u\,d\rho_2(u)$ et $\delta_2, H_2, \mathscr{U}_2, \mathscr{M}_2, \Delta_2, J_2, L_2, R_2, \pi_2, \theta_2, \mathscr{A}_2$ respectivement associés à la donnée de la désintégration invariante de la mesure de Haar à gauche β_2 dans la construction standard du paragraphe 3. On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 3. — *On pose* $\Psi\circ d=(d\beta_2^u/d\beta_1^u)$ *et* $\varphi=d\rho_1/d\rho_2$. *Soit* U *l'isomorphisme hilbertien de* H_1 *sur* H_2 *donné par*

$$U\xi(x)=\xi(x)\,\Psi\circ d(x)^{-1/2}\varphi\circ r(x)^{1/2}.$$

On a

$$(a) \qquad U J_1 U^{-1} = J_2,$$

$$(b) \qquad U \mathscr{A}_1(f) U^{-1} = \mathscr{A}_2(f),$$

$$(c) \qquad U \mathscr{M}_1 U^{-1} = \mathscr{M}_2.$$

Démonstration.

(a) est une simple vérification.

(b) est trivial. Pour une fonction f définie sur $G^{(0)}$ et $\mathscr{C}^{(0)}$-mesurable, on s'autorisera à noter pareillement les opérateurs dans les espaces de Hilbert H_1 et H_2 de multiplication par la fonction $f \circ r$, ces opérateurs s'échangent par U et sont affiliés respectivement aux algèbres de Von Neumann $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$.

(c) Il suffit de montrer que, pour tout f dans $\mathscr{U}_1$ et pour tout g dans $\mathscr{U}_2$, on a

$$U L_{1,f} U^{-1} R_{2,g} = R_{2,g} U L_{1,f} U^{-1}.$$

Or

$$\begin{aligned}
&U L_{1,f} U^{-1} R_{2,g}(x) \\
&\quad = \int \varphi\circ r(x)^{-1/2} \psi\circ d(x)^{-1/2} f(xy) \varphi\circ d(y)^{1/2} \\
&\qquad \times \psi\circ r(y)^{1/2} \xi(y^{-1}z) g(z^{-1}) \, d\beta_2^{r(y)}(z) \, d\beta_1^{d(x)}(y) \\
&\quad = \int \varphi\circ r(x)^{-1/2} \varphi\circ d(y)^{1/2} \\
&\qquad \times \psi\circ d(z) f(xy) \xi(y^{-1}z) g(z^{-1}) \, d\beta_1^{d(x)}(z) \, d\beta_1^{d(x)}(y) \\
&\quad = \int \varphi\circ r(x)^{-1/2} \varphi\circ d(y)^{1/2} f(xy) \xi(y^{-1}z) g(z^{-1}) \, d\beta_1^{r(z)}(y) \, d\beta_2^{d(x)}(z) \\
&\quad = \int \varphi\circ r(x)^{-1/2} \varphi\circ d(y)^{1/2} f(xzy) \xi(y^{-1}) g(z^{-1}) \, d\beta_1^{d(z)}(y) \, d\beta_2^{d(x)}(z) \\
&\quad = \int \varphi\circ r(xz)^{-1/2} \psi\circ d(xz)^{-1/2} f(xzy) \varphi\circ d(y)^{1/2} \\
&\qquad \times \psi\circ r(y)^{1/2} \xi(y^{-1}) g(z^{-1}) \, d\beta_1^{d(xz)}(y) \, d\beta_2^{d(x)}(z) \\
&\quad = R_{2,g} U L_{1,f} U^{-1} \xi(x).
\end{aligned}$$

Ainsi à un groupoïde mesuré $(G, \mathscr{C})$, on associe canoniquement un W^*-couple $(\mathscr{M}, \mathscr{A})$, où $\mathscr{A}$ est une sous-W^*-algèbre abélienne de $\mathscr{M}$. Si (β^u) est un champ à gauche intégrable invariant sur le groupoïde G et ρ une mesure de $\mathscr{C}^{(0)}$, la construction du § 3 fournit une représentation standard de $\mathscr{M}$, donc un poids Φ sur $\mathscr{M}$ tel que $\mathscr{A}$ soit une sous-W^*-algèbre abélienne du centralisateur de Φ. On se propose maintenant d'exprimer la densité de Radon-Nikodym de tels poids en fonction de la densité des champs mesurables et de celle des mesures de base. Pour cela, on reprend les notations précédentes en notant respectivement Φ_1 et Φ_2 les poids sur l'algèbre de Von Neumann $\mathscr{M}_1$, définis par les constructions standard associées à $\{(\beta_1^u), \rho_1\}$ et $\{(\beta_2^u), \rho_2\}$.

THÉORÈME 3. — *Soit h l'opérateur autoadjoint affilié à $\mathscr{A}$ de multiplication par $(\varphi \circ r)/(\psi \circ r)$. On a*

(*a*) $\Phi_2(.) = \Phi_1(h^{1/2}.h^{1/2})$, *et par conséquent*

(*b*) $(D\,\Phi_2 : D\,\Phi_1)_t = h^{it}$.

Démonstration. — Remarquons le résultat suivant, conséquence immédiate de la construction standard du § 3

$$\forall f \in L^\infty(G, \mathscr{C}), \quad \forall \xi \in \mathscr{U}, \qquad f\xi \in \mathscr{U}.$$

En particulier, soit E_n une suite croissante d'ensembles mesurables de G telle que $\bigcap^c(E_n)$ soit $\mathscr{C}$-négligeable. Alors, pour tout ξ élément de H, la suite $1_{E_n}\xi$ convergé vers ξ pour la topologie forte de H et, pour tout η élément de $\mathscr{U}$, la suite $L_{1_{E_n}\eta}$ converge vers L_η pour la topologie forte de $\mathscr{M}$.

On va poser

$$E_n = \left\{ x \in G;\ \frac{1}{n} \leqslant \varphi \circ d(x) \leqslant n,\ \frac{1}{n} \leqslant \varphi \circ d(x) \leqslant n,\ \frac{1}{n} \right.$$
$$\left. \leqslant \varphi \circ r(x) \leqslant n,\ \frac{1}{n} \leqslant \psi \circ r(x) \leqslant n \right\}.$$

Montrons que si f appartient à $\mathscr{U}_1$ et si $f.1_{E_n} = f$, alors f appartient à $\mathscr{U}_2$: pour tout couple de vecteurs (ξ, η) de H_1, on a

$$\begin{aligned}
&(f \star_2 U\xi \mid U\eta)_2 \\
&\quad = \int f(xy)\,\xi(y^{-1})\,\overline{\eta(x)}\,\varphi \circ d(y)^{-1/2}\,\psi \circ r(y)^{-1/2} \\
&\qquad \times \varphi \circ r(x)^{-1/2}\,\psi \circ d(x)^{-1/2}\,d\beta_2^{d(x)}(y)\,d\beta_2(x) \\
&\quad = \int f(xy)\,\xi(y^{-1})\,\overline{\eta(x)}\,\varphi\, d(xy)^{-1/2}\,\varphi \circ r(xy)^{1/2}\,\psi \circ d(xy)\,d\beta_1^{d(x)}(y)\,d\beta_1(x) \\
&\quad \leqslant n^2(|f| \star_1 |\xi| \mid |\eta|)_1.
\end{aligned}$$

Donc, d'après la remarque initiale, pour prouver le théorème, il suffit d'établir

$$f \in \mathscr{U}_1 \quad \text{et} \quad f.1_{E_n} = f \quad \Rightarrow \quad \Phi_2(L_{1,f}\,{}^*L_{1,f}) = \Phi_1(h^{1/2}\,L_{1,f}\,{}^*L_{1,f}\,h^{1/2}).$$

Avec l'hypothèse ci-dessus,

$$L_{1,f}\,h^{1/2} = L_{1,f\,(\varphi\circ d)}\,1/2_{(\psi\circ d)} - 1/2 \in \mathscr{M}_1$$

et

$$\Phi_1(h^{1/2}\,L_{1,f}\,{}^*L_{1,f}\,h^{1/2})$$

$$= \int |f(x)|^2\,\varphi\circ d(x)\,\psi\circ d(x)^{-1}\,d\beta_1(x)$$

$$= \int |f(x)\,\varphi\circ d(x)^{1/2}\,\varphi\circ r(x)^{-1/2}\,\psi\circ d(x)^{-1}\,|^2\,d\beta_2(x)$$

$$= \Phi_2\big[U^{-1}\,L_{2,f\,(\varphi\circ d)^{1/2}\,(\varphi\circ r)^{-1/2}\,(\psi\circ d)} - 1\,{}^*L_{2,f\,(\varphi\circ d)^{1/2}\,(\varphi\circ r)^{-1/2}(\psi\circ d)} - 1\,U\big].$$

Montrons maintenant que

$$f \in \mathscr{U}_1 \quad \Rightarrow \quad U^{-1}\,L_{2,f\,(\varphi\circ d)^{1/2}\,(\varphi\circ r)^{-1/2}\,(\psi\circ d)} - 1\,U = L_{1,f}.$$

$$\int f(xy)\,\xi(y^{-1})\,\overline{\eta(x)}\,d\beta_1^{d(x)}(y)\,d\beta_1(y)$$

$$= \int f(xy)\,U\xi(y^{-1})\,\psi\circ r(y)^{1/2}\,\varphi\circ d(y)^{1/2}$$

$$\times\,\overline{U\eta(x)}\,\psi\circ d(x)^{1/2}\,\varphi\circ r(x)^{1/2}\,d\beta_1^{d(x)}(y)\,d\beta_1(y)$$

$$= \int f(xy)\,\varphi\circ d(xy)^{1/2}\,\varphi\circ r(xy)^{-1/2}\,\psi\circ d(xy)^{-1}$$

$$\times\,U\xi(y^{-1})\,\overline{U\eta(x)}\,d\beta_2^{d(x)}(y)\,d\beta_2(x).$$

Donc,

$$\Phi_1(h^{1/2}\,L_{1,f}\,{}^*L_{1,f}\,h^{1/2}) = \Phi_2(L_{1,f}\,{}^*L_{1,f}).$$

COROLLAIRE 3.

(*a*) *Soit* (β^u) *un champ à gauche intégrable invariant. Il lui est associé canoniquement un poids opératoriel* T *sur* $\mathscr{M}$ *à valeurs dans* $\mathscr{A}$ *telle que, pour toute mesure* ρ *de* $\mathscr{C}^{(0)}$, *si* Φ *est le poids sur* $\mathscr{M}$ *associé à la donnée de* $\{(\beta^u), \rho\}$, *alors* $\Phi = \rho\circ T$.

(*b*) *Soient* (β_1^u) *et* (β_2^u) *deux champs à gauche intégrables invariants sur* $(G, \mathscr{C})$, *et* T_1 *et* T_2 *les poids opératoriels qui leur sont respectivement associés par le paragraphe* (*a*). *Alors,*

$$(DT_2 : DT_1)_t = (\psi \circ r)^{-it} \qquad \text{où} \quad \psi \circ d = (d\beta_2^u / d\beta_1^u).$$

Démonstration. — Ces résultats s'obtiennent en appliquant le corollaire 5.4 de [1] aux conséquences du théorème précédent.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HAAGERUP (U.). — *Operator valued weights in Von Neumann algebras* (à paraître).

[2] HAHN (P.). — *Haar measure and convolution algebras on ergodic groupoids*, Phil. D. Thesis.

[3] RAMSAY (A.). — Virtual groups and groups actions, *Advances in Math.*, t. 6, 1971, p. 253-322.

[4] SAMUELIDES (M.) et SAUVAGEOT (J.-L.). — Algèbre de Krieger d'un système dynamique, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 280, série A, 1975, p. 709-712.

(Texte reçu le 21 janvier 1977.)

Manuel SAMUELIDES,
Probabilités, Tour 56,
Université Pierre-et-Marie-Curie,
4, place Jussieu,
75230 Paris Cedex 05.