DANIEL BARLET

Convexité de l'espace des cycles

Bulletin de la S. M. F., tome 106 (1978), p. 373-397
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1978__106__373_0>

Bull. Soc. math. France,
106, 1978, p. 373-397.

CONVEXITÉ DE L'ESPACE DES CYCLES

PAR

DANIEL BARLET
[Université Nancy-I]

RÉSUMÉ. — Nous donnons une généralisation des résultats d'ANDREOTTI-NORGUET et NORGUET-SIU sur la convexité de l'espace des cycles.

Notre démonstration est indépendante du théorème de finitude d'ANDREOTTI-GRAUERT, et utilise seulement la généralisation de NORGUET-SIU de la réciproque du problème de Levi.

ABSTRACT. — We give a généralisation of the results of ANDREOTTI-NORGUET and NORGUET-SIU about convexity of the space of cycles.

Our proof is independant of ANDREOTTI-GAUERT's finitness theorem and use only NORGUET-SIU's generalisation of Levi's problem.

Le but de cet article est d'étudier les deux énoncés suivants :

ÉNONCÉ n° 1. — *Soit Z un espace analytique complexe de dimension finie, n-complet, c'est-à-dire admettant une fonction f d'exhaustion qui soit C^2, et fortement n-convexe sur Z (localement induite dans un plongement lisse par une fonction C^2 dont la forme de Levi en chaque point admet au plus n valeurs propres négatives ou nulles). Alors l'espace analytique complexe de dimension finie $\mathscr{C}_n(Z)$ des cycles analytiques compacts de dimension pure n de Z est* 0*-complet, c'est-à-dire de Stein* (1).

ÉNONCÉ n° 2. — *Soit Z un espace analytique complexe de dimension finie, fortement n-convexe, c'est-à-dire admettant une fonction d'exhaustion qui soit C^2 et fortement n-convexe en dehors d'un compact K de Z. Alors l'espace analytique complexe de dimension finie $\mathscr{C}_n(Z)$ des cycles analytiques compacts de dimension pure n de Z est holomorphiquement convexe.*

Précisons tout de suite (pour ceux qui commencent les romans policiers par la dernière page) que nous donnons une démonstration de l'énoncé n° 1 (théorème 4), et que l'énoncé n° 2 est faux en général (*voir* exemple 1 ci-dessous). Dans la direction de l'énoncé n° 2, nous donnerons deux résultats positifs : les théorèmes 5 et 5' dont les démonstrations suivent pas à pas

(1) Pour la définition de $\mathscr{C}_n(Z)$, *voir* [Ba 1].

celle de [N.S.]. L'exemple 1 ci-dessous montre qu'il sera difficile d'aller beaucoup plus loin dans cette direction.

Dans leurs articles [A.N.1] et [A.N.2], A. ANDREOTTI et F. NORGUET ont été les premiers à considérer ces questions, et ils ont prouvé ([A.N.2], th. 8) que dans le cas où Z est un ouvert lisse strictement (²) n-convexe d'une variété algébrique projective, les énoncés n° 1 et n° 2 sont vrais.

La méthode de démonstration repose sur la construction de suffisamment de fonctions analytiques sur l'espace $\mathscr{C}_n(Z)$, provenant d'intégration de classes de cohomologie dans $H^n(Z, \Omega^n)$ de manière à prouver l'holomorphe convexité (et la séparation des points dans le cas n-complet).

Dans leur article [N.S.], F. NORGUET et Y. T. SIU ont prouvé les énoncés n° 1 et n° 2 dans le cas où Z est un ouvert lisse (³) fortement n-convexe (resp. n-complet) d'une variété algébrique projective.

La méthode utilisée ici est mixte; on montre qu'il y a assez de fonctions analytiques sur l'espace $\mathscr{C}_n(Z)$ provenant d'intégration de classes de cohomologie dans $H^n(Z, \Omega^n)$ pour que l'enveloppe holomorphe d'un point dans $\mathscr{C}_n(Z)$ ait toujours des composantes connexes compactes (resp. soit toujours de dimension 0). La suite de la démonstration repose sur l'existence d'une fonction continue p. s. h. (faible) d'exhaustion sur les composantes connexes de $\mathscr{C}_n(Z)$, et sur un nouveau critère de 0-convexité (th. 2 de [N.S.]) qui donne une généralisation de la réciproque du problème de Levi de NARASIMHAN (th. 2′ de [N.S.]). Nous utiliserons ce dernier résultat pour prouver l'énoncé n° 1 (*voir* th. 0).

La démonstration de l'énoncé n° 1 que nous allons donner consiste à construire une fonction continue d'exhaustion fortement p. s. h. (au sens précisé plus loin) sur $\mathscr{C}_n(Z)$. Nous ne construirons pas de fonctions analytiques sur $\mathscr{C}_n(Z)$ par intégration de classes de cohomologie, ce qui nous permettra de ne pas utiliser le théorème de finitude d'Andreotti-Grauert [A.G.] dans cette démonstration.

Chapitre 0

Exemple 1. — Soit V l'éclaté de $\mathbf{C}^4$ en 0, et notons par p la projection naturelle de V sur $\mathbf{C}^4$. Identifions $p^{-1}(0)$ avec $\mathbf{P}_3(\mathbf{C})$ l'espace projectif complexe de dimension 3. Soit D une droite projective de $\mathbf{P}_3(\mathbf{C})$, et soit C

(²) On demande à la fonction d'exhaustion d'avoir exactement n valeurs propres strictement négatives pour sa forme de Levi en chaque point.

(³) Cette restriction est sans objet dès que l'on a la définition de l'intégration des classes de cohomologie sur les cycles dans un espace singulier (*voir* [Ba 1], chap. VII).

une conique de $\mathbf{P}_3(\mathbf{C})$ vérifiant $C \cap D = \emptyset$. Soit $i : D \xrightarrow{\sim} C$ un isomorphisme algébrique, et considérons sur V la relation d'équivalence qui identifie D et C à l'aide de i. C'est une relation d'équivalence analytique, propre, dont les classes sont réduites à un ou deux points; l'ensemble quotient W, muni de la structure annelée quotient, est alors un espace analytique réduit (la condition de H. CARTAN étant vérifiée). Comme l'application p est constante sur les classes d'équivalences, elle passe au quotient, en une application $\bar{p} : W \to \mathbf{C}^4$ qui est propre, et induit un isomorphisme de $W - \bar{p}^{-1}(0)$ sur $\mathbf{C}^4 - \{0\}$. Ceci montre que W est fortement 0-convexe (donc fortement 1-convexe!). Nous allons montrer que $\mathscr{C}_1(W)$ n'est pas holomorphiquement convexe en montrant que cet espace est connexe, non compact, et que ses composantes irréductibles sont compactes (ce qui impose à toute fonction analytique sur $\mathscr{C}_1(W)$ d'être constante).

Comme les cycles C et $2.D$ sont dans la même composante connexe de $\mathscr{C}_1(V) = \mathscr{C}_1(\mathbf{P}_3)$, on obtient par image directe sur W que les cycles D et $2.D$ sont dans la même composante connexe de $\mathscr{C}_1(W)$; on en déduit immédiatement que D et $n.D$ sont dans la même composante connexe de $\mathscr{C}_1(W)$, et donc que cet espace est connexe et non compact. D'autre part, les composantes irréductibles de $\mathscr{C}_1(V) = \mathscr{C}_1(\mathbf{P}_3)$ sont compactes et s'identifient par image directe aux composantes irréductibles de $\mathscr{C}_1(W)$.

Ceci montre que l'énoncé n° 2 est faux en général.

Il apparaît sur cet exemple que l'énoncé n° 2 est faux essentiellement parce que les composantes connexes de l'espace des cycles d'un espace compact ne sont pas nécessairement compactes (4).

Des restrictions du « type Kähler » permettent d'écarter ces canulars puisque les composantes connexe de $\mathscr{C}_n(Z)$, pour Z compact kählérien, sont compactes (5).

Il semble donc raisonnable, pour avoir un énoncé n° 2 vraisemblable, de demander que le compact exceptionnel K de Z possède un voisinage ouvert de « type kählérien » (*voir* théorème 5).

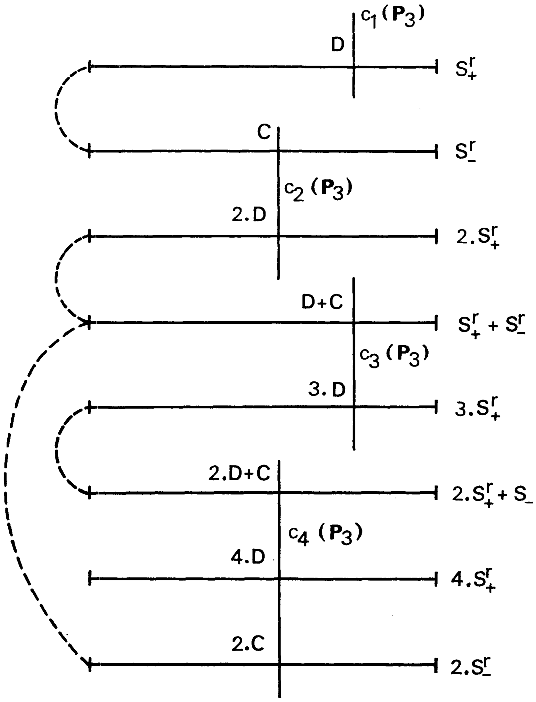
L'exemple qui suit montre ce que donne le procédé de l'exemple 1 quand on le « noue » de loin, ce qui permet au compact exceptionnel d'avoir un voisinage kählérien.

Exemple 2. — Soit $\varepsilon > 0$, ε très petit devant 1.

(4) Le lecteur trouvera dans [Li] un exemple d'espace compact Z tel qu'une composante irréductible de $\mathscr{C}_n(Z)$ soit non compacte.

(5) D'après le théorème 1, le volume relatif à la forme kählérienne est constant sur les composantes connexes de $\mathscr{C}_n(Z)$; elles sont alors compactes d'après le théorème 2

Soit $S = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbf{C}^4;\ z_1^2 - \varepsilon^2 z_2^2 = 1 \text{ et } z_3 = 0\}$. Notons par V_0 l'éclaté de $\mathbf{C}^4$ le long de S, et par V l'éclaté de V_0 à l'origine. Notons par γ_+ et γ_- les fibres de V au-dessus des points $(1, 0, 0, 0)$ et $(-1, 0, 0, 0)$ respectivement. Identifions par ailleurs la fibre de V en $(0, 0, 0, 0)$ à $\mathbf{P}_3(\mathbf{C})$. Soient D et C une droite et une conique de $\mathbf{P}_3(\mathbf{C})$ vérifiant $D \cap C = \emptyset$.



Comme γ_+ et γ_- sont deux droites projectives, choisissons des isomorphisme algébriques $i : \gamma_+ \xrightarrow{\sim} D$ et $j : \gamma_- \xrightarrow{\sim} C$, et notons par W l'espace analytique obtenu à partir de V en identifiant γ_+ et D par i, et γ_- et C par j (cet espace analytique quotient existe pour les mêmes raisons que dans l'exemple 1). La projection de V sur $\mathbf{C}^4$ induit une application propre de W sur l'espace analytique obtenu en identifiant dans $\mathbf{C}^4$ les points $(1, 0, 0, 0)$ et $(-1, 0, 0, 0)$ à l'origine; ce quotient X de $\mathbf{C}^4$ étant de Stein, on en déduit que W est holomorphe convexe. De plus, comme X est lisse sauf en un point, une fonction d'exhaustion C^2 fortement p. s. h. sur X donnera par image réciproque une fonction d'exhaustion C^2 fortement 1-convexe en dehors de $\mathbf{P}_3$ sur W puisque la projection de W sur X est de rang au moins 3 en chaque point de $W - \mathbf{P}_3$.

Si U est un voisinage ouvert assez petit de l'origine de X, l'image réciproque de U sur W est projective (c'est-à-dire analytiquement isomorphe à un ouvert d'une variété algébrique projective), car les trois composantes irréductibles A_0, A_+ et A_- de cette image réciproque sont projectives, $A_+ \cap A_- = \emptyset$, $A_+ \cap A_0$ et $A_- \cap A_0$ sont irréductibles et disjoints.

Ceci montre que $\mathbf{P}_3$, le compact exceptionnel de W admet un voisinage ouvert projectif, donc kählérien.

Soit $r > 1$; notons par X_r l'image dans X de la boule ouverte de centre 0 et de rayon r de $\mathbf{C}^4$, et par W_r l'image réciproque sur W de X_r.

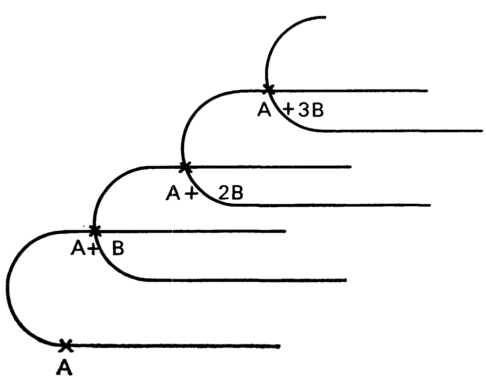
Nous allons montrer que l'espace $\mathscr{C}_1(W_r)$ est connexe pour $r > 1/\varepsilon$, alors qu'il ne l'est pas pour $r \leqslant 1/\varepsilon$.

Commençons par remarquer que la trace de S sur la boule de centre 0 et de rayon r a deux composantes connexes S_+^r et S_-^r contenant respectivement $(1, 0, 0, 0)$ et $(-1, 0, 0, 0)$, pour $r \leqslant 1/\varepsilon$. En notant par $c_n(\mathbf{P}_3)$ l'espace des courbes de degré n dans $\mathbf{P}_3$, on peut représenter $\mathscr{C}_1(W_r)$ pour $r \leqslant 1/3$ par le schéma ci-contre.

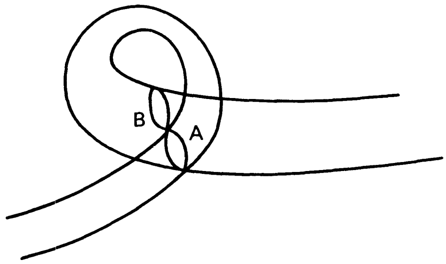
Les pointillés représentent les « jonctions » qui ont lieu pour $r > 1/\varepsilon$; on voit que, dans ce cas, $\mathscr{C}_1(W_r)$ est connexe, mais contrairement à ce qui se passe dans l'exemple 1, la connexité ne détruit pas l'holomorphe convexité.

Donnons enfin, pour clore ce paragraphe d'exemples, une variété analytique fortement 1-complète pour laquelle la méthode de [N.S.] n'aboutit pas:

Exemple 3. — Soit C une courbe de $\mathbf{C}^3$ admettant un unique point singulier en 0; on suppose qu'au voisinage de 0, C est la réunion de deux courbes lisses et transverses en 0, et l'on note par V (*voir* [S]) la variété analytique obtenue en éclatant successivement chacune de ces courbes au voisinage de 0 (loin de 0, on éclate C globalement). La variété V est holomorphe convexe, fortement 1-complète, et l'espace $\mathscr{C}_1(V)$ a deux composantes connexes dont l'une est réduite à un point, la seconde ayant la configuration suivante :



où A et B désignent les composantes irréductibles de la fibre de V en 0. Si $f : V \to \mathbf{R}^+$ désigne la fonction fortement 1-convexe sur V déduite de la fonction $\Sigma \mid z_i \mid^2$ sur $\mathbf{C}^3$, on constate que l'ensemble $\{ f = 0 \}$ contient les supports des cycles $A + n.B$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors que ces cycles forment une suite discrète dans l'espace $\mathscr{C}_1 (V)$.



Chapitre 1

Nous utiliserons dans tout ce qui suit les définitions suivantes :

Définitions. — Soit Z un espace analytique complexe réduit de dimension finie; nous dirons qu'une fonction continue $g : Z \to \mathbf{R}$ est p. s. h. sur Z si elle est plurisousharmonique sur l'ouvert des points réguliers de Z.

Nous dirons qu'une fonction continue $g : Z \to \mathbf{R}$ est 0-convexe (resp. fortement 0-convexe) au voisinage de $z \in Z$ s'il existe un voisinage ouvert V_z de z dans Z, un plongement $j : V_z \to W$ dans une variété analytique (lisse) W, et une fonction continue $G : W \to \mathbf{R}$ p. s. h. sur W (resp. fortement p. s. h. sur W) vérifiant $G \circ j = g / V_z$.

Nous dirons qu'une fonction continue $g : Z \to \mathbf{R}$ est fortement p. s. h. sur Z, si au voisinage de chaque point de Z on peut écrire g comme somme d'une fonction p. s. h. et d'une fonction fortement 0-convexe.

La généralisation de NORGUET et SIU de la réciproque du problème de Levi ([N. S.], théorème 2') donne immédiatement l'énoncé suivant :

THÉORÈME 0 NORGUET-SIU. — *Soit Z un espace analytique complexe de dimension finie; s'il existe une fonction continue d'exhaustion $f : Z \to \mathbf{R}^+$ qui soit fortement* p. s. h. *en chaque point de Z, alors Z est Stein.*

Paragraphe A

On utilise ici la terminologie de [Ba 1] (chap. 4, § 1).

THÉORÈME 1. — *Soit Z un espace analytique réduit de dimension pure $n+p$, et soit $(X_s)_{s \in S}$ une famille continue de cycles de dimension pure n de Z,* *paramétrée par l'espace topologique S. Alors l'application de S dans l'espace des courants de type* (p, p) *sur Z à coefficients mesures (c'est, par définition, le dual de l'espace des formes différentielles de type* (n, n) *sur Z à coefficients continus et à supports compacts, muni de sa topologie faible) qui à* $s \in S$ *associe le courant défini par le cycle* X_s *(voir* [Le]), *est continue.*

Nous utiliserons, dans la suite, le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1. — *Soit Z un espace analytique réduit de dimension finie, et soit* φ *une forme différentielle de type* (n, n) *sur Z à coefficients continus. Alors l'application* $F_\varphi : \mathscr{C}_n(Z) \to \mathbf{C}$ *qui est définie par* $F_\varphi(X) = \int_X \varphi$ *est continue.*

Démonstration. — Le problème est local sur $\mathscr{C}_n(Z)$; $X_0 \in \mathscr{C}_n(Z)$ et si W est un voisinage compact de $|X_0|$ dans Z, il existe un voisinage V de X_0 dans $\mathscr{C}_n(Z)$ tel que $Y \in V$ entraîne $|Y| \subseteq W$ (par exemple $V = \mathscr{C}_n(\mathring{W})$ convient). Si r est une fonction continue à support compact dans Z valant identiquement 1 sur W, l'application $F_{r.\varphi}$ est continue sur $\mathscr{C}_n(Z)$, d'après le théorème précédent, et elle coïncide sur V avec l'application F_φ, d'où la continuité de cette dernière en X_0.

Passons maintenant à la démonstration du théorème; elle tient essentiellement dans les deux lemmes suivants :

LEMME 1. — *Si B est un polydisque relativement compact de* $\mathbf{C}^p$, *et si* $f : \bar{B} \to \mathbf{C}$ *est une application continue, l'application* $Nf : \mathrm{Sym}^k(\bar{B}) \to \mathbf{C}$ *qui à* $(x_1, \ldots, x_k)$ *associe* $\sum f(x_i)$ *est continue. De plus, l'application* $N : \mathscr{C}(\bar{B}, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}(\mathrm{Sym}^k(\bar{B}), \mathbf{C})$ *est linéaire continue.*

Démonstration. — La continuité de Nf est claire, puisque $\mathrm{Sym}^k(\bar{B})$ est muni de la topologie quotient de $\bar{B}^k/\sigma_k$. On a manifestement, pour tout $f \in \mathscr{C}(\bar{B}, C)$, $\|Nf\| \leqslant k.\|f\|$, ce qui prouve la continuité de l'application linéaire N.

LEMME 2. — *Soit S un espace topologique, et soient U et B des polydisques relativement compacts de* $\mathbf{C}^n$ *et* $\mathbf{C}^p$ *respectivement. Soit* $f : S \times U \to \mathrm{Sym}^k(B)$ *une application continue, analytique par rapport à la seconde variable; on notera par* X_s *le cycle de* $U \times B$ *sous-jacent au revêtement ramifié de degré k de U associé à la restriction de f à* $\{s\} \times U$. *Soit w une fonction continue à valeurs complexes et à support compact sur* $U \times B$, *et notons par* $dt \wedge d\bar{t}$ *la forme volume sur* $\mathbf{C}^n$.

Alors la fonction à valeurs complexes $s \to \int_{X_s} w \, . dt \wedge d\bar{t}$ *est continue sur* S.

Démonstration. — Soit $W : S \times U \to \mathbf{C}$ l'application qui à $(s, t) \in S \times U$ associe $\sum w(t, x_i)$, où $(x_1, \ldots, x_k) = f(s, t)$. Le lemme 1 montre que W est continue sur $S \times U$, et si K est la projection sur U du support de w, le support de w est contenu dans $S \times K$. La fonction $s \to \int_U W(s, t) . dt \wedge d\bar{t}$ est donc continue sur S; comme elle coïncide avec la fonction désirée, ceci achève la démonstration.

Le théorème 1 se déduit facilement du lemme 2 en considérant suffisamment de projections différentes de $U \times B$ sur U de manière que les images réciproques par ces projections de la forme volume sur $\mathbf{C}^n$ engendrent comme module sur $\mathscr{C}_c(U \times B, \mathbf{C})$ l'espace des formes de type (n, n) à coefficients continus et à supports compacts sur $U \times B$.

PROPOSITION 1. — *Soit* Z *un espace analytique réduit de dimension finie, et soient* φ *et* ψ *deux formes différentielles de type* (n, n) *sur* Z, *respectivement* C^1 *et* C^2, *vérifiant* $d\varphi = 0$ *et* $id' d'' \psi \geqslant 0$ (*au sens de* LELONG). *Alors les fonctions* F_φ *et* F_ψ *sur* $\mathscr{C}_n(Z)$ *sont respectivement localement constantes et* p. s. h.

Démonstration. — Si $c : D \to \mathscr{C}_n(Z)$ est une application analytique du disque unité du plan complexe à valeurs dans $\mathscr{C}_n(Z)$, il nous suffit de montrer que les applications $F_\varphi \circ c$ et $F_\psi \circ c$ sont respectivement constantes et sous-harmoniques sur D. Soit X le graphe de la famille analytique de cycles de Z définie par c (X est alors le sous-ensemble de $D \times Z$ défini par $X = \{ (z, x) \in D \times Z ; x \in | c(z) | \}$). On peut supposer que, pour z générique dans D, on a $| c(z) | = c(z)$ (car on se ramène immédiatement à ce cas); soit alors $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$ les images réciproques sur X de φ et ψ. On a encore $d\tilde{\varphi} = 0$ et $id' d'' \tilde{\psi} \geqslant 0$, et si $\pi : X \to D$ est la projection, les courants $\pi_*(\tilde{\varphi})$ et $\pi_*(\tilde{\psi})$ ne sont autres que les fonctions continues $F_\varphi \circ c$ et $F_\psi \circ c$ sur D. On a donc au sens des courants :

$$d(F_\varphi \circ c) = d(\pi_*(\tilde{\varphi})) = \pi_*(d\tilde{\varphi}) = 0$$

et

$$id' d''(F_\psi \circ c) = id' d''(\pi_*(\tilde{\psi})) = \pi_*(id' d'' \tilde{\psi}) \geqslant 0,$$

d'où le résultat désiré.

Remarque. — On montre de la même manière que, si $d'' \varphi = 0$, la fonction F_φ est faiblement analytique sur $\mathscr{C}_n(Z)$ (c'est-à-dire continue et analytique aux points réguliers de $\mathscr{C}_n(Z)$). Il est prouvé dans [Ba 2] que pour Z lisse, on obtient ainsi des fonctions analytiques partout sur $\mathscr{C}_n(Z)$; le cas Z singulier n'est pas élucidé (une forme d''-fermée ne correspondant pas en général à un élément de $H^n(Z, \Omega^n)$).

Paragraphe B

Définition. — Si Z est un espace analytique réduit, nous appellerons métrique hermitienne sur Z la donnée d'une forme h, C^2 de type (1, 1) sur Z, telle que, pour chaque $z \in Z$, il existe un voisinage ouvert U_z de z dans Z et un plongement propre j_z de U_z dans une variété analytique V_z munie d'une structure hermitienne, c'est-à-dire d'une forme C^2 de type (1, 1), H_z, qui soit définie positive en chaque point, avec sur U_z :

$$j_z^*(H_z) = h/U_z.$$

Si X est un cycle analytique compact de dimension pure n de Z muni d'une structure hermitienne h, nous appellerons *volume* de X l'intégrale

$$\mathrm{vol}_h(X) = \int_X h^n,$$

le théorème d'intégration sur les ensembles analytiques de [Le] assurant l'existence de cette intégrale (même si h était seulement continue sur Z).

PROPOSITION 2 (*gonflage des cycles*). — *Soit Z un espace analytique réduit et dénombrable à l'infini. Soit $f : Z \longrightarrow [1, +\infty[$ une application continue propre. Alors il existe sur Z, pour chaque entier n donné, une métrique hermitienne h, vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) *pour chaque cycle analytique compact x, de dimension pure n de Z, on a :* $\mathrm{vol}_h(X) > 1$*;*

(ii) *pour chaque cycle analytique compact X, de dimension pure n de Z, on a :* $\sup_{|X|} f < \mathrm{vol}_h(X)$.

Démonstration. — Tout ce qui suit repose essentiellement sur le théorème suivant du à E. BISHOP [Bi].

THÉORÈME 2. — *Soit Z un espace analytique réduit de dimension pure n, et soit h une métrique hermitienne sur Z. Notons par $\mathscr{C}_n(Z)$ l'espace analytique réduit des cycles compacts de dimension pure n de Z construit dans*

[Ba 1] (*on ne s'intéresse ici qu'à sa topologie* !). *Une partie A de $\mathscr{C}_n(Z)$ est relativement compacte si, et seulement si, l'on peut trouver un compact K de Z et une constante C tels que, pour chaque X de A, on ait :*

(*a*) $|X| \subseteq K$;

(*b*) $\text{vol}_h(X) \leqslant C$.

Revenons à la démonstration de la proposition; supposons que, pour m entier positif ou nul, nous ayons trouvé sur Z une métrique hermitienne h_m telle que, pour chaque cycle analytique compact X de dimension pure n de Z contenu dans le compact $K_m = f^{-1}(\{1 \leqslant x \leqslant m\})$, on ait :

(i)$_m$ $\text{vol}_{h_m}(X) > 1$;

(ii)$_m$ $\sup f_{|X|} < \text{vol}_{h_m}(X)$.

On remarquera que, pour $m = 0$, ces deux conditions sont vides, et qu'il suffit de prouver qu'il existe une métrique hermitienne sur Z; ceci est immédiat par un argument de partition de l'unité.

Considérons alors l'ensemble des cycles analytiques compacts de dimension pure n de Z qui sont contenus dans K_{m+1} et qui ne vérifient pas les conditions (i)$_{m+1}$ et (ii)$_{m+1}$. Pour X, dans cet ensemble on a $\text{vol}_{h_m}(X) \leqslant m+1$, puisque $\sup_{|X|} f \leqslant m+1$ dès que $|X| \leqslant K_{m+1}$. Le théorème ci-dessus donne alors que cet ensemble est un compact de $\mathscr{C}_n(Z)$, puisqu'il est manifestement fermé. Notons par A_m ce compact de $\mathscr{C}_n(Z)$. Si $X \in A_m$, il existe $x \in K_{m+1} - K_m$ avec $x \in |X|$ (d'après l'hypothèse de récurrence); on peut alors trouver une écaille adaptée à X dont le domaine contient x et ne rencontre pas le compact K_m. On peut alors trouver un voisinage U_X de X dans $\mathscr{C}_n(Z)$ assez petit pour que l'écaille considérée reste adaptée aux éléments de U_X, et pour que l'on ait, pour chaque $Y \in U_X$,

$$\text{Sup}_{|Y|} f < m+2.$$

On peut alors trouver une forme C^∞, à support compact k_m sur Z, de type (1, 1), de support contenu dans le domaine de l'écaille considérée, positive en chaque point de Z, et telle que, pour chaque $Y \in U_X$, on ait

$$\int_Y k_m^n > m+2.$$

La compacité de A_m permet alors de trouver des formes k_{m_i} en nombre fini tel que la structure hermitienne

$$h_{m+1} = h_m + \textstyle\sum_i k_{m_i}$$

vérifie $(\mathrm{i})_{m+1}$ et $(\mathrm{ii})_{m+1}$, et coïncide avec h_m au voisinage de K_m. Si h est la structure hermitienne sur Z qui coïncide avec h_m sur K_m pour chaque m, elle remplit les conditions (i) et (ii), ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 2. — *Dans les conditions de la proposition précédente, la fonction continue* $F : \mathscr{C}_n(Z) \to [1, +\infty[$, *qui est définie par* $F(X) = \int_X f.h^n$, *est propre.*

Démonstration. — En vertu du théorème ci-dessus, il nous suffit de montrer que, si $F(X) \leqslant m$, il existe un compact K de Z et une constante C (dépendants de m) tels que $|X|$ soit contenu dans K et de volume (relatif à h) au plus C. Or on a

$$F(X) = \int_X f.h^n \geqslant (\inf_{|X|} f).\mathrm{vol}_h(X),$$

d'où l'on déduit, puisque $\mathrm{Inf}_{|X|} f$ est au moins égal à 1, $\mathrm{vol}_h(X) \leqslant m$, ce qui montre déjà que l'on peut choisir $C = m$. Mais on a, d'après le choix de h,

$$\mathrm{Sup}_{|X|} f \leqslant \mathrm{vol}_h(X) \leqslant m,$$

ce qui montre que $|X|$ est contenu dans $K_m = K$; ceci achève la démonstration du corollaire.

Grâce à ce résultat, on obtient un procédé de construction de fonctions continues et propres de Z dans l'intervalle $[1, +\infty[$.

COROLLAIRE 3. — *Dans les conditions de la proposition précédente, si* c *est une fonction strictement croissante continue de* $[1, +\infty[$ *sur* $[1, +\infty[$, *la fonction continue* $G : \mathscr{C}_n(Z) \to [1, +\infty[$, *qui est définie par*

$$G(X) = \int_X (c \circ f).h^n,$$

est propre.

Démonstration. — Comme dans le corollaire 1, l'inégalité $G(X) \leqslant m$ donne l'inégalité $\mathrm{vol}_h(X) \leqslant m$, ce qui montre déjà que l'on peut choisir $C = m$. On en déduit alors, grâce au choix de h,

$$\mathrm{Sup}_{|X|} f \leqslant \mathrm{vol}_h(X) \leqslant m,$$

ce qui achève la démonstration.

Paragraphe C

LEMME 3. — *Soit k une forme hermitienne sur $\mathbf{C}^N$; alors k admet au plus n valeurs propres négatives ou nulles si, et seulement si, on peut trouver une forme hermitienne h définie positive sur $\mathbf{C}^N$ telle que la forme hermitienne $k \wedge h^{\wedge n}$ sur $\Lambda^{n+1}(\mathbf{C}^N)$ soit strictement positive au sens de* LELONG *(c'est-à-dire prenne des valeurs strictement positives sur les vecteurs totalement décomposés non nuls).*

Démonstration. — Commençons par prouver que s'il existe h définie positive telle que $k \wedge h^{\wedge n}$ soit strictement positive au sens de LELONG, alors k a au plus n valeurs propres négatives ou nulles.

On peut supposer que $h(z, \bar{z}) = \sum_1^N |z_i|^2$ et $k(z, \bar{z}) = \Sigma\, a_i . |z_i|^2$, quitte à bien choisir la base $e_1, \ldots, e_N$ dans laquelle on calcule. On a alors

$$k \wedge h^{\wedge n}[e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_{n+1}}] = \sum_{j=1}^{n+1} a_{i_j};$$

comme cette somme doit être strictement positive pour tout choix de $i_1, \ldots, i_{n+1}$ deux à deux distincts dans $[1, N]$, ceci montre qu'il y a au plus n indices pour lesquels a_i est négatif ou nul.

Réciproquement, notons par h la forme hermitienne canonique $h(z, \bar{z}) = \sum_1^N |z_i|^2$, et supposons k diagonale dans la base choisie. Quitte à réordonner, on aura $k(z, \bar{z}) = \Sigma\, a_i . |z_i|^2$ avec $a_{n+j} > 0$ pour $j \in [1, N-n]$. Pour $l > 0$, posons

$$h_l(z, \bar{z}) = \sum_1^n l . |z_i|^2 + \sum_{j>n} |z_j|^2.$$

Soit maintenant $v_0 \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \neq 0$, et notons par E le sous-espace de $\mathbf{C}^N$ engendré par $v_0, \ldots, v_n$. Posons $\dim(E \cap H) = p+1$, où H est le $(N-n)$-plan d'équations $z_1 = 0, \ldots, z_n = 0$. On peut alors supposer que $\{v_0, \ldots, v_p\}$ est un système orthonomé de H alors que les projections orthogonales de $v_{p+1}, \ldots, v_n$ sur $H^\perp$ forment un système orthogonal (6). On aura alors $k(v_i, \bar{v}_i) > 0$ pour $0 \leqslant i \leqslant p$, et $h_l(v_j, \bar{v}_j) \geqslant c_j . l$ pour $p+1 \leqslant j \leqslant n$, où les c_j sont des constantes stristement positives ne dépendant pas de l. Alors

$$\begin{aligned} &k \wedge h_l^{\wedge n}[v_0 \wedge \ldots \wedge v_n] \\ &\quad = \sum_{i, j \in \sigma_{n+1}} (-1)^{s(i)+s(j)} k(v_{i_0}, \bar{v}_{j_0}) \prod_{a=1}^n h_l(v_{i_a}, \bar{v}_{j_a}), \end{aligned}$$

ce qui donne, en utilisant l'orthonormalité des v_i et les constantes c_j,

$$k \wedge h_l^{\wedge n}[v_0 \wedge \ldots \wedge v_n] \geqslant \sum_0^p k(v_i, \bar{v}_i)(\prod_{p+1}^n c_j) . l^{n-p} + 0(l^{n-p-1}).$$

(6) Ceci entraîne que $h_l(v_i, \bar{v}_j)$ ne dépend de l que pour $i = j \in [p+1, n]$.

Comme $\sum_0^p k(v_i, \bar{v}_i) \prod_{p+1}^n c_j$ est strictement positif, pour l assez grand on aura $k \wedge h_l^{\wedge n} [v_0 \wedge \ldots \wedge v_n] > 0$. Par continuité, il en sera de même pour les $(n+1)$-vecteurs décomposés assez voisins de $v_0 \wedge \ldots \wedge v_n$, et un argument de compacité montre alors que, pour l assez grand, $k \wedge h_l^{\wedge n}$ est strictement positive au sens de LELONG.

COROLLAIRE 4. — *Soit Z un espace analytique complexe réduit de dimension finie, et soit $f : Z \to \mathbf{R}$ une fonction C^2 sur Z, fortement n-pseudo-convexe sur Z. Soit h une métrique hermitienne C^2 sur Z. Alors il existe une métrique hermitienne C^2 h_1 sur Z vérifiant :*

(i) $h_1 \geqslant h$,

(ii) *$id'd''f \wedge h_1^{\wedge n}$ est strictement positive sur Z au sens de* LELONG.

Démonstration. — L'existence locale de h_1 se déduit immédiatement du lemme : la globalisation est immédiate à l'aide d'une partition de l'unité deux fois différentiable.

LEMME 4. — *Soit h une forme hermitienne définie positive sur $\mathbf{C}^N$, soit H une forme hermitienne sur $\Lambda^{n+1}(\mathbf{C}^N)$ strictement positive au sens de* LELONG, *et soit m un élément de $\Lambda^n(C^N) \otimes \Lambda^{n+1}(\mathbf{C}^N)$. Il existe alors une constante $C > 0$ telle que, si a et b sont deux réels positifs vérifiant $a.b > C$, et si $l \in (\mathbf{C}^N)^*$, la forme hermitienne $a.h^{\wedge n} \wedge |l|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(m \otimes l) + b.H$ sur $\Lambda^{n+1}(\mathbf{C}^N)$ soit strictement positive au sens de* LELONG.

Démonstration. — Soit $v_0 \wedge \ldots \wedge v_n \neq 0$ un vecteur totalement décomposé de $\Lambda^{n+1}(\mathbf{C}^N)$; on peut toujours supposer que $v_0, \ldots, v_n$ est un système orthonormé pour h, et que $v_1, \ldots, v_n$ sont contenus dans l'hyperplan Ker (l). La valeur sur $v_0 \wedge \ldots \wedge v_n$ de la forme hermitienne considérée est alors :

$$a.|l(v_0)|^2$$
$$+2\,\mathrm{Re}(m(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \wedge \bar{v}_0 \wedge \ldots \wedge \bar{v}_n)\, l(v_0)) + b.H(v_0 \wedge \ldots \wedge v_n).$$

Il suffit alors de choisir

$$C = \sup\left\{ \frac{|m(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \wedge \bar{v}_0 \wedge \ldots \wedge \bar{v}_n)|^2}{H(v_0 \wedge \ldots \wedge v_n)} \right\},$$

où le sup est pris sur l'ensemble des systèmes $v_0, \ldots, v_n$ qui sont orthonormés pour h.

PROPOSITION 3. — *Soit Z un espace analytique complexe réduit de dimension finie, et soit $f: Z \rightarrow \mathbf{R}^+$ une fonction C^2, propre, fortement n-pseudo-convexe en chaque point. On se donne également une métrique hermitienne C^2 h sur Z. Alors il existe une métrique hermitienne C^2 h_1 sur Z et une fonction C^2, $c : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ strictement croissante et strictement convexe, vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $h_1 \geqslant h$,

(ii) $id'\,d''\,((c \circ f).h_1^{\wedge n})$ *est strictement positive au sens de* LELONG *sur Z.*

Démonstration. — Choisissons déjà h_1 comme dans le corollaire ci-dessus; si $c : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ est C^2 strictement croissante et strictement convexe, $id'\,d''\,((c \circ f).h_1^{\wedge n})$ sera la somme des quatre termes suivants :

(1) $(c \circ f).id'\,d''\,(h_1^{\wedge n})$,

(2) $(c' \circ f).id'\,d''f \wedge h_1^{\wedge n}$,

(3) $2\,(c' \circ f).\mathrm{Re}\,(id'f \wedge d''\,(h_1^{\wedge n}))$,

(4) $(c'' \circ f).id'f \wedge d''f \wedge h_1^{\wedge n}$.

Il est clair que $(1) + 1/2\,(2)$ est strictement positive au sens de LELONG dès que la fonction c'/c est assez grande; d'autre part, le lemme précédent montre que $1/2\,(2) + (3) + (4)$ est strictement positive au sens de LELONG dès que la fonction c''/c' est assez grande; d'où le résultat.

A l'aide des résultats acquis au chapitre 1, nous sommes en mesure de montrer que si Z est un espace analytique réduit de dimension finie muni d'une fonction d'exhaustion $C^2 f : Z \rightarrow \mathbf{R}^+$ fortement n-convexe en chaque point de Z, il existe une métrique hermitienne C^2 h sur Z, et une fonction convexe strictement croissante C^2 $c : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ telles que la fonction sur $\mathscr{C}_n(Z)$, définie par $X \rightarrow \int_X (c \circ f).h^n$, soit continue, propre et p. s. h. (faible).

En reprenant la méthode de démonstration de [N.S.], on peut alors facilement démontrer l'énoncé 1. Nous allons utiliser une méthode plus directe, consistant à montrer que l'on a en fait construit une exhaustion fortement p. s. h.

Chapitre 2

Soit k un entier positif; identifions $\mathrm{Sym}^k(\mathbf{C})$ à $\mathbf{C}^k$ par l'isomorphisme déduit de l'application $S : \mathbf{C}^k \rightarrow \mathbf{C}^k$ qui à $(z_1, \ldots, z_k)$ associe les fonctions symétriques élémentaires $(s_1, \ldots, s_k)$ de $z_1, \ldots, z_k$ (qui sont, à des signes près, les coefficients significatifs du polynôme unitaire $P(z) = \prod_{j=1}^{k} (z - z_j)$). Nous noterons par $\mathscr{H} : \mathrm{Sym}^k(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{R}^+$ l'application qui à $(s_1, \ldots, s_k)$

associe $\mathscr{H}$ $(s_1, \ldots, s_k) = \sum_{j=1}^{k} | z_j |^2$ si l'image par S de $(z_1, \ldots, z_k)$ est $(s_1, \ldots, s_k)$.

PROPOSITION 4. — *La fonction $\mathscr{H}$ est continue et fortement p. s. h. sur* $\mathrm{Sym}^k(\mathbf{C})$.

Démonstration. — Notons par $\Delta : \mathrm{Sym}^k(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ l'application discriminant, c'est-à-dire l'application algébrique qui à $(s_1, \ldots, s_k)$ associe le discriminant du polynôme unitaire $P(z) = \sum_0^k (-1)^h s_h z^{k-h}$, où l'on pose $s_0 = 1$. Si $\Delta(s_1^0, \ldots, s_k^0) \neq 0$, il existe un voisinage ouvert U de $(s_1^0, \ldots, s_k^0)$ dans $\mathrm{Sym}^k(\mathbf{C})$ et des applications analytiques $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_k$ de U dans $\mathbf{C}$ vérifiant pour chaque $(s_1, \ldots, s_k)$ dans U :

$$\sum_0^k (-1)^h s_h z^{k-h} = \prod_{j=1}^k (z - \bar{z}_j(s_1, \ldots, s_k)).$$

On a alors sur U

$$\mathscr{H}_{(s_1, \ldots, s_d)} = \sum_{j=1}^k | \bar{z}_j(s_1, \ldots, s_k) |^2.$$

Ceci montre que la fonction $\mathscr{H}$ est analytique réelle sur l'ouvert $\{ \Delta \neq 0 \}$ et permet de calculer la forme de Levi de $\mathscr{H}$ en un point de cet ouvert

$$L(\mathscr{H})_{(s_1, \ldots, s_k)}[ds_1, \ldots, ds_k] = \sum_{j=1}^k | l_j(ds) |^2$$

où $l_j(ds) = 1/P'(zj) \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} z_j^{k-i} ds_i$. On a, en effet sur l'ouvert U :

$$L(\mathscr{H})_{(s_1, \ldots, s_k)}[ds] = \sum_{j=1}^k | \sum_{h=1}^k (\partial \bar{z}_j / \partial s_h) ds_h |^2,$$

et l'identité $P(\bar{z}_j) \equiv 0$ sur U donne

$$P'(\bar{z}_j).(\partial \bar{z}_j / \partial s_h) + (-1)^h z_j^{k-h} \equiv 0,$$

dont on déduit l'expression donnée ci-dessus de la forme de Levi de $\mathscr{H}$.

Pour s dans l'ouvert $\{ \Delta \neq 0 \}$ de $\mathrm{Sym}^k(\mathbf{C})$ considérons l'endomorphisme L_s de $\mathbf{C}^k$ de matrice (dans la base canonique) :

$$(L_s)_{i,j} = (-1)^{i-1} z_j^{k-i} / P'(z_j),$$

où l'ordre de rangement des racines $z_1, \ldots, z_k$ de $P(z) = 0$ est arbitraire. On a alors $L(\mathscr{H})_s [ds] = || L_s(ds) ||^2$.

Nous allons montrer que, pour chaque compact K de $\mathrm{Sym}^k(\mathbf{C})$, il existe une constante $d_K > 0$ telle que, pour s dans $K - \{ \Delta \neq 0 \}$, on ait

$$(\star) \qquad || L_s(ds) ||^2 \geqslant d_K || ds ||^2.$$

Pour obtenir ce résultat, il nous suffit de prouver les deux assertions suivantes :

(i) pour chaque s de $\{ \Delta \neq 0 \}$, L_s est inversible;

(ii) pour chaque compact K de $\mathrm{Sym}^k(\mathbf{C})$, les modules des coefficients de la matrice L_s^{-1} pour s dans $K - \{ \Delta \neq 0 \}$ sont bornés.

LEMME 5. — *Soient $z_1, \ldots, z_k$ des indéterminées algébriquement indépendantes. Si $n_1, \ldots, n_k$ sont des entiers positifs, nous noterons :*

$$V_{n_1, \ldots, n_k}(z_1, \ldots, z_k) = \det(z_j^{n_i}).$$

Pour chaque suite $n_1, \ldots, n_k$, il existe un polynôme $S_{n_1, \ldots, n_k}$ symétrique en $z_1, \ldots, z_k$ vérifiant

$$V_{n_1, \ldots, n_k}(z_1, \ldots, z_k) = V_{0, 1, \ldots, k-1}(z_1, \ldots, z_k) . S_{n_1, \ldots, n_k}.$$

Démonstration. — Soit A l'algèbre des polynômes symétriques en $z_1, \ldots, z_k$, et considérons le sous-A-module M de $\mathbf{C}[z_1, \ldots, z_k]^k$ qui est engendré par les $(z_1^n, \ldots, z_k^n)$ pour $n \in \mathbf{N}$. On vérifie facilement que M est libre de rang k et que les éléments $(z_1^n, \ldots, z_k^n)$ pour $n \in [0, k-1]$ forment une A-base de M; le A-module $\Lambda^k(M)$ est donc libre de rang 1, d'où le lemme.

Pour abréger, nous noterons $V_{0, 1, \ldots, k-1}(z_1, \ldots, z_k)$ par $V(z)$; de même pour $i \in [1, k]$, nous noterons $V_{0, 1, \ldots, k-2}(z_1, \ldots, \hat{z}_i, \ldots, z_k)$ par $V(\hat{z}_i)$.

Pour $\Delta(s) \neq 0$, on a

$$\det(L_s) = \pm\ V(z) / \textstyle\prod_{j=1}^k P'(z_j) = \pm\ 1/V(z)$$

ce qui prouve déjà le (i).

D'autre part, le coefficient (i, j) de L_s^{-1} est donné par

$$\pm\ V(z) . V(\hat{z}_i) . (S_{0, 1, \ldots, \hat{j}, \ldots, k-1}(\hat{z}_i)) / \textstyle\prod_{h \neq i} P'(z_h),$$

d'après le lemme cidessus.

En explicitant les déterminants de Van der Monde, on obtient que le coefficient (i, j) de L_s^{-1} vaut $S_{0, \ldots, \hat{j}, \ldots, k-1}(\hat{z}_i)$; si $s \in K$, les modules des $z_1, \ldots, z_k$ sont majorés par une constante M_K, et les coefficients de L_s^{-1} sont alors majorés par une constante C_K, ce qui prouve (ii).

Prouvons maintenant la relation $(\star)$; d'après (ii), il existe une constante D_K telle que, pour $s \in K - \{ \Delta \neq 0 \}$, on ait $\| L_s^{-1} \| < D_K$, ce qui donne, pour $ds \in \mathbf{C}^k$,

$$\| L_s(ds) \|^2 \geqslant d_K \| ds \|^2 \qquad \text{avec} \quad d_K = 1/D_K^2.$$

Dans ces conditions, l'application $s \to \mathscr{H}(s)-(d_K \| s \|^2)$ est fortement p. s. h. en chaque point de $K-\{\Delta \neq 0\}$; elle est donc p. s. h. sur $\mathring{K}$ par continuité, ce qui prouve que $\mathscr{H}$ est fortement p. s. h. sur $\mathring{K}$, et ceci pour tout compact K de $\mathrm{Sym}^k(\mathbf{C})$, ce qui achève la démonstration de la proposition.

COROLLAIRE 5. — *Soit* $\tilde{\mathscr{H}} : \mathrm{Sym}^k(\mathbf{C}^p) \to \mathbf{R}^+$ *l'application définie par* $\tilde{\mathscr{H}}(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{j=1}^k \| x_j \|^2$. *Alors* $\mathscr{H}$ *est continue et fortement p. s. h. sur* $\mathrm{Sym}^k(\mathbf{C}^p)$.

Démonstration. — Comme pour $p \geqslant 2$ (et $k \geqslant 2$), $\mathrm{Sym}^k(\mathbf{C}^p)$ n'est pas lisse, pour prouver que la fonction considérée est fortement p. s. h., il nous suffit d'exhiber un plongement global de $\mathrm{Sym}^k(\mathbf{C}^p)$ dans un espace vectoriel E et une fonction continue fortement p. s. h. sur E induisant $\tilde{\mathscr{H}}$ sur $\mathrm{Sym}^k(\mathbf{C}^p)$.

Rappelons donc (*voir* [Ba 1], chap. 0, § 2) que l'application algébrique $s : (\mathbf{C}^p)^k \to E = \bigoplus_1^k S_h(\mathbf{C}^p)$ donnée par les fonctions symétriques (tensorielles) élémentaires, passe au quotient pour donner un plongement propre de $\mathrm{Sym}^k(\mathbf{C}^p)$ dans E. Nous identifierons $\mathrm{Sym}^k(\mathbf{C}^p)$ à son image par ce plongement.

Un élément l de $(\mathbf{C}^p)^*$ définit une application linéaire A_l de E dans $\mathbf{C}^k$ par $(s_1, \ldots, s_k) \to (s_1(l), \ldots, s_k(l))$, où $s_h(l)$ désigne la valeur au point l de s_h considérée comme polynôme homogène de degré h sur $(\mathbf{C}^p)^*$. Si on identifie $\mathrm{Sym}^k(\mathbf{C})$ à $\mathbf{C}^k$ l'application A_l induit sur $\mathrm{Sym}^k(\mathbf{C}^p)$ l'application $\mathrm{Sym}^k(l) : \mathrm{Sym}^k(\mathbf{C}^p) \to \mathrm{Sym}^k(\mathbf{C})$. En particulier, l'application

$$\mathscr{H} \circ A_l : E \to \mathbf{R}^+,$$

où $\mathscr{H}$ désigne l'application de $\mathrm{Sym}^k(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{R}^+$, considérée dans la proposition précédente, induit sur $\mathrm{Sym}^k(\mathbf{C}^p)$ l'application $(x_1, \ldots, x_k) \to \mathrm{H}_{j=1}^k | l(x_j) |^2$.

Si $L = (l_1, \ldots, l_p)$ est une base unitaire (relative à la structure hermitienne naturelle) de $(\mathbf{C}^p)^*$, la fonction $\tilde{\mathscr{H}}_L$ de E dans $\mathbf{R}^+$, qui est définie par $\tilde{\mathscr{H}}_L(s) = \sum_{i=1}^p \mathscr{H} \circ A_{l_i}(s)$, induit sur $\mathrm{Sym}^k(\mathbf{C}^p)$ la fonction $\tilde{\mathscr{H}}$. La proposition précédente montre alors que la fonction $\tilde{\mathscr{H}}_L$, restreinte au sous-espace de E qui est engendré par les vecteurs e_i^h, pour $h \in [1, k]$, où $e_1, \ldots, e_p$ est la base duale de la base L, est fortement p. s. h. En effet, la fonction $\tilde{\mathscr{H}}_L$ est construite en composant l'application linéaire :

$$A_L = \prod_{i=1}^p A_{l_i} : \quad E \to [\mathrm{Sym}^k(\mathbf{C})]^p,$$

avec une fonction p. s. h. sur $[\mathrm{Sym}^k(\mathbf{C})]^p$. Mais si $L_1, \ldots, L_N$ sont des bases unitaires de $(\mathbf{C}^p)$, telles que l'application linéaire

$$\prod_{i=1}^{N} A_{Li} : \quad E \to [\mathrm{Sym}^k(\mathbf{C})]^{p.N}$$

soit injective (et si N est assez grand on peut trouver de telles bases !), l'application $(\sum_{i=1}^{N} \tilde{\mathscr{H}}_{L_i})/N$ est fortement p. s. h. sur E et induit $\tilde{\mathscr{H}}$ sur $\mathrm{Sym}^k(\mathbf{C}^p)$, ce qui achève la démonstration du corollaire.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{C}$, et soit $H : E \longrightarrow \mathbf{R}^+$ une fonction continue fortement p. s. h. sur E. Soit U un polydisque ouvert de $\mathbf{C}^n$, et soit $r : U \longrightarrow \mathbf{R}^+$ une fonction C^∞ à support compact dans U et non identiquement nulle.

Notons par $H(\bar{U}, E)$ l'espace de Banach des fonctions continues de $\bar{U}$ dans E qui sont analytiques sur U, et définissons la fonction $H_r : H(\bar{U}, E) \longrightarrow \mathbf{R}^+$ par

$$H_r(f) = \int_U (H \circ f).r(t).dt \wedge dt,$$

où $dt \wedge d\bar{t}$ désigne la forme volume (positive) sur $\mathbf{C}^n$.

PROPOSITION 5. — *La fonction H_r est continue et fortement p. s. h. sur $H(\bar{U}, E)$.*

Démonstration. — Si on a $r = r_1 + r_2$, où r_1 et r_2 sont des fonctions C^∞ positives, à supports compacts dans U, on a $H_r = H_{r_1} + H_{r_2}$, ce qui montre qu'il suffit de prouver le résultat pour une fonction r dont le support est arbitrairement petit. Comme de plus, la propriété est locale sur $H(\bar{U}, E)$, on en déduit que notre problème est local sur E, ce qui permet de supposer que $H = H^1 + H^2$, où H^1 est continue et p. s. h., et H^2 est C^∞ avec une forme de Levi définie positive en chaque point. Il nous suffit alors, puisque $H_r = H_r^1 + H_r^2$, que H_r^1 est p. s. h. (c'est-à-dire sousharmonique sur chaque droite complexe de $H(\bar{U}, E)$), et que H_r^2 est C^∞ et a une forme de Levi définie positive en chaque point.

Comme

$$\|H_r(f) - H_r(g)\| \leqslant \left[\int_U r(t).dt \wedge d\bar{t}\right].\sup_{\bar{U}} |H \circ f - H \circ g|,$$

la fonction H_r est continue.

Si $c : \bar{D} \to H(\bar{U}, E)$ est analytique sur $D = \{ z \in C; |z| < 1 \}$ et continue sur $\bar{D}$, on a

$$\int_{\partial D} H_r(c(z)).dz \wedge d\bar{z} = \int_{\partial D \times U} (H \circ c(z)).r(t).dt \wedge d\bar{t} \wedge dz \wedge d\bar{z}$$

et comme, pour $t \in U$ donné, la fonction $z \to H(c(z)(t))$ est sousharmonique, on obtient, grâce au théorème de Fubini :

$$\int_{\partial D} H_r(c(z)).dz \wedge d\bar{z} \geqslant \int_U (H \circ c(0)).r(t).dt \wedge dt = H_r(c(0))$$

ce qui montre que H_r (et donc H_r^1) est p. s. h. dès que H l'est.

Comme H^2 est C^∞, la fonction H_r^2 est C^∞ sur $H(\bar{U}, E)$, et sa forme de Levi est donnée par dérivation sous l'intégrale :

$$L(H_r^2)_f[df] = \int_U L(H^2)_{f(t)}[(df)(t)].r(t).dt \wedge d\bar{t}.$$

Comme r est positive continue non identiquement nulle sur U et que $L(H^2)$ est définie positive en chaque point, le second membre de l'égalité ci-dessus est une forme hermitienne définie positive (en df) sur $H(\bar{U}, E)$: si $L(H_r^2)_f[df] = 0$, on a nécessairement $L(H^2)_{f(t)}[(df)(t)].r(t) = 0$ pour chaque $t \in U$, ce qui impose $(df)(t) = 0$ pour t dans un ouvert non vide de U (l'intérieur du support de r), ce qui implique $df = 0$ par prolongement analytique. Ceci achève la démonstration.

Nous reprenons ici les notations de [Ba 1] chap. 4, § 1).

PROPOSITION 6. — *Soit Z un espace analytique réduit, et soit $(X_s)_{s \in S}$ une famille de cycles de Z, de dimension pure n, paramétrée par un espace analytique réduit S de dimension finie.*

Supposons que $X = \coprod_{s \in S} \{ s \} \times | X_s |$ soit un sous-ensemble analytique fermé de $S \times Z$, qu'il existe un ouvert V de Z tel que la famille $(X_s/V)_{s \in S}$ de cycles de V soit analytique locale, et que, pour chaque $s \in S$, l'ouvert V rencontre chaque composante irréductible de $| X_s |$.

Alors la famille $(X_s)_{s \in S}$ est analytique locale.

Démonstration. — Soit $\pi : \tilde{S} \to S$ la normalisation de S; montrons déjà que la famille $(X_{\pi(\tilde{s})})_{\tilde{s} \in \tilde{S}}$ est analytique locale. En vertu du théorème 1 (7)

(7) Nous utilisons ici la version locale du théorème 1 qui n'est pas énoncée dans [Ba 1]; nous n'utiliserons la proposition ci-dessus que pour une famille propre dans ce qui suit.

de [Ba 1] (chap. 1, § 2), il suffit de montrer qu'il existe un cycle $\tilde{X}$ de $\tilde{S}\times Z$ de dimension S-relative pure n, tel que $\tilde{X}_{\tilde{s}} = X_{\pi(\tilde{s})}$ pour $\tilde{s}\in\tilde{S}$ (où $\tilde{X}_{\tilde{s}}$ a pour support $|\tilde{X}|\cap(\{\tilde{s}\}\times Z)$, les multiplicités étant définies pour $\tilde{s}$ générique par celles des composantes irréductibles de $|\tilde{X}|$ dans $\tilde{X}$ (*voir* la démonstration du théorème 1 de [Ba 1]). Posons $|\tilde{X}| = (\pi\times id_Z)^{-1}(|X|)$, et notons par $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_m$ les composantes irréductibles de $|\tilde{X}|$. Alors chaque $\tilde{X}_i$ rencontre $\tilde{S}\times V$. Notons par $\tilde{X}_{i,1}, \ldots, \tilde{X}_{i,r(i)}$ les composantes irréductibles de $\tilde{X}_i\cap(\tilde{S}\times V)$, et soit $\sum_{i,j} n_{i,j}.\tilde{X}_{i,j}$ le cycle de $\tilde{S}\times V$ associé à la famille analytique locale $(X_{\pi(\tilde{s})}/V)_{\tilde{s}\in\tilde{S}}$ (nous avons supposé ici que les composantes irréductibles sont en nombre fini pour simplifier; on peut toujours se ramener à ce cas par localisation). On a alors $n_{i,j} = n_{i,j'}$ car génériquement sur $\tilde{S}$, $n_{i,j}$ (pour chaque j) est la multiplicité dont sont affectées les composantes irréductibles de $\tilde{X}_{\pi(\tilde{s})}$ qui sont contenues dans $\tilde{X}_i$. Posons $n_i = n_{i,j}$ et $\tilde{X} = \sum_i n_i.\tilde{X}_i$; il est alors clair que l'on a $\tilde{X}_{\tilde{s}} = X_{\pi(\tilde{s})}$ pour chaque $\tilde{s}\in\tilde{S}$ par prolongement analytique.

Considérons maintenant l'ensemble A des points $(s, z)\in|X|$ tels qu'il n'existe pas un voisinage ouvert $S'\times V_z$ de (s, z) dans $S\times Z$ pour lequel la famille $(X_s/V_z)_{s\in S'}$ soit analytique locale. Montrons que A est un sous-ensemble analytique fermé de X. Si $(s, z)\in A$, considérons une écaille E sur Z adaptée à X_s et dont le domaine contient z. Considérons l'application correspondante $f: S_1\times U\longrightarrow \mathrm{Sym}^k(B)$ où S_1 est un voisinage ouvert de s dans S. Si G est une boule ouverte de centre 0 dans $L(\mathbf{C}^p, \mathbf{C}^n)$ assez petite, on a également une application de changement de projection (*voir* [Ba 1], chap. 1) :

$$Lf:\quad G\times S_1\times U\to \mathrm{Sym}^k(B)$$

qui est analytique sur $G\times(S_1-\Sigma)\times U$, où Σ désigne l'ensemble des points non normaux de S, et continue sur $G\times S_1\times U$ (car notre hypothèse implique la continuité de la famille $(X_s)_{s\in S}$). Elle est donc méromorphe et continue. Un point (s_1, z_1) de $|X|$ assez voisin de (s, z) sera dans A si, et seulement si, pour tout $u\in G$, sa projection parallèlement à $t-u(x) = 0$ dans E sur $\{u\}\times\{s_1\}\times U$ est dans l'ensemble polaire de Lf, qui est analytique fermé. Ceci nous donne des équations analytiques locales de A.

Comme de plus $A\cap(S\times V) = \emptyset$, pour chaque $s\in S$, $A\cap(\{s\}\times Z)$ est d'intérieur vide dans $|X_s|$. Une modification triviale du critère qui termine le chapitre 4 (§ 1, de [Ba 1]) permet alors de conclure.

Nous utiliserons dans ce qui suit la terminologie de [Ba 1] (chap. 3, § 4).

COROLLAIRE 6. — *Soit Z un espace analytique réduit de dimension finie. Soit $X \in \mathscr{C}_n(Z)$, et soient $\bar{E}_1, \ldots, \bar{E}_m$ des écailles doubles sur Z adaptées à X; on suppose que la réunion des centres des $\bar{E}_i$ rencontre chaque composante irréductible de $|X|$. Considérons l'ouvert $W = \{ Y \in \mathscr{C}_n(Z);$ $\forall i \in [1, m]$, $\bar{E}_i$ est adaptée à Y, et l'on a $\deg_{E_i}(Y) = \deg_{E_i}(X) = k_i \}$ et l'application naturelle*

$$\lambda: \quad W \to \textstyle\prod_{i=1}^{m} \mathscr{G}_{ki}(\bar{E}_i).$$

Alors λ est un isomorphisme analytique d'un voisinage W' de X dans W sur un sous-ensemble analytique localement fermé de $\prod_{i=1}^{m} \mathscr{G}_{k_i}(\bar{E}_i)$ de dimension finie.

Démonstration. — Il est clair que λ est injectif au voisinage de X, ce qui permet de trouver, d'après [M], un voisinage ouvert W' de X dans W tel que λ/W' soit un homéomorphisme (analytique) de W' sur $S = \lambda(W')$, qui est un sous-ensemble analytique localement fermé de $\prod_{i=1}^{m} \mathscr{G}_{k_i}(\bar{E}_i)$ de dimension finie. Le problème est de montrer que l'application $\lambda^{-1} : S \to W'$ est analytique. Or la famille $(\lambda^{-1}(s))_{s \in S}$ de cycles compacts de Z paramétrée par S vérifie les hypothèses de la proposition précédente; en en effet, $\coprod_{s \in S} \{ s \} \times |\lambda^{-1}(s)|$ est l'image directe par $\lambda \times id_Z$ qui est finie (c'est un homéomorphisme analytique) du support de la famille universelle restreinte à W'. La famille $(\lambda^{-1}(s))_{s \in S}$ est donc analytique, ce qui montre, d'après la propriété universelle de $\mathscr{C}_n(Z)$, que l'application $\lambda^{-1} : S \to W'$ est analytique; ceci achève la démonstration.

Remarque. — Pour que le morphisme associé à la famille $(X_s)_{s \in S}$ dans l'écaille double $\bar{E}_i$ soit isotrope, il suffit que, pour un ensemble fini bien choisi $\{ u_1, \ldots, u_N \} \subset G$, la restriction de Lf à $\{ u_j \} \times S_1 \times U$ soit analytique pour $j = 1, 2, \ldots, N$. Si $E_{i,j}$ est l'écaille simple construite à partir de E_i à l'aide de la projection déduite de u_j (c'est-à-dire la projection parallèle à $t - u_j(x) = 0$; donc si $\bar{E}_i = (U_i, U'_N, B_i, r_i)$, on a $E_{i,j} = (U_i, B_i, \sigma_j \circ r_i)$, où σ_j envoie (t, x) sur $(t - u_j(x), x)$)), on a un plongement localement fermé de W' dans $\prod_{i,j} \mathscr{G}_{k_i}(E_{i,j})$, où $\mathscr{G}_{k_i}(E_{i,j})$ désigne le sous-ensemble analytique (banachique) de $H(\bar{U}_i, \mathrm{Sym}^{k_i}(B_i))$ formé des revêtements ramifiés contenus dans $\sigma_j \circ r_i(Z)$.

Une fonction continue fortement p. s. h. sur le produit des espaces de Banach dans lesquels nous avons réalisé les $\mathscr{G}_{k_i}(E_{i,j})$ (qui sont de la forme $H(\bar{U}_i, \oplus_1^{k_i} S_h(\mathbf{C}^{p_i})))$ induira donc une fonction continue fortement 0-convexe sur W'.

PROPOSITION 7. — *Soit X_0 un cycle analytique compact de dimension pure n de Z, et soient $E_1, \ldots, E_N$ des écailles sur Z adaptées à X_0 telles que chaque composante irréductible de $|X_0|$ rencontre le domaine d'au moins une de ces écailles. Posons $E_i = (j_i, U_i, B_i)$ et soient $r_i \in C_c^\infty(U_i)$ des fonctions positives, non identiquement nulles. Soit w_i la forme volume sur U_i (relativement à un choix de coordonnées), et h_i une norme hermitienne sur B_i.*

Soit S un voisinage ouvert de X_0 dans $\mathscr{C}_n(Z)$ assez petit pour que chaque écaille E_i soit adaptée à chaque $Y \in S$, et que la restriction de la famille universelle à S définissent une famille analytique de revêtements ramifiés dans chacune des écailles E_i. Supposons enfin que l'application

$$S \to \textstyle\prod_i H(\bar{U}_i, \mathrm{Sym}^{k_i}(B_i))$$

soit un plongement localement fermé.

Alors la fonction $F : S \to \mathbf{R}^+$ définie par $X \to \int_X \varphi$ est fortement 0-convexe sur S, où $\varphi = \sum_i j_i^* (r_i . h_i . w_i)$.

Démonstration. — Pour chaque i, notons $E_i = \bigoplus_1^{k_i} S_h(\mathbf{C}^{p_i})$, où $k_i = \deg_{E_i}(X_0)$, et où p_i est la dimension de B_i.

D'après le corollaire de la proposition 4, on peut trouver une fonction C^2 fortement p. s. h. sur E_i induisant la fonction $(x_1, \ldots, x_{k_i}) \to \Sigma\, h_i(x_j)$ sur $\mathrm{Sym}^{k_i}(B_i)$ (en fait la fonction que l'on a construit sur E_i dans la démonstration du corollaire est une norme hermitienne !). On déduit alors de la proposition 5 que l'on peut induire la fonction F sur S par une fonction continue fortement p. s. h. sur le produit des espaces de Banach $\prod_i H(\bar{U}_i, E_i)$. Le théorème d'enfermabilité de [M] permet alors de conclure que F est fortement 0-convexe sur S.

On déduit immédiatement de ce résultat le théorème suivant, qui était l'objectif de ce paragraphe.

THÉORÈME 3. — *Soit Z un espace analytique réduit de dimension finie, et soit φ une forme différentielle C^2, réelle, de type (n, n) sur Z. On suppose $id'\,d''\varphi \geqslant 0$ (large) sur Z (au sens de* LELONG*), et $id'\,d''\varphi > 0$ (strict) sur l'ouvert U de Z. Alors la fonction $F_\varphi : \mathscr{C}_n(Z) \to \mathbf{R}$, donnée par $F_\varphi(X) = \int_X \varphi$, est fortement p. s. h. en chaque $X \in \mathscr{C}_n(Z)$ dès que chaque composantes irréductibles de $|X|$ rencontre U.*

Démonstration. — Soit $X \in \mathscr{C}_n(Z)$ tel que chaque composante irréductible de $|X|$ rencontre U, et choisissons des écailles $E_1, \ldots, E_N$ sur U, adaptée à X, vérifiant les hypothèses de la proposition 7; ceci est possible d'après la proposition 6. Les h_i et les w_i étant choisis arbitrairement, choisissons les r_i de manière que l'on ait $id' d'' [\varphi - \Sigma j_i^* (r_i . h_i . w_i)] \geqslant 0$, ceci est possible car $id' d'' \varphi > 0$, et $id' d'' (r_i . h_i . w_i) = r_i . w_i . id' d'' h_i$ converge uniformément vers zéro quand r_i tend vers zéro. Si $\psi = \Sigma j_i^* (r_i . h_i . w_i)$, alors $F_{\varphi - \psi}$ est p. s. h. au voisinage de X puisque $id' d'' (\varphi - \psi) \geqslant 0$ (prop. 1), et F_ψ est fortement 0-convexe au voisinage de X d'après la proposition 7; comme on a $F_\varphi = F_{\varphi - \psi} + F_\psi$ au voisinage de X, F_φ est fortement p. s. h. au voisinage de X.

THÉORÈME 4. — *Soit Z un espace analytique complexe de dimension finie, n-complet; alors l'espace $\mathscr{C}_n(Z)$ des cycles analytiques compacts de dimension pure n de Z est* 0-*complet, c'est-à-dire Stein.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate des théorèmes 0, 1, 3 et des propositions 1 et 3.

Dans la direction de l'énoncé 2 de l'introduction, les méthodes développées plus haut ainsi que la ligne de démonstration de [N.S.] permettent de prouver les deux résultats suivants.

THÉORÈME 5. — *Soit Z un espace analytique complexe de dimension finie, et soit $f : Z \to [1, +\infty[$ une fonction C^2, propre, fortement n-convexe sur l'ouvert $f^{-1}(]1, +\infty[)$. Supposons qu'il existe un voisinage ouvert U du compact $f^{-1}(\{1\})$, et une métrique hermitienne h sur U, qui soit C^2, et vérifie*

$$id' d'' (h^{\wedge n}) \geqslant 0 \quad \text{sur } U \text{ (au sens de Lelong).}$$

Alors l'espace $\mathscr{C}_n(Z)$ est holomorphiquement convexe.

On remarquera que la condition de l'énoncé est réalisée dès que le compact $f^{-1}(\{1\})$ de Z admet un voisinage ouvert admettant une métrique kählérienne.

THÉORÈME 5'. — *Soit Z un espace analytique complexe de dimension finie, et soit $f : Z \to [1, +\infty[$ une fonction C^2, propre, fortement n-convexe sur l'ouvert $f^{-1}(]1, +\infty[)$. Soit Γ une composante connexe de $\mathscr{C}_n(Z)$. Supposons qu'il existe un voisinage U de $f^{-1}(\{1\})$, une métrique hermitienne C^2 h sur Z et une constante C tels que, pour tout $X \in \Gamma$, on ait*

$$\mathrm{vol}_h(X \cup \bar{U}) \leqslant C$$

(cette condition ne dépend pas de la métrique h choisie !). Alors Γ est holomorphiquement convexe.

Démonstration. — Les démonstrations des théorèmes 5 et 5′ suivent la démonstration de [N.S.], et il nous suffit d'exhiber dans les deux cas une fonction p. s. h. propre. Vu la nature des hypothèses, il n'est pas restrictif de supposer que $U = f^{-1}$ ([1, $1+\varepsilon$[), où ε est un réel strictement positif, assez petit.

1° Il existe une métrique hermitienne C^2 h_1 sur Z, telle que, pour tout X dans $\mathscr{C}_n(Z)$, on ait

$$\sup_{|X|}(f-3) < \mathrm{vol}_{h_1}(X \cap \{f \geqslant 1+2(\varepsilon/3)\}) + \mathrm{vol}_h(X \cap \{f \leqslant 1+2(\varepsilon/3)\}).$$

Il s'agit ici d'une variante de la proposition 2 (gonflage des cycles); en effet, n'importe quelle métrique hermitienne conviendra pour les X vérifiant $|X| \leqslant f^{-1}$ ([1, 2]). Si on suppose que la métrique h_1 convient pour les X vérifiant $|X| \subseteq f^{-1}$ ([1, m]) l'ensemble des X vérifiant $|X| \subseteq f^{-1}$ ([1, $m+1$]) pour lesquels la métrique h_1 ne conviendra pas sera un compact de $\mathscr{C}_n(Z)$ puisque les supports de ces cycles restent dans le compact f^{-1} ([1, $m+1$]) et que leurs volumes sont uniformément majorés par $m-1$. La preuve de ce premier point est alors calquée sur celle de la proposition 2.

2° Il existe une métrique hermitienne h_2 C^2 sur Z, vérifiant $h_2 \geqslant h_1$ et $id'd''f \wedge h_2^{\wedge n} > 0$ (au sens de LELONG) au voisinage de $Z-U$, disons sur f^{-1} ([$1+(\varepsilon/2)$, $+\infty$[).

3° Il existe, d'après la proposition 3, une fonction $c : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ C^2 convexe croissante, vérifiant les conditions suivantes :

(i) $c(x) = 0$ pour $x \leqslant 1+(\varepsilon/2)$;

(ii) $c(x) \geqslant 1$ pour $x \geqslant 1+2(\varepsilon/3)$;

(iii) $id'd''[(c \circ f).h_2^{\wedge n}]$ est strictement positive au sens de LELONG sur f^{-1}]$1+(\varepsilon|2)$, $+\infty$[(proposition 3).

Montrons le théorème 5 :

Soit r une fonction C^2 à support compact dans U, valant identiquement 1 sur $\{f \leqslant 1+2(\varepsilon/3)\}$; pour $a \in \mathbf{R}^+$ assez petit, la forme différentielle C^2 réelle de type (n, n) :

$$\varphi = a.r.h^{\wedge n} + (c \circ f).h_2^{\wedge n}$$

vérifiera $id'd''\varphi \geqslant 0$ sur Z, et donnera donc par intégration une fonction p. s. h. sur $\mathscr{C}_n(Z)$. Montrons qu'elle sera propre : si $\int_X \varphi \leqslant M$, on aura (puisque $c \circ f \geqslant 1$ sur $\{f \geqslant 1+2(\varepsilon/3)\}$ et $r = 1$ sur $\{f \leqslant 1+2(\varepsilon/3)\}$) :

$$\mathrm{vol}_h(X \cap \{f \leqslant 1+2(\varepsilon/3)\}) \leqslant C/a \quad \text{et} \quad \mathrm{vol}_{h_2}(X \cap \{f \geqslant 1+2(\varepsilon/3)\}) \leqslant C,$$

ce qui montre que le volume de X est uniformément majoré et que le support de X reste dans le compact $f^{-1}([1, C/(a+3)])$, d'où la propreté cherchée d'après le théorème 2.

Montrons le théorème 5' :

La forme différentielle $(c \circ f).h_2^{\wedge n}$ donne par intégration une fonction p. s. h. sur $\mathscr{C}_n(Z)$, et il nous suffit de prouver que sa restriction à Γ est propre; ceci résulte de l'hypothèse que l'on a faite sur Γ et du choix de h_2, d'après le théorème 2.

BIBLIOGRAPHIE

[A.G.] ANDREOTTI (A.) et GRAUERT (H.). — Théorèmes de finitudes pour la cohomologie des espaces complexes, *Bull. Soc. math. France*, t. 90, 1962, p. 193-259.

[A.N.1] ANDREOTTI (A.) et NORGUET (F.). — Problème de Levi et convexité holomorphe pour les classes de cohomologie, *Ann. Scuola sup. Pisa*, Série 3, t. 20, 1966, p. 197-242.

[A.N.2] ANDREOTTI (A.) et NORGUET (F.). — La convexité holomorphe dans l'espace analytique des cycles d'une variété algébrique, *Ann. Scuola sup. Pisa*, Série 3, t. 21, 1967, p. 31-82.

[Ba 1] BARLET (D.). — Espace analytique réduit des cycles analytiques complexes compacts d'un espace analytique complexe de dimension finie, « *Séminaire F. Norguet : Fonctions de plusieurs variables complexes* », 1974/1975, exposé n° 1, 158 p. — Berlin, Springer-Verlag, 1975 (*Lecture Notes in Mathematics*, 482).

[Ba 2] BARLET (D.). — *Familles analytiques de cycles et classes fondamentales relatives* (à paraître).

[Bi] BISHOP (E.). — Condition for the analyticity of certains sets, *Michigan math. J.*, t. 11, 1964, p. 289-304.

[Le] LELONG (P.). — Intégration sur un ensemble analytique complexe, *Bull. Soc. math. France*, t. 85, 1957, p. 239-262.

[Li] LIEBERMAN (D.). — *Compactness of the Chow scheme : application to automorphisms and deformations of Kahler manifolds* (à paraître).

[M] MAZET (P.). — Un théorème d'image directe propre, *Séminaire P. Lelong: Analyse*, 1972/1973, exposé n° 10, 17 p. — Berlin, Springer-Verlag, 1974 (*Lecture Notes in Mathematics*, 410).

[N.S.] NORGUET (F.) and SIU (Y. T.). — Holomorphic convexity of spaces of cycles *Bull. Soc. math. France*, t. 105, 1977, p. 191-223.

[S] ŠAFAREVIČ (I. R.). — *Basic algebraic geometry*. — Berlin, Springer-Verlag, 1974 (*Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 213).

(Texte reçu le 26 novembre 1977.)

Daniel BARLET,
Institut Elie-Cartan,
Université de Nancy-I,
Case officielle 140,
54037 Nancy Cedex.